第一章：矩阵

1. 计算下列矩阵的乘积:

(1) $\begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & 7 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$;

解.

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & 7 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35 \\ 6 \\ 49 \end{bmatrix}$$

□

(2) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$;

解.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 10$$

□

(3) $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix}$;

解.

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$$

□

(4) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix}$;

解.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -7 & 8 \\ 20 & -5 & -6 \end{bmatrix}$$

$\square$

(5) $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$;

解. $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 & a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 & a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

$= a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3$ $\square$

2. 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}$, 求 $3AB - 2A$.

解. $3AB = 3 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 0 & 5 & 8 \\ 0 & -5 & 6 \\ 2 & 9 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 15 & 24 \\ 0 & -15 & 18 \\ 6 & 27 & 0 \end{bmatrix}$

$2A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

$3AB - 2A = \begin{bmatrix} -2 & 13 & 22 \\ -2 & -17 & 20 \\ 4 & 29 & -2 \end{bmatrix}$ $\square$

4.(1) 设 A, B 为 n 阶矩阵，且 A 为对称阵，证明 B^TAB 也是对称矩阵;

证. 因为 A 为对称矩阵，所以 $A^T = A$
$(B^TAB)^T = ((B^TA)B)^T = B^T(B^TA)^T = B^T(A^TB) = B^TA^TB = B^TAB$
所以 B^TAB 也是对称矩阵 $\square$

(2) 设 A, B 为 n 阶对称矩阵, 证明 AB 为对称矩阵的充分必要条件是 $AB = BA$

证. A, B 为 n 阶对称矩阵, 则 $A^T = A, B^T = B$
$(AB)^T = AB \Leftrightarrow B^TA^T = AB \Leftrightarrow BA = AB$ $\square$

7. 已知 $\begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ a \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ 6 \\ b \end{bmatrix}$, 求 a 和 b.

证. $\begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ a \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4a-3 \\ 6 \\ 2a+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ 6 \\ b \end{bmatrix}$
得到:

$$\begin{cases} 4a - 3 = b \\ 2a + 3 = b \end{cases}$$

解得：

$$\begin{cases} a=3 \\ b=9 \end{cases}$$

□

9. 计算下列矩阵的 n 次方幂：
(1) 设 $A=\alpha^T\beta$，其中 $\alpha=[1,2,3], \beta=[1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}]$，求 A^n；

解. $A^n=(\alpha^T\beta)^n=(\alpha^T\beta)(\alpha^T\beta)\cdots(\alpha^T\beta)=\alpha^T(\beta\alpha^T)(\beta\alpha^T)\cdots(\beta\alpha^T)\beta$
$=\alpha^T(\beta\alpha^T)^{n-1}\beta$

$\alpha^T\beta=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\\ 2 & 1 & \frac{2}{3}\\ 3 & \frac{3}{2} & 1\end{bmatrix}$

$\beta\alpha^T=\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}=3$

所以 $A^n=(\beta\alpha^T)^{n-1}\alpha^T\beta=3^{n-1}\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\\ 2 & 1 & \frac{2}{3}\\ 3 & \frac{3}{2} & 1\end{bmatrix}$

□

(2) 设 $B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 6\\ 3 & 6 & 9\end{bmatrix}$ 求 B^n；

解. $B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 6\\ 3 & 6 & 9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix}=\alpha^T\beta$
其中 $\alpha=\beta=[1,2,3]$

$\beta\alpha^T=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}=14$

由 1 可知 $B^n=(\beta\alpha^T)^{n-1}\alpha^T\beta=14^{n-1}B$ □

10. 试证：(1) 与所有 n 阶对角阵乘法可交换的矩阵也必是 n 阶对角阵；

证. 假设 n 阶对角阵为 $B=\begin{bmatrix}b_{11} & & & \\ & b_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_{nn}\end{bmatrix}$

与所有 n 阶对角阵可交换的矩阵为 $A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}$

$$BA=\begin{bmatrix}b_{11} & & & \\ & b_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}b_{11} & a_{12}b_{11} & \cdots & a_{1n}b_{11}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1}b_{nn} & a_{n2}b_{nn} & \cdots & a_{nn}b_{nn}\end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & & & \\ & b_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{22} & \cdots & a_{1n}b_{nn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}b_{11} & a_{n2}b_{22} & \cdots & a_{nn}b_{nn} \end{bmatrix}$$

若 $AB = BA$ 则当 $i \neq j$ 时有 $a_{ij}b_{ii} = a_{ij}b_{jj}$
由于 B 是任意的，所以 $b_{ii} = b_{jj}$ 不一定成立
所以，要使等式恒成立，必有 $a_{ij} = 0 (i \neq j)$, 即 A 为对角矩阵 □

(2) 与所有 n 阶矩阵乘法可交换矩阵为纯量阵；

证. 与所有矩阵乘法可交换则必然与所有对角阵乘法可交换，所以由 (1) 知该矩阵必为对角阵
此时由题意知 (1) 中 A 是任意的, 即对于任意 A 当 $i \neq j$ 时有 $a_{ij}b_{ii} = a_{ij}b_{jj}$
由于 A 是任意的，所以 $a_{ij} = 0$ 不一定成立
所以，要使等式恒成立，对于任意 $i \neq j$ 有 $b_{ii} = b_{jj}$, 即 B 为纯量阵 □

11. 证明：两个对角元为 1 的上三角矩阵乘积仍然是对角元为 1 的上三角矩阵.

证. 令 $A = (a_{ij})_{n\times n}$,$B = (b_{ij})_{n\times n}$, 由题意知，当 $i = j$ 时 $a_{ij} = b_{ij} = 1$, 当 $i > j$ 时 $a_{ij} = b_{ij} = 0$
$AB = (\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj})_{n\times n}$
当 $i = j$ 时，$\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki}$
$= \sum\limits_{1\le k<i} a_{ik}b_{ki} + \sum\limits_{k=i} a_{ik}b_{ki} + \sum\limits_{i<k\le n} a_{ik}b_{ki} = a_{ii}b_{ii} = 1$
当 $i > j$ 时，$\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = \sum\limits_{1\le k<i} a_{ik}b_{kj} + \sum\limits_{i\le k\le n} a_{ik}b_{kj} = 0$
所以 AB 也是对角元为 1 的上三角矩阵 □

12. 设 n 元向量 $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$，若 $A = yx^T$，求 $A^k (k \in N^+)$.

解. $yx^T = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1y_1 & x_2y_1 & \cdots & x_ny_1 \\ x_1y_2 & x_2y_2 & \cdots & x_ny_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1y_n & x_2y_n & \cdots & x_ny_n \end{bmatrix}$

$x^Ty = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \sum\limits_{i=1}^{n} x_iy_i$

$A^k = (yx^T)^k = (yx^T)(yx^T)\cdots(yx^T) = y(x^Ty)(x^Ty)\cdots(x^Ty)x^T$

$= (x^Ty)^{k-1}yx^T = (\sum\limits_{i=1}^{n} x_iy_i)^{k-1}yx^T = (\sum\limits_{i=1}^{n} x_iy_i)^{k-1} \begin{bmatrix} x_1y_1 & x_2y_1 & \cdots & x_ny_1 \\ x_1y_2 & x_2y_2 & \cdots & x_ny_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1y_n & x_2y_n & \cdots & x_ny_n \end{bmatrix}$
□

13. 设 $n(n\geq 2)$ 元向量 $x=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\0\\\vdots\\0\\\frac{1}{2}\end{bmatrix}$, $A=I_n-xx^T, B=I_n+2xx^T$, 求 AB.

解. $AB=(I_n-xx^T)(I_n+2xx^T)=I_n-xx^T+2xx^T-2xx^Txx^T$
$=I_n+xx^T-2xx^Txx^T$

$x^Tx=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\0\\\vdots\\0\\\frac{1}{2}\end{bmatrix}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$ 所以: $AB=I_n+xx^T-2xx^Txx^T=$
$I_n+xx^T-2x(x^Tx)x^T=I_n+xx^T-xx^T=I_n$ □

14. 设 A 是 $m\times n$ 矩阵. 证明: 若对于任何 n 元列向量 x 成立 $Ax=0$, 则 $A=O_{m\times n}$.

证. 假设 $A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}$, $x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}$ 则 $Ax=\begin{bmatrix}\sum\limits_{i=1}^{n}a_{1i}x_i\\\sum\limits_{i=1}^{n}a_{2i}x_i\\\vdots\\\sum\limits_{i=1}^{n}a_{mi}x_i\end{bmatrix}=0$

由于 x 的任意性，不妨假设 $x=\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}$ 此时 $Ax=\begin{bmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{m1}\end{bmatrix}=0$

接下来不妨假设 $x=\begin{bmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{bmatrix}$ 此时 $Ax=\begin{bmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{m2}\end{bmatrix}=0$

...
经过 n 次假设后我们得到 A 的每列都是 0，即 $A=O_{m\times n}$ □

24. 设

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\-1 & 2 & 1 & 0\\1 & 1 & 0 & 1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\-1 & 2 & 0 & 1\\1 & 0 & 4 & 1\\-1 & -1 & 2 & 0\end{bmatrix}$$

利用分块矩阵求 AB.

解. 令 $A=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\A_{21} & A_{22}\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}B_{11} & B_{12}\\B_{21} & B_{22}\end{bmatrix}$
其中,
$A_{11}=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}=I, A_{12}=\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}=O, A_{21}=\begin{bmatrix}-1 & 2\\1 & 1\end{bmatrix}, A_{22}=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}=I$

$B_{11}=\begin{bmatrix}1&0\\-1&2\end{bmatrix}, B_{12}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=I, B_{21}=\begin{bmatrix}1&0\\-1&-1\end{bmatrix}, B_{22}=\begin{bmatrix}4&1\\2&0\end{bmatrix}$

则, $AB=\begin{bmatrix}A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22}\\A_{21}B_{11}+A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12}+A_{22}B_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}B_{11} & I\\A_{21}B_{11}+B_{21} & A_{21}+B_{22}\end{bmatrix}$

$A_{21}B_{11}+B_{21}=\begin{bmatrix}-1&2\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\-1&2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\-1&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&4\\-1&1\end{bmatrix}$

$A_{21}+B_{22}=\begin{bmatrix}-1&2\\1&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4&1\\2&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&3\\3&1\end{bmatrix}$

所以 $AB=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\-1&2&0&1\\-2&4&3&3\\-1&1&3&1\end{bmatrix}$ □

25. 求矩阵 A,B 的秩，其中:

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&-5\\4&7&1\end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix}3&2&0&5&0\\3&-2&3&6&-1\\2&0&1&5&-3\\1&6&-4&-1&4\end{bmatrix}$$

解. $A\xrightarrow[R_3-4R_1]{R_2-2R_1}\begin{bmatrix}1&2&3\\0&-1&-11\\0&-1&-11\end{bmatrix}\xrightarrow{R_3-R_2}\begin{bmatrix}1&2&3\\0&-1&-11\\0&0&0\end{bmatrix}$

所以，$rank(A)=2$

$B\xrightarrow{R_{14}}\begin{bmatrix}1&6&-4&-1&4\\3&-2&3&6&-1\\2&0&1&5&-3\\3&2&0&5&0\end{bmatrix}\xrightarrow[R_3-2R_1;R_4-3R_1]{R_2-3R_1}\begin{bmatrix}1&6&-4&-1&4\\0&-20&15&9&-13\\0&-12&9&7&-11\\0&-16&12&8&-12\end{bmatrix}$

$\xrightarrow[R_{24}]{\frac{1}{4}R_4}\begin{bmatrix}1&6&-4&-1&4\\0&-4&3&2&-3\\0&-12&9&7&-11\\0&-20&15&9&-13\end{bmatrix}\xrightarrow[R_4-5R_2]{R_3-3R_2}\begin{bmatrix}1&6&-4&-1&4\\0&-4&3&2&-3\\0&0&0&1&-2\\0&0&0&-1&2\end{bmatrix}$

$\xrightarrow{R_4+R_3}\begin{bmatrix}1&6&-4&-1&4\\0&-4&3&2&-3\\0&0&0&1&-2\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$ 所以，$rank(B)=3$ □

26. 设

$$A=\begin{bmatrix}1&2&-1&1\\3&2&\lambda&-1\\5&6&3&\mu\end{bmatrix}$$

已知 $rank(A)=2$, 求 λ 和 μ 的值.

解. $A\xrightarrow[R_5-5R_1]{R_3-3R_1}\begin{bmatrix}1&2&-1&1\\0&-4&\lambda+3&-4\\0&-4&8&\mu-5\end{bmatrix}\xrightarrow{R_3-R_2}\begin{bmatrix}1&2&-1&1\\0&-4&\lambda+3&-4\\0&0&5-\lambda&\mu-1\end{bmatrix}$

而 $rank(A)=2$, 所以 $5-\lambda=0,\mu-1=0$, 即 $\lambda=5,\mu=1$ □

28. 设 A 是 n 阶方阵, 满足 $A^2 = I_n$, 求证:$rank(A+I_n) + rank_(A-I_n) = n$.

证. $A^2 = I_n \Rightarrow A^2 - I_n = O \Rightarrow (A+I_n)(A-I_n) = O$
由 $r(A)+r(B) \geq r(A+B)$, 得到 $r(A+I_n)+r(A-I_n) \geq r(2A) = r(A) = n$
由 $r(A)+r(B) \leq r(AB)+n$, 得到 $r(A+I_n)+r(A-I_n) \leq n$
所以，我们得到 $r(A+I_n)+r(A-I_n) = n$ □

29. 设 A 为 n 阶矩阵，则 $rank(A) = 1$ 的充分必要条件是存在矩阵 $B_{n\times 1}$ 和 $C_{n\times 1}(B \neq O, C \neq O)$, 使得 $A = BC$.

证. 1. 必要性:
因为 $rank(A) = 1$, 则 A 为非零矩阵且 A 的任意两行成比例，所以存在向量 α,
以及不全为 0 的实数 $b_1, b_2 \cdots b_n$，使得 $A = \begin{bmatrix} b_1\alpha \\ b_2\alpha \\ \vdots \\ b_n\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \alpha$

所以，存在 $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}, C = \alpha$，使得 $A = BC$.
2. 充分性:
因为 $A = BC$，则 A 的每行成比例，所以 $rank(A) = 1$ □

30. 设 A 为 $m \times n$ 矩阵，且 $rank(A) = r$，从 A 中任取 s 行构建一个 $s \times n$ 矩阵 B，证明 $rank(B) \geq r + s - m$

证. 不妨假设 A 中剩下的 $m-s$ 行构成矩阵 C，则有 $rank(A) \leq rank(B) + rank(C)$
而 C 为 $(m-s)\times n$ 的矩阵，所以 $rank(C) \leq m - s$
则 $rank(A) \leq rank(B) + rank(C) \leq rank(B) + m - s$
$rank(B) \geq rank(A) + s - m = r + s - m$ □

31. 设 $n(n \geq 3)$ 阶矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ a & 1 & a & \cdots & a \\ a & a & 1 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & a & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

若矩阵 A 的秩为 $n-1$, 求 a.

解. $A \xrightarrow[C_3+C_1 \cdots C_n+C_1]{C_2+C_1} \begin{bmatrix} 1+(n-1)a & a & a & \cdots & a \\ 1+(n-1)a & 1 & a & \cdots & a \\ 1+(n-1)a & a & 1 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1+(n-1)a & a & a & \cdots & 1 \end{bmatrix}$

$$\xrightarrow[R_3-R_1\cdots R_n-R_1]{R_2-R_1}\begin{bmatrix}1+(n-1)a & a & a & \cdots & a\\ 0 & 1-a & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1-a & \cdots & a\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-a\end{bmatrix}$$

$rank(A)=n-1$, 所以 $1+(n-1)a=0, a=-\frac{1}{n-1}$ □

32. 用初等行变换将下列矩阵化为阶梯型矩阵:

(1) $\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & -1 & 0 & -2\\ 1 & 1 & 3 & 2\\ 2 & 2 & 6 & 4\end{bmatrix}$; (2) $\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 5 & 12\\ 6 & 7 & 8 & 0 & -9\\ 26 & 21 & 26 & -10 & -51\\ 15 & 14 & 13 & -15 & -54\end{bmatrix}$

(1)

解. $A\xrightarrow[R_4-2R_1]{R_3-R_1}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & -1 & 0 & -2\\ 0 & -1 & 0 & -2\\ 0 & -2 & 0 & -4\end{bmatrix}\xrightarrow[R_3-R_2]{R_4-2R_2}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & -1 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

□

(2)

解. $B\xrightarrow[R_3-26R_1;R_4-15R_1]{R_2-6R_1}\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 5 & 12\\ 0 & 7 & 14 & -30 & -81\\ 0 & 21 & 52 & -140 & -363\\ 0 & 14 & 28 & -90 & -234\end{bmatrix}\xrightarrow[R_4-2R_2]{R_3-3R_2}\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 5 & 12\\ 0 & 7 & 14 & -30 & -81\\ 0 & 0 & 10 & -50 & -120\\ 0 & 0 & 0 & -30 & -72\end{bmatrix}$

□

33. 判断下列矩阵是否有相同的最简阶梯型:

(1) $\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 6\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & -1 & 5\\ 0 & 3 & 3\\ 0 & 2 & 2\end{bmatrix}$;

(2) $\begin{bmatrix}-1 & 0 & 4\\ 3 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & -1 & 5\\ -1 & 4 & -2\\ 0 & 3 & 3\end{bmatrix}$;

(1)

解. $\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 6\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}\xrightarrow{R_2-2R_1}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}\xrightarrow{R_1-2R_3}\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}\xrightarrow{R_{23}}\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}1 & -1 & 5\\ 0 & 3 & 3\\ 0 & 2 & 2\end{bmatrix}\xrightarrow[\frac{1}{3}R_2]{\frac{1}{2}R_3}\begin{bmatrix}1 & -1 & 5\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}\xrightarrow[R_1+R_2]{R_3-R_2}\begin{bmatrix}1 & 0 & 6\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

所以，最简阶梯型不同。 □

(2)

解. $\begin{bmatrix}-1&0&4\\3&0&-1\\0&1&-1\end{bmatrix}\xrightarrow{R_2+3R_1}\begin{bmatrix}-1&0&4\\0&0&11\\0&1&-1\end{bmatrix}\xrightarrow[R_{23}]{\frac{1}{11}R_2}\begin{bmatrix}-1&0&4\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow[-R_1]{R_1-4R_3;R_2+R_3}$
$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix}1&-1&5\\-1&4&-2\\0&3&3\end{bmatrix}\xrightarrow{R_2+R_1}\begin{bmatrix}1&-1&5\\0&3&3\\0&3&3\end{bmatrix}\xrightarrow[\frac{1}{3}R_2]{R_2-R_3}\begin{bmatrix}1&-1&5\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{R_1+R_2}\begin{bmatrix}1&0&6\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}$
所以，最简阶梯型不同。 □

(思考题) 证明 $\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ik}b_{ki}=\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{m}b_{ki}a_{ik}$

证. $\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ik}b_{ki}=\sum\limits_{i=1}^{m}(a_{i1}b_{1i}+a_{i2}b_{2i}+\cdots+a_{in}b_{ni})$
$=\sum\limits_{i=1}^{m}a_{i1}b_{1i}+\sum\limits_{i=1}^{m}a_{i2}b_{2i}+\cdots+\sum\limits_{i=1}^{m}a_{in}b_{ni}=\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{m}a_{ik}b_{ki}=\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{m}b_{ki}a_{ik}$ □

(思考题) 证明:
(1) $(AB)C=A(BC)$

证. 假设 $A=(a_{ij})_{m\times k}$, $B=(b_{ij})_{k\times l}$, $C=(c_{ij})_{l\times n}$
则 AB 的第 i 行第 j 列元素为: $\sum\limits_{h=1}^{k}a_{ih}b_{hj}$, 即 $AB=(\sum\limits_{h=1}^{k}a_{ih}b_{hj})_{m\times l}$
我们有 AB 的第 i 行元素为: $(\sum\limits_{h=1}^{k}a_{ih}b_{h1},\sum\limits_{h=1}^{k}a_{ih}b_{h2},\cdots,\sum\limits_{h=1}^{k}a_{ih}b_{hl})$
所以,$(AB)C$ 的 i 行 j 列元素为 $c_{1j}\sum\limits_{h=1}^{k}a_{ih}b_{h1}+c_{2j}\sum\limits_{h=1}^{k}a_{ih}b_{h2}+\cdots+c_{lj}\sum\limits_{h=1}^{k}a_{ih}b_{hl}$
$=\sum\limits_{g=1}^{l}c_{gj}\sum\limits_{h=1}^{k}a_{ih}b_{hg}=\sum\limits_{g=1}^{l}\sum\limits_{h=1}^{k}a_{ih}b_{hg}c_{gj}$, 即 $(AB)C=(\sum\limits_{g=1}^{l}\sum\limits_{h=1}^{k}a_{ih}b_{hg}c_{gj})_{m\times n}$
下面我们求 $A(BC)$:
首先我们求得 $BC=(\sum\limits_{g=1}^{l}b_{ig}c_{gj})_{k\times n}$
则 BC 的 j 列元素为: $(\sum\limits_{g=1}^{l}b_{1g}c_{gj},\sum\limits_{g=1}^{l}b_{2g}c_{gj},\cdots\sum\limits_{g=1}^{l}b_{kg}c_{gj})$
所以 $A(BC)$ 的 i 行 j 列元素为 $a_{i1}\sum\limits_{g=1}^{l}b_{1g}c_{gj}+a_{i2}\sum\limits_{g=1}^{l}b_{2g}c_{gj}+a_{ik}\sum\limits_{g=1}^{l}b_{kg}c_{gj}$
$=\sum\limits_{h=1}^{k}a_{ih}\sum\limits_{g=1}^{l}b_{hg}c_{gj}=\sum\limits_{h=1}^{k}\sum\limits_{g=1}^{l}a_{ih}b_{hg}c_{gj}$, 即 $A(BC)=(\sum\limits_{h=1}^{k}\sum\limits_{g=1}^{l}a_{ih}b_{hg}c_{gj})_{m\times n}$
而 $\sum\limits_{g=1}^{l}\sum\limits_{h=1}^{k}a_{ih}b_{hg}c_{gj}=\sum\limits_{h=1}^{k}\sum\limits_{g=1}^{l}a_{ih}b_{hg}c_{gj}$
所以 $(AB)C=A(BC)$ □

(2) $C(A+B)=CA+CB$

证. 假设 $C=(c_{ij})_{m\times k},A=(a_{ij})_{k\times n},B=(b_{ij})_{k\times n}$
则 $A+B=(a_{ij}+b_{ij})_{k\times n}$
$C(A+B)$ 的 i 行 j 列元素为 $c_{i1}(a_{1j}+b_{1j})+c_{i2}(a_{2j}+b_{2j})+\cdots+c_{ik}(a_{kj}+b_{kj})$

$= \sum\limits_{h=1}^{k} c_{ih}(a_{hj} + b_{hj})$, 即 $C(A+B) = (\sum\limits_{h=1}^{k} c_{ih}(a_{hj} + b_{hj}))_{m\times n}$

$CA = (\sum\limits_{h=1}^{k} c_{ih}a_{hj})_{m\times n}$, $CB = (\sum\limits_{h=1}^{k} c_{ih}b_{hj})_{m\times n}$

$CA + CB = (\sum\limits_{h=1}^{k} c_{ih}a_{hj})_{m\times n} + (\sum\limits_{h=1}^{k} c_{ih}b_{hj})_{m\times n} = (\sum\limits_{h=1}^{k} c_{ih}a_{hj} + \sum\limits_{h=1}^{k} c_{ih}b_{hj})_{m\times n}$

$= (\sum\limits_{h=1}^{k} c_{ih}a_{hj} + c_{ih}b_{hj})_{m\times n} = (\sum\limits_{h=1}^{k} c_{ih}(a_{hj} + b_{hj}))_{m\times n}$

所以 $C(A+B) = CA + CB$ □

(3) $(A+B)C = AC + BC$

证. 同上，略 □

(4) $k(AB) = (kA)B = A(kB)$

证. 假设 $A = (a_{ij})_{m\times l}$, $B = (b_{ij})_{l\times n}$

$AB = (\sum\limits_{h=1}^{l} a_{ih}b_{hj})_{m\times n}$

$k(AB) = k(\sum\limits_{h=1}^{l} a_{ih}b_{hj})_{m\times n} = (k\sum\limits_{h=1}^{l} a_{ih}b_{hj})_{m\times n} = (\sum\limits_{h=1}^{l} ka_{ih}b_{hj})_{m\times n}$

$kA = (ka_{ij})_{m\times l}, kB = (kb_{ij})_{l\times n}$

$(kA)B = (\sum\limits_{h=1}^{l} (ka_{ih})b_{hj})_{m\times n} = (\sum\limits_{h=1}^{l} ka_{ih}b_{hj})_{m\times n}$

$A(kB) = (\sum\limits_{h=1}^{l} a_{ih}(kb_{hj}))_{m\times n} = (\sum\limits_{h=1}^{l} ka_{ih}b_{hj})_{m\times n}$

所以 $k(AB) = (kA)B = A(kB)$ □