La funzione ϕ di Eulero

Definizione. *Definiamo la funzione di Eulero*

$$\phi : \mathbb{N} \setminus \{0\} \to \mathbb{N}$$

ponendo

$$\phi(n) := \left|\{a \in \mathbb{N} \,|\, 1 \leq a \leq n,\ (a, n) = 1\}\right|$$

per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. ■

Ricordiamo che vale il seguente risultato.

Lemma. *Per ogni intero positivo* n *si ha:*

$$\left|\left(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\right)^*\right| = \phi(n),$$

vale a dire che $\phi(n)$ *è uguale al numero di classi invertibili modulo* n.

Come si calcola $\phi(n)$?

1) n è un numero primo p:

$$\boxed{\phi(p) = p - 1}$$

Esempi: $\phi(7) = 6, \phi(31) = 30$.

2) n è il prodotto di due numeri primi distinti p e q:

$$\boxed{\phi(p \cdot q) = \phi(p) \cdot \phi(q) = (p - 1) \cdot (q - 1)}$$

Esempi:

$$\phi(21) = \phi(3)\phi(7) = 2 \cdot 6 = 12,$$
$$\phi(62) = \phi(2)\phi(31) = 1 \cdot 30 = 30.$$

3) n è potenza di un numero primo: $n = p^m$, con p numero primo e m intero positivo

$$\boxed{\phi(p^m) = p^m - p^{m-1}}$$

Esempi:

$$\phi(16) = \phi(2^4) = 2^4 - 2^3 = 8,$$
$$\phi(125) = \phi(5^3) = 5^3 - 5^2 = 100.$$

4) n generico: scriviamo la fattorizzazione di n

$$n = p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdots p_k^{m_k}$$

con $p_1, p_2, \ldots, p_k$ numeri primi distinti e $m_1, m_2, \ldots, m_k$ numeri interi positivi. In questo caso si ha

$$\boxed{\begin{aligned} \phi(n) &= \phi(p_1^{m_1}) \cdot \phi(p_2^{m_2}) \cdots \phi(p_k^{m_k}) = \\ &= (p_1^{m_1} - p_1^{m_1-1})(p_2^{m_2} - p_2^{m_2-1}) \cdots (p_k^{m_k} - p_k^{m_k-1}) \end{aligned}}$$

Esempi:

$$\phi(24) = \phi(2^3 \cdot 3) = \phi(2^3) \cdot \phi(3) = (2^3 - 2^2) \cdot (3 - 1) = 8,$$
$$\phi(108) = \phi(2^2 \cdot 3^3) = \phi(2^2) \cdot \phi(3^3) = (2^2 - 2^1) \cdot (3^3 - 3^2) = 36.$$