硬核 | 技术解析热门零知识证明方案 Groth16

区块链　1 年前　0　158.8k

> Groth16 是实践中使用最广泛的 zkSNARK，其 Verifier 性能快，证明字符串短，缺点是需要对每个电路都执行一次可信初始化。

原文标题：《一起了解最热门的 zkSNARK 方案——零知识证明引论（三）》

撰文：Cyte

在之前的文章中，我们介绍了零知识证明的 基础概念 以及构造 zkSNARK 的 基本思想和方法。从本文开始，我们将逐一介绍目前最热门的 zkSNARK 方案。文章旨在让读者理解这些方案的基本原理。为了方便叙述并容易理解，在叙述方案时，我们会做一些简化处理，重在传达方案的核心思想。

本文介绍的是 Groth16 方案。Groth16 方案，顾名思义，就是 Groth 在 2016 年发表的一篇论文 [Gro16] 中提出的方案。目前为止，Groth16 是在实践中使用最广泛的 zkSNARK (没有之一)。特别一提的，Zcash 目前使用的 zkSNARK 方案就是 Groth16。从性能上，Groth16 的 Verifier 性能是所有 zkSNARK 中最快的，其证明字符串也是最短的。

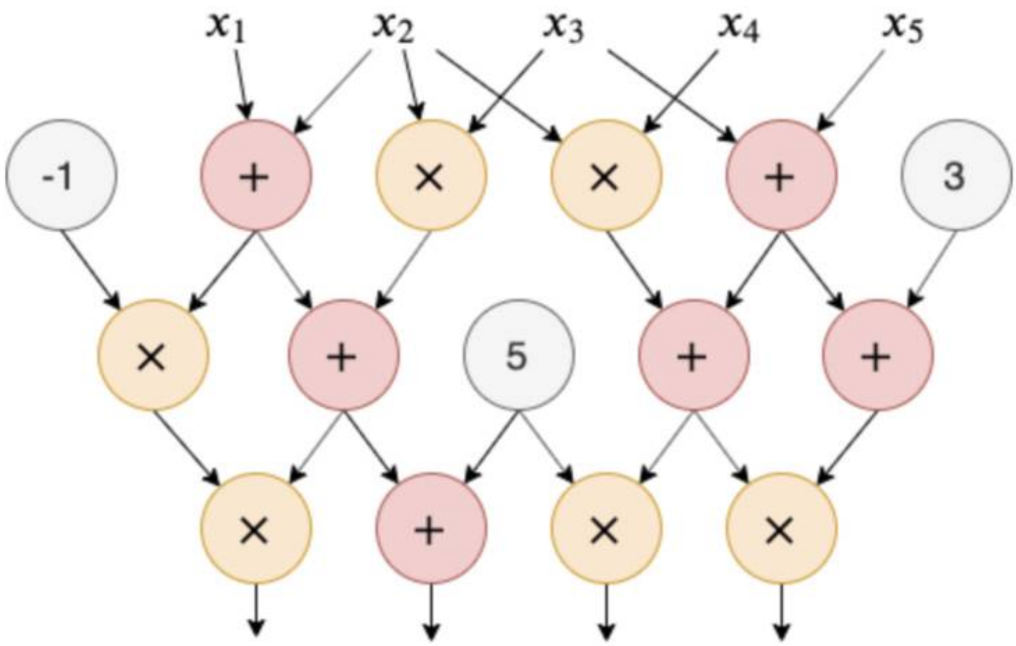
而 Groth16 的最大缺点就是它需要对每个电路都执行一次可信初始化。

在介绍 Groth16 之前，简单回顾一下 zkSNARK 所要解决的问题。我们称这个问题为「计算验证问题」。

计算验证问题

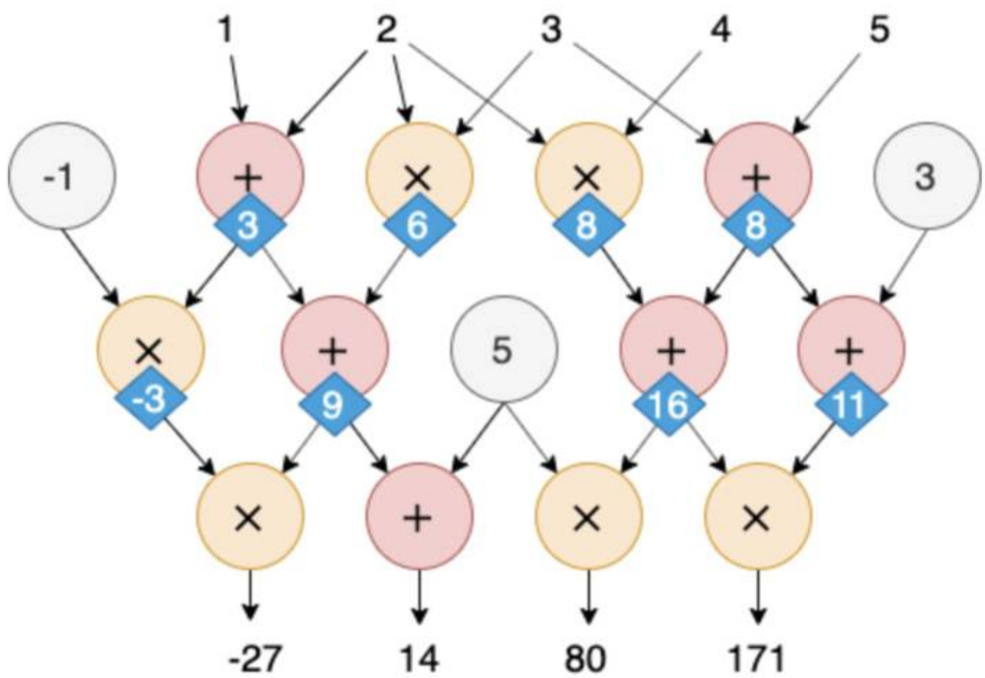
任何计算都可以描述为一个算术电路。一个算术电路可以对数字进行算术运算。电路由加法门、乘法门以及一些常数门组成，如下图所示：

门以及一些常数门组成，如下图所示：

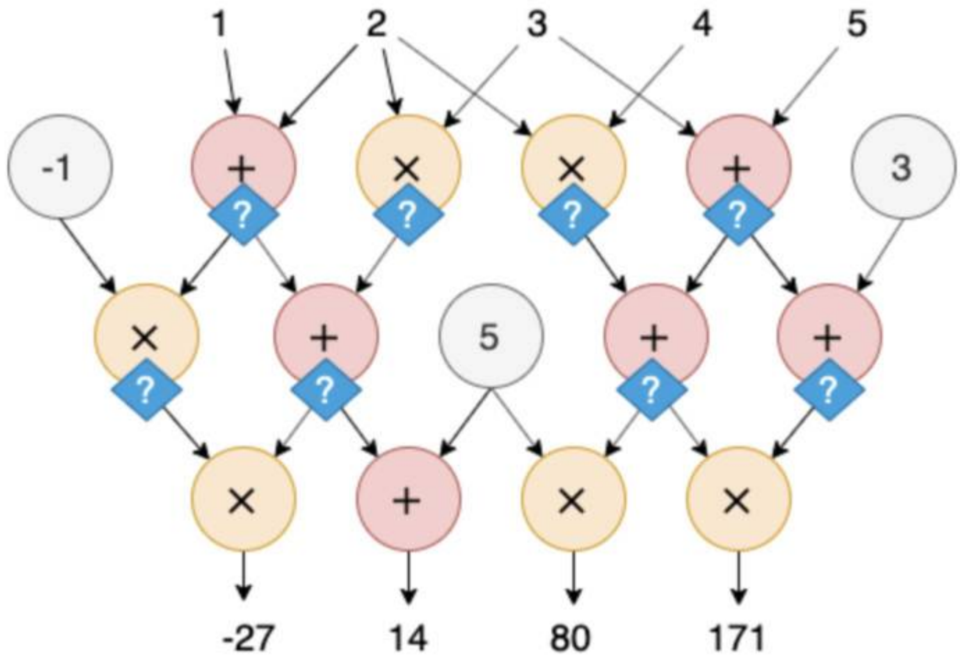


这个例子中的电路包含了 15 个门。这个电路所描述的计算过程需要输入五个数字 x1 到 x5，输出四个数字。

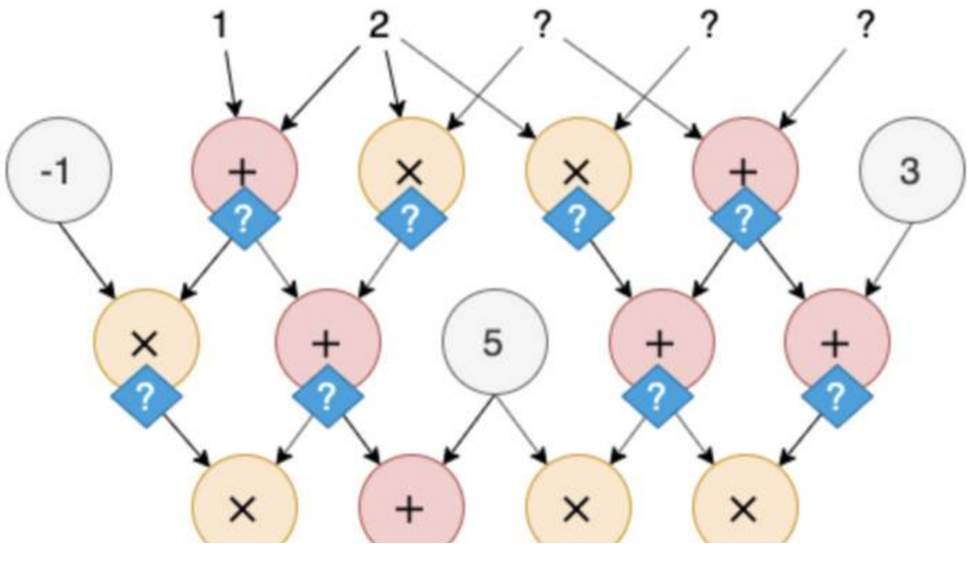
给定一组输入的数字，需要把这个电路中的每个门都计算一遍，才能计算出这个电路的输出。在这个例子中，如果输入是 (1,2,3,4,5)，则电路的输出为 (-27,14,80,171)，如下图所示：



计算验证问题是指，如果一个验证者——不妨叫做 Verifier——只拿到了电路的一组输入和输出，如这个例子中的 (1,2,3,4,5) 和 (-27,14,80,171) ，它该如何验证这是一对合法的输入和输出呢？最简单粗暴的方法就是把这个输入重新扔进电路算一遍。如果电路很大的话，这个验证方法最大的缺点就是效率问题。



有些场景下，效率还不是唯一的问题。例如，输入可能包含 Verifier 不能知道的秘密信息。假设上例中的 (3,4,5) 是秘密输入，Verifier 只能看到 (1,2) ，如下图所示。此时 Verifier 要验证的问题就变成了「是否存在 (?,?,?) 使得电路在输入 (1,2,?,?,?) 的时候的输出是 (-27,14,80,171) 」。这个场景下，即使是简单粗暴的重新计算也不再可行。



一句话概括计算验证问题：Verifier 能否在不知道秘密输入的情况下，高效地验证计算结果？

从电路到 R1CS 问题

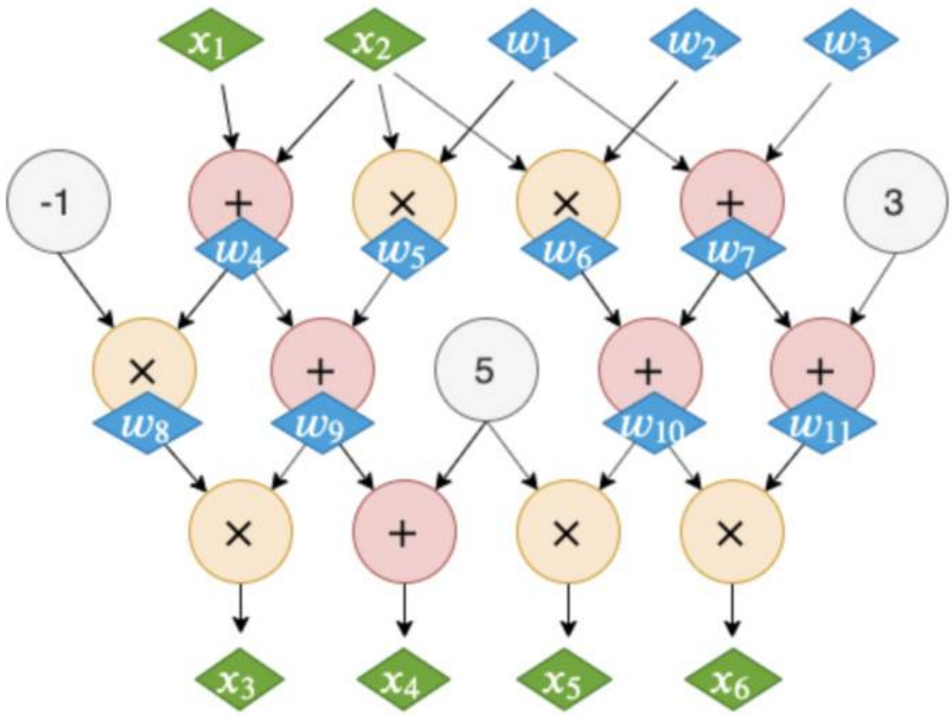
一个 zkSNARK 就是对上述问题的一个解决方案。使用 zkSNARK，一个证明者，叫做 Prover，可以为计算过程生成一个简短的证明字符串。Verifier 读取这个字符串，就可以判断给定的公开输入和输出是否合法。

Groth16 是众多 zkSNARK 构造方案中的一种。接下来，我们介绍 Groth16 是怎么解决计算验证问题的。

首先，我们重新审视一下 Verifier 的任务：我们只知道电路的前两个输入是 (1,2)，我们的目标是要判断是否存在一组合法的秘密输入，使得电路的输出是 (-27,14,80,171)。如果我们换个角度看这个问题，它其实可以描述为：给一个电路，上面有些空格可以填数字，有些空格已经填上了数字，请问是否存在一种填法，能够同时满足每个门的逻辑？

从这个新的角度，计算验证问题被转换成了一个类似于数独那样的填数字游戏：有一些空格，一部分已经填上，请你填上另外一些空格，满足一些限制条件。

接下来，我们再把这个填数字游戏变成一个数学问题。这个转换其实就是列方程，用到的是小学时就学过的技巧：如果你想要求出一个数字，就把它设为 x。只不过，遵循零知识证明领域的规范，这里我们把没有填的空格命名为变量 $w_1, \cdots, w_m$，而把已经知道的空格命名为变量 $x_1, \cdots, x_n$。如下图所示，我们把值已经公开的空格标记为绿色，待求的空格标记为蓝色：



然后，我们为每一个要满足的条件列一个方程。这里，每个要满足的条件其实就是一个门的逻辑：加法门的输出等于两个输入之和，乘法门的输出等于两个输入之积。于是，原来的填空游戏就变成了一个多元方程组。上述例子转化得到的方程组如下：

$$
\begin{aligned}
w_4 &= x_1 + x_2 \\
w_5 &= x_2 \times w_1 \\
w_6 &= x_2 \times w_2 \\
&\cdots \\
x_3 &= w_8 \times w_9 \\
x_4 &= w_9 + 5 \\
x_5 &= 5 + w_{10} \\
x_6 &= w_{10} \times w_{11}
\end{aligned}
$$

最后，我们对这个方程做一些整理，使得它能够写成矩阵和向量的形式，更加整齐和简洁。我们把每

个方程都写成 * = * x * 的模式。尽管并不是所有方程中都有乘法，但我们可以给没有乘法的式子乘上一个 。于是方程组变成了下面这个样子：

$$
\begin{aligned}
w_4 &= (x_1 + x_2) \times 1 \\
w_5 &= x_2 \times w_1 \\
w_6 &= x_2 \times w_2 \\
&\cdots \\
x_3 &= w_8 \times w_9 \\
x_4 &= (w_9 + 5) \times 1 \\
x_5 &= (5 + w_{10}) \times 1 \\
x_6 &= w_{10} \times w_{11}
\end{aligned}
$$

此时，每个 $*$ 中都只包含加法，而不包含乘法。确切地说，每个 $*$ 都是若干变量的相加，有时可能会加上一个常数。更进一步地说，每个 $*$ 都是所有变量 $x_1, \cdots, x_n, w_1, \cdots, w_m$ 和常数 1 的线性组合。于是，设向量 $\vec{z} = (1, x_1, x_2, \cdots, w_{11})$ 为所有变量以及常数 1 组成的向量。那么，每个 $*$ 都是 $\vec{z}$ 与另外一个常向量的内积。例如，$x_1 + x_2 = \langle (0, 1, 1, 0, \cdots, 0), \vec{z} \rangle$，这里用 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示内积。于是，每个方程都可以写成 $\langle \vec{c}_i, \vec{z} \rangle = \langle \vec{a}_i, \vec{z} \rangle \times \langle \vec{b}_i, \vec{z} \rangle$ 的形式，其中 $\vec{a}_i$，$\vec{b}_i$ 和 $\vec{c}_i$ 是方程组中第 i 个方程对应的三个常向量。

把所有方程合到一起，就得到了原方程组的矩阵表示

$$A\vec{z} \circ B\vec{z} = C\vec{z}$$

其中 A 的行向量就是所有的 $\vec{a}_i$，矩阵 B 和 C 也类似。这里 $\circ$ 表示向量的逐项相乘。这三个矩阵 A, B, C 的值完全取决于电路的结构。

我们把最终得到的这个矩阵向量方程叫做一个 Rank-1 Constraint System (R1CS)。

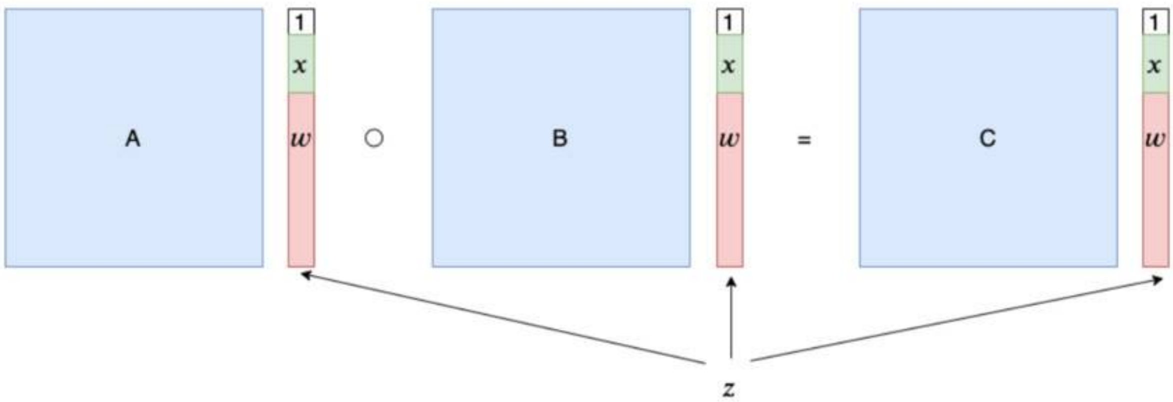
> 至于名字中的 "Rank-1" 是怎么来的，如果你感兴趣的话，可以这么理解。每个方程

> $\langle \vec{c}_i, \vec{z} \rangle = \langle \vec{a}_i, \vec{z} \rangle \times \langle \vec{b}_i, \vec{z} \rangle$ 的等号右侧可以写成 $\vec{z}^T (\vec{a}_i \vec{b}_i^T) \vec{z}$，其中 $\vec{a}_i \vec{b}_i^T$ 就是一个秩为 1 的矩阵。

总结一下，这一节中我们把计算验证问题转化成了数学问题 R1CS。

在计算验证问题中，Verifier 知道一个电路，拿到公开部分的输入，以及电路的输出，判断它们是否合法。

而在 R1CS 问题中，Verifier 知道三个矩阵 A, B, C，并拿到向量 $\vec{z}$ 的一个前缀，判断是否存在一个完整的 $\vec{z}$，满足 $A\vec{z} \circ B\vec{z} = C\vec{z}$。

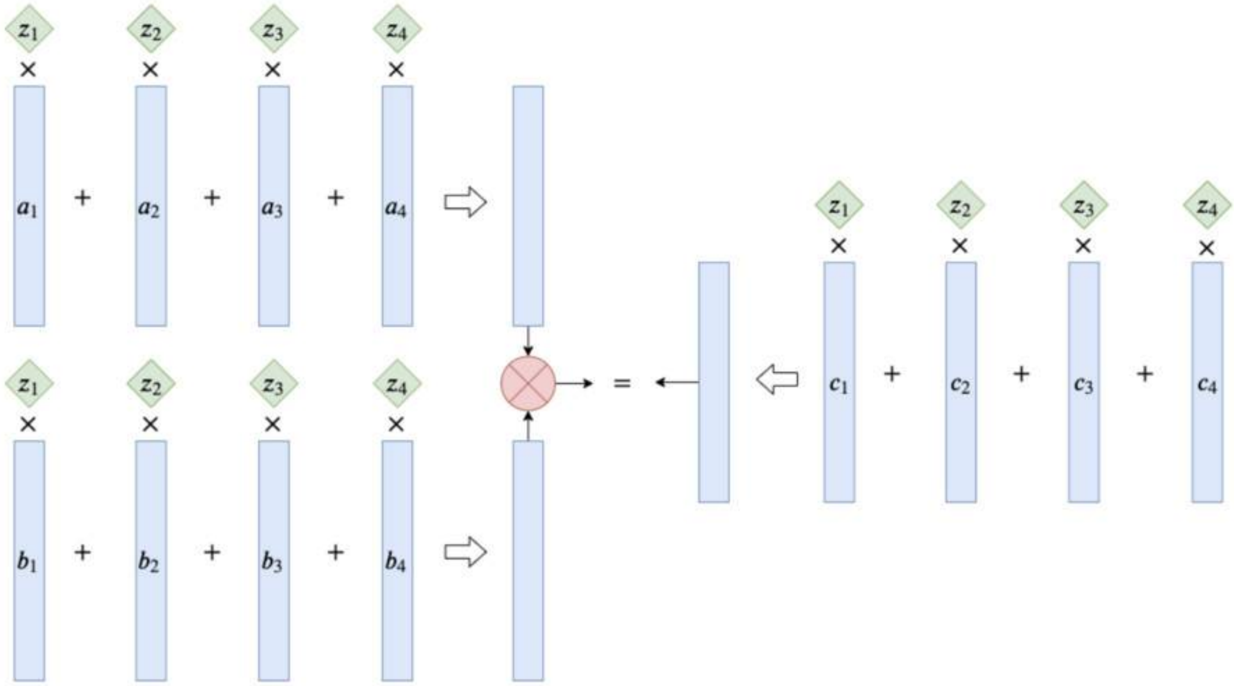


从 R1CS 问题到 QAP 问题

在零知识证明领域，R1CS 基本上就是电路的代名词。许多 zkSNARK 把 R1CS 问题作为目标问题。不过，大部分 zkSNARK 不会直接对 R1CS 下手，而是把 R1CS 问题继续转化，得到一个等价的多项式问题，再对这个多项式问题设计证明方案。Groth16 也不例外。不同的 zkSNARK 选择的多项式问题各不相同，Groth16 选择的是一个叫做 **Quadratic Arithmetic Programming (QAP)**的问题。

这一节中介绍一下怎样把 R1CS 问题转化为等价的 QAP 问题。

首先，把矩阵和向量的乘积看做对矩阵的列向量的线性组合，这个线性组合的系数由被乘的向量决定。从这个角度看，R1CS 问题就是：给定三个向量集合 (也就是 A, B, C 的列向量)，判断是否存在一个线性组合 (也就是 $\vec{z}$)，使得 A, B 的列向量分别组合起来 (也就是 $A\vec{z}, B\vec{z}$)，逐项乘积等于 C 的列向量的组合 (也就是 $C\vec{z}$)。如下图所示



然后，我们把这些列向量换成多项式，使得多项式方程和原先的向量方程等价。

把向量转化成多项式的一种方式是使用多项式插值。

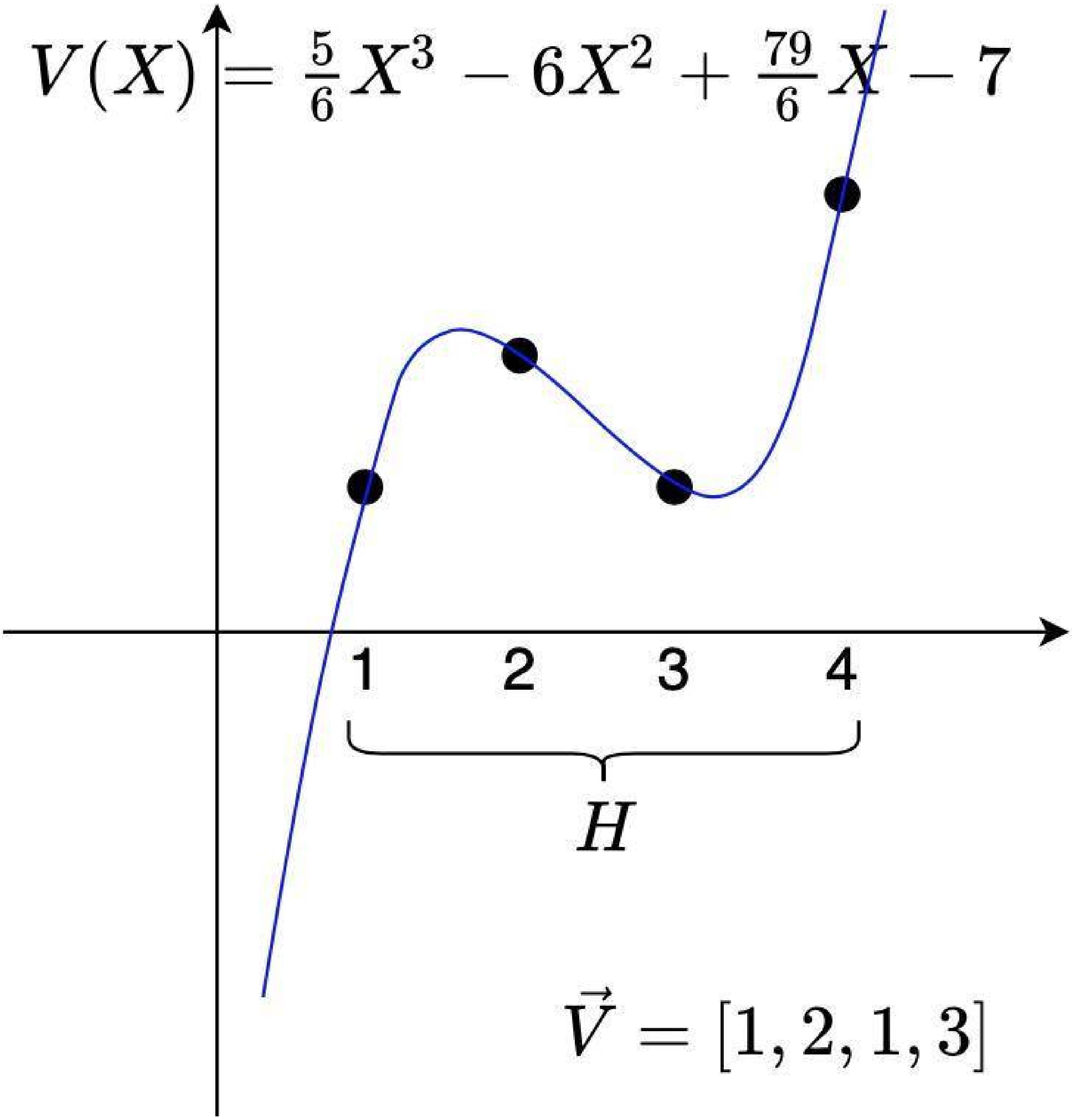
多项式插值

多项式插值可以把向量（例如 $\vec{v} = (v_1, \cdots, v_d)$）转化成多项式 $f(X)$，使得 $f(X)$ 在一个点集（例如 $\{r_1, \cdots, r_d\}$）上面的取值刚好是 $\vec{v}$，也就是说 $v_1 = f(r_1), \cdots, v_d = f(r_d)$。我们称 $f(X)$ 是 $\vec{v}$ 在插值域 $\{r_1, \cdots, r_d\}$ 上的多项式插值。

给定一个插值域 $\{r_1, \cdots, r_d\}$，向量 $\vec{v}$ 可以插值为很多不同的多项式。不过，其中次数低于 d 的多项式有且仅有一个。如果不特别说明，当我们说起 $\vec{v}$ 的多项式插值时，默认说的就是这个唯一的次数低于 d 的多项式。

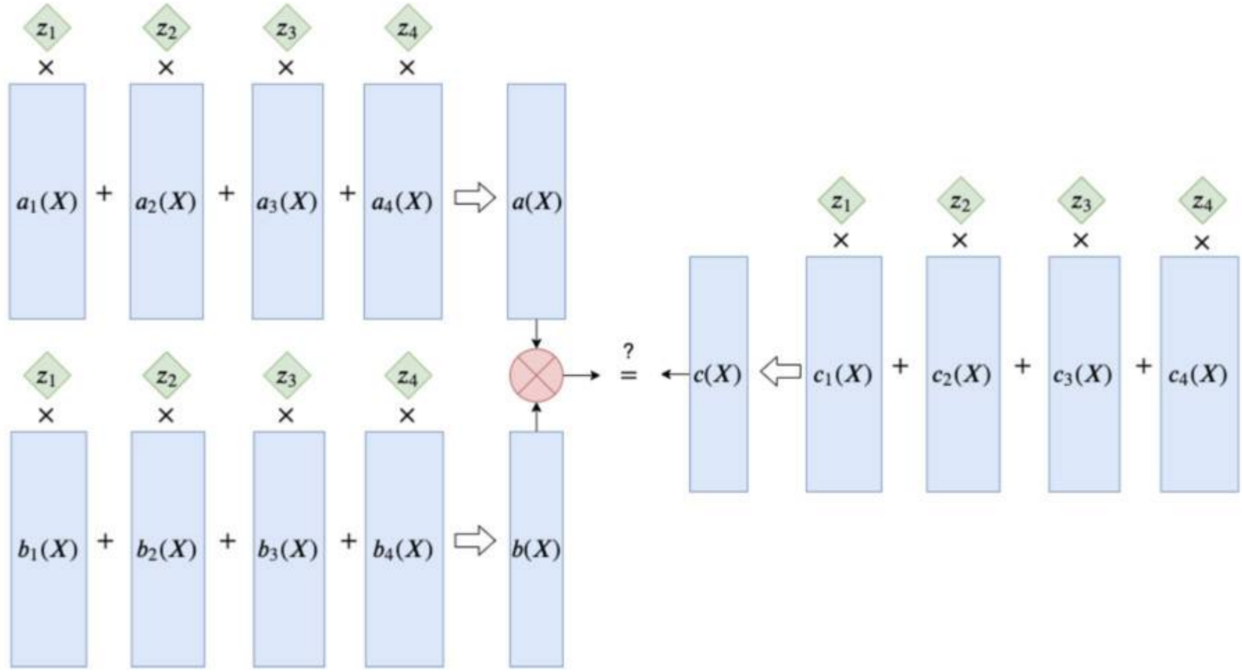
很容易看出，多项式插值是线性的，也就是说，如果 $v(X)$ 和 $w(X)$ 分别是 $\vec{v}$ 和 $\vec{w}$ 的多项式插值，那么对任意的数字 s 和 t，$s \cdot v(X) + t \cdot w(X)$ 也是 $s \cdot \vec{v} + t \cdot \vec{w}$ 的线性插值。

现在，我们直接把 R1CS 矩阵中的列向量换成它们的多项式插值，得到的结果如下图所示。



QAP 问题

现在，我们直接把 R1CS 矩阵中的列向量换成它们的多项式插值，得到的结果如下图所示。



因为多项式插值是线性的，把各个矩阵的列向量插值得到的多项式经过 $\vec{z}$ 线性组合之后，得到的 $a(X), b(X)$ 和 $c(X)$，就是向量 $A\vec{z}, B\vec{z}$ 和 $C\vec{z}$ 各自的多项式插值。

在 R1CS 问题中，我们要求 $A\vec{z} \circ B\vec{z} = C\vec{z}$，这等价于说对插值域中的每个 $r_i \in \{r_1, \cdots, r_d\}$，$a(r_i) \cdot b(r_i) = c(r_i)$。注意，这并不等于说多项式方程 $a(X) \cdot b(X) = c(X)$ 成立。实际上，因为 $a(X) \cdot b(X)$ 的次数比 $c(X)$ 更高，它们并不相等。我们只能推出，$r_1, \cdots, r_d$ 都是多项式 $a(X) \cdot b(X) - c(X)$ 的根。这等价于多项式 $t(X) = (X - r_1) \cdots (X - r_d)$ 整除 $a(X) \cdot b(X) - c(X)$。

总结一下，一个 QAP 包含如下信息

1. 三个多项式集合 $\vec{A}(X) = a_1(X), \cdots, a_m(X)$, $\vec{B} = b_1(X), \cdots, b_m(X)$ 和 $\vec{C}(X) = c_1(X), \cdots, c_m(X)$，其中每个多项式次数都小于$d$
2. 一个 d 次多项式$t(X)$

有了一个 QAP 之后，我们说一个 QAP 问题是指，给定 $\vec{z}$ 的长度为 n 的前缀，判断是否存在 $\vec{z}$ 的完整赋值，使得下面的多项式被 $t(X)$ 整除

$$\left(\sum_{i=1}^{m} z_i a_i(X)\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{m} z_i b_i(X)\right) - \left(\sum_{i=1}^{m} z_i c_i(X)\right)$$

我们用一个表格总结一下上文中提到的所有问题。

	固定信息	已知信息	秘密信息	满足条件
电路	电路 C	电路的部分输入以及输出	电路所有线路上的值	所有门的逻辑
R1CS	矩阵 A, B, C	$\vec{z}$ 的前缀	完整的 $\vec{z}$	
QAP	多项式集合 $\vec{A}(X), \vec{B}(X), \vec{C}(X)$ 以及 $t(X)$	$\vec{z}$ 的前缀	完整的 $\vec{z}$	$t(X)$ 整除由 $\vec{A}(X), \vec{B}(X), \vec{C}(X), \vec{z}$ 计算得到的一个很复杂的多项式

为什么要越搞越复杂，把电路问题转化为 QAP 问题呢？一个简单的回答：就是为了引入多项式！多项式是一个强大的工具。多项式的作用，可以理解为一个「杠杆」，或者叫「误差放大器」。如果我们要检查两个长度为 10000 的向量是否相等，一定需要检查 10000 次，哪怕检查过了 9999 个点都是一样的，也不能保证最后一点是相同的。而两个 10000 次的多项式，哪怕非常接近，比如说它们的系数有 9999 个都相同，或者它们在 这些点上的取值都相等，但只要有一个点不同，这两个多项式就截然不同。这意味着，如果在一个很大的范围内，例如 到 当中均匀随机选一个点，两个不同的多项式在这个点上相等的机会只有 。检查两个多项式是否相等，比检查同样规模的向量要快得多，这几乎是所有 zkSNARK 提高 Verifier 效率的根本原理。

为 QAP 问题构造 zkSNARK

QAP 问题就是 Groth16 要用来构造 zkSNARK 的最终问题了。不过，在解释 Groth16 的构造细节之前，我们先准备一些工具。

准备工具

我们假设读者对椭圆曲线群的基本特性和应用有所了解，并采用加法群的记号来描述椭圆曲线群中的点和运算。椭圆曲线群中的元素可以用来表示多项式，并限制 Prover 必须使用给定的多项式来进行线性组合。这正是 QAP 所需要用到的特性。

线性组合。这正是 QAP 所需要用到的特性。

我们看一下椭圆曲线是怎么用来表示多项式的。

KoE 假设

> 考虑一对点 P 和 Q，如果它们满足 $Q=\alpha P$，我们说 (P,Q) 是一个 α-对。根据离散对数假设，从 (P,Q) 是难以计算出 α 来的。
>
> 如果不告诉你 α，只告诉你一个 α-对 (P,Q)，请问，你要怎样制造出另一个 α-对?
>
> 一个显而易见的方法是，把 P 和 Q 同时乘上一个整数倍数 k，那么 (kP,kQ) 也是一个 α-对。
>
> 直觉告诉我们，这是从已知的 α-对产生新的 α-对的唯一方式。换句话说，如果你有能力输出一个 α-对 (P',Q')，那么，你一定“知道”一个倍数 k 使得 $P'=kP$ 以及 $Q'=kQ$。这个“知道”的含义是，你的计算过程一定“蕴含”了 k。如果把你计算 (P',Q') 的过程全部记录下来，这个记录中要么包含了 k，要么包含了一些数据，从这些数据中可以轻易地推导出 k 来。
>
> 更一般地，如果你已经有了一组 α-对，例如 $(P_1,Q_1),(P_2,Q_2),\cdots,(P_n,Q_n)$，那么产生一个新的 α-对的唯一方式，是计算它们的线性组合。也就是说，如果你输出了一个新的 α-对 (P',Q')，你必须“知道”它们之间的组合系数，即 $k_1,\cdots,k_n$ 使得 $P=k_1P_1+\cdots+k_nP_n$ 以及 $Q=k_1Q_1+\cdots+k_nQ_n$。

然而，上述直觉并不能从离散对数假设严格地证明而来。所以，只能把它作为一个新的安全性假设来用。这个假设就叫做 Knowledge-of-Exponent (KoE) 假设。

KoE 假设怎样应用到 QAP 问题上呢？那就是，KoE 允许我们使用椭圆曲线点来表示多项式，并且迫使 Prover 只能从已知的多项式线性组合产生新的多项式。

首先，怎样用椭圆曲线点表示多项式呢？假设 G 是椭圆曲线群中的一个点，x 和 α 都是秘密的数字。Prover 拿到了 $d+1$ 个 α-对：$(G,\alpha G),(xG,\alpha xG),\cdots,(x^dG,\alpha x^dG)$，那么，根据 KoE 假设，在 Prover 的计算能力范围内，它所能够产生的所有 α-对，就是这些已知的 α-对的线性组合，其关于 G 的倍数恰好是 x 的一个 d 次多项式，不妨记为 $f(x)$。

注意到，对于任意多项式 $f(x)$，它对应的 α 对是唯一的，也就是 $(f(x)G,\alpha f(x))$。但反过来，对于任何 α-对 $(P,\alpha P)$，使得 $P=f(x)G$ 的多项式 $f(x)$ 有非常多个。但是，因为 x 是秘密的，Prover 很难找出两个多项式使得它们碰撞到一个 P 上。所以，Prover 最多“知道”一个这样的多项式。这样，至少在计算意义下，一个 α-对能表示的多项式也是唯一的。

其次，KoE 可以迫使 Prover 从现有的多项式组合产生新多项式。原理也是类似的：假如已经有了一些 β-对，它们代表了一些多项式 $(a_1(x)G,\beta a_1(x)G),\cdots,(a_m(x)G,\beta a_m(x)G)$，那么，产生新的 β-对的唯一方式就是对这些多项式线性组合。

不过，到目前为止，我们忽略了两个关键问题：

关于第二个问题，一个解决方法就是**双线性配对**。

双线性配对

一个双线性配对方案包含三个大小相同的椭圆曲线群 $\mathbb{G}_1$，$\mathbb{G}_2$ 和 $\mathbb{G}_T$，以及一个能够高效计算的双线性映射：$e:\mathbb{G}_1\times\mathbb{G}_2\to\mathbb{G}_T$。双线性是指对任何 $\alpha P\in\mathbb{G}_1,\beta Q\in\mathbb{G}_2,e(\alpha P,\beta Q)=\alpha\beta\cdot e(P,Q)$.

> 双线性配对的三个群仅要求大小相同，至于是否是同一个群并没有限制。可能两两不同，某两个相同，甚至三个都相同，由此划分了 I 型，II 型和 III 型等不同种类的双线性配对方案。这些细节不在本文的讨论范围之内。

有了双线性配对，只需要知道 $\mathbb{G}_2$ 中的一个 α-对，例如 $(H,\alpha H)$，就可以验证 $\mathbb{G}_1$ 中的一个点对 (P,Q) 是否是 α-对，而无需知道 α，因为只需计算并比较 $e(P,aH)=e(Q,H)$，这等价于说 (P,Q) 是 α-对。

现在，我们已经准备好了工具：KoE 假设和双线性配对。接下来，我们就介绍 Groth16 是如何为 QAP 问题构造 zkSNARK 的。

Groth16 方案

回顾一下 QAP 问题：有三个多项式集合 $\vec{A}(X)$，$\vec{B}(X)$ 和 $\vec{C}(X)$，每个都包含 m 个不超过 $d-1$ 次的多项式，此外还有一个 d 次多项式 $t(X)$。QAP 问题的一个解为一个长度 m 的向量 $\vec{z}$。

Prover 知道 QAP 问题的解 $\vec{z}$，而 Verifier 只知道这个解的长为 n 的前缀。Prover 的目标，是向 Verifier 证明，Verifier 所知道的这 n 个数，确实是一个合法的解的前缀。

Groth16 方案包含三个算法：Setup，Prove 和 Verify。最开始，需要由一个可信第三方调用 Setup 算法产生一些公共参数，Prove 和 Verify 算法才能够运行。这个 Setup 算法，对同一个 QAP 只需要调用一次。也就是说，只要 $\vec{A}(X), \vec{B}(X), \vec{C}(X)$ 以及 $t(X)$ 这些多项式不变，产生的参数可以对不同的解 $\vec{z}$ 反复使用。有了公共参数后，Prover 就可以运行 Prove 算法，产生一个证明字符串 π，而 Verifier 可以运行 Verifier 算法验证 π 的合法性，并输出 0 或者 1。

Setup

在 Setup 阶段，可信第三方产生一些随机数 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 和 x。设 G 和 H 分别是 $\mathbb{G}_1$ 和 $\mathbb{G}_2$ 的生成元。然后，可信第三方计算如下这些椭圆曲线点：

1. 群 $\mathbb{G}_1$ 中的点：

$$
\begin{gathered}
\alpha G, \quad \beta G, \quad \gamma G \\
G, \quad xG, \quad x^2 G, \quad \cdots \quad x^{d-1} G \\
\frac{1}{\delta} t(x) G, \quad \frac{1}{\delta} x t(x) G, \quad \frac{1}{\delta} x^2 t(x) G, \quad \cdots \quad \frac{1}{\delta} x^{d-2} t(x) G, \\
\frac{1}{\gamma}(\beta a_i(x) + \alpha b_i(x) + c_i(x)) G \qquad \forall i \in [1:n] \\
\frac{1}{\delta}(\beta a_i(x) + \alpha b_i(x) + c_i(x)) G \qquad \forall i \in [n+1:m]
\end{gathered}
$$

2. 群 $\mathbb{G}_2$ 中的点：

$$
\begin{gathered}
\beta H, \quad \gamma H, \quad \delta H \\
H, \quad xH, \quad x^2 H, \quad \cdots \quad x^{d-1} H
\end{gathered}
$$

注意：这些点中，隐式地包含了许多的 α-对、β-对、δ-对、γ-对。

Prove

Prover 采样两个随机数 r 和 s，并计算

$$h(X) = \frac{\left(\sum_{i=1}^{m} z_i a_i(X)\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{m} z_i b_i(X)\right) - \left(\sum_{i=1}^{m} z_i c_i(X)\right)}{t(X)}$$

接下来，Prover 计算三个椭圆曲线点

1. 点$A \in \mathbb{G}_1$

$$\alpha G + \sum_{i=1}^{m} z_i a_i(x) G + r\delta G$$

2. 点$B \in \mathbb{G}_2$

$$\beta H + \sum_{i=1}^{m} z_i b_i(x) H + s\delta H$$

3. 点$C \in \mathbb{G}_1$

$$\frac{1}{\delta} \sum_{i=n+1}^{m} z_i(\beta a_i(x) + \alpha b_i(x) + c_i(x))G + \frac{1}{\delta} h(x)t(x)G + (As + Br - rs\delta)G$$

注意：Prover 并没有显式地产生 α-对、β-对等等，而是将它们用秘密的随机系数线性组合在一起。其中，r 和 s 这两个随机数是 Prover 用来随机化证明过程的。它们取任何值，证明都是合法的。如果将其取零，上面三个式子中最后一项都会消失，证明依然合法，但不再是零知识的。

Verify

Verifier 首先使用 z 的公开前缀计算点$D \in \mathbb{G}_1$

$$D = \frac{1}{\gamma} \sum_{i=1}^{n} z_i(\beta a_i(x) + \alpha b_i(x) + c_i(x))G$$

拿到证明 (A, B, C) 后，Verifier 验证下式成立

$$e(A, B) = e(\alpha G, \beta H) \cdot e(D, \gamma H) \cdot e(C, \delta H)$$

解析

我们简单解释一下上述构造为什么能够工作，至于它为什么是安全的，请感兴趣的读者参阅 [G... 16]

我们简单解释一下上述构造为什么能够工作。至于它为什么是安全的，请感兴趣的读者参阅 [Gro16] 原文。

QAP 问题中，Prover 的目标是证明 $t(X)$ 整除一个多项式 $\left(\sum_{i=1}^{m} z_i a_i(X)\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{m} z_i b_i(X)\right) - \left(\sum_{i=1}^{m} z_i c_i(X)\right)$。这其实等价于证明存在一个商多项式 $h(X)$ 满足

$$\left(\sum_{i=1}^{m} z_i a_i(X)\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{m} z_i b_i(X)\right) = t(X)h(X) + \left(\sum_{i=1}^{m} z_i c_i(X)\right)$$

在证明的点 A 中有一项 $\sum_{i=1}^{m} z_i a_i(X)G$，类似地在点 B 中有一项 $\sum_{i=1}^{m} z_i b_i(X)H$。当 Verifier 验证证明时，计算 $e(A, B)$，就把这两项乘在了一起，得到了上式左边部分。

点 C 相对复杂一些，包含了 $\frac{1}{\delta}\left(\sum_{i=n+1}^{m} z_i c_i(X) + h(x)t(x)\right)G$，而 $e(C, \delta H)$ 相当于把 δ 乘在上面，把原有的 $1/\delta$ 系数给消除了。这就得到了上式的右边部分——但是还缺了 i 从 1 到 n 的那一小块。这一小块由 Verifier 来补上，也就是 $e(D, \gamma H)$。于是上式两边就都补齐并消掉了。

当然，Verifier 的验证式中还包含了许多其他项，但在 Groth 的精心设计下，它们都消掉了。感兴趣的可以自行验证。

小结

本文中，我们解释了 Groth16 这个 zkSNARK 方案的构造原理。我们从算术电路开始，介绍了怎样将计算验证问题转化为 R1CS 问题以及 QAP 问题。然后我们解释了怎样使用 Groth16 方案来证明知道一个 QAP 问题的解。Groth16 方案使用了 KoE 假设以及双线性配对。它的缺点是需要可信第三方进行初始化，而且初始化过程需要对每个电路进行一次。与此同时，Groth16 享有最高效的 Verifier 算法以及最短的证明字符串，使得 Groth16 成为至今仍然应用最广的 zkSNARK 方案。

参考资料

[Gro16] Jen Groth. On the Size of Pairing-based Non-interactive Argument. 2016.