定义：

$$\text{DFT:}\ \ \mathrm{X}(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn},k=0,1,2,\dots,N-1$$

$$IDFT:\ \ x(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\,e^{j\frac{2\pi}{N}kn},n=0,1,2,\dots,N-1$$

问题：已知序列$\mathrm{x}(n)$长度为$N_x$，$\mathrm{y}(n)$长度为$N_y$，通过傅立叶变换计算卷积的过程可描述如下：

$$\mathrm{x}(n)\xrightarrow{M点\ DFT}X(k),\quad \mathrm{y}(n)\xrightarrow{M点\ DFT}Y(k)$$

$$X(k)Y(k)\xrightarrow{M点\ IDFT}x(n)\otimes y(n)\quad（卷积）$$

请问：

$$\mathrm{IDFT}\big(\mathrm{X(k)Y(k)}\big)=x(n)\otimes y(n)何时成立？$$

推导分析过程如下：

ω₀, sin 都是周期函数　　M是周期

$$z(n)\triangleq\frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1}X(k)Y(k)\,e^{j\frac{2\pi}{M}kn}$$
$\Longrightarrow$ z(n)是周期函数

$$=\frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1}\left(\sum_{l=0}^{M-1}x(l)\,e^{-j\frac{2\pi}{M}kl}\right)\left(\sum_{m=0}^{M-1}y(m)e^{-j\frac{2\pi}{M}km}\right)e^{j\frac{2\pi}{M}kn}$$

$$=\frac{1}{M}\sum_{l=0}^{M-1}\sum_{m=0}^{M-1}x(l)y(m)\sum_{k=0}^{M-1}\underline{e^{j\frac{2\pi}{M}k(n-l-m)}}$$
周期

$$=\sum_{l=0}^{M-1}x(l)y\big((n-l)\big)_M$$

（注：$(n)_M=q\ if\ n=pM+q.\quad p,q$为整数，$0\le \mathrm{q}\le \mathrm{M}-1$）

n=q时 求和=M

hint $\sum_{m=0}^{M-1}y(m)\sum_{k=0}^{M-1}e^{j\frac{2\pi}{M}k(n-l-m)}=M\cdot y(q)=M\cdot\big((n-l)\big)_M$

当 $n-l=pM+q$　　$\sum_{k=0}^{M-1}e^{j\sim}=1$

只有一个m满足，求和 $=M$

else $= 0$

$e^{j2\pi k} = 1$

上式中， $n-l-m=pM$ p是整数

$$\sum_{k=0}^{M-1} e^{j\frac{2\pi}{M}k(n-l-m)} = \begin{cases} M & if\ n-l-m=pM, p\text{是整数} \\ 0 & else \end{cases}$$

$\sum_{k=0}^{M-1} e^{j2\pi q\cdot k} \overset{?}{=} 0$

Fact1：z(n)是周期为M的序列

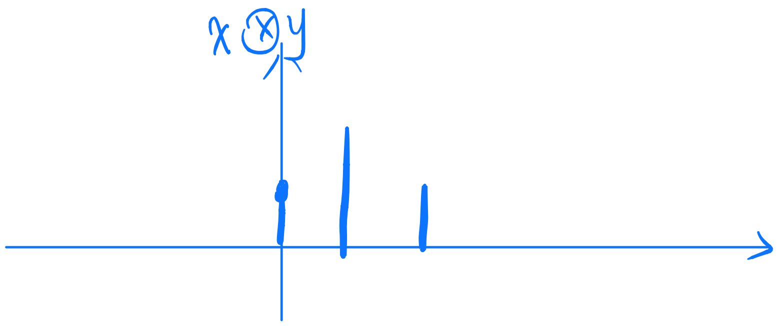
Fact2：当M $\geq N_x + N_y - 1$时，$z(n) = x(n)\otimes y(n), n = 0, 1, \dots, N_x + N_y - 1$

作业：请推广至二维情形，包含推导分析。

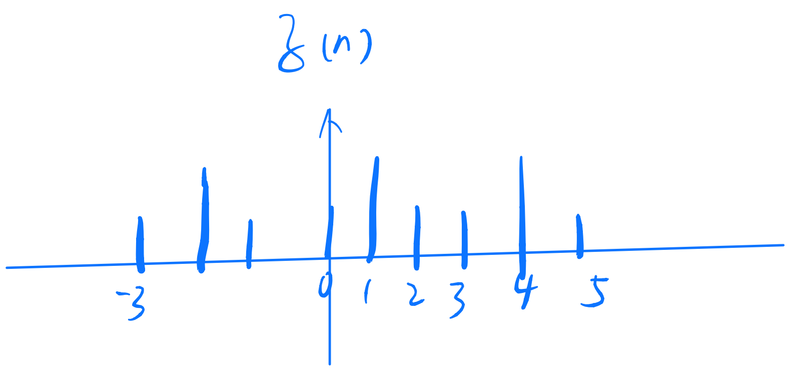
例 $x\{1 \quad 1\}$

$y\{1 \quad 1\}$

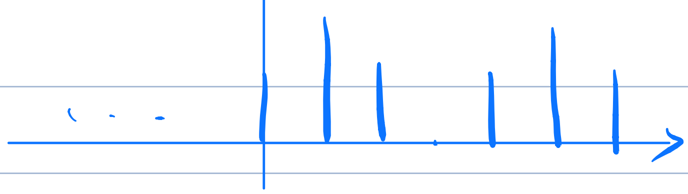
$x \otimes y = \{1 \quad 2 \quad 1\}$



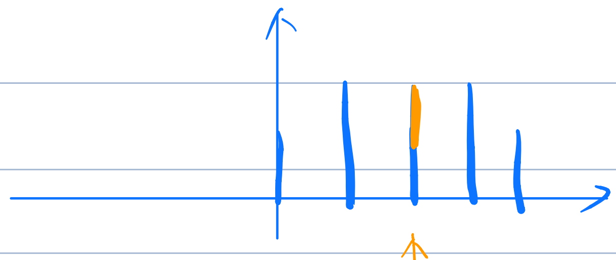

$M=3$



$m=4$



$m=2$



混叠变为 $1+1=2$