第二章：线性方程组

2. 解下列线性方程组：

(1)

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 0 \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

解. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & -3 \\ 1 & -4 & 3 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_4-R_1;\frac{1}{2}R_4]{R_3-R_1} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_4+R_2]{R_3-5R_2}$

$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_2+R_3]{R_4+R_3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1+2R_2-3R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

把 x_1, x_2, x_3 作为主元变量，x_4 作为自由变量，解得

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = t_4 \\ x_3 = 2t_4 \\ x_4 = t_4 \end{cases}$$

□

(2)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 0 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$$

解. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_4-5R_1]{R_2-3R_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 \end{bmatrix}$

$\xrightarrow[R_3+R_2]{R_4-R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1+R_2;-R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

把 x_1,x_2 作为主元变量，x_3,x_4,x_5 作为自由变量，解得

$$\begin{cases} x_1 = & t_3+t_4+5t_5 \\ x_2 = & -2t_3-2t_4-6t_5 \\ x_3 = & t_3 \\ x_4 = & t_4 \\ x_5 = & t_5 \end{cases}$$

□

(3)

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3-x_4=6 \\ 2x_1-x_2+x_3+3x_4+4x_5=-7 \\ 2x_1-x_2+2x_3+x_4-2x_5=-4 \\ 2x_1-3x_2+x_3+2x_4-2x_5=-9 \\ x_1+x_3-2x_4-6x_5=4 \end{cases}$$

解.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 0 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & 3 & 4 & -7 \\ 2 & -1 & 2 & 1 & -2 & -4 \\ 2 & -3 & 1 & 2 & -2 & -9 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\cdots} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 20/11 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -14/11 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 26/11 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

把 x_1,x_2,x_3,x_4 作为主元变量，x_5 作为自由变量，解得

$$\begin{cases} x_1 = & 1 \\ x_2 = & 2-\dfrac{20}{11}t_5 \\ x_3 = & -1+\dfrac{14}{11}t_5 \\ x_4 = & -2-\dfrac{26}{11}t_5 \\ x_5 = & t_5 \end{cases}$$

□

(4)

$$\begin{cases} 2x_1-x_2-2x_3+x_4=0 \\ 1x_1+2x_2+2x_3+x_4=6 \\ 3x_1+x_2-x_3-2x_4=1 \\ x_1+2x_2+x_3-3x_4=2 \\ 2x_1+4x_2+3x_3-2x_4=7 \end{cases}$$

解.

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & -2 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\cdots} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & -5 & -6 & -1 & -12 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$r(A) < r(A|b)$，所以方程组无解. □

4. 讨论下列方程组，当 λ 取什么值时有唯一解？取什么值时有无穷多解？取什么值时无解？

(1)

$$\begin{cases} (\lambda+3)x_1 + x_2 + 2x_3 = \lambda \\ \lambda x_1 + (\lambda-1)x_2 + x_3 = \lambda \\ 3(\lambda+1)x_1 + \lambda x_2 + (\lambda+3)x_3 = 3 \end{cases}$$

解. $\begin{bmatrix} \lambda+3 & 1 & 2 & \lambda \\ \lambda & \lambda-1 & 1 & \lambda \\ 3(\lambda+1) & \lambda & \lambda+3 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3-3R_2]{R_1-R_2} \begin{bmatrix} 3 & 2-\lambda & 1 & 0 \\ \lambda & \lambda-1 & 1 & \lambda \\ 3 & 3-2\lambda & \lambda & 3-3\lambda \end{bmatrix}$
$\xrightarrow[R_3-R_1]{3R_2-\lambda R_1} \begin{bmatrix} 3 & 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda^2+\lambda-3 & 3-\lambda & 3\lambda \\ 0 & 1-\lambda & \lambda-1 & 3(1-\lambda) \end{bmatrix}$ 当 $\lambda = 1$ 时，矩阵为

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

此时，$r(A|b) = r(A) < 3$，所以有无穷多解. 当 $\lambda \neq 1$ 时，继续初等行变换
$\xrightarrow{R_3/(1-\lambda)} \begin{bmatrix} 3 & 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda^2+\lambda-3 & 3-\lambda & 3\lambda \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2-(\lambda^2+\lambda-3)R_3} \begin{bmatrix} 3 & 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda^2+\lambda-3 & 3-\lambda & 3\lambda \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$
$\xrightarrow{R_{23}} \begin{bmatrix} 3 & 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & \lambda^2 & 9-3\lambda^2 \end{bmatrix}$
当 $r(A|b) > r(A)$ 时，无解，此时 $\lambda = 0$.
所以，当 $\lambda \neq 1$ 且 $\lambda \neq 0$ 时，$r(A) = r(A|b) = 3$, 此时有唯一解. □

(2)

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + \lambda x_3 = 1 \\ 2x_1 + \lambda x_2 + 8x_3 = \lambda \end{cases}$$

解.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & \lambda & 1 \\ 2 & \lambda & 8 & \lambda \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2-2R_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & \lambda & 1 \\ 0 & \lambda-4 & 8-2\lambda & \lambda-2 \end{bmatrix}$$

1). 当 $\lambda = 4$ 时,$r(A) < r(A|b)$, 则无解.
2). 当 $\lambda \neq 4$ 时, $r(A) = r(A|b) < 3$, 则有无穷多组解. □

(3)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 2 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = \lambda \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$$

解.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \lambda & 2 \\ 3 & 4 & 2 & \lambda \\ 2 & 3 & -1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3-2R_1]{R_2-3R_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \lambda & 2 \\ 0 & 1 & 2-3\lambda & \lambda-6 \\ 0 & 1 & -1-2\lambda & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3-R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \lambda & 2 \\ 0 & 1 & 2-3\lambda & \lambda-6 \\ 0 & 0 & \lambda-3 & 5-\lambda \end{bmatrix}$$

1). 当 $\lambda = 3$ 时, $r(A) < r(A|b)$, 则无解.
2). 当 $\lambda \neq 3$ 时, $r(A) = r(A|b) = 3$, 有唯一解. □

5. 讨论 a, b 为何值时，线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 4 \\ x_2 + ax_3 + bx_4 = b \\ x_1 - 3x_2 + (3-a)x_3 = -4 \end{cases}$$

有解或无解，若有解，求出其解.

解.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & a & b & b \\ 1 & -3 & 3-a & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_4-R_1]{R_2-2R_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & a & b & b \\ 0 & -2 & 1-a & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_3-R_2]{R_4+2R_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & a+1 & b+1 & b-2 \\ 0 & 0 & -(1+a) & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_4+R_3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & a+1 & b+1 & b-2 \\ 0 & 0 & 0 & b-1 & b-3 \end{bmatrix}$$

1. 当 $b = 1$ 时，$r(A) < r(A|b)$，方程组无解.
2. 当 $b \neq 1, a = -1$ 时，

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & b+1 & b-2 \\ 0 & 0 & 0 & b-1 & b-3 \end{bmatrix}$$

1) 当 $b=-1$ 时，$r(A)<r(A|b)$，方程组无解.
2) 当 $b\neq -1$ 时，

$$\begin{bmatrix}1 & -1 & 2 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & b+1 & b-2\\ 0 & 0 & 0 & b-1 & b-3\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3/(b+1)}\begin{bmatrix}1 & -1 & 2 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1 & (b-2)/(b+1)\\ 0 & 0 & 0 & b-1 & b-3\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_4-(b-1)R_3}\begin{bmatrix}1 & -1 & 2 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1 & (b-2)/(b+1)\\ 0 & 0 & 0 & 0 & (b-5)/(b+1)\end{bmatrix}$$

i) 当 $b=5$ 时

$$\begin{bmatrix}1 & -1 & 2 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2+R_3}\begin{bmatrix}1 & -1 & 2 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 0 & 5/2\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1+R_2}\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 0 & 7/2\\ 0 & 1 & -1 & 0 & 5/2\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

所以，x_1,x_2,x_4 为主元变量，x_3 为自由变量，解得

$$\begin{cases}x_1 =3.5-t_3\\ x_2 =2.5+t_3\\ x_3 =t_3\\ x_4 =0.5\end{cases}$$

ii) 当 $b\neq 5$ 时,$r(A)<r(A|b)$，方程组无解.
3. 当 $b\neq 1, a\neq -1$ 时，$r(A)=r(A|b)=4$，所以有唯一解

$$\begin{cases}x_1 =\dfrac{4ab+5b-6a-11}{(b-1)(a+1)}\\ x_2 =\dfrac{3ab+2b-5a}{(b-1)(a+1)}\\ x_3 =\dfrac{5-b}{(b-1)(a+1)}\\ x_4 =\dfrac{b-3}{b-1}\end{cases}$$

□

7. 已知平面上三条不同直线方程分别为

$$l_1 : ax + 2by + 3c = 0$$

$$l_2 : bx + 2cy + 3a = 0$$

$$l_3 : cx + 2ay + 3b = 0$$

试证这三条直线交于一点的充要条件是 $a + b + c = 0$.

解. 考虑方程组

$$\begin{cases} ax + 2by = -3c \\ bx + 2cy = -3a \\ cx + 2ay = -3b \end{cases}$$

其增广矩阵为

$$\begin{bmatrix} a & 2b & -3c \\ b & 2c & -3a \\ c & 2a & -3b \end{bmatrix}$$

三条直线交于一点, 当且仅当方程组有唯一解, 当且仅当 $r(A) = r(A|b) = 2$

$$\begin{bmatrix} a & 2b & -3c \\ b & 2c & -3a \\ c & 2a & -3b \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1+R_2+R_3} \begin{bmatrix} a+b+c & 2(a+b+c) & -3(a+b+c) \\ b & 2c & -3a \\ c & 2a & -3b \end{bmatrix}$$

1. 当 $a + b + c \neq 0$ 时, 继续做初等行变换

$$\xrightarrow{R_1/(a+b+c)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ b & 2c & -3a \\ c & 2a & -3b \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_3-cR_1]{R_2-bR_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2(c-b) & 3(b-a) \\ 0 & 2(a-c) & 3(c-b) \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{(c-b)R_3-(a-c)R_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2(c-b) & 3(b-a) \\ 0 & 0 & 3((c-b)^2-(b-a)(a-c)) \end{bmatrix}$$

注意 $3((c-b)^2 - (b-a)(a-c)) = 3(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac)$
$= \frac{3}{2}((a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2) > 0$, 因为 $a-b, b-c, c-a$ 不能同时为零, 否则 $a = b = c$, 三条直线相同.
所以, 我们有 $r(A) < r(A|b)$, 方程组无解.
2. 当 $a + b + c = 0$ 时, 矩阵为

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b & 2c & -3a \\ c & 2a & -3b \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{bR_3-cR_2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b & 2c & -3a \\ 0 & 2(ab-c^2) & -3(b^2-ac) \end{bmatrix}$$

注意到 $ab - c^2 = ab - (a+b)^2 = -(a^2 + ab + b^2) = -(a + \frac{1}{2}b)^2 - \frac{3}{4}b^2 < 0$, 因为 a, b 不能同时为 0, 否则 a, b, c 都为 0.
所以, 我们有 $r(A) = r(A|b) = 2$, 方程组有唯一解.
综上所述, 方程组有唯一解的充要条件是 $a + b + c = 0$. □

16. 设

$$A=\begin{bmatrix}1&-1&-1\\-1&1&1\\0&-4&-2\end{bmatrix},\xi_1=\begin{bmatrix}-1\\1\\-2\end{bmatrix}$$

(1) 求满足 $A\xi_2=\xi_1,A^2\xi_3=\xi_1$ 的所有向量 ξ_2,ξ_3.
(2) 对 (1) 中的任意向量 ξ_2,ξ_3 证明 ξ_1,ξ_2,ξ_3 线性无关.

解. $(1)[A|\xi_1]=\begin{bmatrix}1&-1&-1&-1\\-1&1&1&1\\0&-4&-2&-2\end{bmatrix}\xrightarrow[-R_3/4]{R_2+R_1}\begin{bmatrix}1&-1&-1&-1\\0&0&0&0\\0&1&1/2&1/2\end{bmatrix}\xrightarrow[R_{23}]{R_1+R_2}$
$\begin{bmatrix}1&0&-1/2&-1/2\\0&1&1/2&1/2\\0&0&0&0\end{bmatrix}$ 所以,$\xi_2=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}$($t$ 为任意实数)
$A^2=\begin{bmatrix}1&-1&-1\\-1&1&1\\0&-4&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&-1\\-1&1&1\\0&-4&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1&-1\\-1&1&1\\0&-4&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&2&0\\-2&-2&0\\4&4&0\end{bmatrix}$
$[A^2|\xi_1]=\begin{bmatrix}2&2&0&-1\\-2&-2&0&1\\4&4&0&-2\end{bmatrix}\xrightarrow[R_4-2R_2]{R_3+R_1}\begin{bmatrix}2&2&0&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$ 得到基础解系 $\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$,
特解 $\begin{bmatrix}-1/2\\0\\0\end{bmatrix}$
所以 $\xi_3=\begin{bmatrix}-1/2\\0\\0\end{bmatrix}+t_1\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}+t_2\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$($t_1,t_2$ 为任意实数)
(2) 假设 ξ_1,ξ_2,ξ_3 线性相关, 则存在不全为 0 的数使得

$$k_1\xi_1+k_2\xi_2+k_3\xi_3=0$$

$$k_1\begin{bmatrix}-1\\1\\-2\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}t\\-t\\2t+1\end{bmatrix}+k_3\begin{bmatrix}t_1-1/2\\-t_1\\t_2\end{bmatrix}=0$$

系数矩阵为

$$\begin{bmatrix}-1&t&t_1-1/2\\1&-t&-t_1\\-2&2t+1&t_2\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_3-2R_1]{R_2+R_1}\begin{bmatrix}-1&t&t_1-1/2\\0&0&-1/2\\0&1&t_2-2t_1+1\end{bmatrix}\xrightarrow{R_{23}}\begin{bmatrix}-1&t&t_1-1/2\\0&1&t_2-2t_1+1\\0&0&-1/2\end{bmatrix}$$

所以,$r(A)=3$, 方程组只有零解,k_1,k_2,k_3 全为 0, ξ_1,ξ_2,ξ_3 线性无关. □

17. 设向量组 $\alpha_1=[1,0,1]^T,\alpha_2=[0,1,1]^T,\alpha_3=[1,3,5]^T$ 不能由向量组 $\beta_1=[1,1,1]^T,\beta_2=[1,2,3]^T,\beta_3=[3,4,a]^T$ 线性表出.

解. 因为向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 不能由 β_1,β_2,β_3 线性表出, 所以 $r(\beta_1,\beta_2,\beta_3)<r(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$

$$[\beta_1,\beta_2,\beta_3,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]=\begin{bmatrix}1&1&3&1&0&1\\1&2&4&0&1&3\\1&3&a&1&1&5\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_3-R_1]{R_2-R_1}\begin{bmatrix}1&1&3&1&0&1\\0&1&1&-1&1&2\\0&2&a-3&0&1&4\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3-2R_2}\begin{bmatrix}1&1&3&1&0&1\\0&1&1&-1&1&2\\0&0&a-5&2&-1&0\end{bmatrix}$$

所以当 $a=5$ 时,$r(\beta_1,\beta_2,\beta_3)<r(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$

$$[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3]=\begin{bmatrix}1&0&1&1&1&3\\0&1&3&1&2&4\\1&1&5&1&3&5\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3-R_1}\begin{bmatrix}1&0&1&1&1&3\\0&1&3&1&2&4\\0&1&4&0&2&2\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3-R_2}\begin{bmatrix}1&0&1&1&1&3\\0&1&3&1&2&4\\0&0&1&-1&0&-2\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_1-R_3]{R_2-3R_3}\begin{bmatrix}1&0&0&2&1&5\\0&1&0&4&2&10\\0&0&1&-1&0&-2\end{bmatrix}$$

所以, 我们得到

$$\begin{cases}\beta_1=2\alpha_1+4\alpha_2-\alpha_3\\\beta_2=\alpha_1+2\alpha_2\\\beta_3=5\alpha_1+10\alpha_2-2\alpha_3\end{cases}$$

□

18. 设矩阵

$$\begin{bmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\1&2&0&-3\end{bmatrix}$$

(1) 求方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系;
(2) 求满足 $AB=I$ 的所有矩阵 B, 其中 I 是 3 阶单位矩阵.

解. (1) $\begin{bmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\1&2&0&-3\end{bmatrix}\xrightarrow{R_3-R_2}\begin{bmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\0&4&-3&1\end{bmatrix}\xrightarrow{R_3-4R_2}\begin{bmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\0&0&1&-3\end{bmatrix}\xrightarrow{R_2+R_3}$
$\begin{bmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&0&-2\\0&0&1&-3\end{bmatrix}\xrightarrow{R_1+2R_2-3R_1}\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-2\\0&0&1&-3\end{bmatrix}$
所以, 基础解系为 $(-1,2,3,1)^T$.
(2)A 为 3×4 矩阵, I 为 3 阶单位矩阵, 所以 B 为 4×3 矩阵, 设 B 的列向量为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$. 即求 $A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=I$ 的所有解, 即求 $A\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$, $A\alpha_2=$

$\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$, $A\alpha_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ 的所有解.

$$[A|I]=\begin{bmatrix}1&-2&3&-4&1&0&0\\0&1&-1&1&0&1&0\\1&2&0&-3&0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{R_3-R_2}\begin{bmatrix}1&-2&3&-4&1&0&0\\0&1&-1&1&0&1&0\\0&4&-3&1&-1&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{R_3-4R_2}$$
$$\begin{bmatrix}1&-2&3&-4&1&0&0\\0&1&-1&1&0&1&0\\0&0&1&-3&-1&-4&1\end{bmatrix}\xrightarrow{R_2+R_3}\begin{bmatrix}1&-2&3&-4&1&0&0\\0&1&0&-2&-1&-3&1\\0&0&1&-3&-1&-4&1\end{bmatrix}\xrightarrow{R_1+2R_2-3R_3}$$
$$\begin{bmatrix}1&0&0&1&2&6&-1\\0&1&0&-2&-1&-3&1\\0&0&1&-3&-1&-4&1\end{bmatrix}$$

解得 $\alpha_1=k_1(-1,2,3,1)^T+(2,-1,-1,0)^T,\alpha_2=k_2(-1,2,3,1)^T+(6,-3,-4,0)^T,\alpha_3=k_3(-1,2,3,1)^T+(-1,1,1,0)^T$

所以, 把 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 代入 $B=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$, 即得所有的 B. □

21. 设 A 是 $s\times n$ 矩阵, B 是 $n\times m$ 矩阵, $n<m$, 证明: 齐次线性方程组 $(AB)x=0$ 有非零解.

证. $r(B)\le min\{m,n\}=n<m$, 所以 $Bx=0$, 有非零解. 不妨记为 x_1.
所以 $(AB)x_1=A(Bx_1)=0$.
即 x_1 也是 $(AB)x=0$ 的非零解.
所以,$(AB)x=0$ 有非零解. □

22. 设 A 是 $m\times s$ 矩阵,B 是 $s\times n$ 矩阵,x 是 n 元向量. 证明: 若 $(AB)x=0$ 与 $Bx=0$ 是同解方程组, 则 $rank(AB)=rank(A)$.

证. $(AB)x=0$ 与 $Bx=0$ 是同解方程组, 所以, 两个方程组里基础解系中向量个数相等.
AB 为 $m\times n$ 的矩阵, B 是 $s\times n$ 矩阵.
所以 $n-r(AB)=n-r(B)$, $r(AB)=r(B)$. □

24. 问 y 为何值时, 向量 $\beta=[4,6,y,-2]^T$ 可以由向量组 $\alpha_1=[2,3,1,-2]^T,\alpha_2=[3,-2,-5,3]^T,\alpha_3=[-3,2,2,-1]^T$ 线性表出.

证. $$[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta]=\begin{bmatrix}2&3&-3&4\\3&-2&2&6\\1&-5&2&y\\-2&3&-1&-2\end{bmatrix}\xrightarrow[2R_3-R_1;R_4+R_1]{2R_2-3R_1}\begin{bmatrix}2&3&-3&4\\0&1&-1&0\\0&-13&7&2y-4\\0&3&-2&1\end{bmatrix}\xrightarrow[R_4-3R_2]{R_3+13R_2}$$
$$\begin{bmatrix}2&3&-3&4\\0&1&-1&0\\0&0&3&2-y\\0&0&1&1\end{bmatrix}\xrightarrow{3R_4-R_3}\begin{bmatrix}2&3&-3&4\\0&1&-1&0\\0&0&3&2-y\\0&0&0&1+y\end{bmatrix}$$
所以, 当 $1+y=0,y=-1$ 时, 向量 β 可以由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出. □

26. 求下列向量组的秩和极大线性无关组:
(1)$\alpha_1=[2,1,0]^T,\alpha_2=[3,1,1]^T,\alpha_3=[2,0,2]^T,\alpha_4=[4,2,0]^T$;

解. $[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4]=\begin{bmatrix}2&3&2&4\\1&1&0&2\\0&1&2&0\end{bmatrix}\xrightarrow{2R_2-R_1}\begin{bmatrix}2&3&2&4\\0&-1&-2&0\\0&1&2&0\end{bmatrix}$
$\xrightarrow{R_3+R_2}\begin{bmatrix}2&3&2&4\\0&-1&-2&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$
所以,向量组的秩为 2,极大线性无关组可以为 $\alpha_1,\alpha_2;\alpha_1,\alpha_3;\alpha_2,\alpha_3;\alpha_2,\alpha_4;\alpha_3,\alpha_4$ □

(2)$\alpha_1=[1,1,1,1]^T,\alpha_2=[1,1,-1,-1]^T,\alpha_3=[1,-1,-1,1]^T,\alpha_4=[-1,-1,-1,1]^T$;

解. $[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4]=\begin{bmatrix}1&1&1&-1\\1&1&-1&-1\\1&-1&-1&-1\\1&-1&1&1\end{bmatrix}\xrightarrow[R_3-R_1;R_4-R_1]{R_2-R_1}\begin{bmatrix}1&1&1&-1\\0&0&-2&0\\0&-2&-2&0\\0&-2&0&2\end{bmatrix}$
$\xrightarrow[R_{24}]{-1/2R_2;-1/2R_3;-1/2R_4}\begin{bmatrix}1&1&1&-1\\0&1&0&-1\\0&1&1&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}\xrightarrow{R_3-R_2}\begin{bmatrix}1&1&1&-1\\0&1&0&-1\\0&0&1&1\\0&0&1&0\end{bmatrix}$
$\xrightarrow{R_4-R_3}\begin{bmatrix}1&1&1&-1\\0&1&0&-1\\0&0&1&1\\0&0&0&-1\end{bmatrix}$
所以，向量组的秩为 4，极大线性无关组可以为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ □

(3)$\alpha_1=[6,4,1,-1,2]^T,\alpha_2=[1,0,2,3,-4]^T,\alpha_3=[1,4,-9,-16,22]^T,\alpha_4=[7,1,0,-1,3]^T$;

解.

$$[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4]=\begin{bmatrix}6&1&1&7\\4&0&4&1\\1&2&-9&0\\-1&3&-16&-1\\2&-4&22&3\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1-6R_3;R_2-4R_3;R_4+R_3;R_5-2R_3}\begin{bmatrix}0&-11&55&7\\0&-8&40&1\\1&2&-9&0\\0&5&-25&-1\\0&-8&40&3\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\cdots}\begin{bmatrix}1&2&-9&0\\0&1&-5&-1/5\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\cdots}\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&-5&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

所以，向量组的秩为 3，极大线性无关组可以为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4;\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4;\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$

□

27. 已知向量组 $\alpha_1=[1,-1,2,1,0]^T,\alpha_2=[2,-2,4,-2,0]^T,\alpha_3=[3,0,6,-1,1]^T,\alpha_4=[0,x,0,0,1]^T$ 有 4 个不同的极大线性无关组求 x 的值.

解.

$$[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4]=\begin{bmatrix}1&2&3&0\\-1&-2&0&x\\2&4&6&0\\1&-2&-1&0\\0&0&1&1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2+R_1;R_3-2R_1;R_4-R_1}\begin{bmatrix}1&2&3&0\\0&0&3&x\\0&0&0&0\\0&-4&-4&0\\0&0&1&1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-1/4R_4;R_2-3R_5}\begin{bmatrix}1&2&3&0\\0&0&0&x-3\\0&0&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&2&3&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&x-3\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&-1\\0&0&1&1\\0&0&0&x-3\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

1)$x-3\neq 0,x\neq 3$ 时，只有一个极大线性无关组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$.

2)$x-3=0,x=3$ 时,有 4 个极大线性无关组,$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3;\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4;\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4;\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$.

□

28. 求下列齐次方程组的一个基础解系:

(1)

$$\begin{cases}x_1-2x_2+4x_3-7x_4=0\\2x_1+x_2-2x_3+x_4=0\\3x_1-x_2+2x_3-4x_4=0\end{cases}$$

解. $\begin{bmatrix}1&-2&4&-7\\2&1&-2&1\\3&-1&2&-4\end{bmatrix}\xrightarrow{R_2-2R_1;R_3-3R_1}\begin{bmatrix}1&-2&4&-7\\0&1&-2&3\\0&-5&10&-17\end{bmatrix}\xrightarrow{R_3+5R_2}\begin{bmatrix}1&-2&4&-7\\0&1&-2&3\\0&0&0&-2\end{bmatrix}$

$\xrightarrow{\cdots}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&-2&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$

$n-r(A)=4-3=1$, 解得一个基础 $(0,2,1,0)^T$

□

(2)

$$\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3-x_4+x_5=0 \\ x_1-x_2+x_3+x_4-2x_5=0 \\ 3x_1+3x_2-3x_3-3x_4+4x_5=0 \\ 4x_1+5x_2-5x_3-5x_4+7x_5=0 \end{cases}$$

解. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & -3 & -3 & 4 \\ 4 & 5 & -5 & -5 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1-2R_2;R_3-2R_2;R_4-4R_2} \begin{bmatrix} 0 & -3 & 3 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 & 3 & -5 \\ 0 & -3 & 3 & 3 & -5 \end{bmatrix}$

$\xrightarrow{3R_2-R_1;R_3-R_1;R_4-R_1} \begin{bmatrix} 0 & -3 & 3 & 3 & -5 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$n-r(A)=5-2=3$, 得到一个基础解系为 $(0,1,1,0,0)^T, (0,1,0,1,0)^T, (\frac{1}{3}, -\frac{5}{3}, 0, 0, 1)^T$

□

29. 求下列线性方程组的通解，并表示成列向量线性组合的形式:

(1)

$$\begin{cases} x_1-2x_2-x_3-x_4+x_5=0 \\ 2x_1+x_2-x_3+2x_4-3x_5=0 \\ 3x_1-2x_2-x_3+x_4-2x_5=0 \\ 2x_1-5x_2+x_3-2x_4+2x_5=0 \end{cases}$$

解. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & -5 & 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2-2R_1;R_3-3R_1;R_4-2R_1} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & -1 & -4 & 5 \\ 0 & -4 & -2 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\xrightarrow{R_2+5R_4;R_3+4R_4} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -16 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & -14 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{8R_3-7R_2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -16 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\to \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -16 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 5 \end{bmatrix}$

$n-r(A)=5-4=1$, 得到一个基础解系为 $(1,0,0,5,4)^T$, 通解为

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

□

(2)

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1 \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=0 \\ 1x_2+2x_3+2x_4+6x_5=3 \\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=2 \end{cases}$$

解. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2-3R_1;R_4-5R_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3 \end{bmatrix}$

$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

得到对应齐次方程的一个基础解系为 $(1,-2,1,0,0)^T,(1,-2,0,1,0)^T,(5,-6,0,0,1)^T$，得到一个非齐次方程特解为 $(-2,3,0,0,0)^T$，所以，特解为：

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_3 \begin{bmatrix} 5 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

□

30. 已知：向量组 I 可用向量组 II 线性表出，向量组 II 可用向量组 III 线性表出，求出：向量组 I 可用向量组 III 线性表出.

证. 不妨令向量组 I 为 $(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m)$.
向量组 II 为 $(\beta_1,\beta_2,...,\beta_n)$.
向量组 III 为 $(\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_k)$.
而向量组 I 可用向量组 II 线性表出，所以存在 $n\times m$ 矩阵 A 使得：

$$[\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m]=[\beta_1,\beta_2,...,\beta_n]A$$

向量组 II 可用向量组 III 线性表出，所以存在 $k\times n$ 矩阵 B 使得：

$$[\beta_1,\beta_2,...,\beta_n]=[\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_k]B$$

所以：

$$\begin{aligned}[\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m]&=[\beta_1,\beta_2,...,\beta_n]A \\ &=[\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_k]BA\end{aligned}$$

其中 BA 为 $k\times m$ 矩阵，则向量组 I 可用向量组 III 线性表出. □

31. 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关. 证明: 当且仅当 n 为奇数时, 向量组 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\cdots,\alpha_{n-1}+\alpha_n,\alpha_n+\alpha_1$ 也线性无关.

证. 假设向量组 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\cdots,\alpha_{n-1}+\alpha_n,\alpha_n+\alpha_1$ 线性相关, 那必然存在不全为 0 的实数 $k_1,k_2,k_3,\cdots,k_n$, 使得

$$k_1(\alpha_1+\alpha_2)+k_2(\alpha_2+\alpha_3)+\cdots+k_{n-1}(\alpha_{n-1}+\alpha_n)+k_n(\alpha_n+\alpha_1)=0$$

整理得
$$(k_1+k_n)\alpha_1+(k_1+k_2)\alpha_2+\cdots+(k_{n-1}+k_n)\alpha_n=0$$
因为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关, 所以我们得到方程组
$$\begin{cases} k_1+k_n=0 \\ k_1+k_2=0 \\ \vdots \\ k_{n-1}+k_n=0 \end{cases}$$
系数矩阵为
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix}$$
1)n 为偶数
$$\xrightarrow{R_2-R_1,R_3-R_2,\cdots,R_n-R_{n-1}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
方程组有非零解, 所以 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\cdots,\alpha_{n-1}+\alpha_n,\alpha_n+\alpha_1$ 线性相关.
2)n 为奇数
$$\xrightarrow{R_2-R_1,R_3-R_2,\cdots,R_n-R_{n-1}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 \end{bmatrix}$$
方程组只有零解, 所以 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\cdots,\alpha_{n-1}+\alpha_n,\alpha_n+\alpha_1$ 线性无关. □

32. 设向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关, 而向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\beta,\gamma$ 线性相关. 证明: 或者 β 与 γ 中至少有一个可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表出, 或者向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\beta$ 与向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\gamma$ 可相互线性表出.

证. 因为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\beta,\gamma$ 线性相关, 所以存在不全为 0 得数 $k_1,k_2,\cdots,k_n,r,s$ 使得
$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n+r\beta+s\gamma=0$$
1)$r=0,s=0$ 这是不可能的, 因为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关.
2)$r\neq 0,s=0$, 此时 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表出
$$\beta=-\frac{1}{r}(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n)$$

3)$r=0, s\neq 0$, 此时 γ 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表出

$$\gamma=-\frac{1}{s}(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n)$$

3)$r\neq 0, s\neq 0$, 此时 β,γ 都可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表出

$$\beta=-\frac{1}{r}(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n+s\gamma)$$

$$\gamma=-\frac{1}{s}(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n+r\beta)$$

而 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 本身可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表出, 所以, 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\beta$ 与向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\gamma$ 可相互线性表出. □

33. 设 $\beta_1=\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_n,\beta_2=\alpha_1+\alpha_3+\cdots+\alpha_n,\beta_n=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{n-1}$, 其中 $m>1$. 证明: 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 与向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 可相互线性表出.

证. 注意到

$$[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n]=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]\begin{bmatrix}0&1&1&\cdots&1&1\\1&0&1&\cdots&1&1\\1&1&0&\cdots&1&1\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\1&1&1&\cdots&0&1\\1&1&1&\cdots&1&0\end{bmatrix}$$

令 $A=\begin{bmatrix}0&1&1&\cdots&1&1\\1&0&1&\cdots&1&1\\1&1&0&\cdots&1&1\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\1&1&1&\cdots&0&1\\1&1&1&\cdots&1&0\end{bmatrix}$,$A$ 是满秩矩阵, 所以 A 可逆, 所以

$$[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n]A^{-1}=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]$$

所以,$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 能由 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 线性表出. □

34. 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ 与 $\beta_1,\beta_2,...,\beta_n$ 满足:

$$\alpha_i=\begin{bmatrix}x_{1i}\\x_{2i}\\\vdots\\x_{ri}\end{bmatrix},\beta_i=\begin{bmatrix}x_{1i}\\x_{2i}\\\vdots\\x_{ri}\\x_{(r+1)i}\\\vdots\\x_{mi}\end{bmatrix},i=1,2,...,n$$

证明: 若 $\beta_1,\beta_2,...,\beta_n$ 线性相关, 则 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ 线性相关; 若 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ 线性无关, 则 $\beta_1,\beta_2,...,\beta_n$ 线性无关.

证. 令 $[\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n]=A$, A 为 $r\times n$ 的矩阵.
则 $[\beta_1,\beta_2,...,\beta_n]$ 可用分块矩阵 $\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}$ 表示.
而 $\beta_1,\beta_2,...,\beta_n$ 线性相关.
所以,$\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}x=0$ 有非零解. 即 $Ax=0$ 有非零解.
所以,$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ 线性相关.
后者是前者的逆否命题, 所以也成立. 即若 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ 线性无关, 则 $\beta_1,\beta_2,...,\beta_n$ 线性无关. □

35. 给定 n 个非零的数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$, 求下面向量组的秩:

$$\eta_1=[1+a_1,1,\cdots,1],\eta_2=[1,1+a_2,\cdots,1],\cdots,\eta_n=[1,1,\cdots,1+a_n]$$

解. $$[\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n]=\begin{bmatrix}1+a_1&1&1&\cdots&1&1\\1&1+a_2&1&\cdots&1&1\\1&1&1+a_3&\cdots&1&1\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\1&1&1&\cdots&1+a_{n-1}&1\\1&1&1&\cdots&1&1+a_n\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2-R_1,R_3-R_1,...,R_n-R_1}\begin{bmatrix}1+a_1&1&1&\cdots&1&1\\-a_1&a_2&0&\cdots&0&0\\-a_1&0&a_3&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\-a_1&0&0&\cdots&a_{n-1}&0\\-a_1&0&0&\cdots&0&a_n\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{C_1+\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_1}{a_3}+...+\frac{a_1}{a_n}}\begin{bmatrix}1+a_1+\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_1}{a_3}+...+\frac{a_1}{a_n}&1&1&\cdots&1&1\\0&a_2&0&\cdots&0&0\\0&0&a_3&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&a_{n-1}&0\\0&0&0&\cdots&0&a_n\end{bmatrix}$$

所以, 当 $1+a_1+\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_1}{a_3}+...+\frac{a_1}{a_n}=0$, 即 $1+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+...+\frac{1}{a_n}=0$, 秩为 $n-1$.
当 $1+a_1+\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_1}{a_3}+...+\frac{a_1}{a_n}\neq 0$, 即 $1+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+...+\frac{1}{a_n}\neq 0$, 秩为 n. □

36. 设 A,B 分别是 $m\times n$ 和 $n\times s$ 的矩阵, 且 $AB=O$. 证明:$rank(A)+rank(B)\leq n$

证. 由 p_{45} 的例 2.2.3 得 $r(A)+r(B)\leq r(AB)+n=n$ □

37. 设 $\eta_1,\eta_2,...,\eta_t$ 是某一非齐次线性方程组得解. 证明:$\mu_1\eta_1+\mu_2\eta_2+...+\mu_t\eta_t$ 也是该齐次线性方程组的解的充要条件是 $\mu_1+\mu_2+...+\mu_t=1$.

证. 令 $\eta_1,\eta_2,...,\eta_n$ 是 $Ax=b$ 的解.
则令 $A(\mu_1\eta_1+\mu_2\eta_2+...+\mu_t\eta_t)=b$
$\Leftrightarrow \mu_1A\eta_1+\mu_2A\eta_2+...+\mu_tA\eta_t=b$
$\Leftrightarrow \mu_1b+\mu_2b+...+\mu_tb=b$

$\Leftrightarrow (\mu_1+\mu_2+...+\mu_t)b=b$
$\Leftrightarrow \mu_1+\mu_2+...+\mu_t=1$
充要性得证. $\square$

38. 证明: 方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0 \end{cases}$$

的解全是方程 $b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_nx_n=0$ 的解的充要条件是: 向量 $\beta=[b_1,b_2,...,b_n]$ 可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m$ 线性表出, 其中

$$\alpha_i=[a_{i1},a_{i2},...,a_{in}], i=1,2,...,m$$

证. 1) 必要性:
令系数矩阵为 $A=\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_m\end{bmatrix}$ 则 $Ax=0$ 的解, 全是 $\beta x=0$ 的解.
所以 $Ax=0$ 与 $\begin{bmatrix}A\\ \beta\end{bmatrix}x=0$ 同解.
这意味着 $r(A)=r(\begin{bmatrix}A\\ \beta\end{bmatrix}), r(A^T)=r([A^T|\beta^T])$
即向量 $\beta=[b_1,b_2,...,b_n]$ 可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m$ 线性表出.
2) 充分性:
向量 $\beta=[b_1,b_2,...,b_n]$ 可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m$ 线性表出.
则存在不全为 0 的数 $k_1,k_2,...,k_m$ 使得

$$\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m$$

假设 x 为 $Ax=0$ 的解
则 $\alpha_1x=0,\alpha_2x=0,\cdots,\alpha_mx=0$.
所以 $k_1\alpha_1x=0,k_2\alpha_2x=0,\cdots,k_m\alpha_mx=0$
$\beta x=(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m)x=k_1\alpha_1x+k_2\alpha_2x+\cdots+k_m\alpha_mx=0$
我们得到 x 也是 $\beta x=0$ 的解. $\square$

39. 求下列矩阵的逆矩阵 (只有答案)
(1) $\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{bmatrix}$;(2) $\begin{bmatrix}5&2&0&0\\2&1&0&0\\0&0&1&-2\\0&0&1&1\end{bmatrix}$;(3) $\begin{bmatrix}1&a&a^2&a^3\\0&1&a&a^2\\0&0&1&a\\0&0&0&1\end{bmatrix}$;
(4) $\begin{bmatrix}0&a_1&0&\cdots&0\\0&0&a_2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\cdots&a_{n-1}\\a_n&0&0&\cdots&0\end{bmatrix}$

解. (1)

$$A^{-1}=\frac{1}{4}A=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

(2)

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -2 & 0 & 0\\ -2 & 5 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

(3)

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -a & 0 & 0\\ 0 & 1 & -a & 0\\ 0 & 0 & 1 & -a\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

(4)

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{a_n}\\ \frac{1}{a_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{a_2} & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}} & 0\end{bmatrix}$$

□

40. 解下列矩阵方程:(只有答案)

(1) $\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}X=\begin{bmatrix}5 & 6\\ 3 & 4\\ 1 & 2\end{bmatrix}$

(2) $X\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\ 3 & 2 & -4\\ 2 & -1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -3 & 0\\ 10 & 2 & 7\\ 10 & 7 & 8\end{bmatrix}$

解. (1)

$$X=\begin{bmatrix}2 & 2\\ 2 & 2\\ 1 & 2\end{bmatrix}$$

(2)

$$X=\begin{bmatrix}20 & -15 & 13\\ -105 & 77 & -58\\ -152 & 112 & -87\end{bmatrix}$$

□

41. 设 A,B,C 均为 n 阶方阵, 若 $ABC=I$, 则下列乘积:ACB,BAC,BCA,CAB,CBA 中哪些必等于单位阵 I.

证. $ABC=I$, 则 A,B,C 均可逆.
$BCA=A^{-1}ABCA=A^{-1}IA=I$
$CAB=B^{-1}BCAB=B^{-1}IB=I$
其他均不一定等于 I. □

46. 设 A, B 均为 n 阶可逆矩阵. 证明：如果 $A+B$ 可逆，则 $A^{-1}+B^{-1}$ 也可逆，并求其逆矩阵.

证. 注意到 $A^{-1}(A+B)B^{-1}=A^{-1}AB^{-1}+A^{-1}BB^{-1}=B^{-1}+A^{-1}$.
而 $A, B, A+B$ 均可逆, 所以 $A^{-1}+B^{-1}$ 也可逆.
$(A^{-1}+B^{-1})^{-1}=(A^{-1}(A+B)B^{-1})^{-1}=B(A+B)^{-1}A$. □

47.(1) 设 A 为 n 阶方阵，满足 $A^3+2A^2-2A-I_n=O$, 证明：$A+I_n$ 是可逆矩阵，并求其逆矩阵；
(2) 设 A, B 为 n 阶方阵, 且 $A-I_n$ 和 B 可逆. 证明: 若 $(A-I_n)^{-1}=(B-I_n)^T$, 则有 A 可逆;
(3) 设 A 为 n 阶方阵，满足 $A^2+A-6I_n=O$, 证明：$A, A+I_n, A+4I_n$ 是可逆矩阵，并求其逆矩阵.
(1)

证. $A^3+2A^2-2A-I_n=O$
$\Rightarrow A^3+2A^2-2A-3I_n=-2I_n$
$\Rightarrow (A+I_n)(A^2+A-3I_n)=-2I_n$
$\Rightarrow A+I_n$ 可逆.
$\Rightarrow (A+I_n)^{-1}=-\frac{1}{2}(A^2+A-3I_n)$ □

(2)

证. $(A-I_n)^{-1}=(B-I_n)^T$
$\Rightarrow (A-I_n)^{-1}(A-I_n)=(B-I_n)^T(A-I_n)$
$\Rightarrow I_n=(B^T-I_n)(A-I_n)$
$\Rightarrow I_n=B^TA-A-B^T+I_n$
$\Rightarrow B^TA-A-B^T=O$
$\Rightarrow B^T(A-I_n)=A$
而 $B, A-I_n$ 可逆，所以 A 可逆. □

(3)

证. $A^2+A-6I_n=O$
$\Rightarrow A^2+A=6I_n$
$\Rightarrow A(A+I_n)=6I_n$
所以，$A, A+I_n$ 都可逆.
$A^{-1}=\frac{1}{6}(A+I_n)$
$(A+I_n)^{-1}=\frac{1}{6}A$
$A^2+A-12I_n=-6I_n$
$(A-3I_n)(A+4I_n)=-6I_n$
所以，$A+4I_n$ 可逆.
$(A+4I_n)^{-1}=-\frac{1}{6}(A-3I_n)$ □

48. 已知 A, B 为 3 阶方阵, 且满足 $2A^{-1}B=B-4I$.
(1) 证明: 矩阵 $A-2I$ 可逆;
(2) 若 $B=\begin{bmatrix}1 & -2 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$ 求 A. (1)

证. $2A^{-1}B = B - 4I$
$\Rightarrow 2B = AB - 4A$
$\Rightarrow AB - 2B = 4A$
$\Rightarrow (A-2I)B = 4A$
$\Rightarrow (A-2I)BA^{-1} = 4I$
所以,$A-2I$ 可逆. □

(2)

解. $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ □

49. 设 α 是 n 维非零列向量，记 $A = I_n - \alpha\alpha^T$. 证明:
(1)$A^2 = A$ 的充分必要条件为 $\alpha^T\alpha = 1$;
(2) 当 $\alpha^T\alpha = 1$ 时，A 是不可逆矩阵;

证. (1)
充分性:
$A^2 = (I_n - \alpha\alpha^T)(I_n - \alpha\alpha^T) = I_n - 2\alpha\alpha^T + \alpha\alpha^T\alpha\alpha^T = I_n - \alpha\alpha^T = A$
必要性:
$A^2 = A$
$\Rightarrow (I_n - \alpha\alpha^T)(I_n - \alpha\alpha^T) = I_n - \alpha\alpha^T$
$\Rightarrow I_n - (2 - \alpha^T\alpha)\alpha\alpha^T = I_n - \alpha\alpha^T$
$\Rightarrow 2 - \alpha^T\alpha = 1$
$\Rightarrow \alpha^T\alpha = 1$
(2)
由 (1) 知 $A^2 = A$, 即 $A(I_n - A) = 0$, 即 $A(\alpha\alpha^T) = 0$.
所以，$r(A) + r(\alpha\alpha^T) \leq n$
而 α 是非零向量，所以 $\alpha\alpha^T$ 为非零矩阵.
所以 $r(\alpha\alpha^T) \geq 1$(事实上 $r(\alpha\alpha^T) = 1$)
所以 $r(A) \leq n-1$, 即 A 为不可逆矩阵. □

50.

证. $A^T = (I_n - P^T(PP^T)^{-1}P)^T$
$= I_n - P^T((PP^T)^T)^{-1}P$
$= I_n - P^T(PP^T)^{-1}P = A$
所以,A 是对称矩阵.
$A^2 = (I_n - P^T(PP^T)^{-1}P)(I_n - P^T(PP^T)^{-1}P)$
$= I_n - 2P^T(PP^T)^{-1}P + P^T(PP^T)^{-1}PP^T(PP^T)^{-1}P$
$= I_n - 2P^T(PP^T)^{-1}P + P^T(PP^T)^{-1}P$
$= I_n - P^T(PP^T)^{-1}P = A$
所以，$A^2 = A$. □

51.

证. 证明 $A^TA = I_n$ 即可. □

52.

解. A 为对角元素为 1 或-1 的对角矩阵. □