期中考试答案

一.

1.

解. 将行列式按第一列展开:

$$B_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b & ab & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix}$$

$$(a+b)\begin{vmatrix} a+b & ab & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b & ab & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & a+b & ab \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} ab & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b & ab & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & a+b & ab \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix}$$

$= (a+b)B_{n-1} - abB_{n-2}$

我们可以得到:

$B_n - bB_{n-1} = aB_{n-1} - abB_{n-2} = a(B_{n-1} - bB_{n-2})$

$B_1 = a+b$, $B_2 = \begin{vmatrix} a+b & ab \\ 1 & a+b \end{vmatrix} = a^2 + ab + b^2$

$B_2 - bB_1 = a^2 + ab + b^2 - ab - b^2 = a^2$

所以 $B_n - bB_{n-1} = a^{n-2}a^2 = a^n$

同理可得 $B_n - aB_{n-1} = b^{n-2}b^2 = b^n$

当 $a \neq b$ 时:

得到 $aB_n - bB_n = a^{n+1} - b^{n+1}$

即 $B_n = \frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}$

当 $a = b$ 时:

得到 $B_n - aB_{n-1} = a^n$ 即 $\frac{B_n}{a^n} - \frac{B_{n-1}}{a^{n-1}} = 1$

又 $\frac{B_1}{a} = 2$, 所以 $\frac{B_n}{a^n} = n+1$, 即 $B_n = (n+1)a^n$. □

2.

解. 1. 没有 $x_i=0$

$$A_n=\begin{vmatrix}x_1 & a & \cdots & a\\ a & x_2 & \cdots & a\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a & a & \cdots & x_n\end{vmatrix} \xlongequal{R_2-R_1,\ldots,R_n-R_1} \begin{vmatrix}x_1 & a & \cdots & a\\ a-x_1 & x_2-a & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a-x_1 & 0 & \cdots & x_n-a\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{C_1+\frac{x_1-a}{x_2-a}C_2,\ldots,C_1+\frac{x_1-a}{x_n-a}C_n} \begin{vmatrix}x_1+\frac{x_1-a}{x_2-a}a+\ldots+\frac{x_1-a}{x_n-a}a & a & \cdots & a\\ a-x_1 & x_2-a & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a-x_1 & 0 & \cdots & x_n-a\end{vmatrix}$$

$=(x_1+\frac{x_1-a}{x_2-a}a+\ldots+\frac{x_1-a}{x_n-a}a)(x_2-a)(x_3-a)\ldots(x_n-a)$

2. 存在一个 $x_i=0$, 其他不为 0.

$$A_n=\begin{vmatrix}x_1 & a & \cdots & a\\ a & x_2 & \cdots & a\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a & a & \cdots & a\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a & a & \cdots & x_n\end{vmatrix} \xlongequal{R_1-R_i,\ldots,R_n-R_i} \begin{vmatrix}x_1-a & 0 & \cdots & 0\\ 0 & x_2-a & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a & a & \cdots & a\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & x_n-a\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{R_i-\frac{a}{x_1-a}R_1,\ldots,R_i-\frac{a}{x_n-a}R_n} \begin{vmatrix}x_1-a & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0\\ 0 & x_2-a & \cdots & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & a & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & x_n-a\end{vmatrix}$$

$=(x_1-a)(x_2-a)\ldots(x_{i-1}-a)a(x_{i+1}-a)\ldots(x_n-a)$

2. 存在两个以上 $x_i=0$.

则 $A_n=0$

$\square$

二.

解. (1)

$AA^*=|A|E$

$\Rightarrow |AA^*|=||A|E|=|A|^n$

$\Rightarrow |A||A^*|=|A|^n$

$\Rightarrow |A^*|=|A|^{n-1}=3^{n-1}$

(2)

$AA^*=|A|E$

若 A 可逆，则 $A^*=|A|A^{-1}$

所以，$|(\frac{1}{4}A)^{-1}-2A^*|$

$=|4A^{-1}-2A^*|$

$=|4A^{-1}-2|A|A^{-1}|$

$=|(4-2|A|)A^{-1}|$

$=|(-2)A^{-1}|$

$= (-2)^n|A|^{-1}$
$= \frac{(-2)^n}{3}$ $\square$

三.

解. $[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4] = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -4 & -5 \\ 1 & 5 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

$\xrightarrow{R_2-2R_1,R_3+R_1,R_4-R_1,R_5-R_1} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -5 & -5 \\ 0 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & -6 & -6 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

所以，向量组的秩为 2，极大线性无关组可以为 α_1,α_2.

$\square$

四.

解. $[A|b] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 3 & -3 & -3 & 4 & 7 \\ 4 & 5 & -5 & -5 & 7 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1-2R_2,R_3-3R_2,R_4-4R_2} \begin{bmatrix} 0 & 3 & -3 & -3 & 5 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 6 & -6 & -6 & 10 & 4 \\ 0 & 9 & -9 & -9 & 15 & 6 \end{bmatrix}$

$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & -3 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{3R_1+R_2} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & -3 & -3 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

我们可以得到对应的齐次方程的基础解系为

$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/3 \\ -5/3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

非齐次方程特解为

$\begin{bmatrix} 5/3 \\ 2/3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

所以通解为

$\begin{bmatrix} 5/3 \\ 2/3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_3 \begin{bmatrix} 1/3 \\ -5/3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ (k_1,k_2,k_3 可取任意实数) $\square$

五.

证. (1)$\alpha_1, ..., \alpha_s$ 可由 $\beta_1, ..., \beta_t$ 线性表示.
则令
$\alpha_1 = k_{11}\beta_1 + k_{21}\beta_2 + ... + k_{t1}\beta_t$
$\vdots$
$\alpha_s = k_{1s}\beta_1 + k_{2s}\beta_2 + ... + k_{ts}\beta_t$
用矩阵可表示为 $[\alpha_1, ..., \alpha_s] = [\beta_1, ..., \beta_t]\begin{bmatrix} k_{11} & \cdots & k_{1s} \\ k_{21} & \cdots & k_{2s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{t1} & \cdots & k_{ts} \end{bmatrix} = [\beta_1, ..., \beta_t]A$
要证 $\alpha_1, ..., \alpha_s$ 线性相关,只要证 $[\alpha_1, ..., \alpha_s]X = 0$ 有非零解,只要证 $[\beta_1, ..., \beta_t]AX = 0$ 有非零解.
注意到 $r(A) \leq min\{t, s\} = t < s$, 所以 $AX = 0$ 有非零解, 则 $[\beta_1, ..., \beta_t]AX = 0$ 也有非零解，结论得证.
(2) $\alpha_1, ..., \alpha_s$ 线性相关
则存在不全为 0 的数 $k_1, ..., k_s$, 使得

$$k_1\alpha_1 + ... + k_s\alpha_s = 0$$

乘上 A 得到

$$A(k_1\alpha_1 + ... + k_s\alpha_s = 0) = 0$$
$$\Rightarrow k_1A\alpha_1 + ... + k_sA\alpha_s = 0$$

所以，$A\alpha_1, ..., A\alpha_s$ 线性相关.

□

六.

证. (1) 首先我们有 $r(A) + r(B) = r(\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix})$
$\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1+R_2} \begin{bmatrix} A & B \\ O & B \end{bmatrix} \xrightarrow{C_1+C_2} \begin{bmatrix} A+B & B \\ O & B \end{bmatrix}$
所以，$r(A) + r(B) = r(\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}) = r(\begin{bmatrix} A+B & B \\ O & B \end{bmatrix}) \geq r(A+B)$ 相减同理可得。
(2)$r(\begin{bmatrix} A & B \\ O & B \end{bmatrix}) = r(\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}) = r(A) + r(B)$
(3)$\begin{bmatrix} A & C \\ O & B \end{bmatrix} \xrightarrow{C_2 - A^{-1}CC_1} \begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}$
所以，$r(\begin{bmatrix} A & C \\ O & B \end{bmatrix}) = r(\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}) = r(A) + r(B)$ □

七.

证. (1)$r(A) = r$, 则存在初等矩阵 P, Q, 使得 $A = P\begin{bmatrix} E_r & O \\ O & O \end{bmatrix}Q$
而 $E_r = E_{11} + E_{22} + ... + E_{rr}$($E_{ii}$ 为 i 行 i 列元素为 1，其他元素都是 0 的 r 阶矩阵)
所以，$A = P\begin{bmatrix} E_r & O \\ O & O \end{bmatrix}Q = P(\begin{bmatrix} E_{11} & O \\ O & O \end{bmatrix} + ... + \begin{bmatrix} E_{rr} & O \\ O & O \end{bmatrix})Q$

$= P\begin{bmatrix} E_{11} & O \\ O & O \end{bmatrix} Q + ... + P\begin{bmatrix} E_{rr} & O \\ O & O \end{bmatrix} Q$

注意到每个 $P\begin{bmatrix} E_{ii} & O \\ O & O \end{bmatrix} Q$ 的秩都是 1, 所以 A 能写成 r 个秩为 1 的矩阵之和.

(2)$r(A) = n$, 则存在初等矩阵 P, Q, 使得 $A = P\begin{bmatrix} E_n \\ O \end{bmatrix} Q$

注意到初等矩阵都可逆，所以我们可以取秩为 n 的矩阵 $B = Q^{-1}[E_n, O]P^{-1}$

$BA = Q^{-1}[E_n, O]P^{-1}P\begin{bmatrix} E_n \\ O \end{bmatrix} Q = E_n$

所以这样的 B 存在. □

八.

证. 令 $k_1(e_1+e_2) + k_2(e_2+e_3) + ... + k_n(e_n+e_1) = 0$
如果 $k_1, ..., k_n$ 只能为 0，则线性无关，反之，线性相关.
$k_1(e_1+e_2) + k_2(e_2+e_3) + ... + k_n(e_n+e_1)$
$= (k_1+k_n)e_1 + (k_1+k_2)e_2 + ... + (k_{n-1}+k_n)e_n = 0$
而又 $e_1, ..., e_n$ 线性无关，所以我们可得到方程组：

$$\begin{cases} k_1 + k_n = 0 \\ k_1 + k_2 = 0 \\ \vdots \\ k_{n-1} + k_n = 0 \end{cases}$$

系数矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

A 的行列式为

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+n}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$= 1 + (-1)^{1+n}$

1. 若 n 为偶数，则 $1 + (-1)^{1+n} = 0$, 所以 $AX = 0$ 有非零解，所以 $e_1+e_2, e_2+e_3, ..., e_n+e_1$ 线性相关.

2. 若 n 为奇数，则 $1 + (-1)^{1+n} = 2 \neq 0$, 所以 $AX = 0$ 有只有零解，所以 $e_1+e_2, e_2+e_3, ..., e_n+e_1$ 线性无关.

□