|  |  |
| --- | --- |
| §5 解题探索  教学目的 通过教学，帮助学生较系统地掌握二次型的基础理论与基本方法，以提高分析问题的能力．  教学内容  本节除围绕合同化简、惯性定理及正定性问题作解题探索外，也注意探索与此相关的行列式不等式问题的解题．  5.1 合同化简•惯性定理  例1 设数域*F*上二次型(其中*aij*=*aji*)的秩是  *n*−1，且  ．  证明，存在*F*上非退化线性替换，将化成．  证令，只需证明≈．因为的秩是*n*−1，所以  ≈*D*1=diag都不等于零．  于是≈，且有，使  ≈≈diag．  但*A*的秩是*n*−1，所以*b*=0．故*A*与有相同的合同标准形，因而它们合同．  例**2** 设*A*是*F*上的*n*阶对称矩阵，且其秩是*r*．证明，存在*F*上的秩为*n*−*r*的对称矩阵*B*，使*AB*=0．  证 由题设知道有*n*阶可逆矩阵*P*，使得  diag都不等于零．  于是，取*B*=*P*diag，其中都是*F*上的不为0的数，则*AB*=0，且*B*是秩为*n*−*r*的对称矩阵．  例**3** 设*A*是实数域上的*n*阶对称矩阵，试求*A*与−*A*合同的充要条件．  解 设*A*的秩是*r*，正惯性指标是*p*，则在实数域上*A*合同于  ，  即存在实可逆矩阵*P*，使  ．  由此可得  ．  于是易见−*A*的秩是*r*，正惯性指标是*r*−*p*．由此知道*A*与−*A*在实数域上合同的充要条件是*p*=*r*−*p*，即2*p*=*r*．(因此，当*r*是奇数时，则*A*与−*A*不合同)．  例**4** 已知为实可逆矩阵，其中*A*1∈**R***p*×*n*．证明，二次型 的正负惯性指数分别为*p*与*n*−*p*．于是，rank*f* =*n*．  证因为  ，  所以与合同．故惯性指数一样，从而知道结论成立．  例5 设为正定实矩阵.∈**R** *n*×*k*列无关,而, 证明：1)二次型的正负惯性指数分别为*n*与*k*；2)*A*可逆．  证1) 因为  ，  由*B*正定、*N*为列满秩易见是正定的．于是    的正惯性指数为*n*，负惯性指数为*k*，故原矩阵的正、负惯性指数分别为*n*与*k*．  2)由1)知道*A*是可逆矩阵．  5.2 正定、半正定问题  例**6** 设*A*是*n*阶实对称矩阵，则rank*A*=*n*的充分且必要条件是存在*n*阶矩阵*B*，使是正定阵．  证 当rank*A*=*n*时，取*B*=*A*，则是正定的．反之，若秩*A*<*n*，则有*n*维实向量≠0，使得，于是．所以=0．因而不是正定的，矛盾．故结论正确．  例**7**  设实对称矩阵(*B*、*D*分别是*r*、*n*−*r*阶矩阵)．则*A*是正  定矩阵的充分且必要条件为都是正定的．  证 若*A*是正定的，则*B*正定．于是*B*是可逆矩阵，有    又此时*T*是正定的．所以都正定．  反之，由于上述证明过程是可逆的，所以命题正确．  例**8** 设*A*，*B*是*n*阶半正定矩阵．证明，*A*+*B*是正定矩阵的充分且必要条件为*A*、*B*的零空间之交为零，即*N*(*A*)∩．  证 设*A*+*B*是正定的，对任一非零向量*X*∈*N*(*A*)，恒有．由于*AX*=0 ，则，所以，故得*N*(*A*)∩．反之，对任一非零实列向量*X*，则由*N*(*A*)∩可知，或或，于是．又因为半正定，所以，故*A*+*B*是正定的．  例**9** 设(**R**)叫作*A*为*B*的Hadamard积．证明：1)若*A*、*B*半正定，则*C*半正定； 2)若*A*、*B*正定，则*C*正定．  证 1)由*A*，*B*对称知*C*是对称的，，则  ．  由*B*半正定知道存在使，于是  ，．  所以  =  ．  2)，，由*B*正定知，所以存在，故，即*C*是正定的．  例**10**  若*A*为半正定阵，则adj*A*也半正定．  **证** (adj*A*)′= adj*A*′=adj*A*，即adj*A*是对称矩阵．  1)当rank*A*=*n*时，则*A*正定，|*A*|>0，adj．于是由*A−*1正定知道adj*A*也正定．  2)当rank*A*=*n*−1时，则由第二章§6习题第4题知rank(adj*A*)=1，adj*A*的一阶主子式为在*A*中的代数余子式，故非负．若均为0，则由于adj*A*的对称性，adj*A*的秩必至少为2，矛盾．于是，不妨设，因而有  adj*A*．  于是，，令，则  *X*′adj*AX*=(*P*(adj*A*)*P*′)，  所以adj*A*为半正定的．  3) 当rnak*A*=≤*n−*2时，则adj*A*=0，当然是半正定的．  5.3 行列式不等式  例**11** 设*A*是*n*阶正定矩阵**,** *B*是*n*阶半正定矩阵．证明**,** |*A*+*B*|≥|*A*|+|*B*|；并且此不等式取等号，当且仅当*B*=0或*n*=1．  证 由*A*正定可设有可逆矩阵*P*，使，所以  ，  ．  又因为半正定，设，则  **,**  其中是*C*的所有*i*阶主子式的和，因为是半正定的，所以它的主子式≥0，因此  ．  故．由此可得  ．  当*B*=0时，|*A*+*B*|=|*A*|+|*B*|显然成立，当*B*≠0时，显然，于是有一个，此时*C*的1阶主子式不能都为零，否则  ，  与*C*半正定矛盾．于是*C*≠0便有  ，即|*A*+*B*|>|*A*|+|*B*|．  对于*n*=1情形，结论显然成立．  **例12**  设    是*n*阶正定阵，是阶主子阵，*i*=1，2，…，*s*．证明，必有  ； ①  且等号成立的充分且必要条件是．  证 对*s*用数学归纳法证明．当*s*=1．结论显然正确，今将*A*重新分块为：  ，  其中  ，．  因是*A*的一个顺序主子阵．故它是正定矩阵．取，则  ．  由例7知道是正定矩阵．又是正定阵，是半正定阵．于是当*B*≠0时，由例11知  ．  故得．于是**,** 对任意的*B*，由分块矩阵行列式的Schur公式有  ； ②  且等号成立的充分且必要条件是．又由归纳法假设  ； ③  且等号成立的充分且必要条件是．所以由②、③两式即得①式．  作为例12的一个特例，则得  对于任何正定矩阵，必有  ； ④  且等号成立的充分且必要条件是*A*为对角矩阵．  由④式得到  例**13** 设*A*是任意*n*阶实矩阵，则  ， ⑤  ． ⑥  ⑤、⑥两式统称为**Hadamard**不等式．  证 若证得⑤式，则应用，即得⑥式，故只需证⑤式即可．  当*A*是奇异阵时，|*A*|=0，⑤式自然成立．故就*A*是非异阵的情形证明之．因为*A*非奇异，所以是正定矩阵，设，则由④式，有    ．  但，将它代入上式即得⑤式．  注 Hadamard不等式还有不少证法，其中本节习题第4题就是一种证法，请同学们思考练习．  课外作业：  P289：1；2；7． |  |