

時間の微小正準変換を考える。

$p_i, P_i$  についても同様。

$$\delta q_i = Q_i - q_i = \epsilon \frac{\partial H(q, P, t)}{\partial p_i} = \epsilon \frac{\partial H(q, p, t)}{\partial p_i} + O(\epsilon^2)$$

一方で

$$Q_i(t) = q_i(t) + \epsilon \frac{\partial H(q, P)}{\partial p_i} = q_i(t) + \epsilon \dot{q}_i(t) = q_i(t + \epsilon) + o(\epsilon^2)$$

よって一回の微小正準変換による誤差は  $o(\epsilon^2)$  と見積もられる。

今有限な時間  $T$  だけの時間発展を微小正準変換の繰り返しで表現することを考える。整数  $N$  により微小な時間発展  $\epsilon$  は  $T/N$  で書くとする。一回毎に誤差は  $o(\epsilon^2)$  だから、それを計  $N$  回繰り返すと、誤差は合計で  $o(\epsilon^2) \times N = o((T/N)^2) \times N = o(T/N)$ 。よって  $N \rightarrow \infty$  の極限では誤差は 0 になる。

従って有限な時間の時間発展を微小正準変換の繰り返しで表現することの妥当性が示される。