

原创

莫比乌斯反演入门讲解

2018-07-19 14:25:30

66慧

阅读数 9004

更多

版权声明：本文为博主原创文章，遵循 CC 4.0 BY-SA 版权协议，转载请附上原文出处链接和本声明。  
本文链接：[https://blog.csdn.net/tomandjake\\_/article/details/81083703](https://blog.csdn.net/tomandjake_/article/details/81083703)

莫比乌斯反演实际上是一两个公式定理的运用，自认为想要掌握它的话，其中的证明还是有必要了解的。看过网上一些博客，感觉都只证明了一半，没个定理完全证明出来。然而我最近在正好在学习初等数论，发现完全证明这个定理实际上并不需要很多知识，特此填坑。另外加上一些应用以构成完整

实际上，这个定理的证明用到了一点数论函数相关知识。前置技能在此

[https://blog.csdn.net/tomandjake\\_/article/details/81083051](https://blog.csdn.net/tomandjake_/article/details/81083051)

内容并不多，自认为把这一页笔记内容学会，自己就可以把莫比乌斯反演的证明当练习题一样独立完成。接下来我还是会解释，当然，如果觉得我的解可以自己看这个笔记学习，我甚至都推荐自己看笔记，因为如果熟悉这样的数学语言，其实看的很快而且会有自己的认识。而且其中给出了欧拉函数的过欧拉函数的话，看这个也可以更加高效地学完这一块内容。(注意笔记中(m,n)=gcd(m,n) )

好，我们进入正题。首先引入三个定义

**Definition 1 可乘函数：**算术函数f，满足 只要gcd(m,n)=1,就有f(mn)=f(m)f(n)。

没错, 比其他可乘函数宽泛一点，只要在gcd(m,n)=1条件下满足可乘就行。然后我们知道由唯一分解定理，任何正整数n可分解为若干素数的幂方积  $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$  ,所以若 $\theta$ 为可乘函数，有

$$\theta(n) = \theta\left(p_1^{\alpha_1}\right) \theta\left(p_2^{\alpha_2}\right) \cdots \theta\left(p_k^{\alpha_k}\right) \cdots \cdots \cdots (1)$$

$\sum_{d|n}$  **Definition 2**  $\sum_{d|n}$ ：代表对n的所有正因子求和，如

$$\sum_{d|4} d^2 = 1^2 + 2^2 + 4^2$$

**Definition 3 莫比乌斯函数：**

$$\mu(1) = 1, \mu(n) = \mu\left(p_1^{\alpha_1}\right) \mu\left(p_2^{\alpha_2}\right) \cdots \mu\left(p_k^{\alpha_k}\right) = \begin{cases} (-1)^k & \text{若 } \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

定义有点奇怪，关于这个函数，之后我们可以看到它的作用, 必须提到的是，可以证明，**莫比乌斯函数是可乘函数**。

然后是我们的目标----莫比乌斯反演定理：

**Theorem 1 莫比乌斯反演定理:** F(n)和f(n)为算术函数，若他们满足

$$F(n) = \sum_{d|n} f(d)$$

则有

$$f(n) = \sum_{d|n} \mu(d) F\left(\frac{n}{d}\right)$$

证明如下：

首先给出一个定理，

**Theorem 2**

$\psi(n) = \sum_{d|n} \theta(d)$  为可乘函数, 由(1)式及可乘函数定义可知

$$\implies \psi(n) = \left(1 + \theta(p_1) + \theta(p_1^2) + \cdots + \theta(p_1^{\alpha_1})\right) \left(1 + \theta(p_2) + \theta(p_2^2) + \cdots + \theta(p_2^{\alpha_2})\right) \cdots$$

$\sum_{d|n} \theta(d)$   
至于  $d|n$  为可乘函数的证明，可参见我的笔记。

之后可以得到下一个定理

**Theorem 3** 若  $\theta$  可乘,  $\mu\theta$  可乘,  $\sum_{d|n} \mu(d)\theta(d)$  也可乘, 从而

$$\sum_{d|n} \mu(d)\theta(d) = (1 - \theta(p_1))(1 - \theta(p_2)) \dots (1 - \theta(p_k))$$

特别有:

$$\theta \equiv 1, \sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (3)$$

$$\theta = \frac{1}{d}, \sum_{d|n} \mu(d) = \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \quad (4)$$

定理3证明:

$\theta(n)$  和  $\mu(n)$  为可乘函数  $\Rightarrow \mu(n)\theta(n)$  为可乘函数

由定理2得,  $\sum_{d|n} \mu(d)\theta(d)$  也为可乘函数, 且

$$\sum_{d|n} \mu(d)\theta(d) = \left(1 + \mu(p_1)\theta(p_1) + \mu(p_1^2)\theta(p_1^2) + \dots + \mu(p_1^{\alpha_1})\theta(p_1^{\alpha_1})\right) \left(1 + \mu(p_2)\theta(p_2) + \dots + \mu(p_2^{\alpha_2})\theta(p_2^{\alpha_2})\right) \dots$$

而由莫比乌斯函数定义, 当  $\alpha > 1$  时,  $\mu(p^\alpha) = 0$ , 由此每个大括号中只需保留前两项, 并且当  $\alpha = 1$  时  $\mu(p^\alpha) = \mu(p) = -1$ ,

$$\Rightarrow \sum_{d|n} \mu(d)\theta(d) = (1 - \theta(p_1))(1 - \theta(p_2)) \dots (1 - \theta(p_k))$$

于是就有

$$\theta(d) \equiv 1, \sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (3)$$

$$\theta(d) = \frac{1}{d}, \sum_{d|n} \mu(d) = \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \quad (4)$$

最后我们直接证明莫比乌斯反演 (几个定理定义学习完, 这其实就算是个练习题啦~):

$$\sum_{d|n} \mu(d) F\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} \mu(d) \sum_{d_1 | \frac{n}{d}} f(d_1), \text{ 由 } \left\{ \begin{matrix} d|n \\ d_1 | \frac{n}{d} \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{matrix} d_1 | \frac{n}{d} \\ d | \frac{n}{d_1} \end{matrix} \right\} \Rightarrow$$

$$\sum_{d|n} \mu(d) \sum_{d_1 | \frac{n}{d}} f(d_1) = \sum_{d_1 | \frac{n}{d_1}} \mu(d) \sum_{d_1 | n} f(d_1) = \sum_{d_1 | n} f(d_1) \sum_{d_1 | \frac{n}{d_1}} \mu(d) = f(n) \quad (\text{注意定理三中的 (3) 式})$$

可以看到, 莫比乌斯反演提供了一个  $F(n)$  与  $f(n)$  的连接, 而他们之间的桥梁就是莫比乌斯函数  $\mu$ 。之后我们会看到具体的例子。这里先给出线性筛莫比乌斯码:

```

1  int mu[maxn], vis[maxn];
2  int primes[maxn], cnt;
3  void get_mu() {
4      memset(vis, 0, sizeof(vis));
5      memset(mu, 0, sizeof(mu));
6      cnt = 0; mu[1] = 1;
7      for (int i = 2; i <= maxn; ++i) {
8          if (!vis[i]) { primes[cnt++] = i; mu[i] = -1; }
9          for (int j = 0; j < cnt && primes[j] * i <= maxn; ++j) {
10             vis[primes[j] * i] = 1;
11             if (i % primes[j] == 0) break;
12             mu[i * primes[j]] = -mu[i];
13         }
14     }
15 }
```

应用举例：POJ 3904

题目给出n和n个正整数，问能找出多少个不同的四元组(a,b,c,d)使得该四元组的最大公因数为1.

分析：

首先要提的是，我们做题往往用的是莫比乌斯反演的另外一种形式：

$$\text{若有 } F(n) = \sum_{d|n} f(d) \text{ 则有 } f(n) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) F(d)$$

既然要用到莫比乌斯反演，我们首先就要找到合适的F和f。实际上，F和f的关系在于整除。我们可以假设

F(n)为有多少个四元组满足gcd(a,b,c,d)=n的整数倍

f(n)为有多少个四元组满足gcd(a,b,c,d)=n

所以我们的目标就是求f(1), 而实际上可以看出F与f构成了一组莫比乌斯变换对。有了反演公式，我们可以通过求F来求f，而这里面F很好求，要求F(n)原数组中数出到能被n整除的数的个数m, 则C(m,4)就是F(n)

而由公式，由此我们可以发现  $f(1) = \mu(1)F(1) + \mu(2)F(2) + \dots + \mu(maxn)F(maxn)$

直接计算即可。

代码：

```

1  #include<iostream>
2  #include<cstdio>
3  #include<string>
4  #include<cstring>
5  #include<vector>
6  #include<stack>
7  #include<algorithm>
8  #include<map>
9  #include<set>
10 #include<queue>
11 #include<sstream>
12 #include<cmath>
13 #include<iterator>
14 #include<bitset>
15 #include<stdio.h>
16 using namespace std;
17 #define _for(i,a,b) for(int i=(a);i<(b);++i)
18 #define _rep(i,a,b) for(int i=(a);i<=(b);++i)
19 typedef long long LL;
20 const int INF = 1 << 30;
21 const int MOD = 1e9 + 7;
22 const int maxn = 10005;
23
24 int n, a[maxn], tot[maxn];
25 int mu[maxn], vis[maxn];
26 int primes[maxn], cnt;
27 void get_mu() {
28     memset(vis, 0, sizeof(vis));
29     memset(mu, 0, sizeof(mu));
30     cnt = 0; mu[1] = 1;
31     for (int i = 2; i <= maxn; ++i) {
32         if (!vis[i]) { primes[cnt++] = i; mu[i] = -1; }
33         for (int j = 0; j < cnt && primes[j] * i <= maxn; ++j) {
34             vis[primes[j] * i] = 1;
35             if (i % primes[j] == 0) break;
36             mu[i * primes[j]] = -mu[i];
37         }
38     }
39 }
40
41 void get_tot() {
42     memset(tot, 0, sizeof(tot));
43     for (int i = 0; i < n; ++i) {

```

```
44     int x = a[i];45     int m = sqrt(x);
46     for (int j = 1; j <= m; ++j) {
47         if (x%j == 0)tot[j]++, tot[x / j]++;
48     }
49     if (m*m == x)tot[m]--;
50 }
51 }
52 LL Cn4(int m) {
53     if (m == 0)return 0;
54     return 1ll * m*(m - 1)*(m - 2)*(m - 3) / 24;
55 }
56 int main()
57 {
58     //freopen("C:\\Users\\admin\\Desktop\\in.txt", "r", stdin);
59     //freopen("C:\\Users\\admin\\Desktop\\out.txt", "w", stdout);
60     get_mu();
61     while (~scanf("%d", &n)) {
62         for (int i = 0; i<n; ++i) scanf("%d", &a[i]);
63         get_tot();
64         LL ans = 0;
65         for (int i = 1; i<maxn; ++i) {
66             ans += 1ll * mu[i] * Cn4(tot[i]);
67         }
68         printf("%lld\n", ans);
69     }
70
71     return 0;
72 }
```

这样莫比乌斯反演就算是入门了吧。


文章最后发布于: 2019-10-30 10:00

有 0 个人打赏

我也不知道什么是"莫比乌斯反演"和"杜教筛"

阅读数 9169

Part0最近一直在搞这些东西做了将近20道题目吧也算是有感而发写点东西记录一下自己的感受如果您… 博文 来自: 小蒟蒻yyb的博客



想对作者说点什么

- 从零开始的莫比乌斯反演(函数)[详细推导]

阅读数 522

前置技能学会莫比乌斯函数必须先知道狄利克雷函数以及什么是逆元（一本正经胡说八道）几个定理… 博文 来自: Morning\_Glor...
- 莫比乌斯反演

阅读数 1231

感觉网上写的都不太看得懂，自己重新写先看看莫比乌斯函数（不用看得懂）https://blog.sengxian.c... 博文 来自: Adolphrocs的...
- 初涉莫比乌斯反演（附带例题）

阅读数 1万+

什么是莫比乌斯反演关于莫比乌斯反演莫比乌斯反演，又称懵逼钨丝繁衍，是一种看了就一脸懵逼的东... 博文 来自: litble的成(tui)...
- 世界上最好的学习法：费曼学习法

阅读数 4万+

你是否曾幻想读一遍书就记住所有的内容？是否想学习完一项技能就马上达到巅峰水平？除非你是天才... 博文 来自: 程序新视界
- [数论]莫比乌斯反演入门

阅读数 689

莫比乌斯反演常用技巧与性质的梳理及部分证明寒假的时候雍老师就跟我们讲了，可惜当时是真的傻逼... 博文 来自: ShadyPi: 咸鱼...
- 莫比乌斯反演--懵逼反演系列

阅读数 838

反演的定义设有算术函数f(n),g(n)f(n),g(n)f(n),g(n), 其中g(n)g(n)g(n)已知且f(n),g(n)f(n),g(n)f(n),g(n)... 博文 来自: niiick