第五章

1.

解. (1) 由特征多项式

$$
\begin{aligned}
|\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}| &= \begin{vmatrix} \lambda-2 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ 4 & -1 & \lambda-3 \end{vmatrix} \\
&= (t-2)\cdot(t^2-5t+2)
\end{aligned}
$$

得 $\mathbf{A}$ 的特征值是 $\lambda_1=2, \lambda_2=\frac{5+\sqrt{17}}{2}, \lambda_3=\frac{5-\sqrt{17}}{2}$.

将 $\lambda_1=2$ 代入 $(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{x}=\mathbf{0}$, 得

$$
\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0}
$$

其基础解系是

$$
\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}
$$

因此属于特征值 1 的全部特征向量为

$$
k_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, k_1 \neq 0
$$

将 $\lambda_2=\frac{5+\sqrt{17}}{2}$ 代入 $(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{x}=\mathbf{0}$, 得

$$
\begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{17}}{2} & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1+\sqrt{17}}{2} & 0 \\ 4 & -1 & \frac{-1+\sqrt{17}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0}
$$

其基础解系是

$$
\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{1+\sqrt{17}}{2} \end{pmatrix}
$$

因此属于特征值 $\frac{5+\sqrt{17}}{2}$ 的全部特征向量为

$$
k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{1+\sqrt{17}}{2} \end{pmatrix}, k_2 \neq 0
$$

将 $\lambda_3 = \frac{5-\sqrt{17}}{2}$ 代入 $(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \mathbf{0}$, 得

$$\begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{17}}{2} & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{17}}{2} & 0 \\ 4 & -1 & \frac{-1-\sqrt{17}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

其基础解系是

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{-1+\sqrt{17}}{2} \end{pmatrix}$$

因此属于特征值 $\frac{5-\sqrt{17}}{2}$ 的全部特征向量为

$$k_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{-1+\sqrt{17}}{2} \end{pmatrix}, k_3 \neq 0$$

(2) 由特征多项式

$$\begin{aligned} |\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}| &= \begin{vmatrix} \lambda+1 & -2 & -2 \\ -3 & \lambda+1 & -1 \\ -2 & -2 & \lambda+1 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda+3)^2(\lambda-3) \end{aligned}$$

得 $\mathbf{A}$ 的特征值是 $\lambda_1 = \lambda_2 = -3, \lambda_3 = 3$
将 $\lambda_1 = \lambda_2 = -3$ 代入 $(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$, 得

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -3 & -2 & -1 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

其基础解系是

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

因此属于特征值 -3 的全部特征向量为

$$k_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, k_1 \neq 0$$

将 $\lambda_3 = 3$ 代入 $(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$, 得

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -3 & 4 & -1 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

其基础解系是

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

因此属于特征值 3 的全部特征向量为

$$k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, k_2 \neq 0$$

(3) 属于特征值 6 的全部特征向量为

$$k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, k_1 \neq 0$$

属于特征值 2 的全部特征向量为

$$k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, k_2, k_3\text{不全为}0$$

□

2.

解.

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = tr(\mathbf{A}) = a \\ \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \det(\mathbf{A}) = -4a - 2b^2 = -12 \\ \begin{vmatrix} -3-a & 0 & -b \\ 0 & -5 & 0 \\ -b & 0 & -1 \end{vmatrix} = -5a + 5b^2 - 15 = 0 \end{aligned}$$

解得 $\begin{cases} a = 1 \\ b = \pm 2 \\ \lambda_2 = 2 \\ \lambda_3 = 2 \end{cases}$. □

3.

解. 设 α 对应的特征值为 λ, 则

$$\mathbf{A}\alpha = \lambda\alpha$$

解得 $\lambda = -1, a = -3, b = 0$. □

28.

解. (1) 由

$$|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda-1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = x^2(x-3) = 0$$

得矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 3$.

将 $\lambda_1=\lambda_2=0$ 代入 $(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{x}=\mathbf{0}$, 得

$$\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\-1&-1&-1\\-1&-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\mathbf{0}$$

其基础解系为

$$\mathbf{x}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\mathbf{x}_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

将 $\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2$ 正交化、单位化, 得

$$\epsilon_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\epsilon_2=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$$

将 $\lambda_3=3$ 代入 $(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{x}=\mathbf{0}$, 得

$$\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\mathbf{0}$$

其基础解系为

$$\mathbf{x}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

将 $\mathbf{x}_3$ 单位化, 得

$$\epsilon_3=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

于是得正交阵

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\0&\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix},\text{使得}\mathbf{P}^T\mathbf{A}\mathbf{P}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&3\end{pmatrix}$$

(2) 由

$$|\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-3&-2&-4\\-2&\lambda&-2\\-4&-2&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-8)(\lambda+1)^2$$

得矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=8,\lambda_2=\lambda_3=-1$.

将 $\lambda_1=8$ 代入 $\mathbf{A}$ 的特征方程组, 得

$$\begin{pmatrix}5&-2&-4\\-2&8&-2\\-4&-2&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\mathbf{0}$$

其基础解系为

$$\mathbf{x}_1=\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$$

将 $\mathbf{x}_1$ 单位化, 得

$$\epsilon_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$$

将 $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$ 代入 $\mathbf{A}$ 的特征方程组, 得

$$\begin{pmatrix}-4 & -2 & -4\\-2 & -1 & -2\\-4 & -2 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

其基础解系为

$$\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}$$

将 $\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ 正交化、单位化, 得

$$\epsilon_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \epsilon_3 = \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\4\\-1\end{pmatrix}$$

于是得正交阵

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}}\\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3}\\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}}\end{pmatrix}, \text{使得}\mathbf{P}^T\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{pmatrix}8 & 0 & 0\\0 & -1 & 0\\0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

□

29.

解. $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 相似, $\mathbf{B}$ 为对角阵, 则 $\mathbf{B}$ 的对角元就是 $\mathbf{A}$ 的全部特征值. 有

$$\begin{cases} tr(\mathbf{A}) & = -1+2+y\\ \det(\mathbf{A}) & = (-1)\cdot 2\cdot y\end{cases}$$

解得 $x - 2 = y$.

将特征值 $\lambda_1 = -1$ 代入 $\mathbf{A}$ 的特征方程组, 得

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\-2 & -x-1 & -2\\-3 & -1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

其系数矩阵可由初等行变换化为

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 2\\0 & x & 0\end{pmatrix}$$

要使得特征向量存在, 必须令方程组有非零解, 所以 $x = 0, y = -2$. 解得属于特征值 -1 的特征向量为

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}$$

将特征值 $\lambda_2 = 2$ 代入 $\mathbf{A}$ 的特征方程组, 得

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

解得属于特征值 2 的特征向量为

$$\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

将特征值 $\lambda_3 = -2$ 代入 $\mathbf{A}$ 的特征方程组, 得

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -2 \\ -3 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

解得属于特征值 -2 的特征向量为

$$\mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

取

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

则有

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{B}$$

□

30.

解. $|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ -a & \lambda - 1 & -b \\ -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1) = 0$
解得特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1$
矩阵有 3 个线性无关的特征向量，则 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ 对应有两个线性无关的特征向量.
代入 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ 有

$$[\lambda I - A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -a & 0 & -b \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -(a+b) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

所以 $a + b = 0$，此时有基础解系 $(1, 0, 1)^T, (0, 1, 0)^T$. 代入 $\lambda_3 = -1$ 有

$$[\lambda I - A] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -a & -2 & -b \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

此时有基础解系 $(-1,a,1)^T$.
所以

$$P=\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&a\\1&0&1\end{bmatrix},P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$$

□

31.

解. $|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&1&-1\\-x&\lambda-4&-y\\3&3&\lambda-5\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda^2-8\lambda+16+x+3y)=0$
$\lambda=2$ 为 2 重特征值，所以 $4+x+3y=0$
则 $|\lambda I-A|=(\lambda-2)^2(\lambda-6)=0$ 解得特征值 $\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=6$
矩阵有 3 个线性无关的特征向量，则 $\lambda_1=\lambda_2=2$ 对应有两个线性无关的特征向量.
代入 $\lambda_1=\lambda_2=2$ 有

$$[\lambda I-A]=\begin{bmatrix}1&1&-1\\-x&-2&-y\\3&3&-3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&x-2&-(x+y)\\0&0&0\end{bmatrix}$$

所以 $x=2,y=-2$，此时有基础解系 $(1,0,1)^T,(0,1,1)^T$.
代入 $\lambda_3=6$ 有

$$[\lambda I-A]=\begin{bmatrix}5&1&-1\\-2&2&2\\3&3&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&-1&-1\\0&3&2\\0&0&0\end{bmatrix}$$

此时有基础解系 $(1,-2,3)^T$.
所以

$$P=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&-2\\1&1&3\end{bmatrix},P^{-1}AP=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&6\end{bmatrix}$$

□

32.

解. 记 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$.

$$|\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&-2\\-2&\lambda-1&-2\\-2&-2&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-5)(\lambda+1)^2$$

所以 $\mathbf{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=5,\lambda_2=\lambda_3=-1$.
将 $\lambda_1=5$ 代入特征方程组, 有

$$\begin{pmatrix}4&-2&-2\\-2&4&-2\\-2&-2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\mathbf{0}$$

解得属于特征值 5 的特征向量为

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

将 $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$ 代入特征方程组, 有

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

解得属于特征值 -1 的线性无关的特征向量为

$$\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

所以 $\mathbf{A}$ 可对角化, 取

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

则有

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{100} = \mathbf{P} \begin{pmatrix} 5^{100} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5^{100}+2 & 5^{100}-1 & 5^{100}-1 \\ 5^{100}-1 & 5^{100}+2 & 5^{100}-1 \\ 5^{100}-1 & 5^{100}-1 & 5^{100}+2 \end{pmatrix}$$

□

35.

解. 此二次型的矩阵表示式为

$$\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -4 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

先求 $\mathbf{A}$ 的特征值和特征向量

$$|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 2 & -2 \\ 2 & \lambda-4 & 4 \\ -2 & 4 & \lambda-4 \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda-9)$$

所以 $\mathbf{A}$ 的特征值为 $\lambda_1 = 9, \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

将 λ_1 代入特征方程 $(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})\alpha = \mathbf{0}$ 中, 即有

$$\begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \alpha = \mathbf{0}$$

解得它的一个基础解系为 $\alpha_1 = [1, -2, 2]^T$, 同样, 将 $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ 代入特征方程中, 求得它的基础解系为

$$\alpha_2 = [2, 0, -1]^T, \alpha_3 = [0, 1, 1]^T$$

将 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 单位正交化, 注意到 α_1 已与 α_2, α_3 正交,

$$\begin{aligned}
\epsilon_1 &= \frac{\alpha_1}{|\alpha_1|} = \frac{1}{3}[1, -2, 2]^T \\
\epsilon_2 &= \frac{\alpha_2}{|\alpha_2|} = \frac{1}{\sqrt{5}}[2, 0, -1]^T \\
\epsilon_3 &= \frac{\alpha_3 - \epsilon_2\epsilon_2^T\alpha_3}{\alpha_3 - \epsilon_2\epsilon_2^T\alpha_3} = \frac{1}{\sqrt{39}}[2, 5, 4]^T
\end{aligned}$$

以 $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ 组成正交矩阵

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{39}} \\ -\frac{2}{3} & 0 & \frac{5}{\sqrt{39}} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{\sqrt{39}} \end{pmatrix}$$

作正交变换 $\mathbf{y} = \mathbf{P}^T\mathbf{x}$, 在此变换下, 二次型化为标准形, 即

$$\begin{aligned}
f(x_1, x_2, x_3) &= \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} \overset{\mathbf{A}=\mathbf{P}\Lambda\mathbf{P}^T}{=} \mathbf{x}^T\mathbf{P}\Lambda\mathbf{P}^T\mathbf{x} \overset{\mathbf{y}=\mathbf{P}^T\mathbf{x}}{=} \mathbf{y}^T\Lambda\mathbf{y} \\
&= \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \\
&= 9y_1^2
\end{aligned}$$

□

36. 更正: 特征值之积为-12.

解. 由

$$\begin{cases} tr(\mathbf{A}) & = a = 1 \\ \det(\mathbf{A}) & = -2b^2 - 4a = -12 \end{cases}$$

解得 $a = 1, b = 2$.

求得 $\mathbf{A}$ 的特征值和特征向量为

$$\begin{aligned}
\text{特征值}\lambda_1 = -3\text{对应的特征向量为}\alpha_1 &= [1, 0, -2]^T \\
\text{特征值}\lambda_2 = \lambda_3 = 2\text{对应的特征向量为}\alpha_2 &= [2, 0, 1]^T, \alpha_3 = [0, 1, 0]^T
\end{aligned}$$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 已正交, 只需单位化,

$$\begin{aligned}
\epsilon_1 &= \frac{1}{\sqrt{5}}[1, 0, -2]^T \\
\epsilon_2 &= \frac{1}{\sqrt{5}}[2, 0, 1]^T \\
\epsilon_3 &= [0, 1, 0]^T
\end{aligned}$$

以 $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ 组成正交矩阵,

$$\mathbf{P} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

作正交变换 $\mathbf{y} = \mathbf{P}^T \mathbf{x}$, 在此变换下, 二次型化为标准形, 即

$$f(x_1, x_2, x_3) = -3y_1^2 + 2y_2^2 + 2y_3^2$$

□

39

解. 判断是否所有顺序主子式都大于 0 即可，懒得写了.......... □