

原

线性基详解

2018年11月03日 11:07:28

Hypoc_

阅读数 4066

更多

版权声明：本文为博主原创文章，遵循 CC 4.0 BY-SA 版权协议，转载请附上原文出处链接和本声明。
本文链接：https://blog.csdn.net/a_forever_dream/article/details/83654397

线性基是啥？
线性基是一个数的集合，并且每个序列都拥有至少一个线性基，取线性基中若干个数异或起来可以得到原序列中的任何一个数。

线性基三大性质

1. 原序列里面的任意一个数都可以由线性基里面的一些数异或得到
2. 线性基里面的任意一些数异或起来都不能得到0
3. 线性基里面的数的个数唯一，并且在保持性质一的前提下，数的个数是最少的

线性基的构造

那么它是怎么构造的呢？
我们设有一个数组 d ，表示序列 a 的线性基，下标从0开始算。对于序列里面的每一个数，我们尝试将它插入到线性基里面去，具体如何插入这里给代码好理解呀qwq，为了方便理解，我们设 $x_{(2)}$ 为 x 的二进制数）：
for i=60 to 0
 if($x_{(2)}$ 的第i+1位为1)
 {
 if($d[i]$ 为0)
 {
 $d[i]=x$;
 break;
 }
 else $x=x^d[i]$;
 }
}
据此，我们可以得到一个关于d数组的性质：若 $d[i]$ 不为0，则 $d[i]_{(2)}$ 的第 $i+1$ 位为1，并且 $d[i]_{(2)}$ 的最高位就是第 $i+1$ 位。
为了更好地进行线性基的讲解，我们要先知道关于异或的一个小性质（巨佬们可以跳过qwq）：
如果满足 $a^b^c=0$ ，那么 $a^b=c$ ，所以如果 $a^b=c$ ，那么 $a^c=b$
证明虽然简单但是这里就不给出了，不明白的读者手动模拟一下就明白了其实就是怕加上证明后博客变得过于臃肿

证明性质1

我们知道了线性基的构造方法后，其实就可以很容易想到如何证明性质1了，我们设原序列里面有一个数 x ，我们尝试用它来构造线性基，那么会有——1、不能成功插入线性基；2、成功插入线性基。

分类讨论一下

1、不能成功插入线性基**

什么时候不能插入进去呢？
显然就是它在尝试插入时异或若干个之后变成了0。
那么就有如下式子：
 $x^d[a]^d[b]^d[c]^{\dots}=0$
根据上面的那个小性质，则有：
 $d[a]^d[b]^d[c]^{\dots}=x$
所以，如果 x 不能成功插入线性基，一定是因为当前线性基里面的一些数异或起来可以等于 x 。

2、可以成功插入线性基

我们假设 x 插入到了线性基的第 i 个位置，显然，它在插入前可能异或若干个，那么就有：
 $x^d[a]^d[b]^d[c]^{\dots}=d[i]$
 $d[i]^d[a]^d[b]^d[c]^{\dots}=x$
所以显然， x 此时也可以由线性基里面的若干个异或得到。

综上，性质1得证

再看性质2

各位大佬肯定认为这是一条显然的性质啊，但为了严谨一点，还是给出证明吧：

我们使用**反证法**

设 $d[a] \wedge d[b] \wedge d[c] = 0$ （其中 $d[c]$ 比 $d[a]$ 和 $d[b]$ 要更晚被插入线性基）

那么有 $d[a] \wedge d[b] = d[c]$

$\therefore d[c]$ 可以由 $d[a] \wedge d[b]$ 得到

$\therefore d[c]$ 不可能插入线性基

故假设不成立，所以线性基中不存在有任何数异或起来可以得到0。

最后看性质3

这个性质被BJWC拿来出过一道题，那题网上不知道为什么没有证明（都是草草的给出做法然后贴代码），然而如果你熟记这个性质3，那么很快就能。（这题在文章末尾会给出）

那么我来尝试**证明性质3**（毕竟网上几乎找不到证明作为参考，这里笔者我只能乱推了）：

还是没什么卵用地分类讨论一下

1、假如序列里面的所有元素都可以插入到线性基里面

显然如果是这种情况的话，不管是用什么顺序将序列里的数插入到线性基里，线性基中的元素一定与原序列元素数量相同。所以性质3成立。

2、假如序列里面的一些元素不能插入到线性基里面

我们设 x 不能插入到线性基里面，那么一定满足形如 $d[a] \wedge d[b] \wedge d[c] = x$ 的式子，那我们尝试将插入顺序改变，变成： $d[a]$ 、 $d[b]$ 、 x 、 $d[c]$ 。那么 $d[c]$ 是不可能插入成功的，简单的证明：

$\therefore d[a] \wedge d[b] \wedge d[c] = x$

$\therefore d[a] \wedge d[b] \wedge x = d[c]$ （根据上面那条并没有什么卵用的异或性质）

原来是 x 插入不进去，改变顺序后， $d[c]$ 插入不进去，也就是说，对于插入不进去的元素，改变插入顺序后，要么还是插入不进去，要么就是插入另一个原来插入的进去的元素插入不进去了，所以，可以插入进去的元素数量一定是固定的。

显然，如果你去掉线性基里面的任意一个数，都会使得原序列里的一些（或一个）数无法通过用线性基里的元素异或得到，所以，每一个元素都是句话，这里面没有多余的元素，所以，这个线性基的元素个数在保持性质1的前提下，一定是最少的。

顺便贴上插入的代码（代码里的 ll 都是指 $longlong$ ）：

```
1 void add(ll x)
2 {
3     for(int i=50;i>=0;i--)
4     {
5         if(x&(1ll<<i))//注意，如果i大于31，前面的1的后面一定要加ll
6         {
7             if(d[i])x^=d[i];
8             else
9             {
10                 d[i]=x;
11                 break;//记得如果插入成功一定要退出
12             }
13         }
14     }
15 }
```

可能有人会问，如果有三个数 $a, b, c(a < b < c)$ ，先插入 c 导致 a 和 b 都不能插入，但是 $a + b > c$ ，如果先将 a, b 插入到线性基里面，那么得到的

是会更大，但是这种情况不存在。（没想到吧）

假如先插入 c 会导致 a, b 不能插入，那么有 $c \wedge a > 0, c \wedge b > 0$ ，于是有 $a \wedge b > 0$ ，所以 a, b 此时不能同时插入。

如何求最大值

完整的说，是如何求在一个序列中，取若干个数，使得它们的异或和最大。

首先构造出这个序列的线性基，然后从线性基的最高位开始，假如当前的答案异或线性基的这个元素可以变得更大，那么就异或它，答案的初值为

代码如下：

```

1  ll ans()
2  {
3      ll anss=0;
4      for(int i=50;i>=0;i--)//记得从线性基的最高位开始
5          if((anss^d[i])>anss)anss^=d[i];
6      return anss;
7  }

```

为啥求解是个贪心的过程？

前面说过， $d[i]_{(2)}$ 的第 $i+1$ 位一定为1，联想一下这里，无非就是两种情况：

1. $ans_{(2)}$ 的第 $i+1$ 位为0

对于这种情况， ans 异或了 $d[i]$ 之后一定会变大，那么我们就选择异或它。

可能有人问， ans 异或完 $d[i]$ 后虽然 $i+1$ 位变成了1，但是后面的 $1\sim i$ 位可能会受到影响啊。

管它呢~

无论后面怎么变，就算后面的 $1\sim i$ 位都能变成1，贡献也没有第 $i+1$ 位变成1的贡献大呀。

所以我们要优先使最高位尽可能大。

2. $ans_{(2)}$ 的第 $i+1$ 位为1

如果 ans 异或了 $d[i]$ ，那么第 $i+1$ 位就会变成0，后面怎么异或也补救不了第 $i+1$ 位变成0的损失了，按照上面的思想，要优先使最高位尽可能大， ans 不能异或 $d[i]$ 。

如何求最小值

显然的，最小值一定是最小的 $d[i]$ 。（如果让最小的 $d[i]$ 去异或其它的 $d[i]$ 一定会让它变得更大，所以它自己就是最小的）

代码就懒得贴了。（别告诉我你不会求最小值！）

如何求第k小的值

完整的说，应该是——从一个序列中取任意个元素进行异或，求能异或出的所有数字中第 k 小的那个。

首先，要对这个序列的线性基处理一下，对于每一个 $d[i]$ ，枚举 $j = i$ to 1 ，如果 $d[i]_{(2)}$ 的第 j 位为1，那么 $d[i]$ 异或 $d[j-1]$ 。

那么处理完一个线性基之后，应该大致是长这个样子的（x表示0或1）：

```

1xxx0xxx0x
  1xxx0x
    1x

```

求解过程：将 k 先转成二进制，假如 k 的第 i 位为1， ans 就异或上线性基中第 i 个元素（注意不是直接异或 $d[i-1]$ ）。

代码如下：

```

1  void work()//处理线性基
2  {
3      for(int i=1;i<=60;i++)
4          for(int j=1;j<=i;j++)
5              if(d[i]&(1ll<<(j-1)))d[i]^=d[j-1];
6  }
7  ll k_th(ll k)
8  {
9      if(k==1&&tot<n)return 0;//特判一下，假如k=1，并且原来的序列可以异或出0，就要返回0，tot表示线性基中的元素个数，n表示序列长度
10     if(tot<n)k--;//类似上面，去掉0的情况，因为线性基中只能异或出不为0的解
11     work();
12     ll ans=0;
13     for(int i=0;i<=60;i++)
14         if(d[i]!=0)
15         {
16             if(k%2==1)ans^=d[i];
17             k/=2;
18         }
19 }

```

回想上面的线性基处理过程，可以发现，处理完之后，线性基中的元素，作用其实都是提供自己最高位上的1，那么只要使提供出来的1可以和 $k_{(2)}$ 1对应，那么求出来的 ans 一定就是第 k 小的。

补充：想想就能知道，其实处理完之后的线性基其实也还是原序列的一个线性基，因为依然拥有上面的三个性质，要知道，一个序列的线性基不唯素数量唯一而已。

如何判断一个数是否能被当前线性基中的元素异或得到

把它尝试插入进线性基里面去，假如可以插入，说明不能异或得到，假如插不进去，则说明可以异或得到（原理然而上面已经讲了）

线性基删除操作

没想到吧，这东西还支持删除操作。

在线

具体的问题是这样的：

给一个序列，有三种操作，一是往序列中插入一个数，二是删除这个序列中的一个数，三要求你维护这个序列的线性基。

插入很好解决，插就完了。

重点是删除操作，如果要删除的数 x 在线性基外，那么直接删掉即可，问题是假如它在线性基内，把他删掉之后可能序列中其他的数可以填进来。现在讨论一下 x 在线性基内的做法：

没有在线性基中的数，一定是因为线性基中的若干个数可以异或得到他，那么可以记录一下不在线性基中的数都是由线性基中的哪些数异或得到的。一个线性基外的数对应一个集合 S ，这个集合内就是线性基中那些异或起来可以得到他的数。

假如线性基外的某一个数的 S 中包含 x ，那么就不需要删除 x ，把这个数删除即可。

原因是删除这个数和删除 x 是等价的，因为这个数在线性基中是可以代替 x 的，那么就当这个数代替了 x ，然后把 x 给删掉，这样子删除之后线性基所以可以删除这个数。

假如 x 不被线性基外的任何一个数的 S 包含，那么因为每一个线性基中的数加入进来的时候，可能会异或若干个原来就在线性基中的数，那么对于一个数，另外造一个集合 P ，记录线性基中这个数插入进来的时候异或过哪些数。然后找到线性基中最小的并且 P 包含 x 的数，让他异或线性基中其他可，这样就能消除 x 在线性基中的影响。

离线

上面的问题并没有强制在线，所以也可以离线做。

离线的话其实更简单。

我们可以找到线性基中对于每一个数，可以代替他们的那些数，那么可以使线性基优先存删除时间晚的，那么就消除了上面的 把他删掉之后可能序列中其他 * 这样的问题，其余操作一样。

模板题

更多好题（难度非递增）：

BJWC 2011 元素 | 题解


SCOI 2016 幸运数字 | 题解


TJOI 2008 彩灯 | 题解


hdu3949 XOR（线性基【第k大】）


阅读数 1126


题目链接分析：求第k大：把k二进制拆分，如果k的第i位上是1，ans^=b[i]这是什么道理呢？异或消元... 博文 来自：Coco_T的博客


想对作者说点什么

Morning_Glory_JR：就是枚举每个二进制位，再枚举每个数，看是否有数字在这一位上为1，有点话就弄一个类似于100000这样的数作为基，这样也满足上面的三条性质，虽然不能解决后面的问题咯，但是实际上在解决第k小这一问题时，进行操作后将线性基里的元素确实也变成了这样的一堆数（6天前 #10楼）[查看回复\(2\)](#)

Morning_Glory_JR：为什么不要（10000,01000,00100,00010,00001）这样搞呢（6天前 #9楼）[查看回复\(1\)](#)

Galaxy_yr：博主kth的work函数里的移位没有用1ll，会爆掉（1周前 #8楼）[查看回复\(2\)](#)

Zookkk：话说线性基里面的每一个元素转换成二进制后1的最高位都不一样，那无论怎么异或都得不到0啊，不就出来了吗（1个月前 #7楼）[查看回复\(1\)](#)

查看 20 条热评 

线性基总结（模板）+ BZOJ 2460

阅读数 4368

所谓线性基，就是线性代数里面的概念。一组线性无关的向量便可以作为一组基底，张起一个线性的... 博文 来自：alpc_qleonardo

线性基浅谈

阅读数 124

知识串联：基：域内的其他值可以用“基”线性表示 线性基：以异或（xor）为基础的运算 二维向量空... 博文 来自：Adolphrocs的...