

THÈSE

présentée pour l'obtention du grade de
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ SORBONNE PARIS NORD
Discipline : Informatique

**SUR LA COMBINATOIRE DES POLYTOPES EN NOMBRES
ENTIERS, GÉNÉRATION ALÉATOIRE ET ÉNUMÉRATION**

Rado Rakotonarivo

5 Mars 2020

Membres du jury :

Anna BEN-HAMOU	Sorbonne Université	Examinatrice
Olivier BODINI	Université Sorbonne Paris Nord	Examineur
Éric COLIN DE VERDIÈRE	CNRS, LIGM, Marne-la-Vallée	Rapporteur
Jean-François MARCKERT	CNRS, Université de Bordeaux	Rapporteur
Vincent PILAUD	CNRS, École polytechnique	Examineur
Mario VALENCIA-PABON	Université Sorbonne Paris Nord	Examineur

Julien DAVID	Université Sorbonne Paris Nord	Co-encadrant
Lionel POURNIN	Université Sorbonne Paris Nord	Directeur de thèse

Remerciements

Mes premiers mots de remerciement reviennent à mes directeurs de thèse, Julien David et Lionel Pournin, qui auront été formidables depuis un matin de mois de mai à l'aéroport jusqu'au moment où j'écris ces lignes. Ils le resteront sûrement encore pour longtemps et bien plus. Vous avez fait un travail remarquable durant cette aventure qu'est la thèse. Avec vous, j'ai découvert le monde de la recherche ainsi que le travail d'universitaire de la plus belle des manières. Je vous suis reconnaissant pour votre investissement, d'avoir cru en moi, d'avoir été patients si des fois je mettais du temps à comprendre, et surtout pour vos encouragements lors de mes moments d'égarement, car de vous j'ai appris, beaucoup appris.

Julien, merci pour ton dévouement, tu n'as cessé de m'inspirer par ta passion, par ton enthousiasme, et par ta soif d'apprendre. Dans les moments clés de la thèse tu as toujours été là : nos longues séances de lecture, nos longs débats pour que telle ou telle preuve soit la mieux formulée possible. Tes idées, ta volonté et ta disponibilité ont su faire naître en moi l'envie de devenir meilleur. Le moment où tu me disais que ta maman voulait savoir comment s'est passé ma première présentation en conférence témoigne de ton implication. Merci.

Lionel, merci pour tout ce que tu m'as transmis : scientifiquement et humainement parlant. Je te suis reconnaissant pour le temps que tu m'as consacré, et tout le monde sait que tu n'as pas le temps. À aucun moment tu as hésité à sortir de tes pensées pour répondre à mes questions naïves. Tu as toujours su trouver les mots justes pour me rassurer les fois où je me sentais un peu égaré. Je retiendrai de nos longues discussions d'après-midi que ce qui importe c'est de faire ce que l'on aime, mais quand même, il faut écrire des théorèmes, et enfin par dessus tout : ne pas oublier la virgule d'Oxford.

Je tiens également à remercier Éric Colin de Verdière et Jean-François Marckert d'avoir accepté d'être mes rapporteurs de thèse. Je vous remercie vivement pour vos retours ainsi que toutes vos remarques qui ont contribué grandement à améliorer ce manuscrit. Je remercie également Anna Ben-Hamou, Olivier Bodini, Vincent Pilaud et Mario Valencia-Pabon d'avoir accepté de prendre part à mon jury.

Une mention spéciale pour Antoine Deza, Philippe Duchon, et Vlady Ravelomanana avec qui j'ai eu le plaisir de travailler et qui auront toujours su me donner de bons conseils.

J'adresse ensuite ces mots pour tous les doctorants et anciens doctorants du LIPN surtout ceux de la B103 avec qui j'ai grandi et évolué tous les jours : Tsinjo, Antoine, Gaël, Ivan, Simon David, Mathias et tous les autres. Vous avez été plus que des collègues : des amis. Merci pour votre accueil et tous les moments que l'on a passé ensemble toujours dans la bonne humeur et la sympathie, que ce soit pour un séminaire junior semi-sérieux ou autour d'une bonne bière. Merci les sard-thé !

Je voudrais aussi adresser ma gratitude envers toutes les personnes que j'ai rencontré durant cette thèse, qui ont influé d'une manière ou d'une autre sur mon travail : ceux de l'équipe CALIN, tous les gens du LIPN – dont un venant du LAGA, la communauté ALEA, mon comité de suivi de thèse.

Durant cette thèse, j'ai également été amené à découvrir l'enseignement universitaire. Je tiens à remercier Flavien Breuvert, Fatma Chamekh, Marc Champesme, Thomas Fernique, Christophe Fouqueré, Roland Grappe, Thierry Hamon, Mathieu Lacroix, Pierre Rousselin, et Christophe Tollu pour lesquels j'ai été chargé de travaux dirigés : grâce à vous j'ai appris à être au contact des étudiants. Puis, une pensée pour eux, mes étudiants qui m'ont également beaucoup apporté.

Enfin, je tiens à témoigner ma reconnaissance envers ma famille et mes proches pour leur soutien indéfectible, et surtout envers Sarah et Ilo pour être à mes côtés, tout simplement.

À Dieu seul la gloire.

**SUR LA COMBINATOIRE DES POLYTOPES EN NOMBRES ENTIERS,
GÉNÉRATION ALÉATOIRE ET ÉNUMÉRATION**

Résumé

Cette thèse regroupe des travaux sur les polytopes en nombres entiers de \mathbb{R}^d . Elle s'intéresse en particulier à la combinatoire des polytopes de dimension d contenus dans un hypercube $[0, k]^d$, notés (d, k) -polytopes. Compte tenu de la difficulté d'une approche directe par la méthode symbolique, nous proposons une approche originale au moyen de la description d'une structure de graphe dont les sommets sont les (d, k) -polytopes. Les arêtes du graphe sont définies par des opérations élémentaires agissant comme des transformations locales sur les polytopes. Nous prouvons que ce graphe est connexe et permet d'obtenir un générateur aléatoire uniforme via une chaîne de Markov en dimension générale. Nous aboutissons également à deux algorithmes de génération exhaustive.

Une première partie de nos travaux se concentre sur la description de ces opérations élémentaires ainsi que sur l'étude des structures de graphes se basant sur ces dernières. Une deuxième partie présente les algorithmes de génération aléatoire et de génération exhaustive.

Mots-clés : polygones convexes, polytopes, polytopes en nombres entiers, enveloppe convexe, génération aléatoire, génération exhaustive, marche aléatoire, chaîne de Markov, géométrie discrète

ON THE COMBINATORICS OF LATTICE POLYTOPES, RANDOM SAMPLING AND ENUMERATION

Abstract

This thesis gathers several works on the lattice polytopes of \mathbb{R}^d . In particular, it focuses on the combinatorics of the family of the d -dimensional lattice polytopes contained in the $[0, k]^d$ hypercube, denoted (d, k) -polytopes. Due to their elusive combinatorics, a direct approach using the symbolic method is out of reach. Hence, we propose an original approach based on the description of a graph whose vertex set is the set of (d, k) -polytopes. In this graph, there is an edge between two polytopes if we can transform each of them into the other by an elementary move. These elementary moves are local operations performed on the polytopes. Proceeding this way, we prove that the graph we defined is connected and we obtain a uniform random sampler based on a Markov Chain for the (d, k) -polytopes of arbitrary dimension. We obtain also obtain two exhaustive enumeration algorithms.

The first part of this thesis focuses on the description of the above mentioned elementary moves and the study of the graphs based upon them. The second part presents the random sampling and the exhaustive enumeration algorithms.

Keywords : convex polygons, polytopes, lattice polytopes, convex hull, random sampling, exhaustive enumeration, random walk, Markov chain, discrete geometry

Laboratoire d'Informatique de Paris Nord

Université Sorbonne Paris Nord – 99 Avenue Jean Baptiste Clément – 93430 Villetaneuse

Table des matières

Table des matières	5
1 Introduction	8
1.1 Contexte	8
1.2 Motivations et travaux connexes	10
1.2.a Triangulations et simplexit�	11
1.2.b Nombre	11
1.2.c Un graphe pour les polytopes en nombres entiers	13
1.2.d Génération aléatoire	14
1.2.e Nombre de sommets	16
1.3 Organisation de cette thèse	18
2 Préliminaires	19
2.1 Hyperplans de \mathbb{R}^d	19
2.2 Notion de convexité	21
2.3 Polytopes de \mathbb{R}^d	21
2.4 �quivalence et classification	24
2.5 Exemples	25
2.5.a d -simplexes	25
2.5.b d -pyramide	26
2.5.c Hypercube $[0, k]^d$	26
2.5.d (d, k) -polytopes	27
3 Opérations élémentaires sur les polytopes	29
3.1 Insertion d'un point et suppression d'un sommet	29
3.1.a Définitions	30
3.1.b Ensemble de points insérables et conditions de suppression de sommets	31
3.1.c Des cônes aux sommets	32
3.2 Le cas entier	35
3.2.a L'opération d'insertion dans un simplexe de \mathbb{Z}^d	35
3.2.b L'opération d'insertion dans un simplexe de $[0, k]^d$	37

4	Une structure de graphe pour les polytopes	48
4.1	Introduction et notations	49
4.2	Connexité de $\Gamma(d)$	50
4.3	Connexité de $\Lambda(d)$ et de $\Lambda(d, k)$	55
5	Sous-graphes particuliers	61
5.1	Polytopes en nombres entiers sans insertion possible	62
5.1.a	Polygones de $\Lambda(2)$ sans insertion possible	64
5.1.b	Généralisation pour $\Lambda(d)$	69
5.2	Connexité du sous-graphe induit dans $\Lambda(2)$ par les pentagones et les hexagones	70
5.2.a	Description de T_E	71
5.2.b	Des polygones obliques	72
5.2.c	Des polygones plats	75
6	Une chaîne de Markov pour les polytopes en nombres entiers	82
6.1	Chaîne de Markov et génération aléatoire	83
6.1.a	Chaîne de Markov à espace d'états fini	83
6.1.b	Distributions sur Ω	84
6.1.c	Propriétés	86
6.1.d	Temps de mélange	86
6.2	Modèle des (d, k) -polytopes	87
6.2.a	Règles de transitions	87
6.2.b	Générateur aléatoire de (d, k) -polytopes	89
6.2.c	Propriétés des chaînes de Markov selon le modèle des (d, k) -polytopes	91
6.3	Bornes sur le temps de mélange	93
6.4	Résultats expérimentaux	94
6.4.a	Théorème ergodique	94
7	Génération exhaustive des polytopes en nombres entiers	98
7.1	Le cas de l'hypercube unité	99
7.1.a	Classification des sous-ensembles de $\{0, 1\}^d$	99
7.1.b	Étude de $\#\tilde{P}(d)$	100
7.1.c	Calcul de $\#P(d, 1)$	103
7.1.d	Éléments d'implantation	104
7.2	Nombre de polygones en nombres entiers	104
7.2.a	Principes de comptage	105
7.2.b	Initialisation avec les triangles en nombres entiers de $[0, k]^2$	108
7.2.c	Itération de l'algorithme de comptage	108
7.2.d	Éléments d'implantation et pistes d'optimisation	110
7.3	Résultats expérimentaux	111
7.3.a	Nombre exact de $(d, 1)$ -polytopes	111
7.3.b	Nombre exact de $(2, k)$ -polytopes	111
7.4	Comportement asymptotique	112
8	Conclusion et perspectives	116

8.1	Sur les structures de graphe	116
8.2	Sur les chaînes de Markov	117
8.3	Sur l'énumération exacte de (d, k) -polytopes	119

Bibliographie	121
----------------------	------------

1 | Introduction

1.1 Contexte

Des polytopes...

Une définition simplifiée d'un *polytope* peut être formulée de la manière suivante : un polytope est l'enveloppe convexe d'un ensemble fini de points dans un espace euclidien \mathbb{E}^d . Les polygones convexes en sont l'exemple en dimension 2. Nous pouvons parler d'une généralisation des polygones convexes en dimension supérieure (voire inférieure, mais ceux-là ont relativement peu d'intérêts) : un cube et une pyramide sont ainsi des polytopes de dimension 3. Il existe des polytopes de toutes les dimensions inférieures à celui de son espace ambiant. Un polytope est dit de dimension *pleine* si celui-ci est d'intérieur non vide. Prenons par exemple l'espace des réels en dimension d : un polytope $P \subset \mathbb{R}^d$ est dit de dimension pleine si celui-ci est de dimension d . La figure 1.1 illustre 3 polytopes de dimensions respectives, 1, 2 et 3. On remarque que dans \mathbb{R}^3 , seul celui tout à droite est de dimension pleine.

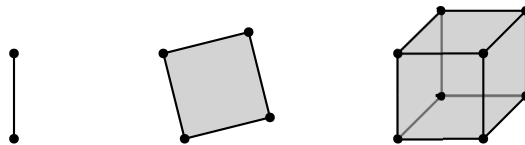


FIGURE 1.1 – De gauche à droite : un polytope de dimension 1, un polytope de dimension 2 et un polytope de dimension 3.

Le lecteur pourra trouver une présentation complète de la théorie sur les polytopes dans [42] et [25]. Les polytopes sont des objets dont l'étude remonte à Euclide (qui en a commencé le traitement mathématique), et qui, à travers les siècles, ont connu un développement important : l'équation d'Euler qui met en relation le nombre de sommets, d'arêtes et de facettes d'un polytope de dimension 3 ; le théorème de Steinitz qui caractérise le graphe d'un polytope¹ de dimension 3 de manière simple : un graphe est celui d'un polytope de dimension 3, si et seulement si il est planaire et 3-connexe [40]. Plus important encore, avec l'essor de l'informatique, les polytopes trouvent une place centrale dans la résolution des problèmes d'optimisation linéaire. En effet, lorsque le domaine de solutions réalisables est fermé et borné, ce domaine constitue

1. Le graphe d'un polytope est le graphe dont les sommets et les arêtes sont ceux du polytope.

un polytope dont la dimension correspond au nombre de variables et dont les facettes correspondent aux contraintes. La résolution de ces problèmes par l'algorithme du simplexe revient, par exemple, à parcourir le graphe d'un polytope [27].

On retrouve ainsi les polytopes tant dans les domaines appliqués que les domaines théoriques des mathématiques. Dans la littérature, un polytope peut être représenté de diverses manières : par l'ensemble de ses sommets, ou bien par une intersection d'un nombre fini de demi-espaces fermés, mais également, si on ne s'intéresse qu'à sa combinatoire, par le *treillis* de ses faces [42] (chaque notion sera proprement définie plus tard). Chaque représentation dépend du domaine dans lequel le polytope est utilisé.

Bien que les polytopes soient des objets communs et malgré l'ancienneté de leur étude, relativement peu de résultats sont connus sur les polytopes, en particulier concernant leur *propriétés combinatoires* dès que la dimension augmente. Dans [43], Günter Ziegler insiste sur le fait que les intuitions en petites dimensions sont le plus souvent fausses dès que la dimension grandit.

*"Low-dimensional intuition does not work!"*²

On sait par exemple que la relation d'Euler constitue un des premiers résultats sur la combinatoire des polytopes. Par cette formule, Euler met en relation le nombre de sommets, d'arêtes ainsi que les facettes d'un polytope convexe de dimension 3 [26]. Celle-ci a, par conséquent, servi de brique de base pour une multitude de travaux, cherchant tantôt à l'infirmier, et à tantôt vérifier ses limites [31, 23].

Depuis les polytopes ont fait l'objet de plusieurs conjectures : en 1957, la conjecture de Hirsch a été posée dans une question de Warren M. Hirsch à George Dantzig. Elle stipule que le graphe d'un polytope de dimension d possédant n facettes ne peut avoir un diamètre supérieur à $n - d$. Cette conjecture affirme que quelle que soit la paire de sommets du polytope que l'on choisit, ils sont au plus distants de $n - d$ arêtes [13]. On peut également citer la conjecture 3^d de Kalai, posée en 1989 par Gil Kalai et qui affirme que le nombre de faces d'un polytope centralement symétrique est au moins 3^d [30]. Plus récemment, Antoine Deza, George Manoussakis et Shmuel Onn conjecturent que les polytopes réalisant le plus grand diamètre font partie d'une famille de polytopes appelée zonotopes primitifs [18].

Des exemples d'études menées sur ces conjectures ont été effectuées avec des *polytopes en nombres entiers*. Il s'agit du cas où tous les sommets du polytope sont à coordonnées entières. Par exemple, dans les années quatre vingt, la conjecture de Hirsch est vérifiée par Denis Naddef pour les polytopes en nombres entiers dont les sommets ont pour coordonnées 0 ou 1 [36]. Plus récemment, en 2010, Francisco Santos présente un polytope de dimension 43 avec 86 facettes qui ne vérifie pas la conjecture de Hirsch [38] : son contre-exemple admet un diamètre d'au moins 44. Enfin les zonotopes primitifs introduits dans [18] et étudiés dans [18, 20, 19] sont également des polytopes en nombres entiers qui sont obtenus comme des sommes de Minkowski de vecteurs dont les coordonnées sont premières entre elles.

Cela fait justement le lien avec l'objet principal de cette thèse qui, entre autre, exposera des problèmes concernant le cas général mais qui se concentrera surtout sur l'étude du cas particulier des polytopes en nombres entiers. Le choix du cas entier est motivé d'une part par le fait que, la plupart des problèmes auxquels les résultats sont appliqués se réfèrent aux polytopes dont les coordonnées sont rationnelles [27, 33]. Le cas rationnel est exactement le même que le cas entier (à une constante multiplicative près). D'autre part, le cas entier est relié à la deuxième grande thématique de cette thèse qui porte sur l'étude combinatoire des polytopes en nombres entiers au moyen de la *génération aléatoire*.

2. "Les intuitions en petites dimensions ne fonctionnent pas!"[43]

...À la génération aléatoire.

Un *générateur aléatoire* d'objets combinatoires est un algorithme permettant d'engendrer des objets selon une distribution de probabilité préalablement définie. Le plus souvent, on s'intéresse à la distribution uniforme sur des objets de même *taille*. La notion de *taille* ici désigne une fonction qui attribue à chaque objet une *taille*. Par exemple, on pourrait définir comme fonction de *taille* sur un mot sa longueur, ou bien le nombre de fois où un certain caractère apparaît dans ce mot. Une distribution uniforme sur les objets de même *taille* signifiera alors que chaque objet de même *taille* aura la même probabilité d'être engendré par le générateur.

La génération aléatoire permet ainsi de mener des études expérimentales, en vue d'infirmer ou d'affirmer des conjectures sur les objets engendrés mais également de mesurer la complexité moyenne des algorithmes dont les entrées sont les objets engendrés. Elle se décline en plusieurs méthodes [22], et selon l'objet à étudier, certaines sont plus efficaces que d'autres. Si les algorithmes ad-hocs sont les plus efficaces, d'autres méthodes plus génériques sont souvent utilisées : les chaînes de Markov [32], la méthode récursive [22], et les générateurs de Boltzmann [9]. Les deux dernières méthodes ont une base commune, décrite par la méthode symbolique [22], permettant d'obtenir la série génératrice de l'objet étudié mais qui nécessite par contre une très bonne compréhension de la combinatoire de l'objet. La première méthode, quant à elle, est une approche plus probabiliste qui consiste à effectuer une marche aléatoire dans un graphe. Cette dernière sera notamment celle utilisée dans cette thèse.

Les méthodes de génération aléatoire, ayant fait leurs preuves [22], constituent de bonnes pistes pour l'étude combinatoire des polytopes en nombres entiers. Notre objet combinatoire est constitué des polytopes en nombres entiers de dimension d contenus dans un hypercube $[0, k]^d$. La notion de *taille* est donnée par la dimension d de l'hypercube ainsi que la longueur k de son côté. Les principaux résultats de la thèse sont ainsi centrés sur ces-derniers.

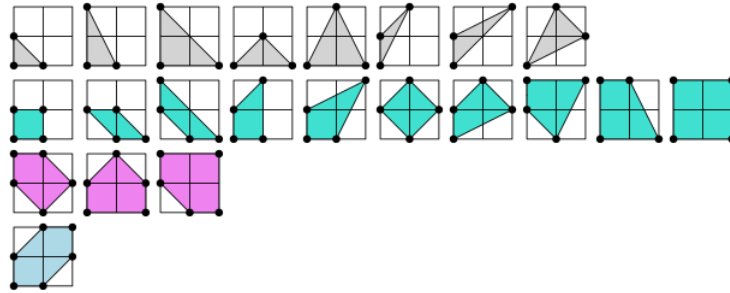


FIGURE 1.2 – La liste des polytopes en nombres entiers de dimension 2 contenus dans $[0, 2]^2$ à symétrie près.

1.2 Motivations et travaux connexes

Ce chapitre a pour but, outre de servir d'introduction à la thèse, d'exposer les problématiques liées aux polytopes en général mais aussi, en particulier, pour le cas des polytopes en nombres entiers de dimension d contenus dans l'hypercube $[0, k]^d$. Il sert d'état de l'art, et regroupe des résultats essentiels, relatifs à cette

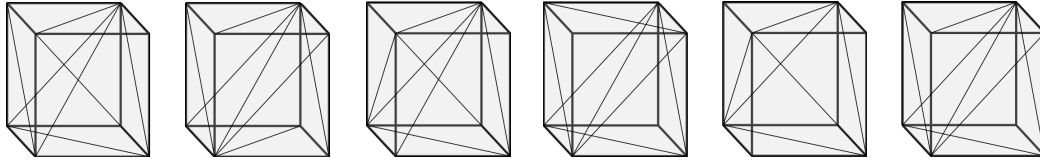


FIGURE 1.3 – Les 6 triangulations à symétrie près de l’hypercube unité en dimension 3.

thèse. Il apporte dans un même temps plus de détails sur la motivation de nos investigations et fait le lien entre les résultats antérieurs et ceux obtenus durant nos travaux. Il est à noter que des définitions exactes de la majorité des termes utilisés dans la suite du chapitre seront formulées dans le chapitre 2 et qu’il sera remis au lecteur de s’y référer.

Les principaux résultats que nous obtenons dans cette thèse sont marqués par (*).

1.2.a Triangulations et simplicité

Les simplexes de dimension d constituent avec l’hypercube unité $[0, 1]^d$ des exemples classiques parmi tous les polytopes de dimension d . Ils sont parfois même décrits comme étant parmi les objets les plus simples d’un espace euclidien [44]. Un simplexe de dimension d , aussi noté d -simplexe, est la généralisation en dimension d des triangles. Il s’agit de l’enveloppe convexe de $d + 1$ points affinement indépendants dans \mathbb{R}^d . L’hypercube unité de dimension d , $[0, 1]^d$, est quant à lui l’enveloppe convexe des tous les points de \mathbb{R}^d dont les coordonnées valent 0 ou 1. Étant donné, par exemple, l’hypercube unité de dimension d , on se demande quel est le nombre minimal de simplexes de dimension d nécessaire pour trianguler $[0, 1]^d$ [16]. On sait par exemple que l’on peut trianguler $[0, 1]^3$ avec exactement 5 tétraèdres [34]. Ce nombre minimal de simplexes est appelé *simplicité* du polytope.

On peut également se demander le nombre de triangulations différentes possibles de l’hypercube $[0, 1]^d$, mais aussi combien y en a-t-il de différents à symétrie près? Chuanming Zong rapporte dans [44] un résumé de tout ce qui est connu sur l’hypercube unité. Cependant, ces questions naturelles telles que la triangulation et la simplicité restent non résolues pour les grandes dimensions. Celles-ci sont représentées dans le tableau 1.1 suivant, et proviennent des résultats indépendants de [34, 16, 12, 37, 29, 28]. La figure 1.3 illustre les 6 triangulations à symétrie près de l’hypercube unité en dimension 3.

1.2.b Nombre

Dans cet esprit de compter des polytopes contenus dans un hypercube, une autre problématique se pose. Quel est le nombre de polytopes en nombres entiers de dimension d contenus dans $[0, k]^d$? Combien y en a-t-il à symétrie près? Peut-on en faire une énumération? Et/ou en trouver son comportement asymptotique?

COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE. Lorsque $k = 1$, on retrouve dans [43] une introduction à la théorie des polytopes en nombres entiers de dimension d contenus dans $[0, 1]^d$. Ces polytopes sont également appelés

d	$\#T$	$\#T/\text{Sym}$	$\#S$
2	2	1	2
3	74	6	5
4	92 487 256	247 451	16
5	?	?	67
6	?	?	308
7	?	?	1 493
8	?	?	?

TABLE 1.1 – $\#T$, $\#T/\text{Sym}$, $\#S$ désignent respectivement le nombre de triangulations différentes, le nombre de triangulations différentes à symétrie près, la simplicité de $[0, 1]^d$.

0/1-polytopes. Dans cette introduction, l’auteur présente le nombre asymptotique de d -simplexes contenus dans $[0, 1]^d$.

Théorème 1.2.1(Ziegler [43])

$$\lim_{d \rightarrow \infty} \frac{\# \text{simplexes}}{\binom{2^d}{d+1}} = 1,$$

où $\# \text{simplexes}$ est le nombre de d -simplexes en nombres entiers contenus dans $[0, 1]^d$.

En d’autres termes, la probabilité que $d + 1$ points tirés uniformément parmi les sommets de $[0, 1]^d$ forment l’ensemble des sommets d’un simplexe de dimension d tend vers 1 quand d tend vers l’infini. Dans le chapitre 7, nous étendrons ce résultat au nombre asymptotique des 0/1-polytopes. En effet, $[0, 1]^d$ contient exactement 2^d points à coordonnées entières. De plus, chaque sous-ensemble de points parmi ces derniers constitue l’ensemble des sommets d’un polytope en nombres entiers de dimension inférieure ou égale à d . Nous prouvons que le nombre 0/1-polytopes est asymptotiquement équivalent à 2^{2^d} , qui correspond au nombre de sous-ensembles de points à coordonnées entières de $[0, 1]^d$.

Théorème 1.2.2(*)

$$\lim_{d \rightarrow \infty} \frac{\# \text{polytopes}}{2^{2^d}} = 1.$$

où $\# \text{polytopes}$ est le nombre de polytopes en nombres entiers de dimensions d contenus dans $[0, 1]^d$.

ENUMÉRATION EXACTE. Pour les 0/1-polytopes, dans le cas des petites dimensions ($d \leq 4$), l’énumération peut aisément être traité à l’ordinateur [43, 2]. Une énumération complète en dimension $d = 5$ a été réalisée par Oswin Aichholzer dans [2]. Selon l’auteur, le cas où $d = 5$ est le cas premier cas non trivial et le dernier dont l’énumération complète peut être achevée. Pour la dimension 6, seule la classification des 0/1-polytopes possédant jusqu’à 12 sommets a été réalisée.

En ce qui concerne le cas où $k \geq 2$, très peu de résultats sont recensés : la séquence [A045996] de l’OEIS donne par exemple le nombre de triangles dans la grille $[0, k]^2$.

d	$\#P$	$\#P/\text{Sym}$
2	5	2
3	151	12
4	60 879	347
5	4 292 660 729	1 226 525
6	18 446 743 888 401 503 325	?
7	?	?

TABLE 1.2 – $\#P$ désigne le nombre de polytopes en nombres entiers de dimension d contenus dans $[0, 1]^d$. $\#P/\text{Sym}$ représente quant à lui la même quantité mais à symétrie près.

Dans le chapitre 7 nous proposerons deux méthodes de comptage qui permettent d’obtenir une énumération exacte ces polytopes. La première qui traitera le cas où $k = 1$ et la seconde qui sera une méthode générale pour une valeur quelconque de k . La première méthode consiste à engendrer les polytopes en nombres entiers de dimension strictement inférieure à d contenus dans $[0, 1]^d$ et de les compter. Leur nombre est largement plus petit que ceux de dimension d . Il suffit alors de soustraire cette quantité au nombre total de sous-ensembles de points à coordonnées 0/1 pour obtenir le résultat voulu. Nos calculs nous permettent d’obtenir le nombre exact de 0/1-polytopes en dimension $d = 6$. Notre méthode retrouve par la même occasion les résultats d’Aichholzer dans [2]. Le nombre exact de polytopes en nombres entiers contenus de dimension d dans $[0, 1]^d$ sont reportés dans le tableau 1.2 (la valeur marquée en bleu est le résultat que l’on a obtenu).

La méthode générale pour une valeur quelconque de k se base sur une énumération itérative des polytopes en fonction de leur nombre de sommets. Une étape initiale engendre de manière exhaustive les d -simplexes contenus dans $[0, k]^d$. Ensuite on détermine le nombre de d -polytopes à $d + 2$ sommets à partir des d -simplexes : chaque d -polytope à $d + 2$ sommets est obtenu de manière unique en insérant un sommet dans un d -simplexe. On réitère cette procédure tant que tous les d -polytopes en nombres entiers contenus dans $[0, k]^d$ ne sont pas tous découverts.

Notre algorithme se limite pour l’instant à l’énumération des polygones et nos résultats sont représentés dans le tableau 1.3.

1.2.c Un graphe pour les polytopes en nombres entiers

Mónica Blanco et Francisco Santos, dans [5, 8, 6], présentent une procédure d’énumération pour les polytopes en nombres entiers en dimension 3 selon leur nombre de points à coordonnées entières. On entend par là tous les points à coordonnées entières contenus dans le polytope. Leur méthode consiste à faire une énumération en partant de polytopes dont le nombre de points à coordonnées entières est connu. Puis, en appliquant des transformations sur des polytopes déjà énumérés, ils parviennent à en faire une énumération complète jusqu’à ceux contenant 11 points à coordonnées entières. Ces transformations induisent une structure de graphe dont les sommets sont des polytopes en nombres entiers et dont les arêtes correspondent à une transformation permettant de passer d’un polytope à un autre.

Dans cette configuration, une notion de distance apparaît naturellement entre deux polytopes donnés : le nombre de transformations nécessaires pour atteindre le deuxième en partant du premier. Dans le cha-

n	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$	$k = 6$	$k = 7$	$k = 8$	$k = 9$
3	4	76	516	2148	6768	17600	40120	82608	157252
4	1	70	1038	7398	35727	130768	400116	1062016	2531001
5		20	848	11628	91052	487436	2047252	7126116	21528000
6		2	292	8760	117660	963788	5696760	26532028	103112800
7			24	2772	73656	1004016	8743648	56221100	287464776
8			1	331	21745	541206	7428032	68665450	475697420
9				4	2528	139912	3383584	47808392	467671784
10					92	15502	775274	18387220	269047166
11						588	78088	3659020	87363680
12						4	2745	335102	15008951
13							20	11036	1215276
14								74	37588
15									296
16									1

TABLE 1.3 – Le nombre de polygones en nombres entiers à n sommets contenus dans la grille $[0, k]^2$.

pitre 3, nous décrivons deux *opérations élémentaires*, introduites dans [14], sur des polytopes : l'insertion d'un point et la suppression d'un sommet. Il s'agit d'opérations locales sur le bord du polytope qui, sous des hypothèses supplémentaires, transforment un polytope en un autre. Nous établissons ensuite dans le chapitre 4 une structure de graphe dont les sommets sont des polytopes. Dans ce graphe, une arête relie deux polytopes si et seulement si une des opérations élémentaires citées précédemment, transforme l'un en l'autre.

Nous considérerons trois graphes dont les sommets sont les polytopes de dimensions d :

- $\Gamma(d)$ pour le cas général des polytopes dont les sommets des points de \mathbb{R}^d ,
- $\Lambda(d)$ pour le cas des polytopes dont les sommets sont des points de \mathbb{Z}^d ,
- $\Lambda(d, k)$ pour le cas des polytopes dont les sommets sont des points à coordonnées entières de $[0, k]^d$.

$\Gamma(d)$ et $\Lambda(d)$ possèdent une infinité de sommets tandis que $\Lambda(d, k)$ en possède un nombre fini, qui varie selon la valeur de k . Dans tous les cas, nous étudierons la connexité de ces trois graphes. Nous prouvons le résultat suivant.

Théorème 1.2.3(*)

Pour $d \geq 2$ et pour tout k positif, $\Gamma(d)$, $\Lambda(d)$ et $\Lambda(d, k)$ sont connexes.

La connexité de ces graphes nous ont permis d'aboutir à une méthode de génération exhaustive mais également à un générateur aléatoire de polytopes en nombres entiers.

1.2.d Génération aléatoire

Pour d et k fixés, les polytopes en nombres entiers de dimension d contenus dans $[0, k]^d$ constituent la classe combinatoire que nous étudierons.

DES GÉNÉRATEURS DE POLYGONES CONVEXES. Un générateur aléatoire de polygone convexe dans un disque est proposé dans [17] par Olivier Devillers, Philippe Duchon et Rémy Thomasse. Pour engendrer une enveloppe convexe de n points du plan, les auteurs suggèrent une méthode de génération partielle sans explicitement engendrer les n points. Une première étape consiste à engendrer un nombre initial (plus petit que n) de points et d'en calculer l'enveloppe convexe. Ensuite à chaque itération, un nombre supplémentaire de points est simulé : les points tombant à l'intérieur de l'enveloppe convexe à cette étape sont rejetés et ceux retenus sont effectivement engendrés et seront ajoutés à l'enveloppe convexe. Ils continuent ainsi tant que le nombre total de points engendrés et simulés ne somment pas à n . En procédant ainsi, leur méthode réalise une complexité en temps de $O(n^{\frac{1}{3}} \log^2 n)$.

Dans [9], Olivier Bodini, Philippe Duchon, Alice Jacquot et Ljuben Mutafchiev ont développé un générateur aléatoire de Boltzmann de polyominoes convexes. Les auteurs proposent une description des polyominoes convexes par la méthode symbolique [22] et parviennent ainsi à une étude asymptotique de leur nombre. Des résultats similaires ont été indépendamment obtenus dans [10]. Les méthodes utilisées dans ces travaux peuvent être adaptées pour obtenir un générateur de Boltzmann de polygones convexes.

Ces deux méthodes de génération parviennent à la génération aléatoire de polygones convexes, c'est-à-dire des polytopes en dimension 2. On peut aisément les adapter afin d'obtenir des générateurs aléatoires correspondant à la distribution qui nous intéresse en dimension 2. Cependant, en dimensions supérieures, plusieurs difficultés se posent notamment sur la compréhension de la combinatoire des polytopes en nombres entiers. En termes de générateur aléatoire de polytopes en dimension général, pratiquement rien n'est concluant à ce jour. On proposera ainsi dans cette thèse un générateur aléatoire de polytopes en nombres entiers de dimension d contenus dans $[0, k]^d$ en se basant sur une chaîne de Markov. Cette partie sera développée au chapitre 6.

UN GÉNÉRATEUR ALÉATOIRE EN DIMENSION GÉNÉRALE. Nous considérons une chaîne de Markov $(X_t)_{t \geq 0}$ dont l'espace des états Ω est l'ensemble des polytopes en nombres entiers de dimension d contenus dans $[0, k]^d$ et une transition existe entre deux états de Ω si une opération élémentaire transforme l'un en l'autre. On vérifie ensuite les trois propriétés suivantes sur la chaîne ainsi définie : l'irréductibilité, l'apériodicité, la symétrie. Cela garanti en effet que l'unique distribution stationnaire est la distribution uniforme sur Ω . On prouve alors dans chapitre 6 le résultat suivant :

Théorème 1.2.4(*)

$(X_t)_{t \geq 0}$ est à la fois irréductible, apériodique et symétrique.

En conséquence nous prouvons qu'à des problèmes de convergence près (que nous discuterons dans chapitre 6) la chaîne de Markov $(X_t)_{t \geq 0}$ permet de construire un générateur aléatoire uniforme de polytopes en nombres entiers de dimension d contenus dans $[0, k]^d$.

En effet en partant d'une distribution initiale, effectuer une marche aléatoire *suffisamment longue* (jusqu'à ce que l'on soit assez proche de la distribution stationnaire) dans le graphe sous-jacent à $(X_t)_{t \geq 0}$ est synonyme de tirer aléatoirement un état selon la distribution stationnaire.

En utilisant le théorème érgodique [32], nous avons mené des expérimentations en dimension 2 et nous sommes arrivés aux conclusions suivantes :

Conjecture 1.2.5 (*)

Le nombre moyen de sommets $\mathbb{E}[n]$ d'un polygone en nombres entiers contenu dans $[0, k]^2$ est

$$\mathbb{E}[n] \geq 6 \left(\frac{k}{2\pi} \right)^{2/3}.$$

Ainsi que,

Conjecture 1.2.6 (*)

L'aire moyenne $\mathbb{E}[a]$ d'un polygone en nombres entiers contenu dans $[0, k]^2$ est

$$\mathbb{E}[a] \leq \frac{3}{4}k^2.$$

1.2.e Nombre de sommets

Des questions relatives au nombre de sommets des d -polytopes se posent également une fois que l'on a restreint leur étude à ceux contenus dans $[0, k]^d$. Le nombre minimal de sommets de ces polytopes est de $d + 1$, qui est le nombre de sommets d'un d -simplexe. Pour d et k fixés, qu'en est-il du nombre maximal de sommets? Quelle est la distribution de ces polytopes par rapport au nombre de sommets? Des éléments de réponses sont proposés selon la valeur de d .

NOMBRE MAXIMAL DE SOMMETS LORSQUE $d = 2$. Dans les années quatre vingt dix, avec des travaux indépendants, Torsten Thiele dans [41], ainsi que Dragan Acketa et Joviša Žunić dans [1] arrivent à la conclusion que le nombre maximal de sommets d'un polygone contenu dans une grille $k \times k$ est

$$12 \left(\frac{k}{2\pi} \right)^{2/3} + O(k^{1/3} \log k). \quad (1.2.1)$$

Ce résultat est d'ailleurs retrouvé par Antoine Deza, George Manoussakis et Shmuel Onn dans [18] lors de leur études d'une famille de polytopes qui réalisent un diamètre maximal. Dans ce contexte, le diamètre d'un polytope fait référence au diamètre de son graphe. En effet en dimension 2, le diamètre δ d'un polygone est égal à $\lfloor n/2 \rfloor$, où n représente le nombre de sommets du polygone.

NOMBRE MAXIMAL DE SOMMETS LORSQUE $d \geq 2$. Pour le cas des dimensions supérieures, dans [4] P_r dénote le polytope défini comme étant l'enveloppe convexe des points à coordonnées entières contenus dans une sphère de dimension d centrée en 0 et de rayon r . Imre Bárány et David G. Larman [4] fournissent un encadrement du nombre de faces, noté $f_m(P_r)$, de chaque dimension m de P_r en fonction de r et de d .

Théorème 1.2.7(Bárány, Larman [4])

Pour $d \geq 2$, il existe deux constantes $c_1(d)$ et $c_2(d)$ tels que pour tout $m \in \{0, \dots, d-1\}$

$$c_1(d)r^{d \frac{d-1}{d+1}} \leq f_m(P_r) \leq c_2(d)r^{d \frac{d-1}{d+1}}. \quad (1.2.2)$$

Dans le cas particulier des sommets (faces de dimension 0), en effectuant une translation et en choisissant une bonne constante, on obtient une borne inférieure sur le nombre maximal de sommet d'un d -polytope en nombres entiers contenus dans $[0, k]^d$:

$$\#\text{sommets} \leq c(d)k^{d \frac{d-1}{d+1}}. \quad (1.2.3)$$

BORNES SUR LE TEMPS DE MÉLANGE D'UNE CHAÎNE DE MARKOV DE POLYTOPES EN NOMBRES ENTIERS. Le diamètre du graphe sous-jacent d'une chaîne de Markov constitue une borne inférieure au temps de mélange de celle-ci [32]. Les résultats en (1.2.1) et (1.2.3) permettent de borner inférieurement le temps de mélange de la chaîne de Markov étudiée dans le chapitre 6.

Dans cette chaîne de Markov, la distance entre deux polytopes dans le graphe sous-jacent est caractérisée par le nombre d'opérations élémentaires nécessaires pour passer d'un polytope à un autre. La différence en nombre de sommets entre un d -simplexe et un polytope ayant le nombre maximal de sommets estime donc le diamètre du graphe sous-jacent à la chaîne.

Théorème 1.2.8(*)

Pour $d = 2$. Pour tout $0 < \varepsilon < 1/2$, il existe une constante $c > 0$ tel que

$$t_{\text{mix}}(\varepsilon) \geq ck^{2/3}.$$

Théorème 1.2.9(*)

Pour $d \geq 2$. Pour tout $0 < \varepsilon < 1/2$, il existe une constante $c > 0$ tel que

$$t_{\text{mix}}(\varepsilon) \geq ck^{d \frac{d-1}{d+1}}.$$

1.3 Organisation de cette thèse

Les articles sur lesquels s'appuient cette thèse sont :

Julien David, Lionel Pournin et Rado Rakotonarivo	<i>"Elementary moves on lattice polytopes"</i>	chapitre 3
	Accepté à <i>Journal of Combinatorial Theory Series A</i>	chapitre 4
	Disponible en ligne sur https://www.sciencedirect.com/	chapitre 5
Julien David, Lionel Pournin et Rado Rakotonarivo	<i>"A Markov Chain for lattice polytopes"</i>	chapitre 6
	Accepté à GASCom 2018	
	Disponible en ligne sur http://ceur-ws.org/Vol-2113/paper13	
Lionel Pournin et Rado Rakotonarivo	<i>"Computational methods for the enumeration of lattice (d, k)-polytopes"</i>	chapitre 7
	En préparation.	

Cette thèse est structurée de la manière suivante :

chapitre 2 : Préliminaires et rappels théoriques sur les notions classiques sur les polytopes.

chapitre 3 : Introduction de deux opérations élémentaires sur les polytopes : insertion d'un point et suppression d'un sommet. Ces deux opérations serviront de bases pour la définition d'une structure de graphe sur les polytopes.

chapitre 4 : Définition et étude de structures de graphe sur les polytopes. Selon le cas général ou entier, on répondra dans cette partie aux questions sur la connexité ainsi que sur le diamètre de ces structures.

chapitre 5 : Étude de sous-graphes particulier, et des familles de polytopes constituant des sommets particuliers de ces graphes.

chapitre 6 : Construction d'un générateur aléatoire de polytopes en nombres entiers de dimension d contenus dans l'hypercube $[0, k]^d$ au moyen d'une chaîne de Markov. On prouvera que le générateur ainsi obtenu est uniforme et on étudiera ensuite le temps de mélange de cette chaîne de Markov.

chapitre 7 : Présentation de deux méthodes d'énumération de polytopes en nombres entiers de dimension d contenu dans l'hypercube $[0, k]^d$. La première dans le cas de l'hypercube unité et la seconde pour une valeur quelconque de k .

2 | Préliminaires

Ce chapitre regroupe, les notions de bases ainsi que les pré-requis pour une meilleure compréhension des parties à venir. On présente des définitions classiques ainsi que des rappels relatifs à la théorie des polytopes. Ces définitions et rappels sont tels qu'ils sont rapportés des études sur les polytopes par Branko Grünbaum [25] et par Günter Ziegler [42].

2.1 Hyperplans de \mathbb{R}^d

Définition 2.1.1

Un hyperplan H de \mathbb{R}^d est défini par

$$H = \{x \in \mathbb{R}^d : c \cdot x = \gamma\},$$

où c est un vecteur non nul de \mathbb{R}^d et γ un scalaire.

Cette définition nous permet de définir les notions de *demi-espace ouvert*, resp. *fermé*, qui sont déterminés (bordés) par H . Effectivement, un hyperplan H décompose l'espace en deux demi-espaces. Selon la valeur du produit scalaire $c \cdot x$, on peut déterminer dans quelle région de l'espace le point x se situe, relativement à l'hyperplan H . L'ensemble des points $x \in \mathbb{R}^d$ tel que $c \cdot x < \gamma$ ou $c \cdot x > \gamma$ constitue un demi-espace ouvert déterminé par H . Si cette inégalité n'est pas stricte, on parle alors de demi-espace fermé. La figure 2.1 en illustre l'exemple.

Considérons ensuite un sous-ensemble \mathcal{A} de \mathbb{R}^d et un hyperplan H tel que

$$H = \{x \in \mathbb{R}^d : c \cdot x = \gamma\}.$$

On dit que H coupe \mathcal{A} si les deux demi-espaces ouverts déterminés par H contiennent des éléments de \mathcal{A} , i.e. il existe deux points x et x' de \mathcal{A} tels que $c \cdot x < \gamma$ et $c \cdot x' > \gamma$. Cette première définition nous permet d'établir une notion importante sur les hyperplans supports.

Définition 2.1.2

H est un hyperplan *support* de \mathcal{A} si H ne coupe pas \mathcal{A} et que l'intersection de $\mathcal{A} \cap H$ n'est pas vide.

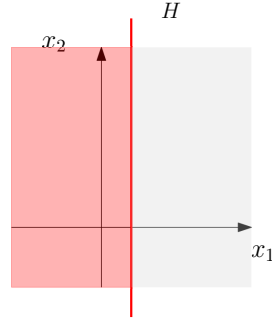


FIGURE 2.1 – Dans cet exemple, l'hyperplan H de \mathbb{R}^2 délimite deux demi-espaces : la région colorée en rouge représente l'ensemble des points $x \leq 1$, et la seconde colorée en grise quant à elle représente l'ensemble des points $x > 1$.

Cette définition peut simplement se traduire de la manière suivante : quand H est un hyperplan support d'un sous-ensemble \mathcal{A} , tous les éléments de \mathcal{A} appartiennent au même demi-espace fermé délimité par H . On remarque aussi que γ est égal à $\min\{c \cdot x : x \in \mathcal{A}\}$ ou $\max\{c \cdot x : x \in \mathcal{A}\}$ dans ce cas. On dira ensuite, que deux sous-ensembles \mathcal{A} et \mathcal{A}' de \mathbb{R}^d sont séparés par un hyperplan H si \mathcal{A} est contenu dans l'un des demi-espaces fermés déterminé par H et \mathcal{A}' est contenu dans l'autre fermé. Les sous-ensembles \mathcal{A} et \mathcal{A}' sont dits *strictement séparés* par H si ils sont contenus dans différents demi-espaces ouverts déterminés par H . H est alors appelé hyperplan *séparateur*. Ainsi deux sous-ensembles sont disjoints si on trouve un hyperplan H tel que les deux sous-ensembles sont strictement séparés par H . Ces dernières définitions sont illustrés par l'exemple de la figure 2.2.

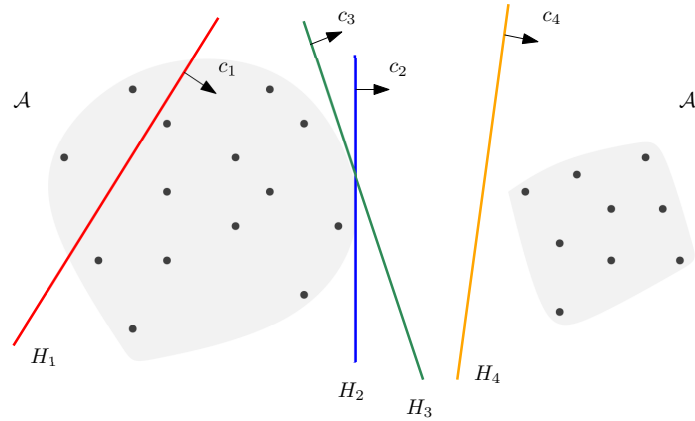


FIGURE 2.2 – On a ici deux sous-ensembles \mathcal{A} et \mathcal{A}' . L'hyperplan H_1 coupe \mathcal{A} , les hyperplans H_2 et H_3 sont des hyperplans supports de \mathcal{A} . L'hyperplan H_4 est un hyperplan séparateur de \mathcal{A} et \mathcal{A}' .

2.2 Notion de convexité

Les notions élémentaires sur les combinaisons linéaires et affines peuvent être retrouvées dans le premier chapitre de [25].

On rappelle que l'*enveloppe affine* d'un sous-ensemble \mathcal{A} de \mathbb{R}^d , souvent noté $\text{aff}(\mathcal{A})$, est le sous-espace de \mathbb{R}^d engendré par l'ensemble des combinaisons affines d'éléments de \mathcal{A} . Dans \mathbb{R}^2 , l'enveloppe affine de deux points distincts est une droite qui passe par ces deux points et l'enveloppe affine de trois points non alignés est le plan entier. On dit alors que $r+1$ points sont affinement indépendants s'ils engendrent un sous-espace de dimension r .

Intéressons nous à présent aux sous-ensembles convexes de \mathbb{R}^d . Considérons un sous-ensemble \mathcal{A} de \mathbb{R}^d . On dira que \mathcal{A} est *convexe* si et seulement si, pour toute paire d'éléments distincts $a, b \in \mathcal{A}$, le segment dont les extrémités sont a et b est contenu dans \mathcal{A} . De manière équivalente \mathcal{A} est convexe si son intersection avec n'importe quelle droite est soit vide, soit un ensemble connexe. La figure 2.3 illustre cette définition.

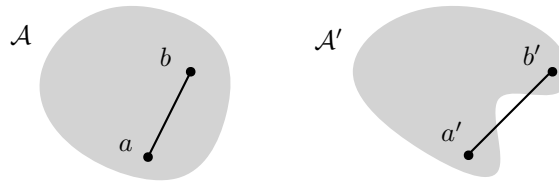


FIGURE 2.3 – Le sous-ensemble \mathcal{A} est convexe. Le sous-ensemble \mathcal{A}' n'est pas convexe, car le segment $[a', b']$ n'est pas entièrement contenu dans \mathcal{A}' .

L'ensemble vide, n'importe quel singleton, n'importe quel demi-espace de \mathbb{R}^d (ouvert ou fermé), l'intérieur d'un triangle, l'intérieur d'un disque constituent par exemple des sous-ensembles convexes. Une propriété des sous-ensembles convexes, ou tout simplement convexes de \mathbb{R}^d est que l'intersection d'une famille de convexes, finie ou non, est convexe. Cette propriété nous sera utile dans la définition d'une *enveloppe convexe*.

Définition 2.2.1

L'*enveloppe convexe* d'un ensemble \mathcal{A} , noté $\text{conv}(\mathcal{A})$, est le plus petit convexe contenant \mathcal{A} . Ou plus simplement, l'intersection de tous les convexes contenant \mathcal{A} . (Voir figure 2.4).

2.3 Polytopes de \mathbb{R}^d

Définition 2.3.1

Un *polytope* est l'enveloppe convexe d'un ensemble fini de points de \mathbb{R}^d . Sa *dimension* est celle du sous-espace affine qu'il engendre. On notera un polytope de dimension d par *d-polytope*.

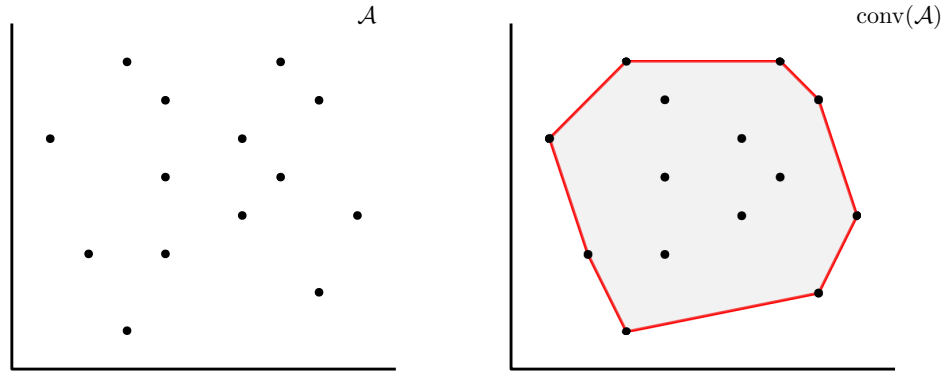


FIGURE 2.4 – Illustration de l'enveloppe convexe d'un ensemble \mathcal{A} de points du plan. L'ensemble \mathcal{A} est représenté par le dessin de gauche, son enveloppe convexe $\text{conv}(\mathcal{A})$ quant à elle est représentée sur le dessin de droite.

Définition 2.3.2

Soit P un polytope de dimension d et H un hyperplan support de P . Une *face propre* F de P est définie comme étant l'intersection

$$F = H \cap P.$$

Les faces non propres de P sont P lui-même et la face vide. Sauf mention, quand il sera question de faces d'un polytope, on fera toujours référence à ses faces propres. Une face F de P peut avoir une infinité d'hyperplans supports. On peut alors parler d'une famille d'hyperplans supports de P définissant F . Si on note par \mathcal{H}_F , la famille d'hyperplan H de \mathbb{R}^d tel que $H \cap P = F$, on retrouve la définition de l'enveloppe affine d'une face F , noté $\text{aff}(F)$. Effectivement, on a

$$\text{aff}(F) = \bigcap_{H \in \mathcal{H}_F} H.$$

On remarque que chaque face F d'un polytope est également un polytope dont la dimension, notée $\dim F$, est celle de son enveloppe affine. On appelle une face de dimension k , une k -face de P . En particulier les faces de dimension 0 sont appelés *sommets*, celles de dimension 1 *arêtes*, et celles de dimension $\dim P - 1$ *facettes*. Il est utile de préciser que les facettes admettent un unique hyperplan support.

Les faces d'un polytope présentent de nombreuses propriétés qui découlent de la définition même d'un polytope. Considérons une face F , d'un d -polytope P . Premièrement, il est évident de constater que les sommets d'une face F sont exactement les sommets de P contenus dans l'enveloppe affine de F . De manière générale, on a :

$$F = P \cap \text{aff}(F).$$

On observe également qu'une k -face, contient au moins $k + 1$ sommets affinement indépendants et que l'enveloppe affine de chaque face d'un polytope est unique. C'est-à-dire qu'une face F ne partage pas la même enveloppe affine avec tout autre face F' du polytope. Une autre propriété est également celle qui stipule que toute intersection d'une famille de faces de P est elle-même une face de P . De plus, pour deux faces F et F' de P , si $F' \subset F$ alors F' est nécessairement une face de F . On observe ainsi une certaine relation

d'inclusion dans l'ensemble des faces d'un polytope. Effectivement, l'ensemble des faces d'un polytope P constitue un treillis dont les éléments sont ses faces et la relation d'ordre est l'inclusion. Ce treillis est appelé *treillis des faces* de P . Les preuves de ces différentes assertions peuvent être retrouvées dans [25]. Dans la figure 2.5, on a la représentation du treillis des faces d'un triangle.

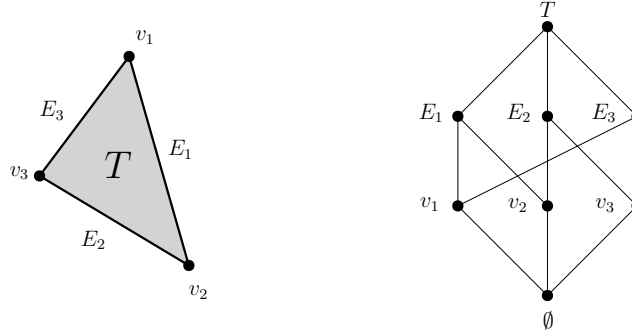


FIGURE 2.5 – À gauche, un triangle T . À gauche, la représentation de son treillis de faces.

NOTATION. Pour un polytope P de \mathbb{R}^d .

- \mathcal{V} dénotera souvent l'ensemble de ses sommets.
- $H_F(P)$ désigne un hyperplan support de la face F de P .
- $H_F^-(P)$ fera référence au demi-espace fermé de \mathbb{R}^d , bordé par $H_F(P)$ et qui ne contient pas P , $H_F^+(P)$ est son complémentaire dans \mathbb{R}^d .

Enfin, il arrive souvent de parler du graphe d'un polytope. Le *graphe d'un polytope* est le graphe dont les noeuds sont les sommets du polytope et les arêtes sont les faces de dimension 1.

Exemple 2.3.3 (Résolution d'un programme linéaire)

Un exemple d'application dans lequel on retrouve les polytopes est la résolution d'un problème d'optimisation mathématique. Lorsque le domaine admissible d'un problème d'optimisation linéaire est compact, alors c'est un polytope. Le nombre de variables est la dimension de l'espace ambiant et le nombre de contraintes correspond au nombre de facettes du polytope. La fonction objectif est caractérisée par un vecteur c de \mathbb{R}^d . Comme il s'agira d'optimiser cette fonction, résoudre le programme linéaire consiste à parcourir le graphe de P jusqu'à ce que l'on trouve un sommet v *optimal*. En d'autres termes, v doit être contenu dans un hyperplan H tangent à P et dont un vecteur normal est c .

Résoudre un programme linéaire, revient donc, théoriquement, à balayer P avec une famille d'hyperplans caractérisé par le vecteur c de la fonction objectif. Par exemple dans la résolution d'un problème de maximisation la valeur maximale de la fonction objectif sera

$$\gamma = \max\{c \cdot x : x \in P\}.$$

Cette notation est exactement la même que l'on retrouve dans la définition 2.1.2 d'un hyperplan support de P . L'ensemble de solutions est la face propre F de P , tel que $F = \{x \in P : c \cdot x = \gamma\}$. Dans la Fig.2.6, F admet v comme sommet. Si F se réduit à v , la solution est alors unique. Pour plus d'exemples et une réflexion plus poussée le lecteur est invité à se référer dans cet ouvrage [27].

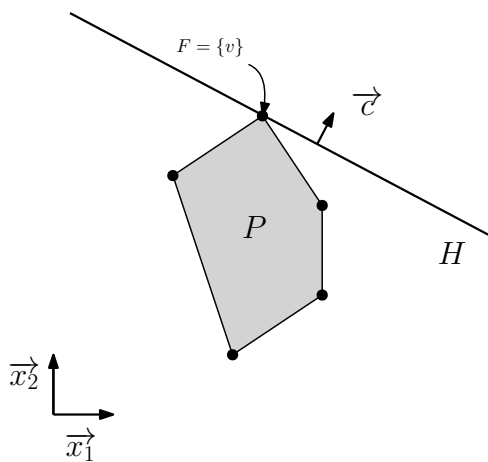


FIGURE 2.6 – Résolution graphique d'un programme linéaire en dimension 2, caractérisé par le polytope P et le vecteur c de la fonction objectif. Il s'agit ici d'une maximisation dont la solution optimale est réalisée par le sommet v .

2.4 Équivalence et classification

De manière générale, pour obtenir des classifications "uniformes" de polytopes, on fait appel aux relations d'équivalences. Ainsi deux polytopes appartenant à une même classe conserveraient certaines propriétés géométriques et/ou combinatoires. Plusieurs types de classifications peuvent être effectués selon la relation d'équivalence considérée. L'*équivalence affine*, la *congruence*, l'*équivalence combinatoire* ou encore la *0/1-équivalence* sont des exemples de relations d'équivalence que l'on utilise pour faire une classification des polytopes. Les deux premières sont les relations d'équivalence usuelles que l'on retrouve en géométrie : l'*équivalence affine* consiste à trouver une transformation affine de rang maximal qui associe de manière bijective chaque point d'un polytope un point d'un autre polytope. Deux polytopes sont quant à eux *congruents* si l'un est l'image de l'autre par une isométrie.

À présent, portons notre attention sur les deux dernières relations d'équivalence. Deux polytopes P et Q sont combinatoirement équivalents, ou tout simplement de même type combinatoire si leur treillis des faces sont isomorphes. Tandis que la *0/1-équivalence* intervient en particulier pour les polytopes contenus dans un hypercube : deux polytopes P et Q sont dits *0/1-équivalents* si l'on peut transformer l'un en l'autre à partir d'un nombre fini de rotations et d'inversions de l'hypercube qui les contient [43].

Exemple 2.4.1

Considérons P et Q polytopes de dimension 3, ainsi que \mathcal{V} et \mathcal{V}' leur ensemble de sommets respectifs. On considère

$$\mathcal{V} = \{v_0 = (0, 0, 0), v_1 = (1, 0, 0), v_2 = (0, 1, 0), v_3 = (1, 1, 0), v_4 = (0, 1, 1), v_5 = (1, 1, 1)\}$$

et

$$\mathcal{V}' = \{v'_0 = (0, 0, 0), v'_1 = (1, 0, 0), v'_2 = (0, 1, 0), v'_3 = (1, 1, 0), v'_4 = (0, 0, 1), v'_5 = (0, 1, 1)\}.$$

La figure 2.7 représente P et Q . Ils sont 0/1-équivalents et affinement équivalents : on obtient Q en faisant une rotation puis une translation de P . La congruence est vérifiée car pour tout i et j dans $\{0, 1, 2, 3\}$, on a $\|v_i - v_j\|_3 = \|v'_i - v'_j\|_3$ pour tout $i \neq j$. De même leur treillis des faces sont isomorphes d'autant plus qu'ils ont le même nombre de d -faces.

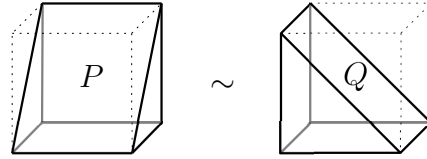


FIGURE 2.7 – P et Q sont à la fois 0/1-équivalents, congruents, affinement équivalents et combinatoirement équivalents.

Ziegler prouve dans [43] le résultat suivant.

Théorème 2.4.2(Ziegler[43])

Pour tout 0/1-polytopes contenus dans \mathbb{R}^d , on a

$$0/1\text{-équivalence} \Rightarrow \text{congruence} \Rightarrow \text{équivalence affine} \Rightarrow \text{équivalence combinatoire}.$$

Il en découle que les travaux sur les énumérations de polytopes se réfèrent à ces relations d'équivalence pour dénombrer les polytopes selon la classe d'équivalence choisie. Les résultats du cas particulier des polytopes contenus dans l'hypercube unité sont regroupés dans [44]. Cependant, faire une énumération selon une classe d'équivalence relève d'une difficulté assez conséquente.

2.5 Exemples

Cette section regroupe des exemples de polytopes classiques, des polytopes que l'on retrouvera de manière récurrente dans toute la suite de cette thèse.

2.5.a d -simplexes

Définition 2.5.1

Un d -simplexe S est l'enveloppe convexe de $d + 1$ points affinement indépendant. Ceux sont les polytopes de dimension d à $d + 1$ sommets.

Propriétés 2.5.2

Soit S un d -simplexe.

- Toutes les k -faces de S sont des k -simplexes pour tout $0 \leq k \leq d - 1$. (Voir figure 2.8)
- Tout sous-ensemble de $k + 1$ sommets de S détermine une k -face de S pour tout $0 \leq k \leq d - 1$.
- En notant par $f_k(S)$ le nombre de faces de dimension k de S , on a

$$f_k(S) = \binom{d+1}{k+1}$$

pour tout $0 \leq k \leq d - 1$.

- Toute face de dimension $(d - k)$ de S est l'intersection de k facettes de S , pour tout $0 \leq k \leq d$.

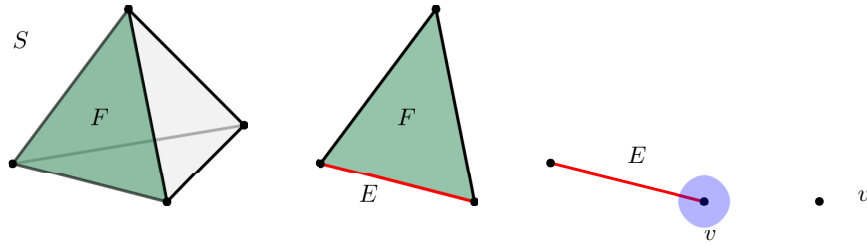


FIGURE 2.8 – Chaque face d'un polytope est un polytope. En particulier, chaque face d'un simplexe est un simplexe.

2.5.b d -pyramide**Définition 2.5.3**

Une d -pyramide P est l'enveloppe convexe de l'union d'un $(d - 1)$ -polytope B (appelé *base* de P) et d'un point v (appelé *apex* de P) où $v \notin \text{aff}(B)$.

Propriété 2.5.4

Soit P une d -pyramide d'apex v et de base B . Soit F une k -face de P déterminée par un hyperplan $H_F(P)$. Dans ce cas on a l'une des propriétés suivantes :

- (i) Si v n'est pas un sommet de F alors F est une k -face de B .
- (ii) Si v est un sommet de F alors les sommets de F distincts de v sont tous des sommets de B . F est une k -pyramide d'apex v et de base $H_F(P) \cap B$ (voir figure 2.9).

2.5.c Hypercube $[0, k]^d$

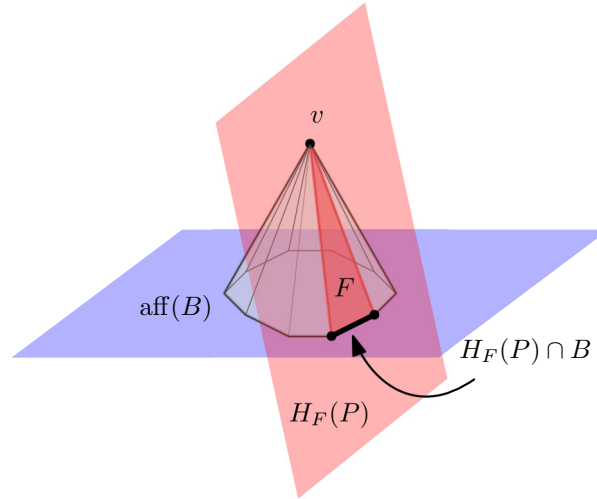


FIGURE 2.9 – Illustration du cas (ii) de la Propriété 2.5.4 pour une 3-pyramide P de base B et d'apex v .

Définition 2.5.5

Soit k un entier positif. L'hypercube $[0, k]^d$ est l'enveloppe convexe des 2^d points de coordonnées 0 ou k . C'est une généralisation en dimension d du cube.

Remarquons que les facettes de $[0, k]^d$ sont orthogonales aux axes de \mathbb{R}^d . La plupart des hypercubes que nous considérerons, sauf indication contraire, seront de ce type.

Propriétés 2.5.6

- Soit l'hypercube $[0, k]^d$.
- Une face F de $[0, k]^d$, telle que $0 < \dim F \leq d - 1$, est un hypercube $[0, k]^{\dim F}$.
 - Le nombre de points en nombres entiers contenus dans $[0, k]^d$ sont au nombre de $(k + 1)^d$.
 - $[0, k]^d$ a 2^d sommets.

Lemme 2.5.7

Soit U^d un hypercube de dimension d . Le nombre de faces de dimension $k \leq d$ de U , noté $f_k(U^d)$, est donné par la relation suivante

$$f_k(U^d) = 2^{d-k} \binom{d}{k}.$$

2.5.d (d, k) -polytopes

Définition 2.5.8

Un (d, k) -polytope est un polytope entier de dimension d , et contenu dans l'hypercube $[0, k]^d$.

Il s'agit ici d'une définition ad-hoc, telle qu'elle est introduite dans [18]. Les (d, k) -polytopes seront les principaux objets d'étude de cette thèse.

3 | Opérations élémentaires sur les polytopes

Dans l'étude des structures combinatoires les questions de classifications reviennent de manière récurrente [22]. Pour une taille donnée, on se demande combien il existe d'objets distincts partageant une certaine propriété. En d'autres termes on voudrait savoir si des objets de même taille sont équivalents. Les polytopes ne dérogent pas à cette règle, dès lors que différentes classes d'équivalences ont été introduites au chapitre 2, en particulier pour le cas 0/1. Rappelons par exemple que deux polytopes P et Q sont affinement équivalents si on peut trouver une transformation affine qui transforme P en Q et inversement. Ce genre de transformation peut être considéré comme étant une transformation *globale*, dans le sens où la géométrie de P peut être entièrement modifiée et ce bien que P et Q restent dans la même classe d'équivalence.

Par opposition à cette idée de transformation *globale*, ce chapitre mettra en emphase des transformations *locales* sur les polytopes. Ces opérations locales seront définies comme étant des modifications élémentaires au niveau de l'ensemble de sommets d'un polytope donné qui consisteront à lui ajouter ou lui retirer un sommet. Une fois ces opérations définies, on s'intéressera à leur application selon trois cas différents : dans un premier cas où P est un polytope dont les sommets sont des éléments de \mathbb{R}^d , un second cas où les sommets de P sont tous à coordonnées entières appartenant à \mathbb{Z}^d et finalement le cas où P est restreint dans l'hypercube $[0, k]^d$.

Ce chapitre reprendra en détail et de manière explicite les notions ainsi que des résultats de [14]. Ces derniers sont d'autant plus essentiels pour la compréhension des deux prochains chapitres.

3.1 Insertion d'un point et suppression d'un sommet

Dans un souci de clarté, la notation $P \subset \mathbb{R}^d$ correspondra au cas général dans lequel les coordonnées du polytope sont à valeurs dans \mathbb{R}^d . $P \subset \mathbb{Z}^d$ se référera au cas où les coordonnées des sommets de P sont à valeurs entières. Enfin $P \in [0, k]^d$ correspondra au cas où $P \subset \mathbb{Z}^d \cap [0, k]^d$. Pour cette première partie, toutes les définitions ainsi que les propriétés, bien qu'applicables dans les trois cas qui nous intéressent, se rapporteront au cas général. Les cas particuliers pour $P \subset \mathbb{Z}^d$ et $P \in [0, k]^d$ seront traités plus tard. Il est important de rappeler que tous les polytopes que l'on étudiera sont des polytopes en dimension pleine.

3.1.a Définitions

Considérons un polytope P de dimension d dans \mathbb{R}^d et soit \mathcal{V} son ensemble de sommets. On définit sur P deux opérations élémentaires : l'*insertion d'un point* et la *suppression d'un sommet*. Ces dernières opèrent sur \mathcal{V} de la manière suivante : une insertion d'un point x de $\mathbb{R}^d \setminus P$ transformera P en l'enveloppe convexe de $\mathcal{V} \cup \{x\}$ tandis qu'une suppression d'un sommet $v \in \mathcal{V}$ transformera P en l'enveloppe convexe de $\mathcal{V} \setminus \{v\}$. En d'autres termes, une insertion consiste à ajouter un nouveau sommet dans \mathcal{V} et de manière équivalente une suppression consiste à retirer dans \mathcal{V} un des sommets P . La figure 3.1 illustre un exemple pour les deux opérations.

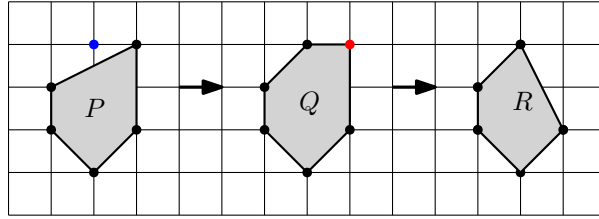


FIGURE 3.1 – Le point x , coloré en bleu, a été inséré dans P pour obtenir Q . Le sommet v de Q , ici en rouge, a été supprimé de Q pour donner le polytope R .

On considère à présent le polytope Q , le polytope résultant à la suite de l'une de ces opérations sur P . On veut également que les opérations d'insertion et de suppression soient inversibles : c'est à dire que si Q résulte d'une insertion sur P , alors on veut retrouver P en appliquant une suppression sur Q . On rappelle que l'on s'intéresse aux polytopes de dimension pleine dans \mathbb{R}^d . Pour satisfaire cette contrainte et aussi pour garantir la réversibilité de nos opérations une notion d'insertion possible et de suppression possible sont nécessaires. Elles sont définies de la manière suivante pour un polytope P de dimension d dans \mathbb{R}^d ayant \mathcal{V} comme ensemble de sommets.

Définition 3.1.1

Un point $x \in \mathbb{R}^d \setminus \mathcal{V}$ peut être inséré dans P si l'enveloppe convexe de $\mathcal{V} \cup \{x\}$ admet comme ensemble de sommets $\mathcal{V} \cup \{x\}$.

Définition 3.1.2

Un sommet $v \in \mathcal{V}$ peut être supprimé de P quand l'enveloppe convexe de $\mathcal{V} \setminus \{v\}$ est de dimension d .

Par ces définitions, on s'assure de la réversibilité des deux opérations élémentaires. Et de manière générale, on dira alors qu'un polytope P peut être transformé en un autre polytope Q (et inversement) à l'aide d'une opération élémentaire si et seulement si leur ensemble de sommets diffèrent exactement d'un élément. Dès lors qu'on parlera d'insertion d'un point ou de suppression de sommet, on se référera toujours aux définitions précédentes.

3.1.b Ensemble de points insérables et conditions de suppression de sommets

Dès qu'un point x de \mathbb{R}^d peut être inséré dans P pour obtenir Q , ce même point peut être supprimé de Q pour retrouver P . Plusieurs questions se posent à présent : quel est l'ensemble des points $x \in \mathbb{R}^d$ que l'on peut insérer dans P ? Existe-il des sommets que l'on ne peut pas supprimer ?

Il est assez simple à répondre à la deuxième question car la seule condition pour une suppression valide est que le polytope résultant soit de dimension pleine dans \mathbb{R}^d . L'exemple le plus évident est quand P est un d -simplexe : aucun de ses sommets ne peut être retiré car le polytope obtenu après une suppression serait un simplexe de dimension $d - 1$.

Définition 3.1.3

Soit P un polytope de dimension d dans \mathbb{R}^d et v un sommet de P . P est une pyramide d'apex v , s'il existe un hyperplan $H \in \mathbb{R}^d$ qui contient tous les autres sommets de P excepté v .

Proposition 3.1.4

Soit P un polytope de dimension d dans \mathbb{R}^d . Un sommet v de P peut être supprimé si et seulement si P n'est pas une pyramide d'apex v .

La preuve découle directement de la définition, et la figure 3.2 illustre cet exemple. Ici la suppression de l'apex de la pyramide de dimension 3 (sommet colorié en rouge) ne constitue pas de suppression valide car le polytope résultant sera de dimension 2.

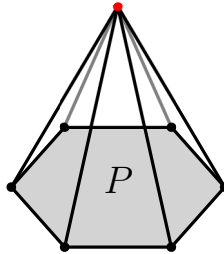


FIGURE 3.2 – P est une pyramide de dimension 3 dont la base est de dimension 2. Ici le sommet marqué en rouge ne peut pas être supprimé contrairement à tous les autres sommets de P .

L'opération d'insertion d'un point est plus subtile. Rappelons qu'avec la définition de l'insertion valide, un point x peut être inséré dans P si le polytope résultant a pour ensemble de sommets $\mathcal{V} \cup \{x\}$. C'est-à-dire que tous les points contenus dans P sont déjà à exclure car l'insertion de l'un de ces points dans P laisserait P invariant. On remarque que ces derniers constituent une infinité de points dans le cas général tandis que pour le cas entier, cet ensemble de points est fini.

Cependant, il existe des points de \mathbb{R}^d , autres que ceux de P , qui ne peuvent également pas être insérés dans P . Il est possible qu'après leur insertion, un des sommets de P ne soit plus un sommet du polytope résultant, invalidant ainsi l'insertion. Nous verrons cela en détail dans la prochaine section.

Reprenons par exemple le polytope P de la figure 3.1 pour mieux comprendre.

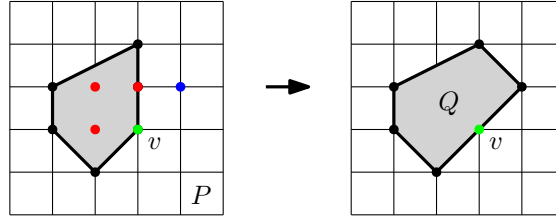


FIGURE 3.3 – Ici les points marqués en rouge sont les points qui ne sont pas des sommets de P tels que $\text{conv}(P \cup x) = P$. Par contre pour celui marqué en bleu, si il est inséré dans P , le sommet v ne sera pas un sommet du polytope Q .

3.1.c Des cônes aux sommets

On considère toujours un polytope P de dimension d de \mathbb{R}^d et ayant \mathcal{V} comme ensemble de sommets. On sait qu'a priori les points dans P ainsi que les points sur ses bords ne peuvent pas y être ajoutés. Regardons ensuite les autres points de \mathbb{R}^d qui ne permettent pas une insertion valide dans P .

Dans l'exemple de la figure 3.3, le point marqué en bleu, qu'on notera par u , ne peut pas être inséré dans P . En effet si il était inséré dans P , le sommet v ne serait pas un sommet du polytope résultant. En ce sens, on pourra dire que l'insertion de u dans P supprimera v . Cependant u n'est pas l'unique point dont l'insertion dans P supprimera v , par exemple dans la figure 3.4, il se trouve que l'insertion du point w dans P supprimera également v . De cette observation, on est amené à penser que pour chaque v sommet de P , il existe un ensemble de points dont l'insertion dans P supprime v . Pour trouver donc l'ensemble des points que l'on ne peut pas insérer dans P , outre ceux qui sont contenus dans P , il est suffisant de trouver l'ensemble des points de \mathbb{R}^d dont l'insertion supprime un sommet de P .

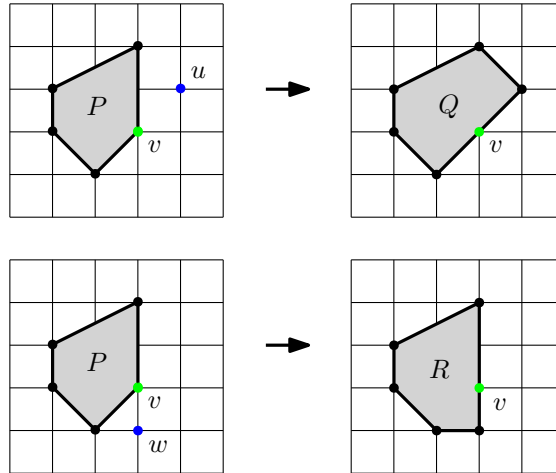


FIGURE 3.4 – L'insertion de u ou de w dans P supprime le sommet v de P .

Considérons alors un sommet v de P . Soit \mathcal{F} l'ensemble des facettes de P incidente à v . Considérons $F \in \mathcal{F}$ ainsi que $\text{aff}(F)$, son enveloppe affine. On rappelle que l'enveloppe affine d'une facette est un hyperplan de

\mathbb{R}^d . On dénote maintenant par $H_F^-(P)$ le demi-espace fermé de \mathbb{R}^d délimité par $\text{aff}(F)$ et qui ne contient pas P , ou, de manière équivalente, tel que $P \cap H_F^-(P) = F$.

Définition 3.1.5

Pour tout sommet v de P , on définit le cône au sommet v de P , noté par $C_v(P)$, l'intersection

$$C_v(P) = \bigcap_{F \in \mathcal{F}} H_F^-(P),$$

où \mathcal{F} est l'ensemble des facettes qui contiennent v .

Le cône au sommet v de P est un cône polyédral de dimension d pointé sur v . $C_v(P)$ constitue l'ensemble des points $x \in \mathbb{R}^d$ tel que l'enveloppe convexe de $P \cup x$ n'admet pas v comme sommet.

Exemple 3.1.6

Reprenons alors notre exemple et voyons ce qui se passe en dimension 2. On considère les deux arêtes F et E qui sont les facettes incidentes à v . Les deux premiers dessins de la figure 3.5 décrivent les demi-espaces fermés ne contenant pas P et délimités respectivement par $\text{aff}(F)$ et $\text{aff}(E)$, ici notés $H_F^-(P)$ et $H_E^-(P)$. La partie foncée du troisième dessin représente $C_v(P) = H_F^-(P) \cap H_E^-(P)$. Finalement le dernier dessin décrit pour P et l'union des $C_v(P)$ lorsque v parcourt l'ensemble des sommets de P . De manière générale, la zone en blanc du dernier dessin est l'ensemble des points du plan qui peuvent être insérés dans P .

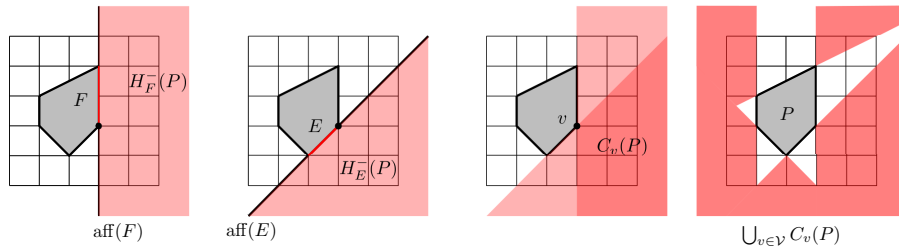


FIGURE 3.5 – Une illustration de la construction d'un cône au sommet v d'un polytope P . Le dessin de droite représente la réunion des $C_v(P)$ lorsque v parcourt l'ensemble des sommets de P .

D'après la construction des $C_v(P)$, on énonce alors la proposition suivante.

Proposition 3.1.7

Soit P un polytope de dimension d dans \mathbb{R}^d . Un point x de \mathbb{R}^d peut être inséré dans P si et seulement si x n'est pas contenu dans P et, pour tout sommet v de P , x n'appartient pas à $C_v(P)$.

La définition 3.1.5 peut être généralisée pour n'importe quelle face de dimension i , où $i \in \{0, \dots, d-1\}$.

Définition 3.1.8

Soit F une face propre de P . On définit pour F l'intersection

$$C_F(P) = \bigcap_{G \in \mathcal{G}} H_G^-(P),$$

où \mathcal{G} est l'ensemble des facettes de P qui contiennent F , et H_G^- le demi-espace fermé de \mathbb{R}^d délimité par G qui ne contient pas P . $C_F(P)$ constitue l'ensemble contenant $C_v(P)$ pour tout sommet v contenu dans F .

En particulier si F se réduit à un sommet, on retrouve la définition 3.1.5 et si F est une facette alors $C_F(P) = H_F^-(P)$. Ceci étant, on prouve deux autres propriétés des $C_v(P)$.

Lemme 3.1.9

Soit P un polytope de dimension d contenu dans \mathbb{R}^d . On considère une face propre F de P . Soit H_F un hyperplan support de F , tel que $F = P \cap H_F$, et H_F^- le demi-espace de \mathbb{R}^d limité par H_F et qui ne contient pas P . Pour tout sommet v incident à F , on a

- (i) $C_v(P) \subset H_F^-$,
- (ii) $C_v(P) \cap H_F \subset \text{aff}(F)$.

Démonstration. Soit F une face propre de P et considérons également $C_F(P)$. D'après le lemme de Farkas [21], $C_F(P)$ est un sous-ensemble de H_F^- . De plus comme pour tout sommet v de F , $C_v(P) \subseteq C_F(P)$, alors, $C_v(P) \subset H_F^-$, pour tout sommet v de F . L'argument qui complète la preuve vient du fait que $C_F(P) \cap H_F$ est exactement $\text{aff}(F)$. \square

L'idée est ici la suivante. Comme on ne peut insérer un point dans un polytope P que si celui-ci n'est contenu ni dans P ni dans un des cônes au sommets de P , ce lemme garantit que si un point x n'appartient ni à l'enveloppe affine d'une face F de P , ni au demi-espace H_F^- relativement à cette face F , alors ce point n'appartient à aucun cône au sommets incident à F . Cela quelle que soit la face F de P que l'on considère.

Exemple 3.1.10

La figure 3.6 illustre un exemple dans lequel F est une facette. Dans ce cas, H_F est l'unique hyperplan support de F . La partie colorée en rouge constitue les cônes aux sommets des sommets contenus dans F . Est également marquée en rouge l'intersection des $C_v(P)$ et $\text{aff}(F)$ pour tout sommet $v \in F$. Et la partie hachurée correspond à $C_F(P) = H_F^-$. On remarque que dans le cas entier, il est possible que $C_F(P)$ puisse contenir aucun point en nombres entiers que l'on peut insérer dans le polytope.

En somme, les proposition 3.1.4 et 3.1.7 nous donnent les conditions nécessaires et suffisantes pour appliquer respectivement une opération de suppression d'un sommet et une insertion d'un point valide sur un polytope P .

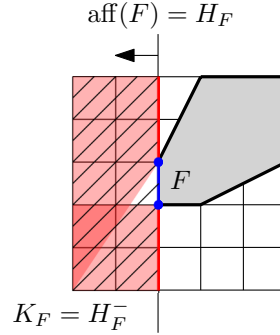


FIGURE 3.6 – Quand F est une facette, $C_F(P) = H_F^-$, $\text{aff}(F) = H_F$.

Remarque 3.1.11

En ce qui concerne l'insertion d'un point, dans le cas général, cette opération est toujours possible car l'ensemble $\mathbb{R}^d \setminus \{P \cup C_v(P)\}$, pour tout sommet v de P , n'est jamais vide. En effet on peut toujours effectuer une insertion d'un point $x \in \mathbb{R}^d$ dans P pourvu qu'il soit dans un voisinage d'une arête de P . Par contre lorsqu'on se restreint au cas entier, il se peut que cet ensemble soit disjoint de \mathbb{Z}^d pour certains polytopes. Les prochaines sections se pencheront sur l'étude de ce cas.

3.2 Le cas entier

On s'intéresse maintenant au cas entier dans lequel $P \subset \mathbb{Z}^d$. Et particulièrement à la possibilité d'insertion d'un point à coordonnées entières dans un polytope $P \subset \mathbb{Z}^d$. Comme il a été annoncé en début de chapitre, le cas $P \in [0, k]^d$ est un sous-cas particulier du cas où $P \subset \mathbb{Z}^d$. Ces deux derniers interviennent, et sont particulièrement étudiés, dans [14] et dans [15] pour la preuve de la connexité d'une structure de graphe sur les polytopes, un graphe dont les arêtes sont entièrement déterminées par les opérations élémentaires définies en amont.

Exemple 3.2.1

En dimension 2, considérons un polygone P contenu dans $[0, 2]^2$. P est représenté dans le dessin de gauche : les zones colorées en rouge constituent pour tout sommet v de P , $C_v(P) \cap [0, 2]^2$. On remarque qu'aucun point de \mathbb{Z}^2 contenu $[0, 2]^2$ ne peut être inséré dans P . Le dessin de droite étend la grille entière en dimension deux et les points marqués en bleu sont des points de \mathbb{Z}^2 n'appartenant pas à $[0, 2]^2$ mais qui peuvent éventuellement être insérés dans P si on se réfère au cas où $P \subset \mathbb{Z}^d$.

3.2.a L'opération d'insertion dans un simplexe de \mathbb{Z}^d

Dans la section précédente, on a introduit pour un polytope P l'ensemble des points $x \in \mathbb{Z}^d$ tels que x ne puisse pas être inséré dans P . L'idée ici n'est pas de décrire les polytopes tels qu'ils aient le plus grand

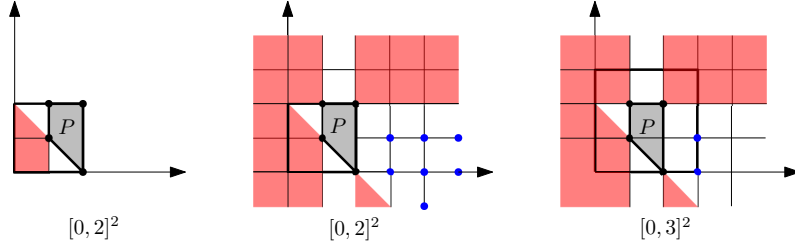


FIGURE 3.7 – P est un polygone contenu dans $[0, 2]^2$. Aucun point en nombres entiers du carré de côté 2 ne peut être inséré dans P .

ensemble de points insérables mais plutôt de trouver les polytopes tels qu'il existe au moins un point $x \in [0, k]^d$ qu'on puisse y insérer. En prenant en compte le nombre de sommets, les simplexes sont dans ce sens les plus petits polytopes contenus dans l'hypercube $[0, k]^d$. Intuitivement, les simplexes sont les plus à même de vérifier cette dernière hypothèse. Dans cette optique, intéressons nous à l'insertion d'un point dans un simplexe.

On prouvera par la suite que l'insertion d'un point dans un simplexe S est toujours possible pour le cas entier. Toutefois les méthodes de preuve sont différentes pour le cas $S \in \mathbb{Z}^d$ et $S \in [0, k]^d$.

Proposition 3.2.2

Soit S un simplexe de dimension d contenu dans \mathbb{Z}^d . Il existe toujours un point en nombres entiers $x \in \mathbb{Z}^d$ que l'on puisse insérer dans S .

L'idée de la preuve reposera donc sur le fait de trouver un point qui ne sera contenu dans aucun des cônes au sommets de S . On énonce le lemme suivant.

Lemme 3.2.3

Soient un simplexe $S \subset \mathbb{Z}^d$ de dimension d et u_0 un sommet de S . Le point w de \mathbb{Z}^d , tel que $(w - u_0) = \sum_{u \in \mathcal{V} \setminus \{u_0\}} (u - u_0)$ peut être inséré dans S .

Démonstration. Le point w ainsi défini résulte de la somme vectorielle de toutes les arêtes de S issues de u_0 . Par conséquent $w \notin S$ (en effet, $w - u_0$ est d fois le barycentre de la facette de S opposée à u_0). Il est alors suffisant de montrer que pour tout $i \in \{0, \dots, d\}$, w n'est pas contenu dans $C_{u_i}(S)$, où les u_i désignent les sommets de S .

On considère une facette F de S qui contient u_0 , et soit H_F un hyperplan support de F , et enfin H_F^- le demi-espace fermé de \mathbb{R}^d délimité par H_F qui ne contient pas S . Puisque S est un simplexe, F contient tous les sommets de S excepté un, disons u_j . D'après le lemme 3.1.9, $C_{u_i}(S) \subset H_F^-$ pour tout $i \neq j$. De plus, en réécrivant la description de w de la manière suivante,

$$(w - u_0) = (u_j - u_0) + \sum_{u \in (F \setminus u_0)} (u - u_0),$$

on déduit que w et u_j se trouvent dans le même demi-espace délimité par H_F . Comme $u_j \notin H_F^-$, il en est de même pour w , i.e. $w \notin C_{u_i}(S)$ pour tout $i \neq j$. Il reste alors à prouver que $w \notin C_{u_j}(S)$. Un raisonnement analogue conclut la preuve en considérant cette fois-ci une facette de S contenant à la fois u_0 et u_j . \square

Démonstration. (proposition 3.2.2) La preuve est immédiate d'après le lemme 3.2.3, le point $w \in \mathbb{Z}^d$ décrit dans ce dernier peut toujours être inséré dans S . \square

Exemple 3.2.4

Soit le triangle T et ses sommets notés u_0, u_1, u_2 . T est illustré par la figure 3.8. Dans le dessin de gauche, on considère l'arête $F = \{u_0, u_1\}$. Ici, u_2 et w ne sont pas contenus dans H_F^- . Dans le dessin de droite, en considérant cette fois-ci l'arête $E = \{u_0, u_2\}$, on remarque que u_1 et w ne sont pas contenus dans H_E^- .

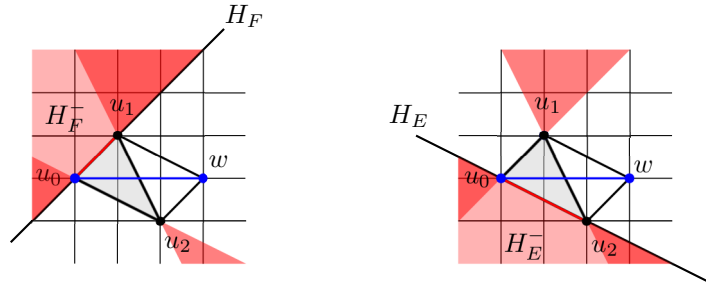


FIGURE 3.8 – Illustration du lemme 3.2.3

3.2.b L'opération d'insertion dans un simplexe de $[0, k]^d$

Dans cette section, on s'intéresse également à l'existence d'un point que l'on peut insérer dans un simplexe mais appliqué au sous cas particulier où le simplexe est en nombres entiers et restreint à l'hypercube $[0, k]^d$. Cette partie sera centrée sur la preuve du résultat suivant.

Proposition 3.2.5

Pour tout k entier strictement positif, soit S un simplexe de dimension d contenu dans $[0, k]^d$. Il existe toujours un point en nombres entiers $x \in [0, k]^d$ que l'on puisse insérer dans S .

Les méthodes de preuves sont entièrement différentes du cas $S \in \mathbb{Z}^d$ et le résultat de la proposition 3.2.5 est plus fort que celui non restreint à l'hypercube. Il est également à noter que ce résultat est essentiel pour une meilleure compréhension des chapitre 4 et chapitre 6 et fera le lien pour la preuve de la connexité des graphes que l'on sera amené à voir dans les chapitres sus-cités.

Revenons à présent à la proposition 3.2.5. La preuve est assez longue et fastidieuse et elle sera découpée en plusieurs lemmes. Il sera également nécessaire d'introduire quelques notions supplémentaires. L'idée générale de la preuve consiste, dans un premier temps, à prendre en compte le plus petit hypercube Q contenant S . Puis, dans un deuxième temps, choisir une face propre F du simplexe S contenue dans une

facette R de Q . Le choix de F dépend en fait implicitement de la facette R de Q car un bon choix de R détermine la dimension de F . Ensuite, faire une disjonction de cas selon $\dim F$ pour trouver un point à insérer dans S . Dans la suite de la section, tout ce qui sera relatif au choix de la facette R de Q sera indicé par R , ainsi, par exemple le F_R signifiera que la face F a été obtenue pour le choix d'une facette R de Q .

Pour un polytope P de dimension d dans $[0, k]^d$, pour chaque coordonnée $i \in \{1, \dots, d\}$, on définit

$$\gamma_i^- = \min\{x_i : x \in P\} \text{ et } \gamma_i^+ = \max\{x_i : x \in P\}$$

Définition 3.2.6

Pour un polytope P de dimension d de \mathbb{R}^d , l'ensemble

$$Q = \prod_{i=1}^d [\gamma_i^-, \gamma_i^+]$$

constitue un hypercube combinatoire dont les facettes sont parallèles à ceux de $[0, k]^d$. Q est le plus petit hypercube combinatoire contenant P .

On considère un d -simplexe S contenu dans $[0, k]^d$, pour un entier k positif, et Q le cube combinatoire minimal contenant S . Considérons ensuite une facette R de Q . Soit F_R la face propre de S telle que

$$R \cap S = F_R.$$

On désigne par F_R^* la face de S qui contient tous les sommets de S qui ne sont pas contenus dans F_R . Cette construction est possible du fait que S est un simplexe. Par exemple pour un triangle, si F_R est un sommet, alors F_R^* sera l'arête opposé au sommet F_R . Il est important de noter que le choix de R n'est pas totalement arbitraire car les outils de preuves se feront en fonction de $\dim F_R$. Le dessin (c) de la figure 3.14 illustre un exemple pour le choix d'une facette R les faces F_R et F_R^* correspondantes.

Soit maintenant un hyperplan support Y de F_R^* dont le vecteur normal est c . Le vecteur c est choisi de telle sorte qu'il soit à la fois orthogonal à F_R et F_R^* . En effet, l'existence d'un tel vecteur c est justifiée par la relation entre les dimensions de F_R et de F_R^* donnée par le lemme suivant.

Lemme 3.2.7

Soient F une face propre de S et F^* la face de S qui contient tous les autres sommets de S et qui ne sont pas contenus dans F . On a

$$\dim(F) + \dim(F^*) = d - 1.$$

Démonstration. La preuve est immédiate par construction de F et de F^* . Supposons que F contienne n sommets de S . La face F de P est au plus une facette et est au moins un sommet, i.e. $1 \leq n \leq d$. Comme S a $d + 1$ sommets, dans ce cas F^* contient $d + 1 - n$ sommets. On a alors $\dim(F) = n - 1$ et $\dim(F^*) = d - n$. D'où $\dim(F) + \dim(F^*) = d - 1$. \square

Il s'en suit alors que par une translation de F_R de telle sorte que F_R et F_R^* aient un point en commun, le translaté de F_R et F_R^* seront contenus dans un même hyperplan (ici Y). Le vecteur c choisi est la normale à cet hyperplan.

On dénote ensuite par Y^- le demi-espace fermé de \mathbb{R}^d délimité par Y et ne contenant pas F_R . Autrement dit, l'intersection $S \cap Y^-$ est exactement F_R^* . Dans le reste de la section, on suppose que c est un vecteur unitaire et que c pointe vers Y^- . Voir le dessin (d) de la figure 3.14. Ainsi, différents cas peuvent se présenter selon la dimension de F_R , et implicitement celle de F_R^* également.

Nous sommes à présent en mesure de traiter les différents cas qui peuvent se présenter. Ces différents cas sont reportés de manière simple comme étant les feuilles de l'arbre de disjonction de la figure 3.9 suivante.

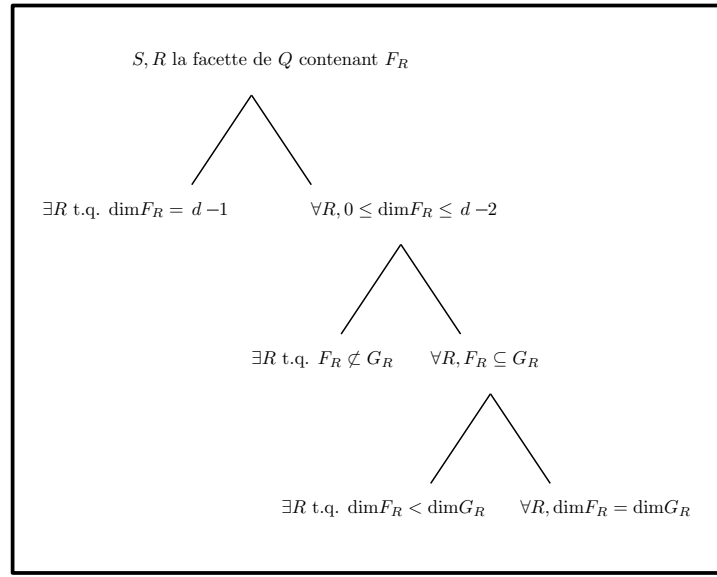


FIGURE 3.9 – Plan de preuve.

L'ensemble G_R sera défini plus tard, une fois que l'on traitera les cas y faisant référence.

Cas 1

Il existe une facette R de Q telle que $\dim F_R = d - 1$.

Le cas d'une facette R de Q tel que $\dim F_R = d - 1$ est particulier. En effet dans cette configuration, F_R^* se réduit à un sommet. On obtient de suite le lemme suivant.

Lemme 3.2.8

Si $\dim F_R = d - 1$, alors il existe un point x de $[0, k]^d$ tel que x peut être inséré dans S .

Démonstration. Supposons que F_R soit une facette. D'après le lemme 3.2.7, $\dim F_R^* = 0$, c'est-à-dire F_R^* est un sommet de S , que l'on notera par v . Dans cette configuration, Y est alors parallèle à R . En appliquant

le lemme 3.1.9 sur F_R^* , on a $C_u(P) \cap Y \subset \text{aff}(F_R^*)$, pour tout u sommet de F_R^* . Comme F_R^* est constitué uniquement du sommet v , $C_v(P) \cap Y$ est exactement v . Et pour tout sommet u de F_R , $C_u(S)$ est disjoint de Y^- et en particulier de Y . Par conséquent, tout point $x \in Y \cap [0, k]^d$, hormis v , peuvent être insérés dans S . Puisque $k \geq 1$, $Y \cap [0, k]^d$ contient au moins un point à part v . \square

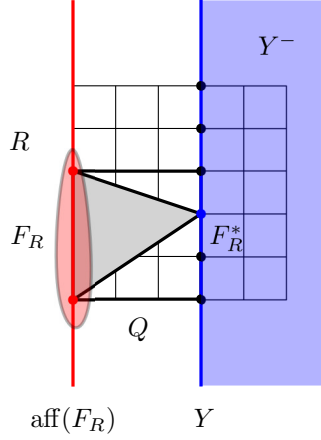


FIGURE 3.10 – Pour le choix d’une facette R de Q tel que $\dim F_R = d - 1$, un des points $x \in Y \cap [0, k]^d$, marqués en noir, peut être inséré.

On prend à présent le cas disjoint au Cas 1, que l’on vient de traiter. Pour toute facette R de Q ,

$$0 \leq \dim F_R \leq d - 2.$$

Regardons dans quelle partie de $[0, k]^d$ nous allons chercher un point à insérer dans S . Il découle directement de la proposition 3.1.7 que, premièrement, un point à insérer dans S ne peut être contenu dans S lui-même. Ensuite, par notre construction, on sait que pour chaque sommet v de S , soit $v \in F_R$ ou bien $v \in F_R^*$. En appliquant le lemme 3.1.9 à la face F_R^* , la première assertion montre que Y^- contient une partie des $C_v(S)$ pour les sommets v incidentes à F_R^* . Pour cette raison, nous chercherons un point à insérer dans S hors de Y^- (remarquons qu’il est tout de même possible que certains points appartenant à Y^- puissent être insérés dans S). La deuxième assertion du lemme 3.1.9 appliquée à F_R indique qu’une partie des $C_v(S)$ est contenue dans $\text{aff}(F_R)$ pour les sommets v incidentes à F_R . De ce fait, nous excluons $\text{aff}(F_R)$ dans la recherche d’un point à insérer dans S .

Considérons tout d’abord l’intersection $\text{aff}(R) \cap [0, k]^d$. Par construction, nous obtenons directement le lemme suivant.

Lemme 3.2.9

L’intersection $\text{aff}(R) \cap [0, k]^d$ constitue un hypercube de dimension $d - 1$.

On rappelle que le vecteur c , normale à Y^- , est choisi de telle sorte qu’il soit à la fois orthogonal à F_R et F_R^* . On alors note par

$$\delta = \min\{c \cdot x : x \in \text{aff}(R) \cap [0, k]^d\}. \quad (3.2.1)$$

On définit ensuite la face (non vide) G_R de $\text{aff}(R) \cap [0, k]^d$ constituée des points dont le produit scalaire avec c vaut δ .

$$G_R = \{x \in \text{aff}(R) \cap [0, k]^d : c \cdot x = \delta\}.$$

On note ensuite par ε , respectivement ε^* , la valeur de $c \cdot x$ quand $x \in F_R$, respectivement $x \in F_R^*$. L'idée est de construire avec le vecteur c trois hyperplans parallèles tels que $c \cdot x$ vaut δ , ε et ε^* . Un exemple est donné sur le dessin (d) de la figure 3.14.

Une première observation est faite : comme Y^- et F_R sont disjoints, il s'en suit que $\varepsilon < \varepsilon^*$. Ceci est dû particulièrement au fait que S est un simplexe. De même l'équation (3.2.1) implique que $\delta \leq \varepsilon$. Cette dernière inégalité est stricte si et seulement si F_R n'est pas contenu dans G_R . Deux sous-cas se supposent alors : quand $F_R \subseteq G_R$, et quand F_R et G_R sont disjoints.

Cas 2

Pour tout R , $0 \leq \dim F_R \leq d - 2$.
Il existe R tel que $F_R \not\subseteq G_R$.

Lemme 3.2.10

Si F_R n'est pas contenu dans G_R alors G_R est à la fois disjoint de $\text{aff}(F_R)$ et de Y^- . Et il existe un point $x \in G_R$ que l'on peut insérer dans S .

Démonstration. Si $F_R \not\subseteq G_R$ alors $\delta < \varepsilon < \varepsilon^*$, alors G_R , F_R , et Y sont contenus dans trois hyperplans distincts dont la normale est c . Par conséquent, G_R est disjoint de $\text{aff}(F_R)$. Or, l'intersection des cônes $C_v(S)$ avec $\text{aff}(R) \cap [0, k]^d$ est contenue dans $\text{aff}(F_R)$ pour tout sommet v de F_R . Pour cette raison, G_R est disjoint de ces cônes. Puisque les cônes aux sommets de F_R^* sont contenus dans Y^- alors G_R est disjoint de

$$\bigcup_{v \in \mathcal{V}} C_v(S)$$

et tous les points entiers x de G_R peuvent être insérés dans S . Comme G_R est une face non vide $\text{aff}(R) \cap [0, k]^d$, G_R contient au moins un point en nombres entiers, ce qui complète la preuve. \square

On suppose maintenant que F_R est un sous-ensemble de G_R . Comme G_R est une face non vide de l'hypercube $\text{aff}(R) \cap [0, k]$, G_R est un hypercube (éventuellement $\text{aff}(R) \cap [0, k]$ lui-même). F_R est alors un polytope contenu dans l'hypercube G_R . Selon la dim G_R , on distingue deux cas.

Cas 3

Pour tout R , $0 \leq \dim F_R \leq d - 2$ et $F_R \subset G_R$. Il existe un R tel que $\dim F_R < \dim G_R$.

Ce cas est représenté par le dessin (e) de la figure 3.14.

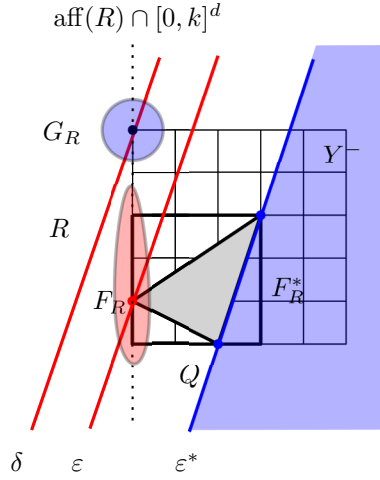


FIGURE 3.11 – Dans cet exemple, $\dim F_R = 0$ et $F_R \not\subset G_R$, G_R est l'unique point x de $\text{aff}(R) \cap [0, 5]^2$ tel que $c \cdot x = \delta$. G est à la fois disjoint de Y^- et de $\text{aff}(F_R)$.

Lemme 3.2.11

Si $F_R \subseteq G_R$ tel que $0 \leq \dim F_R \leq d - 2$ et $\dim F_R < \dim G_R$ alors il existe un point en nombres entiers $x \in G_R \setminus \text{aff}(F_R)$ tel que x peut être inséré dans S .

La preuve réside dans le fait qu'il existe des points entiers dans G_R qui ne sont pas contenus dans $\text{aff}(R)$. Le lemme intermédiaire suivant nous permet d'obtenir ce résultat.

Lemme 3.2.12

Pour tout entier k positif, soit P un polytope en nombres entiers contenu dans $[0, k]^d$. Si P est de dimension inférieure à d , alors il existe des points en nombres entiers de $[0, k]^d$ qui ne sont pas contenus dans $\text{aff}(P)$.

Démonstration. Soit P un polytope en nombres entiers contenu dans $[0, k]^d$ et tel que $\dim P < d$. Considérons ensuite l'intersection $I = \text{aff}(P) \cap [0, k]^d$. On prouve le lemme en montrant que le nombre de points en nombres entiers dans I est inférieur à ceux dans $[0, k]^d$. On peut trouver une projection orthogonale de tous les points de I sur une des facettes de $[0, k]^d$. Comme une facette de $[0, k]^d$ contient exactement $(k + 1)^{d-1}$ points, on déduit que le nombre de points en nombres entiers contenus dans I ne peut excéder $(k + 1)^{d-1}$. Puisque k est positif, $(k + 1)^{d-1} < (k + 1)^d$. Ainsi il existe forcément des points de $[0, k]^d$ qui ne sont pas contenu dans $\text{aff}(P)$. \square

Cas 4

Pour tout R , $0 \leq \dim F_R \leq d - 2$ et $F_R \subset G_R$ et $\dim F_R = \dim G_R$.

Ce dernier cas suppose que quelque soit le choix de R , F_R est toujours inclus dans G_R et qu'ils sont de même dimension.

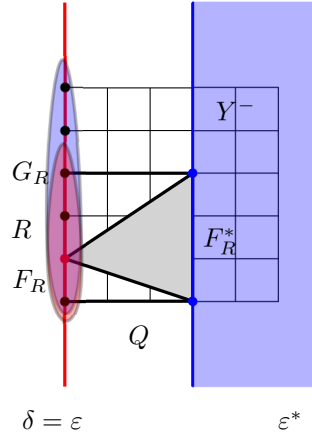


FIGURE 3.12 – Dans cet exemple, F_R est un sommet inclus dans G_R . Les points que l'on peut insérer dans S se trouvent dans $G_R \setminus \text{aff}(F_R)$. On remarque que l'on aurait pu choisir la facette R de telle sorte que F_R soit la face F_R^* de la figure pour retrouver le cas où $\dim F_R = d - 1$.

Lemme 3.2.13

On note par g la dimension maximale de F_R quelque soit la facette R de Q . Si $g \leq d - 2$, alors il existe une facette R de Q telle que F_R est de dimension g et pour laquelle il existe un point en nombres entiers $x \in R \setminus \{\text{aff}(F_R) \cup Y^-\}$ tel que x peut être inséré dans S .

Pour une meilleure compréhension du lemme, détaillons dans un premier temps toutes les implications du cas dans lequel on se retrouve.

Lemme 3.2.14

Si G_R admet F_R comme sous-ensemble et s'ils sont de même dimension, G_R est alors une face propre de Q .

Démonstration. On procède par contraposition. Supposons que G_R ne soit pas une face propre de Q . On a les deux cas suivants.

- (i) Si F_R et G_R sont de même dimension, puisque $F_R \subset Q$ alors F_R et G_R sont forcément disjoints (voir la figure 3.11).
- (ii) Ensuite, si $F_R \subseteq G_R$, il est nécessaire que $\dim F_R < \dim G_R$. Toujours par le fait que $F_R \subset Q$ (voir la figure 3.12).

□

Démonstration. (lemme 3.2.13) On considère une des facettes R de Q telle que $\dim F_R = g$. On rappelle qu'on se trouve dans le cas où $\dim F_R = \dim G_R = g \leq d - 2$. Pour prouver le lemme, il nous faut trouver un point appartenant à une facette R qui ne soit pas contenu ni dans $\text{aff}(F_R)$ ni dans Y^- . Ensuite, on montre que si on trouve un tel point, il peut être inséré dans S par le lemme 3.1.9.

D'après le lemme 3.2.14, G_R est une face propre de Q . De plus elle est de dimension inférieure ou égale à

$d - 2$. En utilisant alors les symétries de $[0, k]^d$, on peut supposer que toute facette R de Q qui contienne G_R est de la forme

$$\{x \in Q : x_i = \gamma_i^-\}$$

pour une coordonnée $i \in \{1, \dots, d\}$. En supposant ce cas, toutes les coordonnées du vecteur c sont positives ou nulles sauf peut-être pour une valeur c_i (où i est la coordonnée orthogonale à R). Il en est de même pour une facette R' de Q contenant G_R : toutes les coordonnées du vecteur c sont positives ou nulles sauf peut-être pour une valeur c_j où j est la coordonnée orthogonale à R' . Puisque le vecteur c est le même quelque soit le R choisi et comme $i \neq j$, il s'en suit que toutes les coordonnées de c sont positives ou nulles.

Considérons ensuite la coordonnée $c_1 > 0$, et soit

$$R = \{x \in Q : x_1 = \gamma_1^-\}$$

On rappelle que F_R^* est non vide, considérons ainsi un sommet $v \in F_R^*$. Par définition ε^* est donné par l'égalité

$$\sum_{i=1}^d c_i v_i = \varepsilon^*.$$

En retirant le terme en c_1 de la somme, on obtient

$$c_1 \gamma_1^- + \sum_{i=2}^d c_i v_i = \varepsilon^* - c_1(v_1 - \gamma_1^-).$$

On considère maintenant le point w comme étant la projection orthogonale de v sur la facette R . Cette projection assure que $w \in R$. Le point w satisfait la relation $c \cdot w = \varepsilon^* - c_1(v_1 - \gamma_1^-)$. Les coordonnées de w coïncident donc avec toutes les coordonnées de v sauf pour la première coordonnée qui vaut γ_1^- au lieu de v_1 . Puisque $c_1 > 0$ et de plus comme $v_1 > \gamma_1^-$, on a $c \cdot w < \varepsilon^*$. Par conséquent, pour ce R , $w \notin Y^-$.

Il reste à prouver que pour cette même facette R , $w \notin \text{aff}(F_R)$. On rappelle que $g \leq d - 2$. Ainsi G_R ne peut pas être une facette de Q , de plus G_R est contenu dans une autre facette de Q distincte de R . Comme le sommet v de F_R^* n'appartient à aucune facette de Q contenant G_R , son projeté orthogonal w dans R ne peut être contenu dans G_R . Ensuite, on remarquant que $\text{aff}(G_R) \cap R = G_R$, si $w \in R$ mais n'appartient pas à G_R , alors il s'en suit que $w \notin G_R$. Et puisque $F_R \subseteq G_R$ tel que $\dim F_R = \dim G_R$, ils partagent la même enveloppe affine. On obtient le résultat, $w \notin \text{aff}(F_R)$.

Par construction, on conclut que $w \in R \setminus \{\text{aff}(F_R) \cup Y^-\}$. Ainsi w peut être inséré dans S . \square

Une fois toutes les disjonctions de cas considérés, nous sommes à présent en mesure de prouver la proposition 3.2.5.

Démonstration. (proposition 3.2.5) On rappelle alors pour chaque cas traité on a prouvé le lemme correspondant, et on sait également dans quelle partie de $[0, k]^d$ se trouve le point x que l'on peut insérer

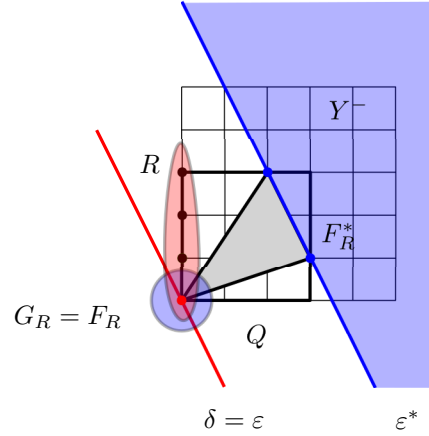


FIGURE 3.13 – Le dernier cas de notre disjonction où, pour n’importe quel choix de R , $F_R \subset G_R$ et $\dim F_R = \dim G_R$ et tel que la dimension maximale de F_R est $d - 2$. L’unique point valide à l’insertion, marqué en noir, est contenu dans $R \setminus \{\text{aff}(F_R) \cup Y^-\}$.

dans S . Cette preuve est donc le résumé des résultats obtenus dans les lemmes précédents. Premièrement dès que F_R est une facette, d’après le lemme 3.2.8, $x \in \{Y \cap [0, k]^d\} \setminus F_R^*$. Ensuite on distingue les cas où $F_R \not\subset G_R$ et $F_R \subset G_R$. Quand $F_R \not\subset G_R$, le lemme 3.2.10 indique que $x \in G_R$. Tandis que quand $F_R \subset G_R$, on a : si $\dim F_R < \dim G_R$, alors $x \in G_R \setminus \text{aff}(F_R)$ selon le lemme 3.2.11, et enfin si $\dim F_R = \dim G_R$ alors le lemme 3.2.13 indique que le point x à insérer se trouve dans $R \setminus \{\text{aff}(F_R) \cup Y^-\}$.

Ceci étant, pour un simplexe S de dimension d contenu dans $[0, k]^d$, il existe toujours un point en nombres entiers $x \in [0, k]^d$ tel que x peut-être inséré dans S . \square

Exemple 3.2.15(Insertion de points entiers dans un simplexe de dimension 3.)

Voir la figure 3.14.

Dessin (a) On considère un simplexe S de dimension 3 contenu dans $[0, k]^3$.

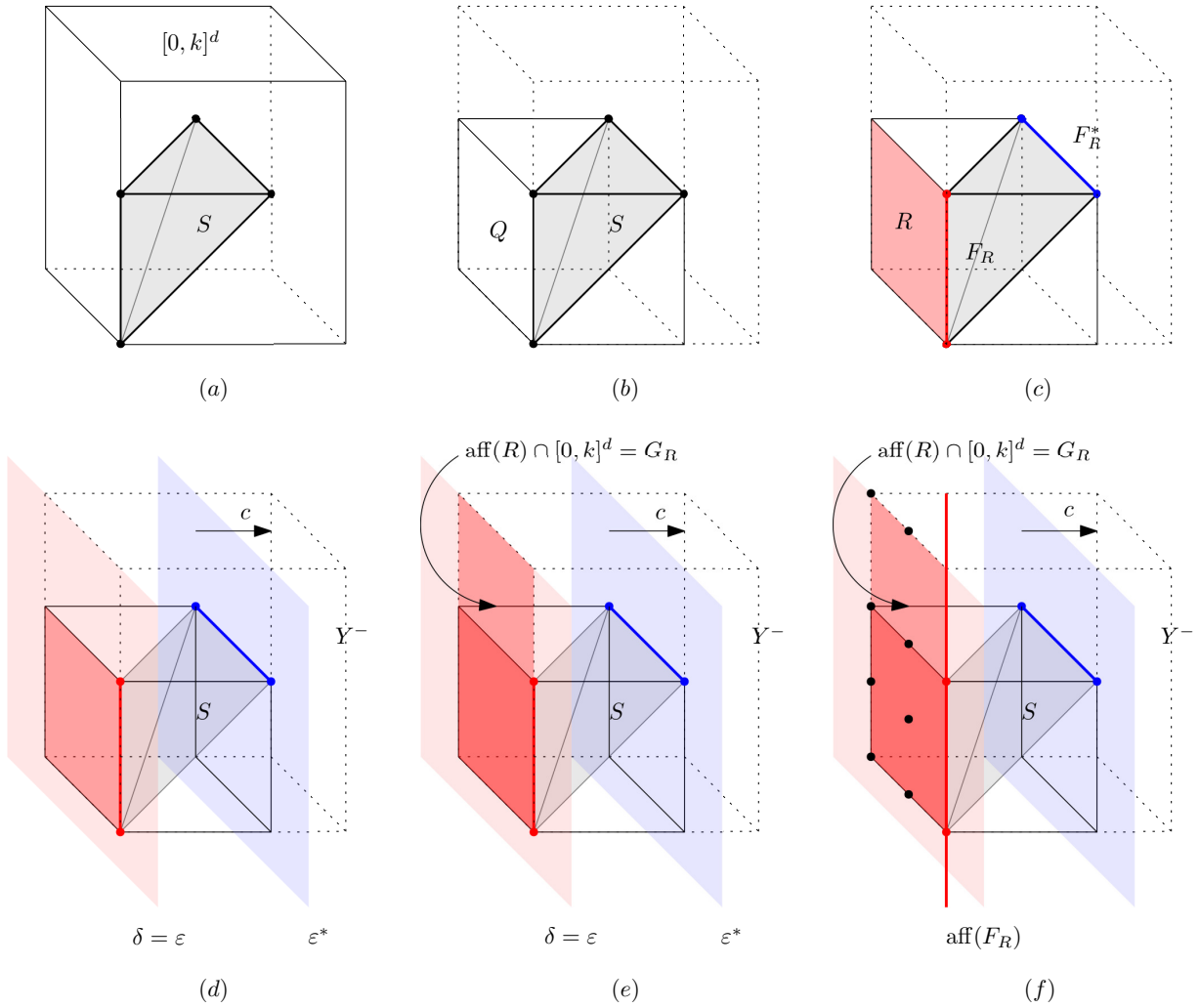
Dessin (b) On construit l’hypercube Q , Q étant le plus petit hypercube combinatoire contenant S .

Dessin (c) On choisit une facette R de Q , ici la facette coloré en rouge, définissant ainsi les faces de F_E et F_R^* de S . F_R est l’arête rouge de S tandis que F_R^* est celle en bleue. Dans notre cas $\dim F_R = 1$.

Dessin (d) On choisit un vecteur c à la fois orthogonal à F_R et F_R^* , et on construit l’hyperplan Y , coloré en bleu sur le dessin, tel que le demi-espace fermé Y^- délimité par Y ne contienne pas F_R . L’hyperplan parallèle à Y passant par F_R est quand à lui coloré en rouge. Les scalaires ε et ε^* sont également déterminées.

Dessin (e) On considère l’intersection $\text{aff}(R) \cap [0, k]^3$. Ici, elle correspond à la facette de $[0, k]^3$ coloré en rouge. On définit également l’ensemble G_R : dans l’exemple, $\text{aff}(R) \cap [0, k]^3$ et G_R coïncident, de même que δ et ε . Ici $\dim G_R > \dim F_R$. Le lemme 3.2.11 présuppose que le point x à insérer dans S se trouve dans $G_R \setminus \text{aff}(F_R)$.

Dessin (f) Tous les points de $G_R \setminus \text{aff}(F_R)$, marqués en noir, peuvent être insérés dans S .

FIGURE 3.14 – Illustration de la recherche d'un point x à insérer dans S .

Il est important de rappeler que le résultat obtenu grâce à la proposition 3.2.5 est crucial pour les deux prochains chapitres car tous les résultats énoncés dans ces derniers reposent sur le fait qu'il existe toujours un point en nombres entiers de l'hypercube que l'on puisse insérer dans un simplexe S donné. Une récurrence sur la dimension en se basant sur la proposition 3.2.5 constitue en effet le principal argument de la preuve de la connexité d'une structure de graphe sur les polytopes en nombres entiers qui sera développée dans le chapitre 4.

4 | Une structure de graphe pour les polytopes

Ce chapitre introduit l'étude de structures de graphe dont les sommets sont les polytopes de dimensions d contenus dans \mathbb{R}^d . Deux polytopes P et Q sont reliés dans le graphe si P et Q peuvent être obtenus à la suite d'une opération élémentaire qui transforme l'un en l'autre (voir figure 4.1). Les opérations élémentaires sont celles décrites précédemment dans le chapitre 3. On considère alors trois graphes pour les polytopes de dimension d dont les ensembles de sommets sont les suivants : les polytopes de \mathbb{R}^d , les polytopes de \mathbb{Z}^d et les (d, k) -polytopes. On abordera dans ce chapitre des questions portant sur la connexité ainsi que le diamètre de ces graphes.

Pour réaliser l'étude de la connexité, on met en place une métrique originale sur l'ensemble des polytopes de dimension d . Une métrique qui diffère par exemple de celle de la distance Gromov-Hausdorff dans [24] qui mesure à quelle distance deux objets sont isomorphes. La notion de distance que l'on propose prend en compte le nombre d'opérations élémentaires nécessaires pour transformer un polytope en un autre.

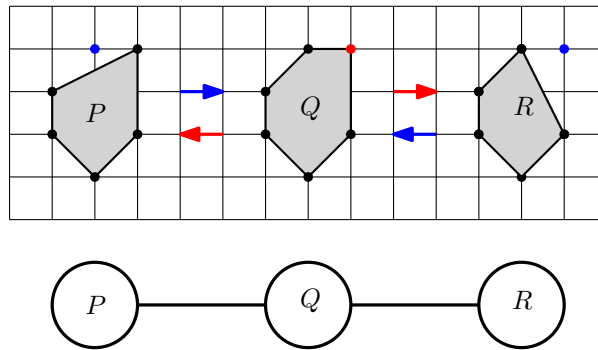


FIGURE 4.1 – La figure illustre trois polytopes P , Q et R . Une flèche bleue indique que le polytope pointé par celle-ci est obtenue après l'ajout du point bleu. Tandis qu'une flèche rouge correspond au cas où le sommet rouge a été supprimé du polytope de départ. Les polytopes P , Q et R sont représentés par le dessin d'en bas en tant que sommet d'un graphe.

Une autre motivation de l'étude de cette structure de graphe est qu'elle servira à l'énumération des po-

lytopes en nombres entiers (chapitre 7). Une approche similaire a déjà été introduite dans [6] et [7], une approche qui a abouti à une énumération des polytopes contenant un nombre fixé de points en nombres entiers. On verra également une application de ce sous-graphe particulier : la génération aléatoire de polytopes en nombres entiers (chapitre 6).

4.1 Introduction et notations

On dénote par $\Gamma(d)$ le graphe dont les sommets sont les polytopes de dimension d contenus dans \mathbb{R}^d et dont les arêtes relient deux polytopes obtenus à la suite d'une opération élémentaire. Le sous-graphe induit dans $\Gamma(d)$ par les polytopes $P \in \mathbb{Z}^d$ est noté $\Lambda(d)$, et pour le cas restreint aux polytopes contenus dans $[0, k]^d$, le sous-graphe de $\Gamma(d)$ est noté $\Lambda(d, k)$.

Le graphe $\Gamma(d)$ possède une infinité de sommets. La remarque 3.1.11 du chapitre 3 indique que l'insertion d'un point dans un polytope $P \in \mathbb{R}^d$ est toujours possible dès que l'on prend un point avoisinant son bord. Par conséquent, le degré d'un sommet de $\Gamma(d)$ est non dénombrable. La question de la connexité intervient de manière naturelle. Si le graphe est connexe, la question de la distance maximale entre deux polytopes fixés se pose ensuite. On s'intéressera d'abord à la connexité et au diamètre des sous-graphes de $\Gamma(d)$, restreints aux polytopes à n et $n + 1$ sommets. La connexité de $\Gamma(d)$ découlera du théorème 4.1.1 qui sera prouvé dans ce chapitre. Nous établirons plus tard des bornes sur la distance entre deux polytopes à nombre de sommets fixé.

Théorème 4.1.1

Pour tout $n \geq d + 1$, les polytopes à n et $n + 1$ sommets constitue un sous-graphe connexe de $\Gamma(d)$ et dont le diamètre est au moins $4n - 2d$ et au plus $6n - 4$.

On considérera ensuite les sous-graphes $\Lambda(d)$ et $\Lambda(d, k)$. Ces sous-graphes ont un intérêt particulier car $\Lambda(d)$ admet à la fois des sommets de degré fini et des sommets de degré infini, mais cette fois-ci dénombrable. On peut également y trouver des polytopes auxquels aucun point ne peut être inséré et d'autres où la suppression est impossible. Aucun point à coordonnées entières ne peut par exemple être inséré dans le cube $[0, 1]^d$, tandis qu'aucun point ne peut être supprimé d'un simplexe de \mathbb{Z}^d (proposition 3.1.4).

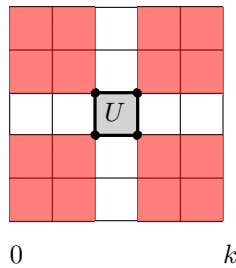


FIGURE 4.2 – Un exemple de sommet particulier dans le graphe $\Lambda(d)$. Il n'existe aucun point de \mathbb{Z}^d , que l'on puisse insérer dans U .

Nous nous intéresserons également à la connexité dans les sous-graphes pour le cas entier.

Théorème 4.1.2

Le sous-graphe induit dans $\Lambda(d, k)$ par les simplexes et les polytopes à $d + 2$ sommets est connexe.

Le théorème 4.1.2 est également prouvé dans ce chapitre : il est obtenu à partir de la proposition 3.2.5. La connexité de $\Lambda(d, k)$ est ensuite montrée par une récurrence sur la dimension. Par la suite, on montre que $\Lambda(d)$ est connexe à partir de la connexité de $\Lambda(d, k)$. On ne pourrait pas procéder de la même manière pour obtenir la connexité de $\Lambda(d)$, c'est-à-dire effectuer une récurrence sur la dimension à partir du résultat de la proposition 3.2.2. Démontrer la connexité de $\Lambda(d)$ en passant par celle de $\Lambda(d, k)$ n'est donc pas seulement une commodité mais une nécessité si l'on souhaite utiliser notre récurrence.

4.2 Connexité de $\Gamma(d)$

Cette section porte sur la résolution de la question sur la connexité de $\Gamma(d)$. La méthode de preuve se base sur la connexité des sous-graphes induits par les polytopes à n et $n + 1$ sommets lorsque $n \geq d + 1$.

Dans toute la suite du chapitre, comme le cas où d vaut 1 est trivial, on supposera que $d \geq 2$.

Lemme 4.2.1

Soit P un d -polytope de \mathbb{R}^d avec n sommets. Dès que $n \geq d + 2$, alors on peut supprimer au moins $n - d - 1$ sommets de P .

La preuve est immédiate en raisonnant par récurrence sur la dimension, comme on peut toujours supprimer n'importe quel sommet d'un polygone à quatre sommets. Toutefois chaque suppression doit être valide selon la proposition 3.1.4. En d'autres termes, on peut supprimer n'importe quel sommet d'un polytope de dimension d excepté au plus $d + 1$. En particulier les seuls polytopes auxquels on ne puisse supprimer aucun sommet sont les simplexes. Il faut donc retenir que d'après le lemme 4.2.1 tout polytope de dimension d peut se ramener à un d -simplexe avec une succession de suppression de ses sommets.

Intéressons nous à présent aux sous-graphes de $\Gamma(d)$ induits par les polytopes à n et $n + 1$ sommets.

Définition 4.2.2

*Soit \mathcal{A} un sous-ensemble de \mathbb{R}^d . \mathcal{A} est dit en *position convexe* si tout ensemble fini de points de \mathcal{A} constitue l'ensemble de sommets d'un polytope.*

Exemple 4.2.3

Un exemple simple pour comprendre est le cas de l'hypercube unité dans le cas entier. Il existe 2^d points en nombres entiers dans l'hypercube $[0, 1]^d$. Chaque sous-ensemble de points constitue l'ensemble de sommets d'un polytope, qui est cependant pas forcément de dimension d . La figure 4.3 illustre le cas du cube en dimension 2.

Lemme 4.2.4

Soit \mathcal{A} un sous-ensemble de \mathbb{R}^d en position convexe. Pour tout $n \geq d + 1$, les polytopes à n et $n + 1$ sommets ayant comme ensemble de sommets des éléments de \mathcal{A} induisent un sous-graphe connexe de $\Gamma(d)$ dont le diamètre est au plus $2n + 2$. De plus, deux polytopes à n sommets dans un tel sous-graphe sont au plus distants de $2n$.

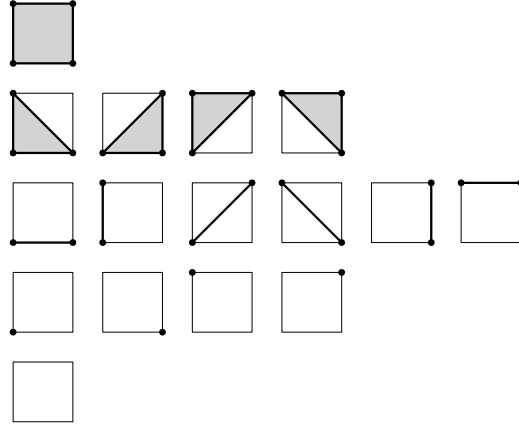


FIGURE 4.3 – En dimension 2, on a ici la représentation de tous les polytopes dont l'ensemble de sommets est constitué par les sous-ensembles de points en nombres entiers de $[0, 1]^2$.

Démonstration. On considère deux polytopes P et Q à n ou $n + 1$ sommets, et dont les ensembles de sommets sont contenus dans \mathcal{A} . On suppose dans un premier temps que P et Q ont chacun n sommets. L'idée est de construire un chemin dans le graphe reliant P et Q . La longueur de ce chemin constitue le nombre d'opérations élémentaires nécessaires pour transformer P en Q . Comme \mathcal{A} est en position convexe, n'importe quel ensemble fini de points de \mathcal{A} constitue l'ensemble de sommets d'un polytope, ainsi chaque sommet de Q peut être ajouté à P . En particulier, l'enveloppe convexe de $P \cup Q$ est un noeud du sous-graphe. Si P et Q n'ont aucun sommets en commun, il faut au plus n opérations d'insertion des n sommets de Q pour atteindre $P \cup Q$ suivis de n opérations de suppression des n sommets de P pour atteindre Q . En supposant maintenant que P et Q ont $n + 1$ sommets, il faudra deux opérations de suppression de plus pour les transformer chacun en deux polytopes à n sommets. Une telle suppression est valide car $n \geq d + 1$. On reprend ensuite le même raisonnement que précédemment, auquel on ajoute les deux opérations de suppression. D'où le résultat. \square

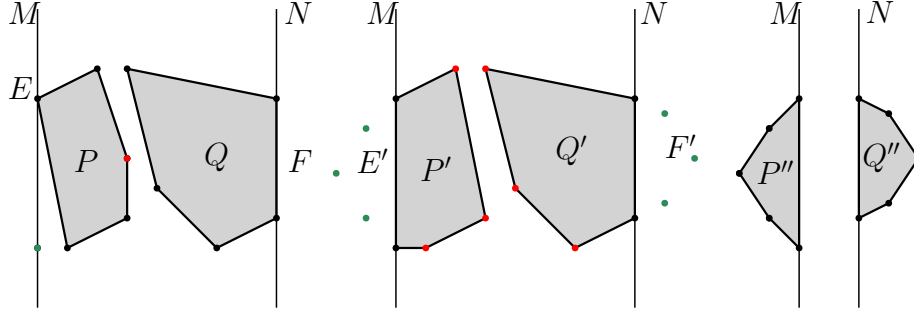
Théorème 4.2.5

Pour tout $n \geq d + 1$, les polytopes à n et $n + 1$ sommets induisent un sous-graphe connexe de $\Gamma(d)$ dont le diamètre est au plus $6n - 2$. De plus, deux polytopes à n sommets sont au plus distants de $6n - 4$.

Démonstration. On considère deux polytopes P et Q à n ou $n + 1$ sommets. La preuve reprend le raisonnement de la preuve du lemme 4.2.4. On suppose dans un premier temps que P et Q ont chacun n sommets. L'idée est de construire un chemin qui transforme P en Q . Dans le pire cas, P et Q ne partagent aucun sommet, on supposera alors cette hypothèse. On note

$$\gamma = \min\{x_1 : x \in P \cup Q\}$$

On suppose que les points x de $P \cup Q$ vérifiant $x_1 = \gamma$ appartiennent tous à P . Considérons ensuite l'hyperplan $M = \{x \in \mathbb{R}^d : x_1 = \gamma\}$. On note par E la face propre de P tel que $P \cap M = E$. La première étape de la

FIGURE 4.4 – Le passage de P à P'' et de Q à Q'' .

construction du chemin dans le graphe de P à Q consistera à transformer la face E de P en une facette E' d'un polytope intermédiaire P' . Cependant si E est déjà une facette de P , alors on passera directement à la deuxième étape.

Considérons le cas où E n'est pas une facette. Ici, on aura recours au lemme 3.1.9 du chapitre 3. On rappelle que pour une face propre F de P , et dont l'hyperplan support est H_F , pour chaque sommet v incident à F , $C_v(P) \subset H_F^-$ et $C_v(P) \cap H_F \subset \text{aff}(F)$. Et où H_F^- est le demi-espace fermé de \mathbb{R}^d délimité par H_F ne contenant pas P .

Dans notre cas la face propre à considérer est E et son hyperplan support M . D'après le lemme 3.1.9, alors, pour tout sommet w de E , $C_w(P) \cap M \subseteq \text{aff}(E)$. Comme E n'est pas une facette il existe un point $x \in M$ tel que $x \notin \text{aff}(E)$ que l'on peut insérer dans P (on pourra par exemple insérer dans P le point coloré en vert dans le dessin de droite de la figure 4.4). Ensuite, on procède à la suppression d'un sommet de P qui n'est pas contenu dans E (par exemple le sommet de P coloré en rouge dans le dessin de droite de la figure 4.4). Pour transformer E en E' il faudra au plus $d - 1$ insertions de points dans M suivis de $d - 1$ suppressions des sommets de P non contenus dans E . Comme P a n sommets, transformer P en P' nécessitera au plus $2d - 2$ opérations.

Après cette première transformation, M est à présent un hyperplan support de la facette E' de P' , on note par M^- le demi-espace borné par M tel que M^- ne contienne pas P' . Pour chaque sommet v de E' , $C_v(P') \subset M^-$, selon toujours le lemme 3.1.9. On choisit alors un point $x \in M^- \setminus M$, en supposant que x soit assez proche de E' et tel que la projection orthogonale de x dans M soit contenue dans l'intérieur de E' (comme indiqué par le dessin du milieu de la figure 4.4). On procède à l'insertion de x dans P' . De la même manière que lors l'étape précédente, tout les sommets de P' non incidents à E' peuvent être supprimés. On déplace ainsi les $n - d$ sommets de E' de telle manière qu'ils vérifient les mêmes propriétés que x . Il faut alors $2n - 2d$ opérations pour transformer P' en P'' .

On note maintenant par

$$\delta = \max\{x_1 : x \in Q\},$$

On reprend le même procédé pour Q mais en choisissant l'hyperplan N tel que $N = \{x \in \mathbb{R}^d : x_1 = \delta\}$. Et on note par F la face propre de Q tel que $Q \cap N = F$. Si F n'est pas une facette de Q , il faut au plus $d - 1$ insertions de points dans N et suivis respectivement de $d - 1$ suppression de sommet de Q non incidents à F . Il faut alors $2d - 2$ opérations pour transformer Q en Q' (sur le dessin du milieu de la figure 4.4, $Q = Q'$).

De même, il faut au plus $2n - 2d$ pour transformer Q' en Q'' .

Arrivé à cette étape, on se retrouve dans la situation représentée par le dessin de droite de la figure 4.4. Une situation dans laquelle E' est une facette de P'' et dans laquelle F' est une facette de Q'' . On remarque alors que tous les sommets de P'' et de Q'' constituent exactement l'ensemble de sommets de l'enveloppe convexe $P'' \cup Q''$. D'après le lemme 4.2.4, P'' et Q'' sont distants de $2n$. On obtient alors la distance suivante entre P et Q :

$$2d - 2 + 2n - 2d + 2d - 2 + 2n - 2d + 2n = 6n - 4.$$

En supposant maintenant que P et Q ont chacun $n + 1$ sommets, il faudra y ajouter deux opérations de suppression pour obtenir deux polytopes à n sommets. D'où le résultat. \square

Par conséquent, le théorème 4.2.5 nous indique qu'il est toujours possible de trouver une suite d'opérations élémentaires pour transformer n'importe quel polytope en un autre.

Corollaire 4.2.6

$\Gamma(d)$ est connexe.

Démonstration . Soient P et Q deux polytopes de dimension d et contenus dans \mathbb{R} , tels que P et Q ont respectivement n et m sommets. On suppose que $n \leq m$. D'après le lemme 4.2.1, on peut toujours supprimer un sommet d'un polytope avec plus de $d + 1$ sommets. Il existe alors une suite d'opérations de suppressions de sommets (éventuellement nulle) qui transforme Q en un d -polytope à n sommets. Le résultat découle du théorème 4.2.5. \square

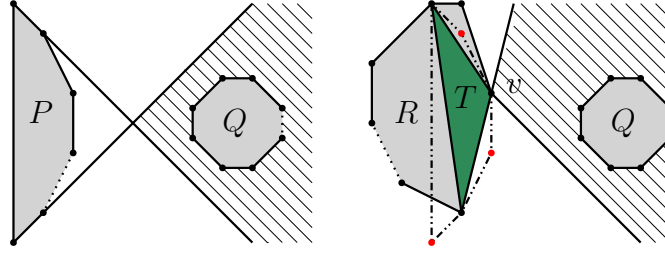
On s'intéresse à présent aux nombres d'opérations élémentaires nécessaires pour transformer un polytope de dimension d en un n'importe quel autre. Le théorème 4.2.5 donne une borne linéaire en n , indépendante de la dimension, pour le diamètre du sous-graphe induit dans $\Gamma(d)$ par les polytopes à n et $n + 1$ sommets. On obtient également une borne inférieure sur ce diamètre qui est relativement proche de la borne supérieure.

Lemme 4.2.7

Pour tout $n \geq d + 1$, le sous-graphe de $\Gamma(d)$ induits par les polytopes à n et $n + 1$ sommets a un diamètre d'au moins $4n - 2d$.

Démonstration . On considère tout d'abord deux polygones P et Q comme le décrit la figure 4.5. On suppose alors que P et Q ont chacun $n - d + 2$ sommets. Comme il est indiqué sur la figure 4.5 sont positionnés de telle manière que pour tout sommet v de P , excepté ceux contenus dans son arête la plus longue, $Q \in C_v(P)$. L'intersection de cônes au sommets de P ainsi décrit est représentée par la partie hachurée du premier dessin de la figure.

On remarque que pour tout $d \geq 3$, on peut construire un polytope de dimension d par l'ajout d'un sommet au dessus de P , de telle sorte que ce soit une pyramide dont la base soit P . Ensuite de la même façon en ajoutant une fois encore un sommet au dessus de cette pyramide et ainsi de suite. On notera par P' le

FIGURE 4.5 – Les polygones P , Q , R et le triangle T .

polytope de dimension d obtenu en appliquant cette construction et Q' celui obtenu par la même procédure mais en partant cette fois-ci du polygone Q .

Comme P et Q sont tout deux des polygones à $n - d + 2$ sommets, par construction, P' et Q' sont alors des polytopes de dimension d et ont chacun n sommets. On suppose ensuite que P' et Q' ne partagent aucun sommet en commun.

On considère maintenant la séquence d'opérations élémentaires qui va transformer P' en Q' . On dira qu'une opération dans cette séquence correspondra à une insertion directement suivie d'une suppression. On suppose qu'après la première opération dans la séquence qui transforme P' en Q' résulte sur un polytope que l'on notera R' . On suppose qu'avec cette opération, tous les sommets de P exceptés deux ont été supprimés de P' .

En effet, dans le cas contraire, l'intersection de R de R' avec le plan contenant P et Q serait un polygone qui partagera au moins trois sommets avec P . Cette situation est illustrée par le dessin de droite de la figure 4.5. Dans ce cas là, la trace de P est représentée en pointillé, les sommets que P et R ne partagent pas sont marqués en rouge, tandis que ceux qu'ils partagent forment le triangle T coloré en vert.

De part cette construction, au moins un sommet v de T vérifie l'hypothèse suivante : $Q \subset C_v(T)$, représentée par la partie hachurée du dessin de droite de la figure 4.5. On observe également, que ce cône est aussi contenu dans $C_v(R)$. Or $C_v(R)$ est exactement l'intersection de $C_v(R')$ avec le plan contenant P et Q . On en déduit que $Q \subset C_v(R')$. Ce qui signifie qu'aucun sommet de Q ne peut être inséré dans R .

Dans cette configuration, il aura alors fallu au moins $n - d$ opérations dans la séquence avant que R' ne soit atteint depuis P' . Ensuite tous les sommets de Q doivent être insérés dans R' , ce qui nécessitent au moins $n - d + 2$ insertions suivis de $n - d + 2$ suppressions.

Comme P' et Q' ne partagent aucun sommet, il faudra au moins $d - 2$ insertions suivis de $d - 2$ suppressions pour déplacer les sommets de P' qui ne sont pas contenus dans P . Par conséquent, transformer P' en Q' requiert

$$2(n - d) + 2(n - d + 2) + 2(d - 2) = 4n - 2d$$

opérations élémentaires.

□

On prouve ainsi le théorème 4.1.1 en combinant les résultats du théorème 4.2.5 et du lemme 4.2.7. Ces derniers résultats démontrent la place centrale des simplexes dans le graphe $\Gamma(d)$. Dans ce sens, construire un chemin reliant deux polytopes à n sommets en passant par les simplexes prend beaucoup moins d'opérations qu'un chemin ne visitant que les polytopes à n et $n + 1$ sommets. Le théorème 4.2.8 suivant renforce cet assertion car en effet, un chemin passant par les simplexes est au moins deux fois moins grand dès que d est fixé et que n est grand.

Théorème 4.2.8

La distance dans $\Gamma(d)$ entre deux polytopes à n et m sommets est au plus de $n + m + 4d$.

Démonstration. La preuve se fait en passant par les simplexes. D'après le théorème 4.2.5, deux simplexes sont distants de $6d + 2$. Comme il est toujours possible d'effectuer une séquence de suppressions pour transformer un polytope en un simplexe, on obtient le résultat. La distance entre les deux polytopes est ainsi

$$n - d - 1 + m - d + 1 + 6d + 2 = n + m + 4d.$$

□

4.3 Connexité de $\Lambda(d)$ et de $\Lambda(d, k)$

Une fois la connexité de $\Gamma(d)$ établie, intéressons nous à présent au cas entier. L'étude de la connexité de $\Lambda(d)$ passera en premier lieu par celle de $\Lambda(d, k)$. En prouvant que $\Lambda(d, k)$ est connexe, il en découlera ensuite que $\Lambda(d)$ l'est également. Cette section portera sur la preuve du théorème 4.1.2, qui par la suite va nous permettre de procéder à la preuve de la connexité de $\Lambda(d, k)$.

Rappelons que la preuve théorème 4.1.2 consiste en une preuve par récurrence sur la dimension, dont le cas de base est la connexité de $\Lambda(2, k)$. On rappelle également que l'argument principal de la preuve passera par le fait que l'on puisse toujours trouver un point que l'on peut insérer dans un simplexe $S \in [0, k]^d$; résultat que l'on a obtenu avec la proposition 3.2.5 du chapitre précédent.

Procédons tout d'abord à la preuve de la connexité de $\Lambda(2, k)$. Dans toute la suite de la section, on appellera par *simplexe du coin* de $[0, k]^d$ le simplexe dont les sommets sont l'origine ainsi que les d points de $[0, k]^d$ qui sont distants de l'origine exactement 1.

Lemme 4.3.1

Pour tout entier positif k , le sous-graphe induit dans $\Lambda(2, k)$ par les triangles et les quadrilatères est connexe.

Démonstration. On rappelle que tout sommet d'un quadrilatère peut être supprimé de telle manière à obtenir un triangle. Il est alors suffisant de prouver que n'importe quel couple de triangles appartient à la même composante connexe du sous-graphe induit dans $\Lambda(2, k)$ par les triangles et les quadrilatères. On notera le simplexe du coin, ici un triangle, par T_0 .

La preuve repose sur le fait que pour n'importe quel triangle T , on peut toujours trouver une séquence d'opérations élémentaires pour transformer T en T_0 .

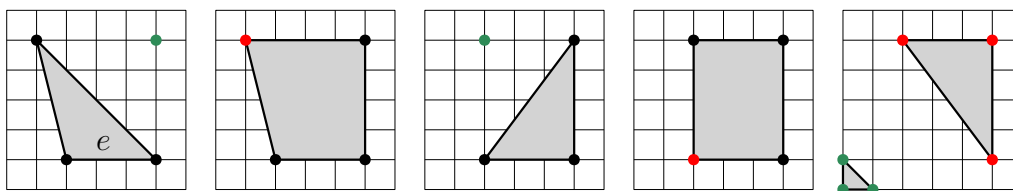


FIGURE 4.6 – La séquence d’opérations élémentaires transformant le triangle de gauche en un triangle de coin, sur le dessin le plus à droite. Une insertion est représentée en vert tandis qu’une suppression en rouge.

On considère un triangle T contenu dans $[0, k]^2$. On veut que T soit un triangle quelconque ne présentant aucune particularité dans ce cas, on suppose que T ne présente ni une arête horizontale ni une arête verticale. D’après la proposition 3.2.5, T peut être transformé en un quadrilatère Q , possédant un côté vertical ou horizontal à la suite d’une insertion, en choisissant un point à insérer adéquat. On notera ce côté vertical ou horizontal de Q par e . En partant à présent de Q , on suppose ensuite que l’on supprime un sommet qui ne soit pas contenu dans e . On aboutit à un triangle T' qui admet e comme arête.

L’idée est maintenant de trouver une séquence d’opérations élémentaires qui transformera le triangle T' en T_0 comme il est illustré sur la figure 4.6. Cette figure illustre le cas où e est l’arête horizontale situé sur le bas du triangle T' . Chaque dessin montre ensuite la séquence d’insertion (en vert), suivi d’une suppression (en rouge) utilisée pour aboutir au triangle du coin T_0 .

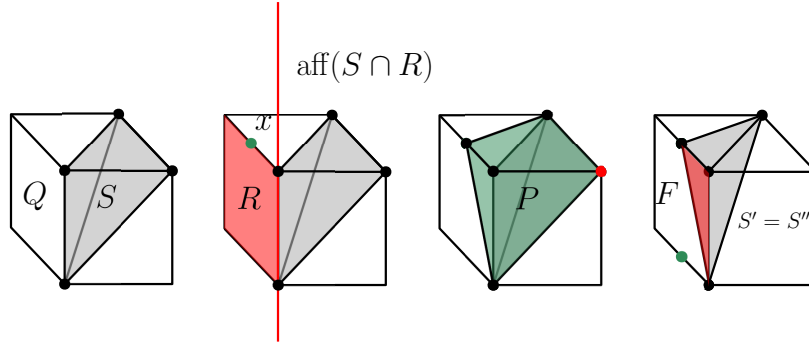
On observe que l’insertion du point marqué en vert du premier dessin dans T' conduit à un quadrilatère admettant au moins trois côtés perpendiculaires (deuxième dessin de la figure 4.6). Ensuite à partir de ce quadrilatère, on procède à une suppression de manière à obtenir un triangle rectangle (dessin du milieu de la figure 4.6). À présent, ce dernier triangle possède une unique arête oblique qui admet faisant face à l’un des quatre sommets du carré $[0, k]^2$. Il est alors toujours possible de faire en sorte que ce sommet du carré $[0, k]^2$ soit l’origine, moyennant bien sur des opérations supplémentaires (quatrième et dernier dessin de la figure 4.6).

Enfin, on note maintenant par U le triangle tel que l’unique arête oblique fait face à l’origine. Il suffit alors d’insérer un à un dans U tous les sommets de T_0 , suivi à chaque fois d’une suppression d’un sommet de U . Il faut cependant veiller à insérer en premier, dans U , l’origine et de supprimer en dernier lieu le sommet de U situé le plus en haut à droite dans le cas où U présente un ou deux sommets dont une des coordonnées vaut 0.

□

Le cas de base de notre récurrence étant traité, nous sommes à présent en mesure de prouver le théorème 4.1.2. On rappelle que ce théorème stipule que le sous-graphe induit dans $\Lambda(d, k)$ par les simplexes et les polytopes à $d + 2$ sommets est connexe.

Démonstration du théorème 4.1.2. On rappelle que la preuve de la connexité de $\Lambda(d, k)$ consiste en une récurrence sur la dimension et dont le cas de base a été prouvé avec le lemme 4.3.1. Elle repose une fois encore sur la preuve que n’importe quel simplexe de dimension d se trouve dans la même composante connexe. En effet, d’après lemme 4.2.1, on peut toujours supprimer un sommet d’un polytope à $d + 2$ som-

FIGURE 4.7 – Transformer S en S'' .

met afin d'obtenir un simplexe. On prouve ensuite que n'importe quel simplexe peut être transformé en un simplexe du coin de $[0, k]^d$.

La preuve est assez longue et fastidieuse, par conséquent elle sera découpée en plusieurs étapes. Soit $d \geq 3$. On considère un simplexe S de dimension d contenu dans $[0, k]^d$ ainsi que le cube combinatoire minimal Q contenant S .

Considérons ensuite l'intersection de S avec une facette de Q . On veut, parmi toutes les facettes R de Q , que cette intersection soit de dimension maximale. On note par g cette dimension maximale. Si $g = d - 1$, on passe directement à la deuxième étape.

ÉTAPE 1. Transformer l'intersection $S \cap R$ en une face de dimension $d - 1$.

Rappelons que g est la dimension maximale de l'intersection de S avec une facette R de Q parmi toutes ses facettes. Si g est au plus $d - 2$ alors, d'après le lemme 3.2.11, il existe une facette R de Q tel que $S \cap R$ soit de dimension g et qu'il existe un point en nombres entiers x de $R \setminus \text{aff}(S \cap R)$ que l'on peut insérer dans S .

Soit à présent P le polytope obtenu à la suite de l'insertion de x dans S . P est un polytope à $d + 2$ sommets. On observe que l'intersection $P \cap R$ est un simplexe de dimension $d - 1$ car $x \notin \text{aff}(S \cap R)$. Dans ce cas, $P \cap R$ est ainsi une face d'un simplexe S' de dimension au moins d qui peut être obtenu en supprimant un sommet de P .

De plus l'intersection de S' avec R est exactement $P \cap R$, et est de dimension $g + 1$. On peut désormais répéter cette procédure : une séquence d'insertion suivi d'une suppression de telle sorte que S soit transformé en un simplexe dont l'intersection F avec la facette R de Q soit de dimension $d - 1$. On note alors par S'' ce simplexe.

ÉTAPE 2. Transformer $F = S'' \cap R$ en un simplexe du coin de $\text{aff}(R) \cap [0, k]^d$.

Soit maintenant v un sommet de S'' tel que v soit l'unique sommet de S'' qui n'est pas contenu dans R . On rappelle que d'après le lemme 3.2.9, l'intersection $\text{aff}(R) \cap [0, k]^d$ constitue un hypercube de dimension $d - 1$. Et à ce stade de la construction, F est un simplexe de dimension $d - 1$. On observe alors, dans ce

cas, que toute séquence d'insertions et de suppressions que l'on applique à F à l'intérieur de l'hypercube $\text{aff}(R) \cap [0, k]^d$ peut également être appliquée à la pyramide d'apex v et de base F .

Par récurrence, on arrive alors à transformer F en n'importe quel simplexe contenu dans l'hypercube $\text{aff}(R) \cap [0, k]^d$. En particulier en un simplexe dont un sommet $w \in \text{aff}(R) \cap [0, k]^d$ est tel que w n'a qu'une seule coordonnée non nulle et que les $d - 1$ autres sommets de F soient à distance 1 de w . Cette transformation consiste en d'autres termes à transformer F en un simplexe du coin de $\text{aff}(R) \cap [0, k]^d$.

À présent S a été transformé en un simplexe U dont la facette F est un simplexe de coin de dimension $d - 1$, relativement à l'hypercube $\text{aff}(R) \cap [0, k]^d$.

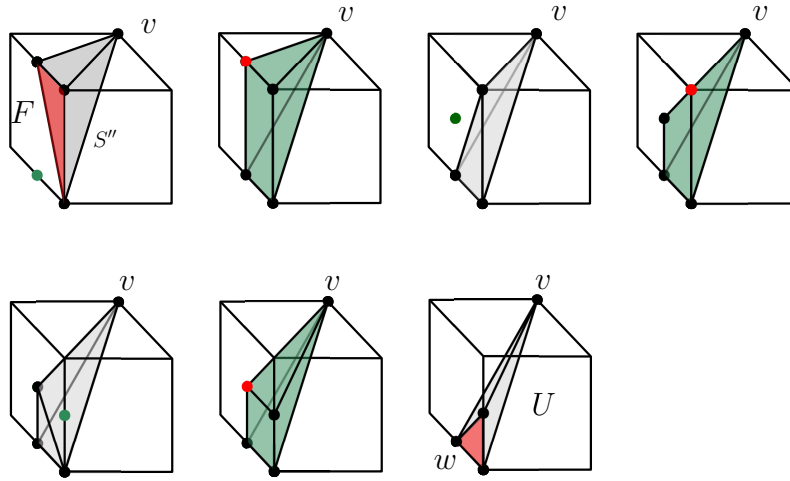


FIGURE 4.8 – Transformer S'' en U . Ici $\text{aff}(R) \cap [0, k]^d = R$.

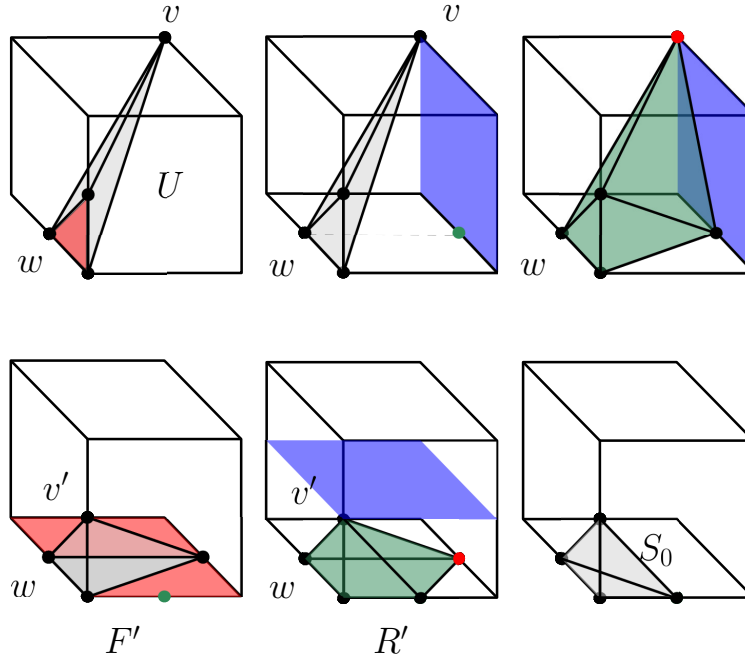
ÉTAPE 3. Transformer U en un simplexe du coin de $[0, k]^d$.

Nous sommes à présent en mesure de conclure la preuve en transformant U en le simplexe S_0 du coin de $[0, k]^d$. Premièrement, notons que l'on peut toujours insérer dans U un point de l'intersection de $[0, k]^d$ avec l'hyperplan parallèle à R contenant v ; excepté évidemment le sommet v . Dans les deuxième et troisième dessin de la figure 4.9, cet hyperplan est représenté en bleu. On choisit alors le point de cette intersection de telle manière qu'il soit sa projection orthogonale sur R soit w . On l'insère dans U , ensuite on supprime v .

À cet étape de la preuve, aucun sommet initialement dans F n'a encore été supprimé du polytope courant. On note alors par v' un des $d - 1$ sommets initialement dans F . On rappelle que tous ces sommets sont à une distance 1 de w . Après avoir supprimé v , on aboutit à une pyramide d'apex v' au dessus d'un simplexe F' de dimension $d - 1$ et tel que : pour une certaine coordonnée $i \in \{1, \dots, d\}$, v vérifie $v'_i = 1$ et tel que pour tous les autres sommets de F' , la coordonnée i est nulle. La face F' est représentée en gris sur le quatrième dessin de la figure 4.9, tandis que la facette R' de $[0, k]^d$ est celle colorée en rouge sur le même dessin.

On considère ensuite la facette R' de $[0, k]^d$ constituée des points x tel que $x_i = 0$. On peut dès lors par récurrence, transformer F' en un simplexe de coin de R' .

Finalement, on procède à une insertion d'un point distinct de v' , appartenant à l'hyperplan parallèle à R' contenant v . On choisit ce point de telle sorte que sa projection orthogonale sur R' soit l'origine. Et comme $v'_i = 1$, la i -ème coordonnée de ce dernier point inséré vaudra 1. Il est donc à distance 1 de l'origine. Après une éventuelle, dernière suppression de v' , on aboutit au simplexe S_0 du coin de $[0, k]^d$.

FIGURE 4.9 – Transformer U en S_0 .

On conclut alors que tout simplexe peut être réduit au simplexe S_0 , et comme les opérations élémentaires sont inversibles, on peut trouver le chemin inverse partant du simplexe du coin vers n'importe quel simplexe. Par conséquent tous les simplexes contenus dans $[0, k]^d$ appartiennent à la même composante connexe dans $\Lambda(d, k)$.

□

D'une part, avec le lemme 4.2.1, et d'autre part, par le théorème 4.1.2; on obtient le résultat suivant.

Corollaire 4.3.2

Pour tout entier positif k , $\Lambda(d, k)$ est connexe.

Considérons ensuite le cas de $\Lambda(d)$.

Théorème 4.3.3

Pour tout $d \geq 2$, $\Lambda(d)$ ainsi que le sous-graphe induit dans $\Lambda(d)$ par les simplexes et les polytopes à $d + 2$ sommets sont connexes.

Démonstration. Il est important de noter que les translations de \mathbb{Z}^d par les vecteurs entiers induisent des automorphismes de $\Lambda(d)$. On considère alors deux d -polytopes en nombres entiers P et Q de \mathbb{R}^d . On peut toujours trouver une translation déplaçant à la fois P et Q dans $[0, k]^d$, pourvu que k soit assez grand pour les contenir. Par conséquent, ces derniers appartiennent tout deux au sous-graphe de $\Lambda(d)$ isomorphe à $\Lambda(d, k)$. La connexité de $\Lambda(d)$ découle alors du corollaire 4.3.2.

Un raisonnement analogue est utilisé pour prouver la connexité du sous-graphe induit dans $\Lambda(d)$ par les simplexes et les polytopes à $d + 2$ sommets, mais en utilisant comme argument le théorème 4.1.2. \square

5 | Sous-graphes particuliers

Ce chapitre s'inscrit dans la continuité des chapitres 3 et 4 et expose la dernière partie des résultats de [14]. Rappelons que $\Lambda(d)$ a été introduit dans le chapitre 4 comme étant le sous-graphe de $\Gamma(d)$ composé par les polytopes en nombres entiers de dimension d . Dans le chapitre 4, il est prouvé que $\Lambda(d)$ est connexe pour tout $d \geq 2$. La partie essentielle de la preuve de ce résultat repose sur le fait que le sous-graphe de $\Lambda(d)$ composé par les d -simplexes et les polytopes à $d + 2$ sommets est connexe. Pour la connexité de $\Lambda(d)$, on montre qu'à partir d'un polytope P , il est toujours possible d'atteindre un polytope Q de la façon suivante :

- supprimer des sommets de P pour le ramener à un d -simplexe S_1 .
- transformer S_1 en un d -simplexe S_2 , dont les sommets sont des sommets de Q .
- ajouter des sommets jusqu'à obtenir Q .

Ce chemin entre deux polytopes P et Q permet d'obtenir une borne supérieure sur le diamètre de $\Lambda(d)$. Une question qui se pose alors naturellement est : existe-t-il un chemin reliant P et Q et ne passant pas par les simplexes (voir figure 5.1).

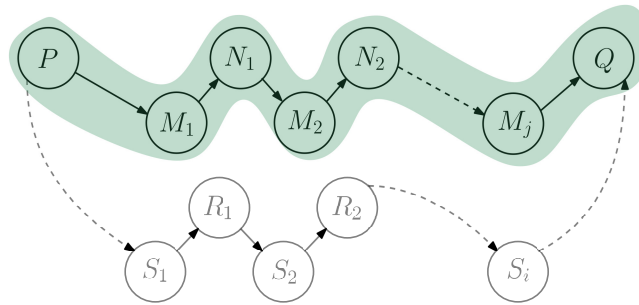


FIGURE 5.1 – Sans perdre de généralité, si P et Q possèdent $n + 1$ sommets, existe-t-il un chemin reliant P et Q en ne passant que par des polytopes en nombres entiers à n et $n + 1$ sommets? Un tel chemin est coloré en vert sur la figure, les M_j sont des polytopes à n sommets, les N_j des polytopes à $n + 1$ sommets. Enfin, les S_i sont des simplexes, les R_i des polytopes à $d + 2$ sommets.

Nous posons la question suivante : pour tout $n \geq d + 2$, le sous-graphe induit dans $\Lambda(d)$ par les polytopes en nombres entiers à n et $n + 1$ sommets est-il connexe? Nous verrons que la réponse à cette question est non. Nous n'obtenons pas, dans le cas général, de chemin de P vers Q ne passant pas par les simplexes. En revanche, l'étude de cette question nous a permis d'obtenir des résultats surprenants sur $\Lambda(d)$. En effet, il existe des polytopes en nombres entiers dans lesquels aucune insertion n'est possible et par conséquent

ces polytopes ne résultent d'aucune opération de suppression. Ainsi, le sous-graphe induit dans $\Lambda(d)$ par les polytopes en nombres entiers à n et $n + 1$ sommets n'est pas toujours connexe. De façon remarquable, ce sous-graphe n'est jamais connexe en dimension 2 à une exception près : il s'agit du cas du sous-graphe induit dans $\Lambda(2)$ par les pentagones et les hexagones, qui lui est connexe. Nous énonçons alors le théorème suivant qui sera démontré dans ce chapitre.

Théorème 5.0.1

Le sous-graphe de $\Lambda(2)$ induit par les polygones en nombres entiers avec n et $n + 1$ sommets n'est pas connexe pour tout n différent de 3 et 5.

Ce théorème résulte de l'existence d'une famille de polygones dans lesquels on ne peut insérer aucun point à coordonnées entières. Les deux exceptions sont les cas où $n = 3$ et $n = 5$. Le théorème 4.1.2 résout le cas où $n = 3$. La deuxième exception est énoncée par le théorème suivant, qui sera lui aussi démontré dans ce chapitre.

Théorème 5.0.2

Les pentagones et les hexagones induisent un sous-graphe connexe de $\Lambda(2)$.

Un sous-ensemble de sommets de $\Lambda(d, k)$ qui induit un sous-graphe non connexe de $\Lambda(d)$ induit nécessairement un sous-graphe non connexe de $\Lambda(d, k)$. En revanche, la réciproque est fautive. Par exemple, dans la figure 5.2, P est un pentagone de $\Lambda(2, 4)$ dans lequel aucun point à coordonnées entières de $[0, 4]^2$ ne peut être inséré. Par conséquent le théorème 5.0.2 n'est pas valable pour le cas de $\Lambda(d, k)$.

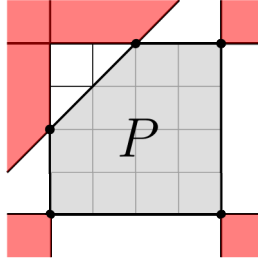


FIGURE 5.2 – Un pentagone de $\Lambda(2, 4)$ dans lequel aucun point à coordonnées entières de $[0, 4]^2$ ne peut être inséré.

Ce chapitre se décomposera ainsi de la manière suivante : une première partie mettra en emphase les polytopes particuliers dans lesquels aucune insertion n'est possible. Dans un premier temps, nous aborderons la dimension 2 pour ensuite étudier les cas en dimensions supérieures. Une deuxième partie se focalisera sur la preuve des résultats sur la connexité du sous-graphe induit dans $\Lambda(2)$ par les pentagones et les hexagones.

5.1 Polytopes en nombres entiers sans insertion possible

Dans le reste du chapitre, l'insertion d'un point dans un polytope fait référence à l'opération d'insertion d'un point définie dans le chapitre 3. Le lecteur est invité à s'y référer, et en particulier pour y retrouver

la définition des cônes au sommets (définitions 3.1.1 et 3.1.5). Commençons avec un exemple simple en dimension 2 et considérons un polygone de $\Lambda(2, k)$. Pour $k = 5$, soit le carré unité U contenu dans $[0, 5]^2$ représenté sur la figure 5.3. On observe qu'aucun point à coordonnées entières de $[0, 5]^2$ ne peut être inséré dans U .

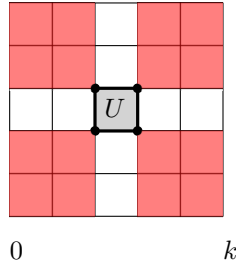


FIGURE 5.3 – Les cônes $C_v(U)$ de chaque sommet v de U sont représentés en rouge. Il n'existe aucun point à coordonnées entières de $[0, 5]^2$, que l'on puisse insérer dans U . On remarque que quelque soit la valeur de k , il est impossible d'insérer un point à coordonnées entières dans U .

On rappelle qu'une insertion d'un point dans un polytope P est impossible si celui-ci est dans P ou si celui-ci est contenu dans l'un des cônes aux sommets de P . Il est impossible d'insérer un point dans un polytope P de $\Lambda(d)$ (resp. $\Lambda(d, k)$) si l'union du polytope et de l'ensemble de ses cônes aux sommets inclut \mathbb{Z}^d (resp. $[0, k]^d \cap \mathbb{Z}^d$). C'est le cas du carré unité de la figure 5.3. Nous avons alors le lemme suivant.

Lemme 5.1.1

Pour tout d , il n'existe aucun point de \mathbb{Z}^d que l'on puisse insérer dans un hypercube unité en nombres entiers de dimension d .

Regardons à présent les autres polytopes de $\Lambda(d, k)$ dans lesquels l'insertion d'un point est impossible. En dimension 2, reprenons l'exemple 3.2.1 du chapitre 3. Dans la figure 5.4, on considère un polygone en nombres entiers P contenu dans $[0, 2]^2$. On observe que les points à coordonnées entières que l'on peut insérer dans P ne sont pas contenus dans $[0, 2]^2$.

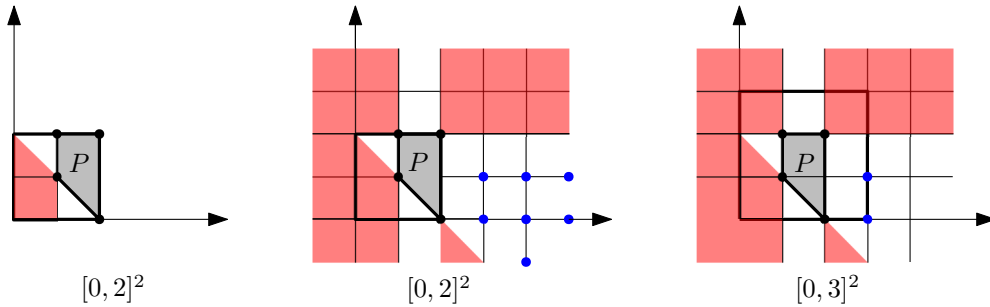


FIGURE 5.4 – P est un polygone en nombres entiers contenu dans $[0, 2]^2$. Aucun point à coordonnées entières du carré de côté 2 ne peut être inséré dans P . Par contre, dans $[0, 3]^2$, il existe des points à coordonnées entières dont l'insertion dans P est valide.

Dès lors, nous pourrions imaginer que pour trouver un point à coordonnées entières dont l'insertion dans P est valide, il est suffisant de prendre un k plus grand. Cependant dans la figure 5.5, on remarque que quelque soit k , aucun point à coordonnées entières ne peut être inséré dans le polygone P .

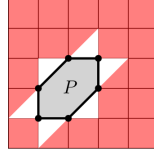


FIGURE 5.5 – L'hexagone P est coloré en gris. Pour tout $k > 0$, il n'existe aucun point à coordonnées entières de $[0, k]^d$ que l'on peut insérer dans P .

En effet il existe un ensemble de polytopes en nombres entiers qui vérifie cette propriété : le carré unité en fait partie ainsi que l'hexagone de la figure 5.5. En dimension 2, ces cas ne sont pas isolés, la figure 5.6 montre des exemples de polygones en nombres entiers qui appartiennent à une même famille. Nous allons maintenant montrer comment construire cette famille en dimension 2, avant d'en donner une généralisation en dimension supérieure.

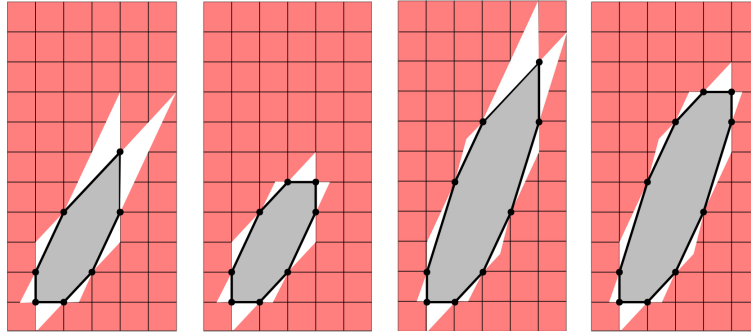


FIGURE 5.6 – Des polygones en nombres entiers à 7, 8, 9 et 10 sommets dans lesquels aucune insertion n'est possible.

5.1.a Polygones de $\Lambda(2)$ sans insertion possible

Dans cette section, on donne une caractérisation d'une famille \mathcal{F} de polygones en nombres entiers avec $n \geq 6$ sommets, pour lesquels il est impossible d'ajouter un sommet. Dans cette famille, le polygone à n sommets sera noté P_n . Nous commencerons par construire P_n pour tout n pair, puis P_{n-1} (avec un nombre impair de sommets) à partir de P_n . Pour la cette construction, nous considérons l'application $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ suivante,

$$f : x \mapsto x(x-1)/2.$$

Si n EST PAIR. Considérons alors les points $a \in \mathbb{Z}^2$ et $m \in \mathbb{Q}^2$ qui vérifient

$$\begin{cases} a_1 = \frac{n}{2} - 1 & \text{et } a_2 = f(a_1) + 1, \\ m_1 = \frac{a_1}{2} & \text{et } m_2 = \frac{a_2}{2}. \end{cases}$$

Définition 5.1.2

Lorsque n est pair, l'ensemble de sommets \mathcal{V} de P_n est constitué des points de \mathbb{Z}^2 suivants :

- (i) le point a ,
- (ii) les points $(i, f(i))$, pour $0 \leq i < n/2$,
- (iii) les symétriques des $(i, f(i))$, pour $0 < i < n/2$, par rapport au point m .

La figure 5.7 illustre cette caractérisation de l'ensemble de sommets de P_8 .

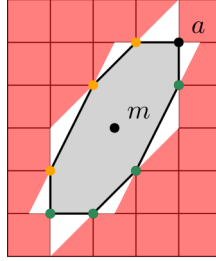


FIGURE 5.7 – Pour le polygone $P_8 \in \mathcal{F}$, en se référant à la définition 5.1.2, les sommets de P_8 marqués en vert sont ceux décrit par le cas (ii), ceux en orange sont les sommets décrits par le cas (iii). La région rouge constitue la région contenue dans les cônes aux sommets de P_8 .

Lemme 5.1.3

Il est impossible d'insérer un point de \mathbb{Z}^2 dans un polygone P_n lorsque n est pair.

Démonstration. L'idée de preuve consiste à montrer que tous les points à coordonnées entières du plan \mathbb{Z}^2 sont contenus dans les cônes aux sommets de P_n . Afin de simplifier la preuve, on partitionne $\mathbb{Z}^2 \setminus P_n$ en trois sous-ensembles (voir figure 5.8).

$$\mathcal{A} := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2 \setminus P_n : x_1 \leq 0 \text{ ou } x_1 \geq a_1\},$$

$$\mathcal{B} := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2 \setminus (P_n \cup \mathcal{A}) : x_2 < f(x_1)\},$$

$$\mathcal{B}' := \mathbb{Z}^2 \setminus (P_n \cup \mathcal{A} \cup \mathcal{B}).$$

On commence par montrer qu'il est impossible d'insérer un point de \mathcal{A} dans P_n . Dans un premier temps, considérons les éléments x de \mathcal{A} tels que $x_1 \geq a_1$. Le sommet a de P_n admet comme voisins les points $b = (a_1 - 1, a_2)$ et $c = (a_1, a_2 - 1)$. Par conséquent, $C_a(P_n)$ est l'ensemble des points (x_1, x_2) tels que $x_1 \geq a_2$ et $x_2 \geq a_2 = f(a_1) + 1$. Ensuite, le cône $C_c(P_n)$ est l'intersection des deux demi-espaces :

$$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq a_1\},$$

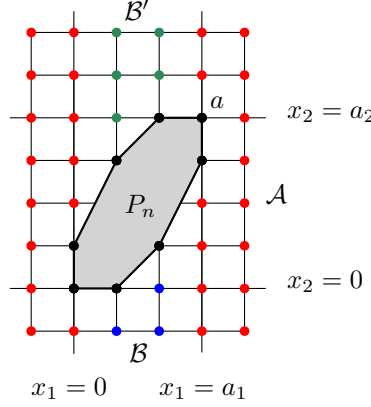


FIGURE 5.8 – Pour un polygone $P_n \in \mathcal{F}$, les points en rouge appartiennent à \mathcal{A} , ceux en bleu à \mathcal{B} et ceux en vert à \mathcal{B}' .

et

$$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \leq f(a_1) + (x_1 - a_1)(f(a_1) - f(a_1 - 1))\}.$$

Le cône $C_c(P_n)$ contient donc tous les points (x_1, x_2) tels que $x_1 \geq a_1$ et $x_2 \leq f(a_1)$. L'union des deux cônes aux sommets a et c inclut donc tous les points de \mathcal{A} tel que $x_1 \geq a_1$. Par symétrie, les cônes des sommets $(0, 0)$ et $(0, 1)$ nous permettent d'exclure les points de \mathcal{A} tels que $x_1 \leq 0$.

Observons à présent les points de \mathcal{B} . Pour $1 \leq i < n/2 - 1$, P_n admet comme sommet les points $v^i = (i, f(i))$. Le cône $C_{v^i}(P_n)$ inclut tous points (x_1, x_2) tels que $x_1 \in \{i-1, i, i+1\}$ et $x_2 \leq f(x_1) - 1$. Pour tout point $x \in \mathcal{B}$ il existe alors un sommet v^i de P_n tel que $x \in C_{v^i}(P_n)$. On applique un raisonnement similaire pour les points de \mathcal{B}' en remarquant que \mathcal{B}' est le symétrique de \mathcal{B} par rapport au point m et que cette fois-ci les sommets de P_n à considérer sont ceux décrits par le cas (iii) de la définition 5.1.2. \square

Exemple 5.1.4

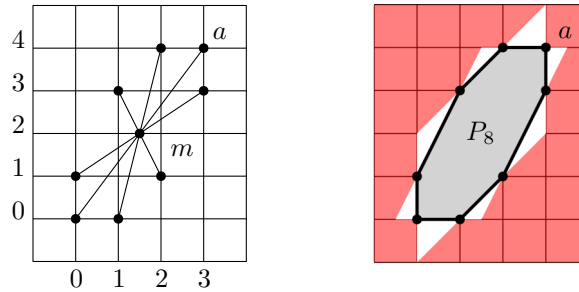
Supposons que $n = 8$. Le point a est tel que

$$a_1 = \frac{8}{2} - 1 = 3,$$

$$a_2 = f(3) = 3 \frac{(3-1)}{2} + 1 = 4.$$

Le centre de symétrie m est alors $(1/2, 2)$. Les sommets de P_8 sont : $(0, 0)$ et son symétrique $(3, 4)$, $(1, 0)$ et son symétrique $(2, 4)$, $(2, 1)$ et son symétrique $(1, 3)$ et enfin $(3, 3)$ et son symétrique $(0, 1)$. La figure 5.9 illustre cette construction.

SI n EST IMPAIR. Dans le cas où n est impair, la construction du polygone $P_n \in \mathcal{F}$ se fait à partir du polygone P_{n+1} (un polygone à nombre de sommets pair décrit dans le cas pair précédent). Considérons ensuite le point

FIGURE 5.9 – Construction de P_8 .

d tel que

$$d_1 = (n+1)/2 - 1 \text{ et } d_2 = f(d_1) + 2.$$

Définition 5.1.5

Lorsque n est impair, le polygone $P_n \in \mathcal{F}$ est le polygone tel que

$$P_n = \text{conv}(P_{n+1} \cup \{d\}).$$

On considère maintenant les sommets a et b de P_{n+1} tels que

$$\begin{cases} a_1 = \frac{n+1}{2} - 1 & \text{et } a_2 = f(a_1) + 1, \\ b_1 = a_1 - 1 & \text{et } b_2 = a_2. \end{cases}$$

Cette construction assure que P_n admet le point d comme sommet ainsi que tous les sommets de P_{n+1} , exceptés a et b .

Lemme 5.1.6

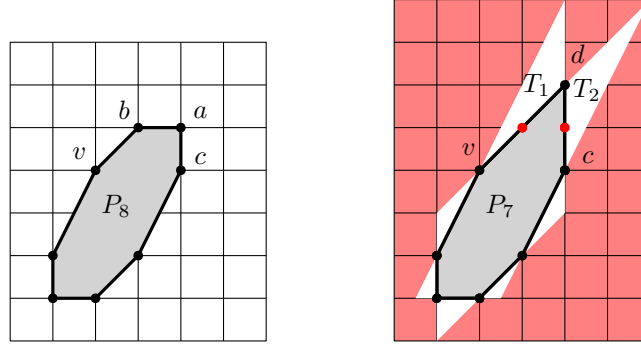
Il est impossible d'insérer un point de \mathbb{Z}^2 dans le polygone P_n lorsque n est impair.

Démonstration. Lorsque n est impair, les cônes aux sommets de P_n sont les mêmes que les cônes aux sommets de P_{n+1} , à l'exception des cônes de a et b qui ont été remplacés par le cône du sommet d . Par conséquent, il nous reste à vérifier qu'il n'existe pas de points à coordonnées entières dans l'intérieur des deux triangles T_1 et T_2 (voir la figure 5.10).

Considérons le sommet v commun à P_n et P_{n+1} tels que $v_1 = c_1 - 2$ et $v_2 = f(c_1)$. Dans la preuve du lemme 5.1.3, il est montré que $C_v(P_n)$ inclut tous les points $(x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2$ tel que

$$x_1 = v_1 + 1 \text{ et } x_2 > v_2 + 1.$$

De plus, le cône $C_d(P_n)$ inclut tous les points $(x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $x_2 > d_2$. On déduit que le triangle T_1 ne peut contenir de point intérieur à coordonnées entières. On remarque que le sommet v étant le symétrique du sommet $(2, f(2))$, le triangle T_1 ne dépend pas de la valeur de n .

FIGURE 5.10 – Construction de P_7 (à droite) à partir de P_8 (à gauche).

Décrivons ensuite l'intérieur du triangle T_2 . Il s'agit de l'ensemble des points x de \mathbb{Z}^2 tel que

$$\begin{cases} x_1 > c_1, \\ x_2 > (f(c_1) - f(c_1 - 1))(x_1 - c_1) + f(c_1), \\ x_2 < (x_1 - c_1) + 2 + f(c_1). \end{cases} \quad (5.1.1)$$

Nous montrons que l'intérieur de T_2 ne contient aucun point à coordonnées entières. Autrement dit que la différence entre les deux dernières inégalités de (5.1.1) est inférieure ou égale à 1. Ainsi en évaluant les valeurs de f , on a :

$$(x_1 - c_1) + 2 + f(c_1) - [(f(c_1) - f(c_1 - 1))(x_1 - c_1) + f(c_1)] = (x_1 - c_1)(2 - c_1) + 2. \quad (5.1.2)$$

Pour $n \geq 7$ et $c_1 \geq 3$, (5.1.2) est inférieure ou égale à 1 pour tout $x_1 > c_1$. \square

De par ces constructions, d'après la proposition 3.1.7 et le fait que pour $n = 4$, le carré unité n'admet aucune insertion valide, nous obtenons immédiatement le résultat suivant.

Lemme 5.1.7

Pour tout $n > 3$ et différent de 5, il existe un polygone en nombres entiers P avec n sommets tel qu'aucun point de \mathbb{Z}^2 ne peut être inséré dans P .

Dans la section 5.2, on montre qu'il est toujours possible d'insérer un point de \mathbb{Z}^2 dans un pentagone en nombres entiers.

Le théorème 5.0.1 est dès lors une conséquence du lemme 5.1.7. Le sous-graphe induit dans $\Lambda(2)$ par les polygones à n et $n + 1$ sommets n'est pas connexe pour $n > 3$ et $n \neq 5$. Le lemme 5.1.7 prouve qu'il existe dans le sous-graphe de $\Lambda(2)$ induit par les polygones à n et $n + 1$ sommets contient des sommets isolés.

De plus, il existe dans ce même sous-graphe une infinité de composantes connexes constituées exactement de $n + 1$ sommets du sous-graphe et qui ne sont pas connexes entre-elles. Par exemple considérons le polygone P_{10} de la figure 5.6. Supposons que l'on supprime un sommet de ce dernier et notons Q le polygone résultant. Il est clair que l'unique point de \mathbb{Z}^2 que l'on peut insérer dans Q est celui que l'on a supprimé de

P_{10} . Il s'en suit alors que P_{10} ainsi que tous les polygones à 9 sommets de $\Lambda(2)$ résultant de la suppression de chacun des sommets de P_{10} constitue une composante connexe de $\Lambda(2)$. Cette composante connexe est le sous-graphe induit dans $\Lambda(2)$ par P_{10} et les 10 ennéagones¹ obtenus en supprimant un sommet de P_{10} . Considérons ensuite le polygone P'_{10} , la résultante d'une translation de P_{10} par un vecteur à coordonnées entières. P'_{10} et les 10 ennéagones qui lui sont connexe constituent une composante connexe de $\Lambda(2)$. Ainsi, le sous-graphe induit dans $\Lambda(2)$ par les ennéagones et décagones admet une infinité de composantes connexes à 11 sommets.

5.1.b Généralisation pour $\Lambda(d)$

Portons maintenant notre attention à une généralisation du lemme 5.1.7 en dimension supérieure. On prouve dans cette section l'existence de polytopes de $\Lambda(d)$ où $d \geq 4$ et avec un nombre arbitrairement large de sommets tels qu'aucun point de \mathbb{Z}^d ne puisse être inséré dans ces polytopes. La preuve se fait par une construction basée sur le produit cartésien de deux polytopes dans lesquels aucun point à coordonnées entières ne peut être inséré.

Définition 5.1.8

Soient P et Q deux polytopes ainsi que \mathcal{V} et \mathcal{V}' leur ensemble de sommets respectifs. Le *produit cartésien* de P et Q , noté $P \times Q$, est défini de la manière suivante,

$$P \times Q := \text{conv}(\{(p, q) : p \in \mathcal{V} \text{ et } q \in \mathcal{V}'\}).$$

Le polytope $P \times Q$ est l'enveloppe convexe de $\mathcal{V} \times \mathcal{V}'$. L'exemple classique pour le produit cartésien de polytopes est celui des hypercubes de dimension d . En effet, un hypercube de dimension d s'obtient par le produit cartésien d'un hypercube de dimension $d - 1$ et d'un segment.

On remarque que la dimension de $P \times Q$ est $\dim P + \dim Q$ et le nombre de sommets de $P \times Q$ est $|\mathcal{V}| \times |\mathcal{V}'|$. L'exemple pour les hypercubes est illustré par la figure 5.11. Dans cette figure, l'hypercube de dimension d est coloré en vert et le segment avec lequel on effectue le produit cartésien est coloré en orange.

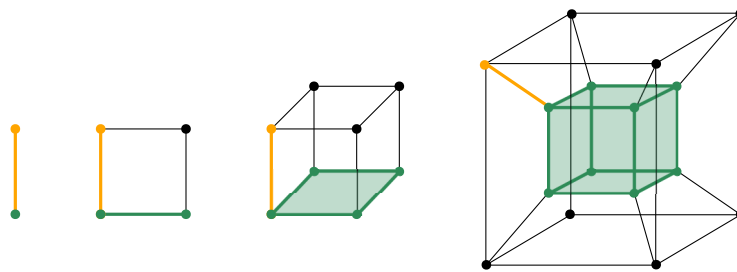


FIGURE 5.11 – L'hypercube de dimension d est le produit cartésien entre un segment et l'hypercube de dimension $d - 1$.

1. Polygone convexe à 9 sommets

À présent, intéressons nous aux cônes aux sommets d'un polytope résultant d'un produit cartésien de deux polytopes. Nous prouvons le lemme suivant.

Lemme 5.1.9

Soient deux polytopes P et Q . Si u est un sommet de P , et v un sommet de Q , alors

$$C_{u \times v}(P \times Q) = C_u(P) \times C_v(Q).$$

Démonstration. Considérons deux polytopes P et Q . On suppose qu'ils sont respectivement de dimension p et q dans \mathbb{R}^p et \mathbb{R}^q . Soient u un sommet de P et v un sommet de Q . D'après la définition 5.1.8 du produit cartésien $P \times Q$, les facettes de $P \times Q$ contenant $u \times v$ sont exactement les produits cartésiens de la forme $F \times Q$ (où F est une facette de P incidente à u) et $P \times G$ (où G est une facette de Q incidente à v). En particulier, si F est une facette de P contenant u , alors

$$H_{F \times Q}^- = H_F^-(P) \times \mathbb{R}^q. \quad (5.1.3)$$

De manière équivalente, si G est une facette de Q contenant v , alors

$$H_{P \times G}^- = \mathbb{R}^p \times H_G^-(Q). \quad (5.1.4)$$

Par conséquent, pour tout point $x \in C_u(P)$, et pour tout point $y \in C_v(Q)$, $x \times y$ est à la fois contenu dans $H_{F \times Q}^-(P \times Q)$ et $H_{P \times G}^-(P \times Q)$. Pour $x \in \mathbb{R}^p$ et $y \in \mathbb{R}^q$, si $x \times y \in C_{u \times v}(P \times Q)$, alors $x \in H_F^-(P)$ et $y \in H_G^-(Q)$. Comme les équations (5.1.3) et (5.1.4) sont vraies pour toute facette F de P contenant u , et pour toute facette G de Q contenant v , on obtient le résultat. \square

Théorème 5.1.10

Pour tout $n > 3$ et différent de 5, et pour tout $d \geq 4$, il existe un polytope en nombres entiers P de dimension d de \mathbb{R}^d avec $n2^{d-2}$ sommets tel qu'aucun point à coordonnées entières de \mathbb{Z}^d ne peut être inséré dans P .

Démonstration. Soit $n > 3$ et distinct de 5. D'après le lemme 5.1.7, on sait qu'il existe un polygone Q à n sommets tel qu'aucun point de \mathbb{Z}^2 ne peut être inséré dans Q . Rappelons également que lemme 5.1.1 indique que l'hypercube unité de dimension d est un polytope dans lequel aucun point à coordonnées entières ne peut être inséré. Supposons maintenant que $d \geq 4$, et considérons le polygone Q ainsi que l'hypercube unité $[0, 1]^{d-2}$. Le polytope $Q \times [0, 1]^{d-2}$, est un polytope de dimension d avec $n2^{d-2}$ sommets. D'après le lemme 5.1.9, $\mathbb{Z}^d \setminus Q \times [0, 1]^{d-2}$ est inclu dans l'union des cônes aux sommets de $Q \times [0, 1]^{d-2}$. La proposition 3.1.7 conclut la preuve. \square

5.2 Connexité du sous-graphe induit dans $\Lambda(2)$ par les pentagones et les hexagones

L'idée de preuve reste similaire à celle de la connexité de $\Lambda(d)$ qui passe par les simplexes : nous allons décrire un sous-ensemble de pentagones qui sont contenus dans une composante connexe du sous-graphe

induit dans $\Lambda(d)$ par les pentagones et les hexagones, on prouve ensuite que tous les pentagones peuvent être transformés en un pentagone de ce sous-ensemble par une suite d'insertions et de suppressions.

Avant de prouver le théorème 5.0.2, on introduit une notion de région “*duale*” des cônes aux sommets d'un polytope. Il s'agit de décrire formellement l'intérieur des triangles blancs que l'on a vu avec les polygones de la figure 5.6. En particulier pour les pentagones, ces régions des propriétés particulières que l'on décrit ci-dessous.

5.2.a Description de T_E

On considère un pentagone en nombres entiers P . Soient une arête E de P , et les deux sommets v et w de E . L'ensemble T_E défini comme,

$$T_E = H_E^-(P) \setminus (C_v(P) \cup C_w(P))$$

constitue une région du plan dans laquelle on peut éventuellement trouver des points à coordonnées entières qu'on peut insérer dans P . L'ensemble T_E est représenté en vert dans la figure 5.12.

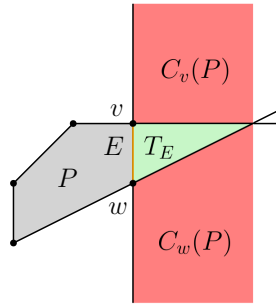


FIGURE 5.12 – Soit un pentagone P , et son arête E dont les extrémités sont v et w , la région colorée en vert représente T_E . Sont représentés en rouge, respectivement en haut à droite et en bas à droite de la figure les cônes aux sommets de v et de w .

Par construction, l'intérieur de T_E est disjoint de P . Il est également disjoint des cônes aux deux sommets de E . Selon la forme de P , T_E peut être l'une des trois portions suivantes du plan :

- (1) L'intérieur d'un triangle, dans ce cas T_E est borné. Ce cas est illustré par le dessin de gauche de la figure 5.13.
- (2) Une *bande parallèle* non bornée, contenue à l'intérieur de $\mathbb{R}^2 \setminus H_E(P)^-$, et comprise strictement entre deux droites parallèles. Ce cas est représenté par le dessin du milieu de la figure 5.13.
- (3) Une *bande évasée* non bornée, contenue à l'intérieur de $\mathbb{R}^2 \setminus H_E(P)^-$, et comprise strictement entre deux droites non parallèles qui s'évasent vers l'infini. Ce dernier cas est quant à lui illustré par le dessin de droite de la figure 5.13.

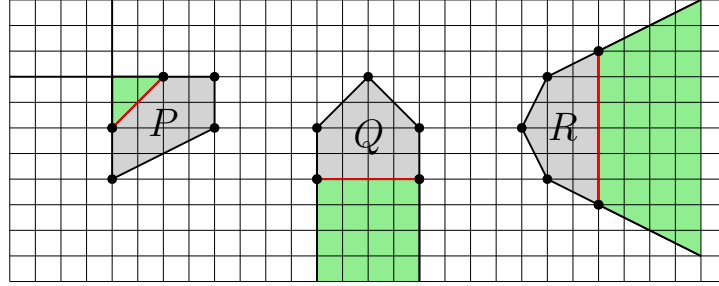


FIGURE 5.13 – Les formes possibles pour T_E , ici représentées en vert, selon la configuration du polygone et relativement à l’arête E (ici colorée en rouge). Les pentagones P , Q et R présentent respectivement les trois formes de T_E : l’intérieur d’un triangle, une bande parallèle non bornée et une bande évasée non bornée.

Remarque 5.2.1

Pour les cas (2) et (3) où T_E est non borné, si T_E est de largeur strictement supérieure à 1, T_E contient une infinité de points à coordonnées entières. Pour le montrer, on considère une arête adjacente à E et la prolonge à partir du sommet de P opposé à E de telle sorte que le prolongement soit contenu dans T_E . Cet exemple est représenté sur les dessins du milieu et de droite de la figure 5.14 dans laquelle l’arête E est colorée en rouge et l’arête adjacente est colorée en bleu.

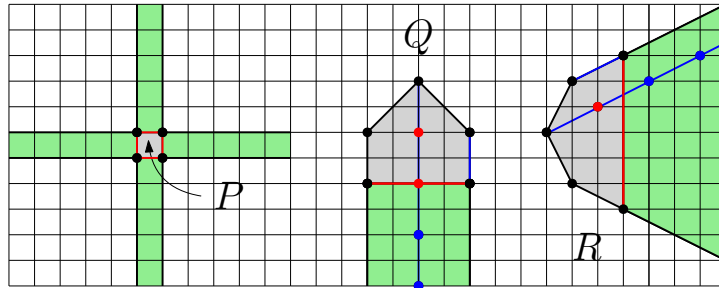


FIGURE 5.14 – P est le carré unitaire, un cas où pour toutes les arêtes E de P , T_E est non borné mais ne contient aucun point de \mathbb{Z}^2 . Les pentagones Q et R sont des pentagones en nombres entiers dont l’ensemble T_E (ici coloré en vert), relativement à l’arête E (ici colorée en rouge) contient une infinité de points à coordonnées entières.

5.2.b Des polygones obliques

Définition 5.2.2

On considère un polygone P de \mathbb{R}^d . On dit que P est *oblique* si P admet deux sommets consécutifs a et b tels que pour chaque sommet v de P distinct de a et de b , on a les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} a_1 &< v_1 < b_1 \\ a_2 &< v_2 < b_2. \end{aligned}$$

Autrement dit, si l'on note par E l'arête $[ab]$ du polygone oblique P , on remarque toutes les autres arêtes de P distinctes de E présentent une succession de pentes strictement monotone entre a et b . De plus aucune de ces pentes n'est ni verticale ni horizontale. Les polygones obliques à n sommets sont contenus dans une composante connexe du sous-graphe de $\Lambda(2)$ induit par les polygones à n et $n + 1$ sommets. La figure 5.15 illustre l'exemple d'un pentagone oblique.

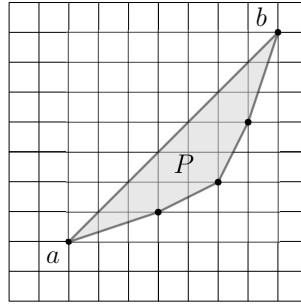


FIGURE 5.15 – Un pentagone oblique.

Si l'on applique cette définition à un pentagone P , et en considérant l'arête E comme étant celle dont les extrémités sont les sommets a et b de P , T_E est une bande *évasée* non bornée strictement comprise entre les deux droites contenant les arêtes de P adjacentes à E . On prouve alors le lemme suivant.

Lemme 5.2.3

Soit un polygone oblique P à n sommets. P , les translatés de P par un vecteur à coordonnées entières, ainsi que les symétriques de P par rapport à un point du plan appartiennent à une même composante connexe du sous-graphe induit dans $\Lambda(2)$ par les polygones à n et $n + 1$ sommets.

Démonstration . On considère un polygone oblique P à n sommets. Par définition, P admet deux sommets consécutifs a et b tels que pour tous les autres sommets v de P , on a les inégalités $a_1 < v_1 < b_1$ et $a_2 < v_2 < b_2$. Notons par E l'arête de P dont les sommets sont a et b . Maintenant considérons le symétrique Q de P par rapport au centre de E . Dans un premier temps, on prouve qu'il existe une suite alternée d'insertions et de suppressions pour transformer P en Q . Comme P est oblique, les sommets de l'enveloppe convexe de $P \cup Q$ sont exactement les sommets de P et de Q . Le lemme 4.2.4 nous fournit la suite d'opérations élémentaires désirée.

Prouvons ensuite que le translaté de P par un vecteur entier u , noté ici par $P + u$, peut être atteint depuis P par une suite d'opérations élémentaires. On peut décomposer la translation de P par le vecteur u en deux

translations selon les deux coordonnées de u , et suivant les directions du plan \mathbb{Z}^2 . Dès lors on peut prouver la propriété en supposant que $u_2 = 0$. Maintenant, en utilisant les symétries du plan, on peut supposer que $u_1 > 0$, et on suppose également que $H_E^-(P)$ ne contient pas $E + u$ (si ce n'est pas le cas on considérera la transformation inverse de $P + u$ vers P au lieu de P vers $P + u$). La transformation de P en $P + u$ passe par la transformation de P en son symétrique Q par rapport au centre de E . Après cette première étape, on observe que $P + u$ est contenu dans $H_E^-(Q)$. Puisque P et $P + u$ sont obliques, et que les arêtes E et $E + u$ sont parallèles, les sommets de l'enveloppe convexe de $Q \cup (P + u)$ sont exactement les sommets de Q et de $P + u$ comme il est indiqué sur la figure 5.16. Une fois encore le résultat est donné par le lemme 4.2.4.

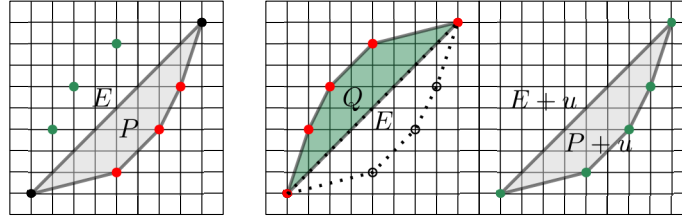


FIGURE 5.16 – Transformation de P en $P + u$ en passant par Q . Ici, $u_1 > 0$ et $u_2 = 0$.

Enfin, en combinant ces transformations : une translation suivie d'une symétrie, on prouve que tout polygone symétrique de P par rapport à un point du plan peut être obtenu à partir P par une suite d'opérations élémentaires. La figure 5.17 illustre ce cas.

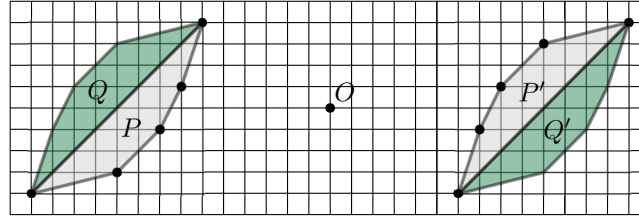


FIGURE 5.17 – Transformation de P en son symétrique P' par rapport au point O . La transformation passe par Q puis Q' pour enfin atteindre P' .

□

On prouve ensuite que tous les polygones obliques à n sommets peuvent être transformés l'un en l'autre par une suite d'opérations alternant insertion et suppression de sommets dans $\Lambda(2)$.

Lemme 5.2.4

Pour $n \geq 3$, les polygones obliques à n sommets sont tous contenus dans la même composante connexe du sous-graphe induit dans $\Lambda(2)$ par les polygones à n et $n + 1$ sommets.

Démonstration. Considérons deux polygones obliques P et Q ayant tout deux n sommets. On montre qu'il existe un chemin dans $\Lambda(2)$, reliant P et Q en ne passant que par des polygones à n et $n + 1$ sommets,

i.e. après chaque opération d'insertion, on procède directement à une opération de suppression. Soient a et b les sommets de P tels que pour tout autre sommet v de P ,

$$a_1 < v_1 < b_1 \text{ et } a_2 < v_2 < b_2.$$

Et notons par E l'arête $[ab]$. On note par F l'arête de Q correspondante. L'idée de la preuve est la suivante. Par une succession de translations et/ou de symétries, comme celles effectuées dans la preuve du lemme 5.2.3, on peut trouver une configuration telle que les transformées P' et Q' , respectivement, de P et de Q , soient disposées de la manière suivante :

$$\begin{cases} P' \subset H_{F'}^-(Q') \\ Q' \subset H_{E'}^-(P') \end{cases} \quad (5.2.1)$$

où E' et F' sont les arêtes correspondantes à E et F après les transformations respectives de P et Q en P' et Q' .

D'après le lemme 5.2.3, on peut traduire P et Q de telle manière que E' et F' coupent tous les deux l'axe des abscisses et pour satisfaire la relation (5.2.1), on peut, si besoin, considérer le symétrique de Q' par rapport au centre de F' . À présent, dans cette configuration, si l'on suppose que les deux transformées P' et Q' sont assez éloignées sur l'axe des abscisses, alors l'enveloppe convexe de leur union admet comme ensemble de sommets l'union de l'ensemble de sommets de P' et celui de Q' . Le lemme 4.2.4 conclut la preuve. \square

5.2.c Des polygones plats

Notre cheminement pour la preuve du théorème 5.0.2 nous amène maintenant à décrire une classe de polygones qui contient les polygones obliques et à prouver que celle-ci est contenue dans une composante connexe du sous-graphe induit dans $\Lambda(2)$ par les polygones à n et $n+1$ sommets. Ces polygones sont appelés des polygones *plats*. Le reste de la preuve se découpe selon les étapes suivantes. Tout pentagone est soit plat, soit peut être transformé en un pentagone plat à la suite d'opérations élémentaires et cela en ne passant que par les pentagones et les hexagones. Ensuite que tout polygone plat à n sommets peut être ramené à un polygone oblique possédant le même nombre de sommets. Enfin, le lemme 5.2.4 nous donne le résultat désiré.

Décrivons dans un premier temps, ce que l'on entend par polygone plat.

Définition 5.2.5

Un polygone P est dit *plat* s'il existe un vecteur entier non nul c , et qu'il existe deux sommets consécutifs a et b de P tel que pour tout autre sommet v de P autre que a et autre que b , $a \cdot c \leq v \cdot c \leq b \cdot c$. Si ces inégalités sont strictes, alors P est dit *strictement plat*.

La figure 5.18 représente un exemple de polygone plat ainsi qu'un polygone strictement plat. La droite bleue est la droite orthogonale au vecteur c de la définition 5.2.5. On observe que pour un vecteur c donné si toutes les droites orthogonales à c passant par les sommets de P intersectent l'arête $[ab]$, que l'on dénote par exemple par E , alors le polygone est plat. Si ces droites sont distinctes pour chaque sommet de P , alors P est strictement plat. Remarquons qu'un polygone oblique est nécessairement strictement plat.

On énonce le lemme suivant.

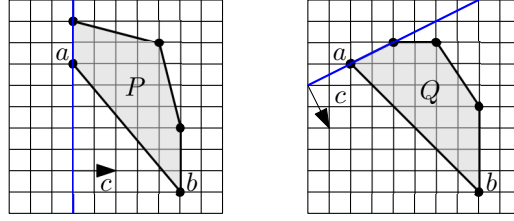


FIGURE 5.18 – À gauche un pentagone plat, et à droite un pentagone strictement plat. Le vecteur c est l'orthogonale à l'arête adjacente à a et ne contenant pas b .

Lemme 5.2.6

Soit un polygone plat P à n sommets. Si $n \geq 5$, alors il existe une suite d'opérations d'insertion directement suivie d'une suppression permet de transformer P en un polygone strictement plat.

Démonstration. Par ce lemme, on prouve que tout polygone plat peut se ramener à un polygone strictement plat, en passant par un chemin dans le sous-graphe de $\Lambda(2)$ induit par les polygones à n et $n + 1$ sommets. Considérons un polygone plat P et supposons que $n \geq 5$. On étiquette les sommets de P de p^1 à p^n de telle sorte que l'on respecte la condition que P soit plat. C'est-à-dire que pour un certain vecteur non nul c , on ait

$$p^1 \cdot c \leq p^i \cdot c \leq p^n \cdot c$$

pour tout $1 < i < n$.

Puisque P est convexe, ces inégalités sont toutes strictes sauf peut être pour $p^1 \cdot c \leq p^2 \cdot c$ et $p^{n-1} \cdot c \leq p^n \cdot c$. Ces cas sont rencontrés si le vecteur c est orthogonal aux arêtes $[p^1 p^2]$ et/ou $[p^{n-1} p^n]$ (seules ces deux arêtes peuvent être orthogonales à c). On dénote maintenant par E l'arête dont les extrémités sont p^1 et p^n .

Comme $n \geq 5$, la droite orthogonale à c passant par p^3 intersecte E . Du fait que P soit plat, tous les points à coordonnées entières appartenant à cette droite dans $H_E^-(P)$ peuvent être insérés dans P . En effet, T_E est soit une bande parallèle, soit une bande évasée non bornée strictement contenue entre les droites passant par les arêtes $[p^1 p^2]$ et $[p^{n-1} p^n]$. Choisissons alors un point à coordonnées entières x appartenant à cette droite, et dénotons ensuite par Q le polygone résultant de l'opération d'insertion de x dans P suivie de la suppression de p^2 . Ces deux opérations sont illustrées par le dessin de gauche de la figure 5.19 dans lequel x est coloré en vert et p^2 en rouge.

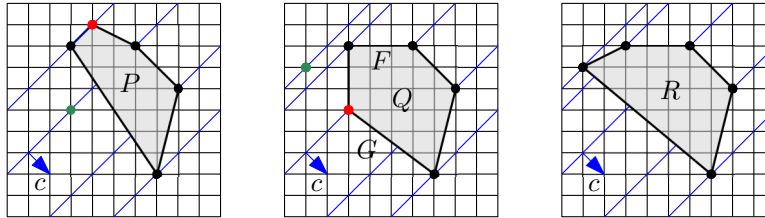


FIGURE 5.19 – Transformation d'un polygone plat en un polygone strictement plat.

On considère par la suite le point $y = x - kc$, où k est un entier positif. On choisit k de telle sorte que $y \cdot c < p^1 \cdot c$. Sur le dessin du milieu de la figure 5.19, le point y est coloré en vert, et dans cet exemple k vaut 2. On remarque que l'arête F reliant p^1 et p^3 est une arête de Q dont l'enveloppe affine n'est pas orthogonale à c . Par conséquent, il existe une infinité de points à coordonnées entières sur la droite passant par y et orthogonale à c tel que ces points ne sont pas contenus dans $H_F^-(Q)$. On rappelle que x peut être choisi de façon à ce que x soit suffisamment loin de P . On choisit alors x de telle manière que y n'appartiennent pas à $H_F^-(Q)$. Pour se faire, on peut par exemple effectuer une translation du segment $[xy]$ aussi loin que possible de P pour vérifier la condition $y \notin H_F^-(Q)$. Cependant, en effectuant cette translation il se peut que y appartienne à $H_G^-(Q)$, où G est l'arête de Q dont les sommets sont x et p^n . On peut réitérer le déplacement de $[xy]$ en le translatant une nouvelle fois encore plus loin de P . Le polygone résultant de l'insertion de y dans Q puis en supprimant x est noté R . Cette transformation est représentée par le dessin du milieu de la figure 5.19.

En répétant toute cette procédure, mais en partant cette fois-ci de l'arête $[p^{n-1}p^n]$ de R , nous parvenons à obtenir un polygone strictement plat. Observons que, par cette construction, le chemin de P vers R est contenu dans le sous-graphe de $\Lambda(2)$ induit par les polygones à n et $n + 1$ sommets. Nous obtenons ainsi le résultat désiré. \square

Le lemme suivant prouve ensuite que les polygones strictement plats appartiennent tous à une même composante connexe dans le sous-graphe induit dans $\Lambda(2)$ par les polygones à n et $n + 1$ sommets. Le résultat découlera du lemme 5.2.4.

Lemme 5.2.7

Pour tout entier $n \geq 3$, les polygones strictement plats à n sommets appartiennent tous à une même composante connexe du sous-graphe de $\Lambda(2)$ induit par les polygones à n et $n + 1$ sommets.

Démonstration. Considérons un polygone strictement plat P . Indexons ensuite les sommets de P de p^1 à p^n et de telle sorte que l'on respecte la condition que P soit strictement plat, c'est-à-dire que pour un certain vecteur non nul c , on a

$$p^1 \cdot c < p^i \cdot c < p^n \cdot c$$

pour tout $1 < i < n$. Remarquons que cette propriété reste vraie si on remplace c par λc pour tout $\lambda > 0$. En choisissant λ assez grand, on peut alors aussi ajouter à c un vecteur unité à coordonnées entières de manière à garder les inégalités strictes. De ce fait, nous pouvons supposer qu'aucune des coordonnées de c n'est nulle.

Considérons ensuite l'arête $[p^1p^n]$ que nous noterons par E . Soit u un vecteur non nul orthogonal à c tel que u pointe vers $H_E^-(P)$, si besoin on remplacera u par $-u$. Comme aucune des coordonnées de c n'est nulle, il en est de même pour le vecteur u . Considérons à présent le symétrique de P par rapport au centre de E . Notons ce polygone par Q et ses sommets par q^i , où q^i est le symétrique de p^i . Nous montrons ensuite que Q peut être transformé en un polygone oblique et que ce dernier peut être obtenu depuis P . Pour y arriver, trouvons une transformation affine ψ telle $\psi(Q)$ soit un polygone oblique.

Puisque u_1 n'est pas nul, pour tout point $x \in \mathbb{R}^2$, le vecteur $\overrightarrow{q^i x}$ peut s'écrire de manière unique comme

étant la somme d'un vecteur vertical et d'un vecteur parallèle à u . Ainsi,

$$x - q^i = v + \lambda u, \quad (5.2.2)$$

où v est un vecteur vertical, et λ un scalaire. Si l'on dénote par $\phi(x)$ la coordonnée non nulle de v , (5.2.2) devient,

$$\begin{cases} x_1 - q_1^i &= \lambda u_1 \\ x_2 - q_2^i &= \phi(x) + \lambda u_2 \end{cases} \quad (5.2.3)$$

Dans ce cas là, pour que x soit un point à coordonnées entières, $\phi(x)$ est nécessairement un entier ou un rationnel. En effet, $x_1 - q_1^i$ et u_1 sont des entiers. D'après la première ligne de (5.2.3), $\lambda = (x_1 - q_1^i)/u_1$ est un rationnel. De plus, puisque $x_2 - q_2^i$ et u_2 sont également des entiers, $\phi(x)$ est nécessairement un entier ou un rationnel.

Considérons maintenant la transformation affine de \mathbb{R}^2 suivante :

$$\psi : x \mapsto x + k\phi(x)u,$$

où k est un entier choisi de telle sorte que $k\phi(q^i) \in \mathbb{N}$ pour tout i . En appliquant ensuite ψ sur les sommets q^i de Q , on observe que par le choix de k , $\psi(q^i)$ est un point à coordonnées entières. Remarquons qu'il existe une infinité de valeurs de k que l'on peut ainsi choisir. En effet, k peut être remplacé par n'importe quel de ses multiples. En particulier, k peut être choisi de façon que les égalités suivantes sont satisfaites pour toutes les valeurs de i telles que $1 \leq i < n$,

$$\begin{cases} |k\phi(q^{i+1})u_1 - k\phi(q^i)u_1| > |q_1^{i+1} - q_1^i|, \\ |k\phi(q^{i+1})u_2 - k\phi(q^i)u_2| > |q_2^{i+1} - q_2^i|. \end{cases} \quad (5.2.4)$$

Remarquons que nous pouvons également supposer que le système (5.2.4) est satisfait du fait que u_1 et u_2 sont tout deux non nuls. Nous remarquons ensuite que $\phi(q^{i+1})$ est toujours différent de $\phi(q^i)$ puisque Q est strictement plat. Puis, comme ψ est affine, $\psi(Q)$ est un polygone en nombres entiers dont les sommets sont les images des q^i par ψ . D'après (5.2.4), les coordonnées en abscisses et en ordonnées de $\psi(q^1)$ à $\psi(q^n)$ forment deux séquences strictement monotones. Par conséquent, $\psi(Q)$ est un polygone oblique.

Par construction, les sommets de l'enveloppe convexe de $P \cup \psi(Q)$ sont exactement les sommets de P et de $\psi(Q)$. D'après le lemme 4.2.4, P peut être transformé en $\psi(Q)$ par une succession d'opérations d'insertion des sommets de $\psi(Q)$ directement suivie d'une suppression d'un sommet de P . On en déduit que tout polygone strictement plat peut se ramener à un polygone oblique. D'après le lemme 5.2.4, on conclut que tous les polygones strictement plats à n sommets appartiennent tous à une même composante connexe du sous-graphe de $\Lambda(2)$ induit par les polygones à n et $n + 1$ sommets. \square

Il reste désormais à prouver que la propriété suivante est vraie pour les pentagones en nombres entiers.

Théorème 5.2.8

Les pentagones en nombres entiers sont soit plats soit peuvent être transformés en un pentagone plat par une opération d'insertion d'un point suivie d'une suppression d'un sommet.

Avant de procéder à la preuve du théorème 5.2.8, faisons la remarque suivante. Considérons un pentagone en nombres entiers P . Dans la section 5.2.a, nous avons décrit les portions du plan dans lesquels un point candidat à l'insertion dans P peut se trouver. Relativement à une arête E de P , ces parties du plan sont dénotées par T_E . D'après la définition 5.2.5 d'un polygone plat, nous observons les propriétés suivantes pour le cas particuliers des pentagones en nombres entiers.

1. Un pentagone en nombres entiers plat possède une arête E telle que T_E constitue soit une bande parallèle non bornée, soit une bande évasée non bornée.
2. Un pentagone en nombres entiers strictement plat possède une arête E telle que T_E constitue une bande évasée non bornée. De plus aucune des arêtes adjacentes à E ne peut être orthogonale au vecteur c .

La figure 5.20 montre trois pentagones en nombres entiers P , Q et R . Pour chacun de ces pentagones l'arête E est colorée en orange et T_E est coloré en vert. P et Q sont des pentagones plats pour le vecteur c choisi, ici coloré en bleu. Nous voyons alors que pour ces pentagones, l'ensemble T_E constitue respectivement une parallèle non bornée, et une bande évasée non bornée. R est quant à lui un pentagone strictement plat et l'ensemble T_E forme une bande évasée non bornée.

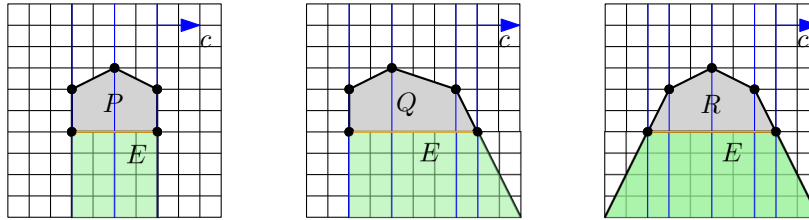


FIGURE 5.20 – Les pentagones plats possèdent une arête E telle que T_E est non bornée. Pour les pentagones plats P et Q , et le pentagone strictement plat R , l'arête E est colorée en orange et l'ensemble T_E est représentée par la région colorée en vert.

En général, un pentagone en nombres entiers tel que pour chacune de ses arêtes E , l'ensemble T_E correspondant est borné, est nécessairement non plat. Prouvons alors le théorème 5.2.8.

Démonstration du théorème 5.2.8. Considérons un pentagone en nombres entiers quelconque P que nous supposons non plat. Autrement dit, pour chaque arête E^i de P , les ensembles T_{E^i} sont tous bornés et constituent l'intérieur d'un triangle. On note les sommets de P de p^1 à p^5 selon le sens horaire. Les arêtes E^i de P sont étiquetées de la façon représentée sur le dessin de gauche de la figure 5.21. Pour chaque arête E^i , on considère le triangle T_{E^i} correspondant. L'idée de la preuve est la suivante : nous allons montrer qu'il existe un point à coordonnées entières à l'intérieur de l'un des T_{E^i} . Si on note ce point x , on montre ensuite que le pentagone

$$Q = \text{conv}(P \cup \{x\} \setminus \{p^i\})$$

où $i \in \{1, 2, \dots, 5\}$ est un pentagone plat.

On note F le segment de droite $[p^2 p^5]$. Nous étudierons deux cas : le cas où F est parallèle à E^1 et le cas où F ne l'est pas.

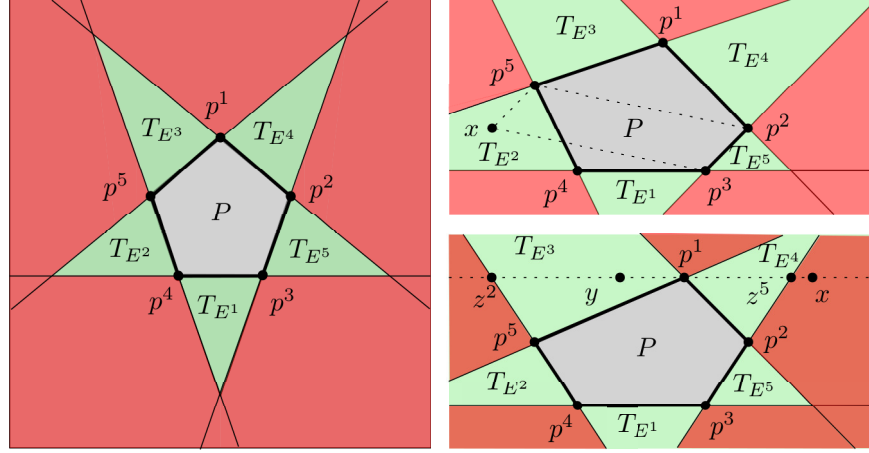


FIGURE 5.21 – Les constructions de la preuve du théorème 5.2.8.

SI F N'EST PAS PARALLÈLE À E^1 . Dans cette configuration, les points $p^3 + p^5 - p^2$ et $p^4 + p^2 - p^5$ ne peuvent pas être en même temps contenus dans $H_{E^1}^-(P)$. Par symétrie, et sans perdre de généralité, supposons que c'est le point $x = p^3 + p^5 - p^2$ qui n'appartienne pas à $H_{E^1}^-(P)$. Ce cas de figure est celui que l'on rencontre sur le dessin en haut à droite de la figure 5.21. x est donc contenu à l'intérieur de T_{E^2} . En effet le quadrilatère dont les sommets sont :

$$x, p^5, p^3, p^2$$

forme un parallélogramme comme deux de ses côtés sont les translatés des deux autres. De plus x est contenu dans la droite parallèle à E^5 et passant par p^5 . Par hypothèse, P n'est pas un pentagone plat, ceci implique alors que :

- x n'appartient pas à $H_{E^3}^-(P)$, car si c'était le cas, toutes les droites parallèles à E^5 passant par les sommets de P intersecteraient tous E^4 .
- x n'appartient pas non plus à P , car si c'était le cas, toutes les droites parallèles E^5 passant par les sommets de P intersecteraient tous E^1 .

Ceci implique que x doit forcément appartenir à T_{E^2} . Ainsi x peut être inséré dans P .

À présent, on note $Q = \text{conv}(P \cup \{x\} \setminus \{p^2\})$. Comme P n'est pas un pentagone plat, toutes les droites parallèles à E^1 (ou E^3) passant par les sommets de P intersectent le même segment $[p^1 p^3]$. On remarque que $[p^1 p^3]$ est une arête de Q . Enfin, puisque $x \in T_{E^2}$, la droite parallèle à E^1 (ou E^3) passant par x intersecte également $[p^1 p^3]$. On conclut que Q est un pentagone plat.

SI F EST PARALLÈLE À E^1 . Ce cas de figure est décrit par le dessin en bas à droite de la figure 5.21. On considère le point $x = p^1 + p^3 - p^4$. On observe alors pour le point x ainsi défini que :

- x n'appartient pas à $H_{E^3}^-(P)$ car, si c'était le cas, les droites parallèles à E^1 passant par les sommets de P intersecteraient tous E^2 , ce qui implique que P serait un polygone plat.
- x n'appartient pas non plus à P car, dans ce cas les droites parallèles à E^1 passant par les sommets de P intersecteraient tous E^5 .

Ensuite, si x n'est pas non plus contenu dans $H_{E^5}^-(P)$, alors x appartient à T_{E^4} . Par conséquent x peut être inséré dans P . Comme pour le cas précédent, $Q = \text{conv}(P \cup \{x\} \setminus \{p^4\})$ est un pentagone plat.

Le dernier cas à traiter est lorsque $x \in H_{E^5}^-(P)$. On note L la droite parallèle à E^1 et passant par p^1 . Cette droite est représentée en pointillé dans le dessin en bas à droite de la figure 5.21. On note respectivement par z^2 et z^5 les points d'intersection de L avec $\text{aff}(E^2)$ et $\text{aff}(E^5)$. Puisque P n'est pas plat, les droites parallèles à E^5 passant par les sommets de P n'intersectent pas toutes E^1 . Par conséquent, la distance entre z^2 et z^5 est plus grande que celle entre p^2 et p^5 . En particulier, le point à coordonnées entières $y = x + p^5 - p^2$ appartenant à L est nécessairement strictement compris entre x et z^2 .

On observe que la distance entre p^3 et p^4 est plus petite que celle entre p^2 et p^5 . Ainsi, y est strictement compris dans le segment de la droite L entre p^1 et z^2 . Ce segment $[p^1 z^2]$ est contenu dans T_{E^3} , par conséquent y peut être inséré dans P . Le polygone $Q' = \text{conv}(P \cup y \setminus \{p^3\})$ est un pentagone plat. \square

Une fois ce résultat obtenu, nous sommes à présent en mesure de prouver le théorème 5.0.2.

Démonstration du théorème 5.0.2. En premier lieu, nous savons que d'après le théorème 5.2.8, il existe un chemin dans le sous-graphe induit dans $\Lambda(2)$ par les pentagones et les hexagones reliant un pentagone en nombres entiers quelconque et un pentagone en nombres entiers plat. Ensuite, par le lemme 5.2.6 on prouve qu'un pentagone en nombres entiers plat peut également, à son tour, être transformé en un pentagone en nombres entiers strictement plat dans ce même sous-graphe. Finalement le lemme 5.2.7 nous donne le résultat désiré. \square

6 | Une chaîne de Markov pour les polytopes en nombres entiers

Une fois notre structure de graphe établie et définies des opérations élémentaires sur les polytopes, nous pouvons à présent aborder une partie qui porte plus essentiellement sur la génération aléatoire de polytopes en nombres entiers, et plus précisément les (d, k) -polytopes. Ce chapitre sera axé sur cet aspect de la thèse, on procédera à la génération aléatoire des (d, k) -polytopes, et ce via un générateur uniforme reposant sur une chaîne de Markov. Cette méthode a été introduite dans [15], et ce chapitre reprendra en détails la mise en oeuvre du générateur aléatoire mais également les principaux résultats obtenus. Rappelons que la principale motivation de la génération aléatoire est non seulement l'étude des propriétés des objets de grandes taille mais également de faire une investigation sur le comportement des algorithmes les prenant en paramètres.

La génération aléatoire au moyen d'une chaîne de Markov est, certes, dans un certain sens moins efficace que les méthodes génériques tels que la génération récursive et les générateurs de Boltzmann [22]. Cependant ces dernières requièrent une très bonne compréhension de la combinatoire des objets à engendrer. Ce qui n'est pas le cas pour le moment puisqu'aucune formule close n'est connue à ce jour pour le nombre de polytopes en nombres entiers dans le cas général.

On rappelle qu'une chaîne de Markov à espace d'états fini peut être définie comme un processus qui se meut parmi les éléments d'un ensemble fini Ω de la manière suivante : si la chaîne se trouve en un état $x \in \Omega$, sa prochaine position sera régie par une distribution de probabilité fixe $P(x, \cdot)$. Elle peut être considérée comme un graphe orienté dans lequel une arête de x vers y existe si et seulement si $P(x, y)$ est de valeur non nulle.

Ce chapitre intervient donc comme une suite logique des chapitre 3 et chapitre 4. En effet le graphe sous-jacent des chaînes de Markov que l'on présente est le graphe $\Lambda(d, k)$ auquel nous rajoutons des boucles. Les règles de transitions correspondront aux opérations élémentaires sur un élément du graphe, soit un (d, k) -polytope.

Le principe d'un tel générateur est le suivant : effectuer une marche aléatoire sur le graphe jusqu'à se rapprocher suffisamment d'une distribution stationnaire π . La marche s'arrête en un état p avec probabilité approximativement $\pi(p)$. En prouvant qu'une chaîne possède une unique distribution stationnaire et que celle-ci est l'uniforme, on obtient ainsi un générateur uniforme de (d, k) -polytopes. La notion d'*assez proche* de la distribution stationnaire détermine l'efficacité d'un tel générateur puisqu'il conditionne le temps qu'il

faut pour engendrer un objet. Estimer ce temps se relève être la partie difficile de l'étude des générateurs basés sur des chaînes de Markov [11, 35].

Ce chapitre se décomposera comme suit : une première partie portera sur un bref rappel sur la théorie des chaînes de Markov, puis dans un second temps on procédera à la construction du générateur, et une dernière partie présentera des résultats ainsi que des discussions sur l'efficacité du générateur ainsi modélisé.

6.1 Chaîne de Markov et génération aléatoire

Rappelons que le nombre de polytopes en nombres entiers dans $[0, k]^d$ est fini, par conséquent on va s'intéresser aux chaînes de Markov à espace d'états fini. Dans toute la suite du chapitre, on supposera que la chaîne de Markov étudiée est une chaîne à espace d'états fini. Cette partie décrit le passage d'une chaîne de Markov à un générateur aléatoire. On y rappellera des définitions classiques ainsi que des propriétés nécessaires, tirés de [32], pour les preuves à venir.

6.1.a Chaîne de Markov à espace d'états fini

Une chaîne de Markov à espace d'états fini est un processus qui évolue dans temps à valeurs dans un espace fini Ω . L'espace Ω est aussi appelé ensemble d'états. Il s'agit plus précisément d'une séquence de variables aléatoires à valeurs dans Ω .

Définition 6.1.1

Soit P une matrice de taille $|\Omega| \times |\Omega|$. On dit qu'une suite de variables aléatoires (X_0, X_1, \dots) à valeurs dans Ω est une *chaîne de Markov de matrice de transition P* si pour chaque $y \in \Omega$,

$$\mathbf{P}\{X_{t+1} = y | X_0 = x_0, \dots, X_{t-1} = x_{t-1}, X_t = x\} = P(x, y)$$

pour tout $x_0, x_1, \dots, x_{t-1}, x \in \Omega$ tel que

$$\mathbf{P}\{X_0 = x_0, \dots, X_{t-1} = x_{t-1}, X_t = x\} > 0.$$

Exemple 6.1.2

Prenons l'exemple classique de la grenouille et les deux feuilles de nénuphars. On suppose qu'une grenouille est posée sur une feuille de nénuphars, disons x et que chaque matin elle décide avec une probabilité p de se déplacer sur une autre feuille y pour y passer sa journée, ou de rester en x avec probabilité $1 - p$. Supposons qu'il choisisse de se déplacer en y un premier matin. Une fois en y , le matin suivant elle décide encore une fois soit de revenir en x avec une probabilité q , soit de rester en y avec une probabilité $1 - q$.

Le comportement de notre grenouille décrit la chaîne de Markov suivante telle que $\Omega = \{x, y\}$ et telle que la matrice P est la suivante

$$P = \begin{bmatrix} P(x, x) & P(x, y) \\ P(y, x) & P(y, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - p & p \\ q & 1 - q \end{bmatrix}. \quad (6.1.1)$$

Cette chaîne est représentée par le graphe de la figure 6.1.

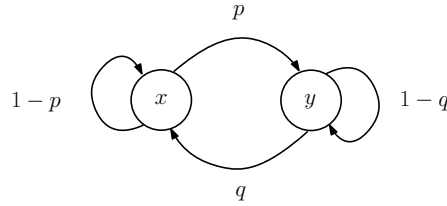


FIGURE 6.1 – Une chaîne de Markov telle que : $\Omega = \{x, y\}$, $P(x, x) = 1 - p$, $P(x, y) = p$, $P(y, x) = q$ et $P(y, y) = 1 - q$

On peut ainsi définir alors le graphe sous-jacent d'une chaîne de Markov à espace d'états fini de la manière suivante.

Définition 6.1.3

Soit une chaîne de Markov (X_0, X_1, \dots) à son espace d'états fini Ω et matrice de transitions P . Le graphe sous-jacent de (X_0, X_1, \dots) est le graphe orienté dont les sommets sont les états de Ω . Il existe une arête de x vers y si $P(x, y) > 0$.

6.1.b Distributions sur Ω **Définition 6.1.4**

Une *distribution de probabilité* μ sur Ω associe un élément de Ω à un réel dans $[0, 1]$ de telle sorte que

$$\sum_{x \in \Omega} \mu(x) = 1.$$

Si on note par μ_t la distribution de X_t , on a :

$$\mu_t(x) = \mathbf{P}\{X_t = x\} \text{ pour tout } x \in \Omega.$$

Pour une chaîne (X_0, X_1, \dots) à espace d'états fini Ω et de matrice de transitions P , la x -ième ligne, $P(x, \cdot)$, définit la distribution de probabilité de l'état auquel on se retrouvera au temps $t + 1$ sachant qu'au temps t , la chaîne est en x . En conditionnant alors sur les prédécesseurs possibles de l'état à l'instant $t + 1$, on a pour tout $y \in \Omega$

$$\mu_{t+1}(y) = \sum_{x \in \Omega} \mathbf{P}\{X_t = x\} P(x, y) = \sum_{x \in \Omega} \mu_t(x) P(x, y).$$

Une réécriture sous forme vectorielle nous donne,

$$\mu_{t+1} = \mu_t P \text{ pour } t \geq 0,$$

ainsi pour une distribution initiale μ_0 , on a

$$\mu_t = \mu_0 P^t \text{ pour } t \geq 0.$$

Exemple 6.1.5

Toujours avec notre exemple de la grenouille et des deux feuilles de nénuphars, voyons comment on interprète cela. Si l'on suppose qu'au temps $t = 0$, i.e. quand on commence à observer la grenouille, disons que la grenouille se situe en x . La distribution μ_0 serait alors dans ce cas le vecteur ligne

$$\mu_0 = (\mu_0(x), \mu_0(y)) = [1 \quad 0].$$

Voyons ensuite ce qui se passe le jour suivant, quand $t = 1$. On a alors,

$$\mu_1 = [1 \quad 0] \times \begin{bmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{bmatrix} = [1-p \quad p]. \quad (6.1.2)$$

On a en effet $\mu_1 = (\mathbf{P}\{X_1 = x|X_0 = x\}, \mathbf{P}\{X_1 = y|X_0 = x\})$.

Définition 6.1.6

Soit une chaîne (X_0, X_1, \dots) à espace d'états fini Ω et de matrice de transitions P . Une distribution π est dite *stationnaire* pour (X_0, X_1, \dots) si elle satisfait

$$\pi = \pi P \quad (6.1.3)$$

De manière équivalente :

$$\pi(y) = \sum_{x \in \Omega} \pi(x) P(x, y) \quad \forall y \in \Omega \quad (6.1.4)$$

Intéressons-nous maintenant à ce qui se produit quand $t \rightarrow \infty$.

Définition 6.1.7

Soient μ et ν deux distributions de probabilités sur Ω . On définit la *distance totale de variation* entre μ et ν , noté $\|\mu - \nu\|_{TV}$, par

$$\|\mu - \nu\|_{TV} = \frac{1}{2} \sum_{x \in \Omega} |\mu(x) - \nu(x)|. \quad (6.1.5)$$

La distance totale de variation entre deux distributions de probabilités sert à estimer à partir de quel moment deux distributions μ et ν sont suffisamment proches l'une de l'autre.

6.1.c Propriétés

Soit une chaîne (X_0, X_1, \dots) à espace d'états fini Ω et de matrice de transitions P . (X_0, X_1, \dots) est dite *irréductible* si son graphe est fortement connexe. En d'autres termes, cela signifie que n'importe quel état $y \in \Omega$ est accessible depuis n'importe quel autre état $x \in \Omega$ en un nombre fini d'étapes. On définit ensuite la *période* d'un état $x \in \Omega$ comme le pgcd des longueurs de tout chemin partant de x à x : $\text{pgcd}\{t \geq 1 : P^t(x, x) > 0\}$. S'il existe une boucle¹ en x , la période de x est par définition de 1. On dit qu'un état est *apériodique* si sa période est 1. (X_0, X_1, \dots) est dite *apériodique* si tous les états de Ω sont apériodiques. Un résultat classique de [32] indique que si (X_0, X_1, \dots) est irréductible alors tous les états de Ω ont la même période. Par conséquent une chaîne irréductible ayant un état x sur lequel la probabilité de boucler en x est non nulle est apériodique. On dit que (X_0, X_1, \dots) est *symétrique* si pour tout $x, y \in \Omega$, $P(x, y) = P(y, x)$.

Un autre résultat important de [32] est celui qui stipule qu'une chaîne de Markov à espace d'états fini irréductible et apériodique possède une unique distribution stationnaire π et qu'à partir d'une distribution initiale μ_0 , la distribution μ_t tend vers π quand t tend vers l'infini. De plus si la chaîne est symétrique, la distribution stationnaire est l'uniforme sur Ω .

6.1.d Temps de mélange

Soit π la distribution stationnaire de la chaîne de Markov, *atteindre* π signifie que la distance totale de variation entre μ_t et π est suffisamment petite. Autrement dit, on voudrait borner le temps t nécessaire pour que

$$\max_{\mu} \|\mu P^t - \pi\|_{TV} \leq \varepsilon,$$

où ε est un réel strictement positif choisi arbitrairement.

Le *temps de mélange*, noté $t_{\text{mix}}(\varepsilon)$, est le temps minimum pour que $\max_{\mu} \|\mu P^t - \pi\|_{TV} \leq \varepsilon$. Le temps de mélange nous donne alors une idée sur l'efficacité de notre générateur. Plusieurs résultats de [32] nous donnent des bornes (inférieures et supérieures) sur le temps de mélange.

BORNE INFÉRIEURE SUR LE TEMPS DE MÉLANGE. Une borne inférieure naturelle sur le temps de mélange d'une chaîne de Markov est donnée par le diamètre du graphe sous-jacent. Rappelons que le diamètre d'un graphe, dont l'ensemble de sommets est Ω , est défini comme la distance maximale entre deux sommets. Cette distance, notée $d(x, y)$, est la longueur du plus court chemin entre x et y , pour tout $x, y \in \Omega$. Notons δ ce diamètre, on a :

$$\delta = \max_{x, y \in \Omega} d(x, y).$$

On a alors la propriété suivante :

1. Une arête de x vers x dans le graphe sous-jacent

Propriété 6.1.8

Soit δ le diamètre du graphe sous-jacent à (X_0, X_1, \dots) . Pour tout $0 < \varepsilon < 1/2$, on a :

$$t_{\text{mix}}(\varepsilon) \geq \delta/2.$$

6.2 Modèle des (d, k) -polytopes

Il sera introduit dans cette section deux variantes pour notre chaîne de Markov. Une première, avec seulement un ensemble minimal de règles suffisantes pour garantir que l'unique distribution stationnaire soit la distribution uniforme. La deuxième introduit une règle supplémentaire qui simplifie la preuve de l'uniformité de la distribution stationnaire. On notera que pour les deux chaînes, l'ensemble des états Ω est le même : l'ensemble des (d, k) -polytopes pour d et k fixés. De plus le graphe sous-jacent aux matrices de transitions contient $\Lambda(d, k)$. Les règles de transitions sont définies par les opérations élémentaires, définies au chapitre 3, et consistent à insérer un point de $[0, k]^d$ dans le polytope ou bien de supprimer exactement un sommet du polytope.

6.2.a Règles de transitions

Considérons le graphe $\Lambda(d, k)$, introduit dans le chapitre 4, des polytopes en nombres entiers contenu dans $[0, k]^d$. Considérons ensuite un polytope en nombres entiers S appartenant à $\Lambda(d, k)$. On note $N(S)$ l'ensemble des voisins de S dans $\Lambda(d, k)$. On définit alors la matrice de transitions :

$$P(S, T) = \begin{cases} \frac{1}{(k+1)^d} & \text{si } T \in N(S), \\ 1 - \frac{|N(S)|}{(k+1)^d} & \text{si } S = T, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (6.2.1)$$

Voyons à présent une idée de l'algorithme permettant de passer d'un sommet à un autre dans le graphe $\Lambda(d, k)$ suivant la matrice de transitions P . On note \mathcal{V} l'ensemble des sommets de S . Soit un point $x \in [0, k]^d$ tiré uniformément parmi les points à coordonnées entières de $[0, k]^d$.

- (i) Si $x \in \mathcal{V}$ et si l'enveloppe convexe T de $\mathcal{V} \setminus \{x\}$ est de dimension d , alors on suit la transition de S à T .
- (ii) Sinon si x n'appartient pas à S et si $\mathcal{V} \cup \{x\}$ est exactement l'ensemble des sommets de son enveloppe convexe, alors on suit la transition de S à $T = \text{conv}(\mathcal{V} \cup \{x\})$.
- (iii) Sinon on boucle sur S .

La section suivante contient la description finale de l'algorithme de génération aléatoire utilisant cette méthode. Remarquons à présent que la condition (i) correspond à l'opération élémentaire de suppression (définition 3.1.2) et que la condition (ii) correspond à l'opération élémentaire d'insertion (définition 3.1.1). On observe également qu'un polytope T appartient au voisinage $N(S)$ d'un polytope S dans $\Lambda(d, k)$ s'il existe

une opération élémentaire d'insertion ou de suppression permettant de passer de l'un à l'autre. La probabilité de passer d'un polytope S à un de ses voisins appartenant à $N(S)$ est donc de $\frac{1}{(k+1)^d}$. Dans tous les autres cas, on boucle sur S avec une probabilité de $1 - \frac{|N(S)|}{(k+1)^d}$.

Exemple 6.2.1

Pour la première variante, la figure 6.2 représente les différents cas de transitions pour un triangle S appartenant à $\Lambda(2, 4)$. Selon la position du point x , on choisit une des opérations élémentaires à effectuer : si les conditions de validité de l'opération choisie sont vérifiées, alors on a une transition. Dans le cas contraire on boucle sur S .

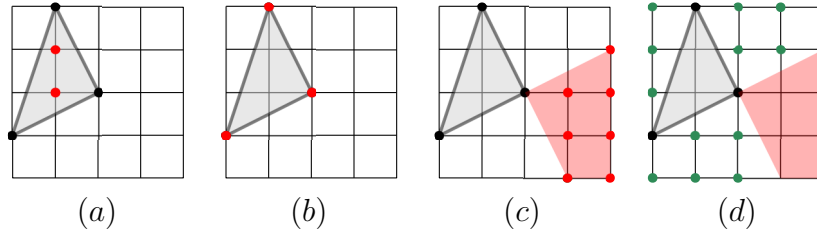


FIGURE 6.2 – Une illustration des règles de transitions pour un triangle S , coloré en gris. Selon la position du point x relativement à S : x est coloré en rouge dans le cas où la chaîne boucle sur S , et en vert quand la transition va de S en $\text{conv}(\mathcal{V} \cup \{x\})$. En (a) $x \in S \setminus \mathcal{V}$, en (b) $\text{conv}(\mathcal{V} \setminus \{x\})$ est de dimension $(d - 1)$, en (c) $\mathcal{V} \cup \{x\}$ n'est pas l'ensemble de sommets de son enveloppe convexe, en (d) la transition va de S en $\text{conv}(\mathcal{V} \cup \{x\})$.

VARIANTE. On introduit ensuite une nouvelle règle afin d'obtenir une variante de la chaîne. Si S est un simplexe et que le point x tiré aléatoirement appartient à \mathcal{V} , on tire alors un deuxième point à coordonnées entières $y \in [0, k]^d$ et on tente de déplacer x en y . Si le polytope

$$T = \text{conv}([\mathcal{V} \setminus \{x\}] \cup \{y\})$$

obtenu est de dimension d , alors on suit la transition de S à T . Remarquons qu'il existe des cas où déplacer x en y ne permet pas d'obtenir un polytope de dimension d distinct de S . Il s'agit du cas où $x = y$ et des cas où y appartient à l'enveloppe affine de $\mathcal{V} \setminus \{x\}$. On note $A(S, x)$ l'ensemble des points y pour lesquels le déplacement sera invalide (voir exemple sur la figure 6.3),

$$A(S, x) := (\text{aff}(\mathcal{V} \setminus \{x\}) \cap [0, k]^d) \cup \{x\}.$$

La matrice de transitions devient :

$$P_2(S, T) = \begin{cases} \frac{1}{(k+1)^d} & \text{si } T \in N(S), \\ \frac{1}{(k+1)^{2d}} & \text{si } S \text{ est un simplexe,} \\ & \text{et } T = \text{conv}([\mathcal{V} \setminus \{x\}] \cup \{y\}) \\ & \text{tel que } x \in [0, k]^d \text{ et } y \notin A(S, x), \\ 1 - \frac{|N(S)|}{(k+1)^d} - \frac{d+1}{(k+1)^d} + \sum_{x \in \mathcal{V}} \frac{|A(S, x)|}{(k+1)^{2d}} & \text{si } S \text{ est un simplexe,} \\ & \text{et } S = T, \\ 1 - \frac{|N(S)|}{(k+1)^d} & \text{si } S \text{ n'est pas un simplexe,} \\ & \text{et } S = T, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (6.2.2)$$

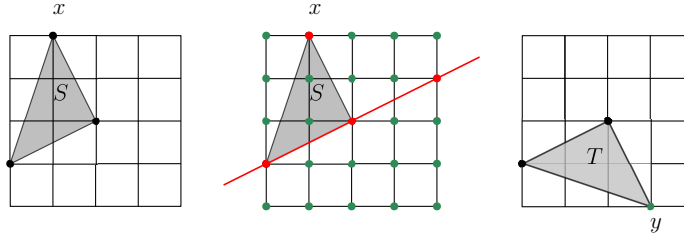


FIGURE 6.3 – Le premier dessin représente un triangle S dans $[0, 4]^2$ dont un des sommets x a été tiré aléatoirement. Dans le second dessin, les points marqués en vert représentent l'ensemble des points y vers lesquels il est possible de déplacer x . Les points marqués en rouge sont les éléments de $A(S, x)$. Le dernier dessin représente un triangle T résultant du déplacement du sommet x vers un point y tiré aléatoirement.

Lemme 6.2.2

Le graphe sous-jacent de la seconde variante inclut le graphe sous-jacent de la première.

Démonstration. La preuve est basée sur la définition des matrices de transitions P et P_2 . On rappelle qu'il existe une arête de S à T dans le graphe sous-jacent si et seulement si la valeur $P(S, T)$ est non nulle dans la matrice de transitions. Pour transformer P en P_2 , on se contente de diminuer la probabilité de boucler sur un polytope S quand celui-ci est un simplexe. De plus, la probabilité de passer de S vers un autre simplexe T peut devenir non nulle. Cela revient à dire que dans le graphe sous-jacent de la deuxième variante, on ajoute une arête de S vers T . En revanche, la probabilité de boucler sur S n'est jamais nulle puisqu'il est toujours possible de tirer un point $y \in A(S, x)$. Par conséquent, aucune boucle dans le graphe sous-jacent ne sera supprimée. \square

6.2.b Générateur aléatoire de (d, k) -polytopes

Nous sommes à présent en mesure de proposer un algorithme de génération aléatoire pour les (d, k) -polytopes en se basant sur les matrices de transitions précédemment décrites en (6.2.1) et (6.2.2). L'algorithme que l'on propose prend trois paramètres qui sont : la dimension d et le côté k de l'hypercube ainsi

que le nombre N d'itérations que l'on désire effectuer. En effet, à cause de la difficulté de l'estimation du nombre d'itérations nécessaires pour approcher la distribution stationnaire, il convient de spécifier ce dernier.

Engendrer aléatoirement un (d, k) -polytope consiste alors à effectuer une marche aléatoire de N étapes et de retourner le dernier (d, k) -polytope visité.

La procédure pour la première variante est donnée par l'algorithme 1 suivant.

Algorithme 1 : Génération aléatoire d'un (d, k) -polytope

Entrées : La dimension d , le côté k de l'hypercube et le nombre N d'itérations

Sorties : Un (d, k) -polytope tiré uniformément aléatoirement

```

1 Tirer uniformément un  $(d, k)$ -simplexe  $S$  dont l'ensemble de sommet est  $\mathcal{V}$ 
2  $i \leftarrow 0$ 
3 tant que  $i < N$  faire
4   | tirer aléatoirement un point  $x$  de  $[0, k]^d$ 
5   | si  $x \in \mathcal{V}$  et  $\text{conv}(\mathcal{V} \setminus \{x\})$  est de dimension  $d$  alors
6   |   |  $S \leftarrow \text{conv}(\mathcal{V} \setminus \{x\})$ 
7   |   | sinon si  $x \notin S$  et  $x \notin C_v(S)$ , pour tout  $v \in \mathcal{V}$  alors
8   |   |   |  $S \leftarrow \text{conv}(\mathcal{V} \cup \{x\})$ 
9   |   |  $i \leftarrow i + 1$ 
10 retourner  $S$ 
```

Une première étape de l'algorithme constitue à choisir uniformément un simplexe dans $[0, k]^d$. La marche aléatoire sur la chaîne de Markov admettra comme point de départ ce simplexe. En pratique, il s'agit de tirer uniformément $d + 1$ points de $[0, k]^d$ et d'en calculer l'enveloppe convexe, si cette enveloppe convexe est de dimension d alors on passe à la suite de l'algorithme. Sinon, on répète cette étape jusqu'à obtenir un point de départ pour la marche aléatoire.

On remarque que le test effectué à la ligne 6 revient à tester si l'ensemble des sommets de $\text{conv}(\mathcal{V} \cup \{x\})$ est exactement $\mathcal{V} \cup \{x\}$. Pour cela on vérifie que le point x n'est ni inclus dans le polytope S , ni dans aucun des cônes aux sommets de S . En pratique, on vérifie qu'il existe une unique facette de S telle que le produit cartésien de son vecteur normal avec x est positif. En effet, si tous les produits cartésiens sont négatifs alors x appartient à S . S'il existe deux facettes sont adjacentes en un sommet v de S , et que le produit cartésien de x avec leur vecteur normal est positif, alors $x \in C_v(S)$.

VARIANTE. De la même manière, avec la seconde variante, on obtient un générateur aléatoire résultant de la matrice de transitions P_2 .

Algorithme 2 : Génération aléatoire d'un (d, k) -polytope (variante)

Entrées : La dimension d , le côté k de l'hypercube et le nombre N d'itérations

Sorties : Un (d, k) -polytope tiré uniformément aléatoirement

```

1 Tirer uniformément un  $(d, k)$ -simplexe  $S$  dont l'ensemble de sommet est  $\mathcal{V}$ 
2  $i \leftarrow 0$ 
3 tant que  $i < N$  faire
4   tirer aléatoirement un point  $x$  de  $[0, k]^d$ 
5   si  $x \in \mathcal{V}$  alors
6     si  $|\mathcal{V}| = d + 1$  alors
7       tirer aléatoirement un point  $y$  de  $[0, k]^d$ 
8       si  $\text{conv}([\mathcal{V} \setminus \{x\}] \cup \{y\})$  est de dimension  $d$  alors
9          $S \leftarrow \text{conv}([\mathcal{V} \setminus \{x\}] \cup \{y\})$ 
10      sinon si  $\text{conv}(\mathcal{V} \setminus \{x\})$  est de dimension  $d$  alors
11         $S \leftarrow \text{conv}(\mathcal{V} \setminus \{x\})$ 
12      sinon si  $x \notin S$  et  $x \notin C_v(S)$ , pour tout  $v \in \mathcal{V}$  alors
13         $S \leftarrow \text{conv}(\mathcal{V} \cup \{x\})$ 
14     $i \leftarrow i + 1$ 
15 retourner  $S$ 

```

6.2.c Propriétés des chaînes de Markov selon le modèle des (d, k) -polytopes

Cette section présente le principal résultat de cette partie de la thèse en prouvant que le modèle des (d, k) -polytopes défini dans la section précédente satisfait les propriétés suivantes : irréductibilité, apériodicité et symétrie.

Théorème 6.2.3

Pour tout $d \geq 2$, et pour tout entier positif k , la chaîne de Markov correspondant à l'algorithme 1 est irréductible, apériodique et symétrique.

Démonstration. On considère deux polytopes S et T éléments de Ω . On note par \mathcal{V} l'ensemble des sommets de S .

IRRÉDUCTIBILITÉ. On rappelle qu'une chaîne de Markov est irréductible, si tout état de la chaîne peut être atteint par n'importe quel autre état en un nombre d'étapes fini. En d'autres termes, la condition nécessaire et suffisante pour vérifier l'irréductibilité est la forte connexité du graphe sous-jacent à la chaîne. D'après le corollaire 4.3.2 du chapitre 4, $\Lambda(d, k)$ est connexe. Par conséquent la chaîne est irréductible.

SYMÉTRIE. D'après la définition de la matrice de transitions P , pour tout S distinct de T , on a :

$$P(S, T) = P(T, S) = \begin{cases} \frac{1}{(k+1)^d}, & \text{si } \exists x \in [0, k]^d \text{ tel que } T = \begin{cases} \text{conv}(\mathcal{V} \setminus \{x\}) \\ \text{conv}(\mathcal{V} \cup \{x\}) \end{cases} \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

APÉRIODICITÉ. On sait que, pour une chaîne irréductible, si la probabilité d'avoir une boucle en S est positive alors la chaîne est apériodique. D'après la matrice de transitions P , pour tout polytope S , la probabilité de boucler est $1 - \frac{|N(S)|}{(k+1)^d}$. Cette quantité est positive dès lors que le $|N(S)| < (k+1)^d$, c'est-à-dire s'il existe un point $x \in [0, k]^d$ que l'on ne peut ajouter dans S ou que l'on ne peut supprimer de \mathcal{V} . Or il est par exemple impossible de supprimer un des sommets d'un simplexe. Il existe donc des polytopes S pour lesquels la probabilité de boucler est non nulle. Comme il a été montré que la chaîne est irréductible, on obtient le résultat. \square

VARIANTE. On prouve de la même manière le résultat de la seconde variante de la chaîne de Markov.

Théorème 6.2.4

Pour tout $d \geq 2$, et pour tout entier positif k , la chaîne de Markov correspondant à l'algorithme 2 est irréductible, apériodique et symétrique.

Démonstration. On procède de façon similaire à la preuve précédente : vérifier une à une les propriétés de la chaîne.

IRRÉDUCTIBILITÉ ET APÉRIODICITÉ Le résultat découle du lemme 6.2.2 et du théorème 6.2.3.

SYMÉTRIE. Rappelons que, pour passer de P à P_2 , le seul cas où l'on a modifié la probabilité de suivre une transition entre deux polytopes distincts est celui où ces polytopes sont des simplexes. Soient deux simplexes distincts S et T , \mathcal{V} et \mathcal{V}' leur ensemble de sommets respectifs, un point $x \in \mathcal{V}$ et un point $y \in \mathcal{V}'$ tels que

$$T = \text{conv}([\mathcal{V} \setminus \{x\}] \cup \{y\}).$$

On a également,

$$S = \text{conv}([\mathcal{V}' \setminus \{y\}] \cup \{x\}).$$

D'après la matrice de transitions P_2 , on a donc $P_2(S, T) = P_2(T, S) = \frac{1}{(k+1)^{2d}}$.

\square

Par conséquent, les théorème 6.2.3 et théorème 6.2.4 nous indiquent que les deux variantes de la chaîne de Markov admettent comme distribution stationnaire la distribution uniforme. On notera également que pour les Algorithmes 1 et 2, lorsque le nombre N d'itérations tend vers l'infini, on obtient des générateurs asymptotiquement uniformes de (d, k) -polytopes.

6.3 Bornes sur le temps de mélange

On rappelle que le temps de mélange de la chaîne indique le temps nécessaire pour qu'une distribution courante soit *suffisamment proche* de la distribution stationnaire. Ici *suffisamment proche* signifie que la distance totale de variation entre la distribution courante et la distribution stationnaire est inférieur à une quantité positive ε choisie au préalable. Usuellement, ε prend comme valeur $\frac{1}{4}$ mais on peut également choisir de prendre une valeur bien plus petite. On note alors le temps de mélange de la chaîne par $t_{\text{mix}}(\varepsilon)$. Ainsi estimer l'efficacité du générateur aléatoire résultant de la chaîne de Markov revient à estimer le temps de mélange de celle-ci. Plus vite la chaîne atteint la distribution stationnaire, plus le générateur aléatoire est efficace.

Estimer le temps de mélange se révèle souvent difficile [11, 35]. Dans notre cas, on voudrait exprimer le temps de mélange en fonction de d et k , ainsi nous serons en mesure d'estimer le nombre N d'itérations nécessaires pour nos algorithmes de génération. D'après la propriété 6.1.8, une borne inférieure naturelle sur le temps de mélange est donnée par le diamètre δ du graphe sous-jacent de la chaîne de Markov.

La distance entre deux polytopes de Ω est bornée inférieurement par la différence entre leur nombre de sommets. Si on note n_{max} le nombre maximal de sommets qu'un (d, k) -polytope peut avoir, alors

$$n_{\text{max}} - (d + 1)$$

constitue une borne inférieure sur le diamètre du graphe sous-jacent à la chaîne de Markov. D'après la propriété 6.1.8, on peut écrire

$$t_{\text{mix}}(\varepsilon) \geq \delta/2 \geq \frac{n_{\text{max}} - (d + 1)}{2},$$

ou encore

$$t_{\text{mix}}(\varepsilon) \geq c(d)n_{\text{max}}.$$

avec $c(d)$ une constante en fonction de d .

Plusieurs pistes s'offrent alors quant à l'ordre du nombre maximal de sommets que peut avoir un (d, k) -polytope. En dimension 2, le nombre maximal de sommets qu'un polygone convexe en nombres entiers contenu dans un disque ou un carré a été étudié dans [1, 41, 3]. Ces résultats ont ensuite été généralisés en dimensions supérieures dans [18]. Il est également étudié dans cet article une famille de (d, k) -polytopes ayant un large diamètre² et dont le diamètre a été conjecturé comme maximal. Selon [1], le nombre maximal de sommets d'un polygone convexe contenu dans $[0, k]^2$ est

$$12 \left(\frac{k}{2\pi} \right)^{2/3} + O(k^{1/3} \log k).$$

Par conséquent, on obtient le résultat suivant,

Théorème 6.3.1

Pour $d = 2$. Pour tout $0 < \varepsilon < 1/2$, il existe une constante $c > 0$ tel que

$$t_{\text{mix}}(\varepsilon) \geq ck^{2/3}.$$

2. On fait référence ici au diamètre du polytope.

Bárány et Larman estiment le nombre de sommets de l'enveloppe convexe des points à coordonnées entières contenus dans une sphère de dimension $d \geq 2$ et de rayon r [4] :

$$c_1(d) \cdot r^{d \frac{d-1}{d+1}} \leq \# \text{sommets} \leq c_2(d) \cdot r^{d \frac{d-1}{d+1}},$$

où $c_1(d)$ et $c_2(d)$ sont des constantes dépendantes de d .

Le polytope qu'ils décrivent est un $(d, 2r)$ -polytope. Le nombre de sommets de ce polytope borne inférieurement n_{\max} et par conséquent $t_{\text{mix}}(\varepsilon)$.

Théorème 6.3.2

Pour $d \geq 2$. Pour tout $0 < \varepsilon < 1/2$, il existe une constante $c > 0$ tel que

$$t_{\text{mix}}(\varepsilon) \geq ck^{d \frac{d-1}{d+1}}.$$

6.4 Résultats expérimentaux

6.4.a Théorème érgodique

Les expériences que l'on a menées se basent sur le *théorème érgodique*. La théorème érgodique sur les chaînes de Markov requiert que la chaîne soit irréductible et récurrente positive. Ces propriétés sont toutes deux vérifiées par notre modèle.

Théorème 6.4.1 (Théorème érgodique)

Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ une chaîne de Markov et Ω son ensemble d'états. Soit une fonction f à valeur réelle définie sur Ω . Si $(X_t)_{t \geq 0}$ est irréductible et récurrente positive, alors pour toute distribution initiale μ , on a

$$\mathbb{P}_\mu \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{s=0}^{t-1} f(X_s) = \sum_{x \in \Omega} f(x) \pi(x) \right\} = 1,$$

où π est la distribution stationnaire.

Ce résultat indique que la moyenne en temps $\frac{1}{t} \sum_{s=0}^{t-1} f(X_s)$ converge presque sûrement vers l'espérance de f à la distribution stationnaire.

La fonction f peut être n'importe quelle fonction et peut être considérée comme une propriété ou une mesure effectuée sur les (d, k) -polytopes. On va donc pouvoir utiliser le théorème érgodique pour émettre des conjectures sur des propriétés moyennes des (d, k) -polytopes. Dans cette section, on s'intéressera au nombre de sommets moyen et l'aire moyenne des polygones en nombres entiers.

Les expérimentations ont été faites en dimension 2 et avec l'Algorithme 1. En partant d'une distribution initiale, on procède à une longue marche sur la chaîne. Pour chaque état visité, on effectue une mesure sur le polygone. On calcule ensuite la moyenne cette mesure sur toute la marche. Les résultats en dimension

2 sont dans les figures 6.4 et 6.5. Pour des valeurs assez grandes de k , il a été nécessaire mettre en oeuvre des marches plus longue. Notre configuration de test nous a permis de lancer des marches aléatoires allant jusqu'à 10 millions d'étapes. Nos résultats suggèrent que le nombre moyen de sommets se stabilise après une marche de 100 000 itérations (resp. 1 million et 10 millions) pour $k \leq 20$ (resp. $k \leq 30$ et $k \leq 50$). Des mesures similaires ont également été faites pour l'aire moyenne d'un polygone convexe dans $[0, k]^2$.

CONJECTURES. Nous sommes alors parvenus aux conjectures suivantes quant à l'espérance du nombre de sommets $\mathbb{E}[n]$ et à l'espérance de l'aire $\mathbb{E}[a]$ d'un polygone en nombres entiers convexe à la distribution stationnaire.

Conjecture 6.4.2

Le nombre moyen de sommets d'un polygone en nombres entiers contenu dans $[0, k]^2$ est

$$\mathbb{E}[n] \geq 6 \left(\frac{k}{2\pi} \right)^{2/3}.$$

Conjecture 6.4.3

L'aire moyenne d'un polygone en nombres entiers contenu dans $[0, k]^2$ est

$$\mathbb{E}[a] \leq \frac{3}{4}k^2.$$

Sur la figure 6.4, la courbe en jaune représente le diamètre maximal d'un polygone convexe contenu dans $[0, k]^2$, conjecturé dans [18] par Deza, Manoussakis et Onn. On retrouve également que ce diamètre est exactement la moitié du nombre maximal de sommets qu'un polygone convexe de $[0, k]^2$ peut avoir [1]. Ces résultats suggèrent alors la distribution des $(d, 2)$ -polytopes en fonction de leur nombre de sommets.

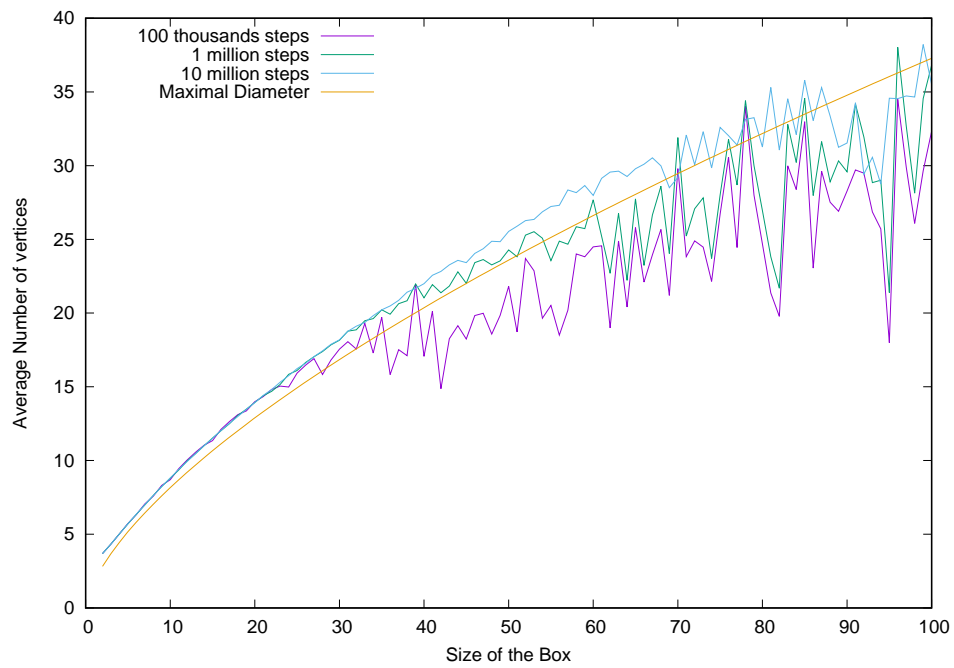


FIGURE 6.4 – Le nombre moyen de sommets des polygones convexes sur une marche de 100 000, 1 million et 10 millions d’étapes, par rapport côté k de $[0, k]^2$. La courbe en jaune représente le diamètre maximal d’un polygone convexe comme rapporté dans [18].

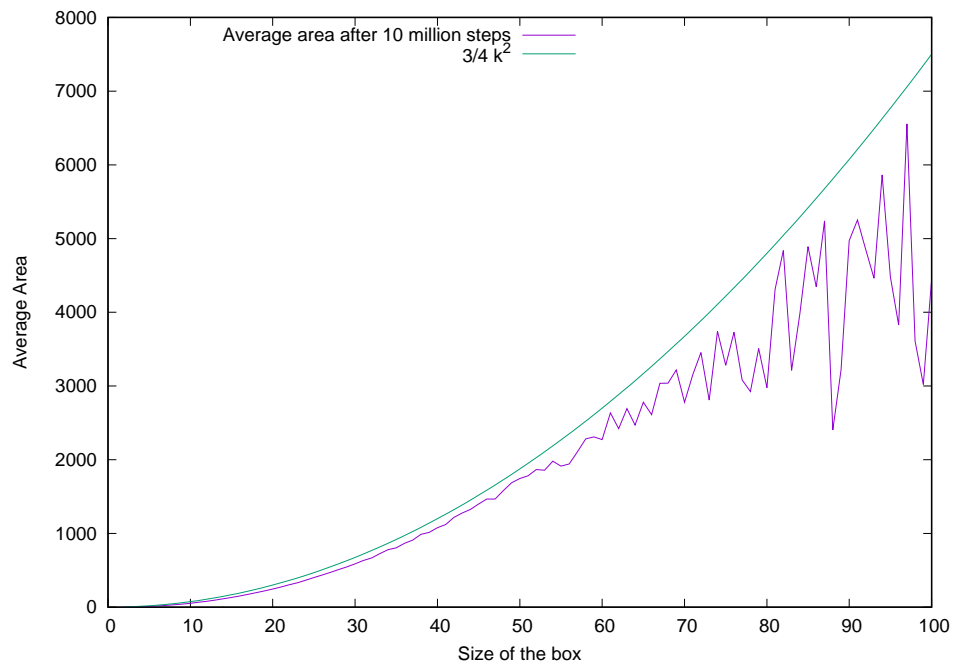


FIGURE 6.5 – L'aire moyenne des polygones visités sur une marche de 10 millions d'étapes.

7 | Génération exhaustive des polytopes en nombres entiers

Dans ce chapitre, il sera question de présenter deux méthodes de comptage des (d, k) -polytopes : une première pour les polytopes contenus dans l'hypercube unité et une seconde pour k quelconque. On choisit le terme *comptage* plutôt qu'*énumération* dans la mesure où les résultats obtenus sont les nombres exacts des (d, k) -polytopes, pour d et k fixés, et non une énumération proprement dite. En d'autres termes, ne pas faire une énumération est un choix car, à cause du très grand nombre de (d, k) -polytopes, il ne sera stocké qu'une description minimale du polytope : l'ensemble de ses sommets. Aucune autre propriété du polytope (treillis des faces, volume ...) n'est retenue ni calculée par les méthodes présentées dans ce chapitre.

Rappelons que pour le cas de l'hypercube unité, Günter Ziegler [43] montre que la probabilité que $d + 1$ points tirés uniformément dans $\{0, 1\}^d$ constitue l'ensemble de sommets d'un d -simplexe tend vers 1 quand d tend vers l'infini. Il obtient ainsi le nombre asymptotique de d -simplexes dans l'hypercube unité. Dans ce chapitre, on étendra ce résultat au d -polytopes de l'hypercube unité.

Oswin Aichholzer [2] parvient à une énumération complète des $(5, 1)$ -polytopes et Chuanming Zong [44] réunit les résultats connus sur le nombre de polytopes en nombres entiers contenus dans $[0, 1]^d$. Cependant, aucune formule close n'est connue pour le nombre exact de (d, k) -polytopes. Jusqu'ici la plus grande dimension dans laquelle on est parvenu à une énumération complète est la dimension 5¹ et cela pour ceux contenus dans $[0, 1]^d$. Un aperçu des résultats connus est reporté dans le tableau 7.1 comme indiqué dans [44]. En ce qui concerne le cas où $k \geq 2$, très peu de résultats sont recensés : la séquence [A045996] de l'OEIS donne par exemple le nombre de triangles dans la grille $[0, k]^2$.

Une approche naïve au problème de comptage consiste par exemple à considérer toutes les combinaisons possibles de points à coordonnées entières de $[0, k]^d$, puis de calculer l'enveloppe convexe de chaque ensemble de points. Si le polytope obtenu n'est pas de dimension d , celui-ci est rejeté. S'il a déjà été compté, il est également rejeté. Procéder de cette manière n'est pas efficace puisque les enveloppes convexes d'ensembles de points différents peuvent coïncider, donnant lieu à de nombreux calculs d'enveloppe convexe inutiles. De plus il est nécessaire de stocker tous les résultats. Un exemple est illustré par la figure 7.1.

Nous proposons ainsi une autre approche qui garantit que toutes les solutions sont comptées exactement

1. Une classification des $(d, 1)$ -polytopes a été faite en dimension 6 mais seulement pour les polytopes ayant au plus 12 sommets [43].

d	$\#P$
2	5
3	151
4	60 879
5	4 292 660 729
6	?

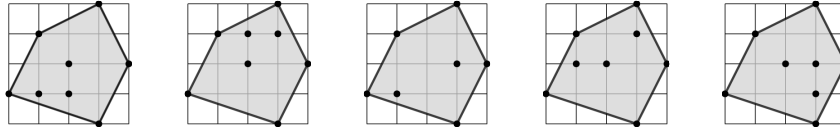
TABLE 7.1 – Le nombre $\#P$ des $(d, 1)$ -polytopes pour d allant de 2 à 5 [44].

FIGURE 7.1 – Le même polytope obtenu par le calcul de l'enveloppe convexe de différents sous-ensembles de points.

une fois. Les deux méthodes que nous présentons ne calculent aucune enveloppe convexe. Ce chapitre sera organisé comme suit : dans la section 7.1, nous donnerons l'algorithme qui permet de compter les $(d, 1)$ -polytopes et dans la section 7.2, celui qui permet de compter les $(2, k)$ -polytopes. Les résultats de comptage obtenus avec ces algorithmes seront présentés dans la section 7.3. Enfin nous présenterons dans la section 7.4 le nombre asymptotique de d -polytopes contenus dans l'hypercube unité.

7.1 Le cas de l'hypercube unité

Pour l'hypercube unité, la méthode de comptage suit le principe suivant. Chaque sous-ensemble de sommets de l'hypercube unité est l'ensemble de sommets d'un polytope de dimension au plus d . Le nombre de ces sous-ensembles est 2^{2^d} . Il est suffisant d'en retrancher le nombre de sous-ensembles qui constituent l'ensemble de sommets d'un polytope de dimension au plus $d - 1$ pour obtenir le nombre exact de $(d, 1)$ -polytopes.

7.1.a Classification des sous-ensembles de $\{0, 1\}^d$

Les $(d, 1)$ -polytopes, aussi appelés 0/1-polytopes, sont les polytopes en nombres entiers contenus dans l'hypercube $[0, 1]^d$. Considérons à présent l'hypercube unité de dimension d . Soit $\mathcal{S}(d)$, l'ensemble de tous les sous-ensembles de points à coordonnées entières de $[0, 1]^d$. On a alors,

$$|\mathcal{S}(d)| = 2^{2^d}. \quad (7.1.1)$$

Ceci nous donne directement une borne supérieure sur le nombre de 0/1-polytopes de dimension d . Seulement, cette quantité comptabilise également les polytopes de dimension inférieure à d . On introduit alors le lemme suivant.

Lemme 7.1.1

Soit un 0/1-polytope P de dimension au plus d à n sommets.

- (i) Si $n \leq d$, alors P est un polytope de dimension au plus $d - 1$.
- (ii) Si $n > 2^{d-1}$, alors P est un polytope de dimension exactement d .

Démonstration. Considérons un 0/1-polytope P à n sommets. Pour l'assertion (i), l'argument part du fait que l'enveloppe affine de d points affinement indépendants est de dimension $d - 1$, par conséquent si $n = d$ alors P est au plus de dimension $d - 1$. Pour la seconde assertion (ii), on procède par contraposition : on montre que si $\dim P \leq d - 1$, alors $n \leq 2^{d-1}$. Supposons que $\dim P \leq d - 1$ et montrons que $n \leq 2^{d-1}$. Dans ce cas là, P serait contenu dans un hyperplan H de \mathbb{R}^d . La projection orthogonale sur une facette F de $[0, 1]^d$ induit alors une bijection de $H \cap [0, 1]^d$ vers F . Cette bijection envoie les sommets de P sur des sommets de F . Comme F possède exactement 2^{d-1} sommets, on déduit que le nombre de sommets n de P est inférieur ou égal à 2^{d-1} . D'où le résultat. \square

Du lemme 7.1.1, on obtient la décomposition suivante pour $|\mathcal{S}(d)|$.

$$|\mathcal{S}(d)| = \underbrace{\sum_{i=0}^d \binom{2^d}{i}}_{\dim \leq d-1} + \underbrace{\sum_{i=d+1}^{2^{d-1}} \binom{2^d}{i}}_{\dim \leq d} + \underbrace{\sum_{i=2^{d-1}+1}^{2^d} \binom{2^d}{i}}_{\dim = d}. \quad (7.1.2)$$

Dans le membre de droite de (7.1.2), le second terme dans la somme compte le nombre de polytopes avec, respectivement, au moins $d + 1$ et au plus 2^{d-1} sommets. Cette quantité représente à la fois des polytopes de dimension d et des polytopes de dimensions inférieures. Notons ensuite par $\#\bar{P}(d)$ le nombre de polytopes ayant au moins $d + 1$ sommets mais qui ne sont pas de dimension d . On obtient alors le lemme suivant.

Lemme 7.1.2

Le nombre $\#P(d, 1)$ de $(d, 1)$ -polytopes est

$$\#P(d, 1) = 2^{2^d} - \sum_{i=0}^d \binom{2^d}{i} - \#\bar{P}(d). \quad (7.1.3)$$

Pour déterminer $\#P(d, 1)$, il reste à calculer $\#\bar{P}(d)$.

7.1.b Étude de $\#\bar{P}(d)$

Les sommets d'un polytope compté par $\#\bar{P}(d)$ appartiennent tous à un même sous-espace affine de dimension au plus $d - 1$. On définit l'ensemble \mathcal{E} suivant.

Définition 7.1.3

On appelle \mathcal{E} l'ensemble des sous-ensembles de $\{0, 1\}^d$ de la forme $\{0, 1\}^d \cap \text{aff}(\mathcal{S})$ où \mathcal{S} est un sous-ensemble d'au moins $d + 1$ points dans $\{0, 1\}^d$ dont l'enveloppe affine est de dimension au plus $d - 1$.

L'ensemble \mathcal{E} nous permet d'obtenir une partition des polytopes comptés par $\#P(d)$. Pour chaque élément $E \in \mathcal{E}$, pour tout $d + 1 \leq n \leq 2^{d-1}$, on note par $b_n(E)$ le nombre de polytopes en nombres entiers, de dimension $\dim E$, dont les n sommets appartiennent à E . On a alors la proposition suivante.

Proposition 7.1.4

Pour tout $d + 1 \leq n \leq 2^{d-1}$, on a

$$b_n(E) = \binom{|E|}{n} - \sum_{\substack{F \in \mathcal{E} \\ F \subset E \\ \dim F < \dim E}} b_n(F).$$

Démonstration. Soit E un élément de \mathcal{E} . Par définition, le nombre $b_n(E)$ compte le nombre de polytopes dont les n sommets appartiennent à E . Il en existe au plus $\binom{|E|}{n}$. On exclut ensuite les polytopes de dimension strictement inférieure à $\dim E$. Considérons alors tous les éléments $F \in \mathcal{E}$ tel que $F \subset E$ et tel que

$$\dim F < \dim E.$$

Comme l'inclusion est stricte F est un sous-ensemble de points dont l'enveloppe affine est contenue dans $\text{aff}(E)$. Si l'ensemble de sommets d'un polytope P appartient à F , il sera compté par $b_n(F)$. S'il existe un ensemble F et un polytope P tel que P est compté par $b_n(F)$, alors ce polytope est compté une unique fois car il ne peut appartenir à deux enveloppes affines distinctes de même dimension. \square

Remarque 7.1.5

Le calcul de $b_n(E)$ peut sembler inutilement compliqué pour les petites dimensions. En effet, ce calcul ne prend tout son sens que lorsque $d \geq 5$. Par exemple quand $d = 5$, considérons un sous-ensemble \mathcal{S} de $\{0, 1\}^5$ contenant 6 points et tel que \mathcal{S} engendre un sous-espace affine de dimension 4. Par construction de \mathcal{E} , $E = \{0, 1\}^5 \cap \text{aff}(\mathcal{S})$ appartient à \mathcal{E} . Imaginons alors que E soit l'ensemble des sommets d'une facette G de $[0, 1]^5$. Dans ce cas, E contient alors 16 sommets du cube $[0, 1]^5$. Considérons ensuite un sous-ensemble \mathcal{S}' de $\{0, 1\}^5$ contenant également 6 points mais de sorte que $\text{aff}(\mathcal{S}')$ soit de dimension 3 et que $\{0, 1\}^5 \cap \text{aff}(\mathcal{S}')$ soit contenu dans la facette G . Dans ce cas $F = \{0, 1\}^5 \cap \text{aff}(\mathcal{S}')$ est de dimension 3, et F est un sous-ensemble de E . Ceci illustre que le calcul de $b_n(E)$ nécessite bien de devoir soustraire de $\binom{|E|}{n}$ tous les polytopes à n sommets contenus dans $\text{aff}(F)$.

Une fois $b_n(E)$ obtenu pour tous les éléments $E \in \mathcal{E}$, pour chaque nombre de sommets n allant de $d + 1$ à 2^{d-1} , nous sommes en mesure de calculer le nombre de 0/1-polytopes de dimension inférieure à d . Nous formulons la proposition suivante.

Proposition 7.1.6

Pour l'hypercube unité de dimension d , le nombre $\# \bar{P}(d)$ de 0/1-polytopes de dimension au plus $d - 1$ et à au moins $d + 1$ sommets est

$$\# \bar{P}(d) = \sum_{E \in \mathcal{E}} \sum_{n=d+1}^{2^{d-1}} b_n(E).$$

ÉNUMÉRATION DE \mathcal{E} . L'ensemble \mathcal{E} est obtenu par l'algorithme suivant.

Algorithme 3 : Énumération de \mathcal{E}

Entrées : La dimension d

Sorties : L'ensemble \mathcal{E}

$\mathcal{E} \leftarrow \emptyset$

pour chaque S , sous-ensemble de $d + 1$ points de $\{0, 1\}^d$ **faire**

 calculer $\text{aff}(S)$

si $\dim \text{aff}(S) < d$ **alors**

$E \leftarrow \{0, 1\}^d \cap \text{aff}(S)$

si E n'a pas encore été ajouté dans \mathcal{E} **alors**

 ajouter E dans \mathcal{E}

retourner \mathcal{E}

Lemme 7.1.7

Tous les éléments $E \in \mathcal{E}$ sont énumérés par l'Algorithme 3.

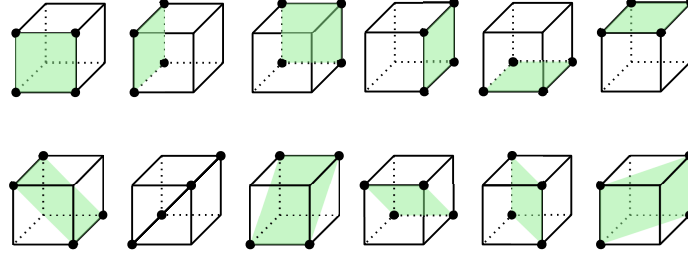
Démonstration. Il est équivalent de montrer que tous les éléments $E \in \mathcal{E}$ sont l'intersection de $\{0, 1\}^d$ avec l'enveloppe affine de $d + 1$ sommets de $[0, 1]^d$. Considérons alors un élément E de \mathcal{E} tel que $\dim E = k$. L'ensemble E est alors engendré par $k + 1$ points affinement indépendants. Notons par G l'ensemble de $k + 1$ points dans E qui engendrent $\text{aff}(E)$. Par définition, E contient au moins $d + 1$ points. Par conséquent, $d - k$ points de $E \setminus G$ peuvent être rajoutés dans G , produisant un sous-ensemble de $d + 1$ points de E qui engendre $\text{aff}(E)$. \square

Exemple 7.1.8 (Pour $d = 3$)

L'hypercube $[0, 1]^3$ possède $2^3 = 8$ sommets. Il existe $2^8 = 256$ sous-ensembles de sommets possibles. Le nombre de sous-ensembles avec au plus d sommet est $\sum_{i=0}^3 \binom{2^3}{i} = 93$. La figure 7.2 représente les 12 éléments de \mathcal{E} . En particulier, pour chaque $E \in \mathcal{E}$, $b_n(E) = 1$. Par conséquent, $\# \bar{P}(3) = 12$. Finalement, on obtient donc

$$\# P(3, 1) = 256 - 93 - 12 = 151.$$

On retrouve ainsi le résultat du tableau 7.1.

FIGURE 7.2 – Les 12 sous-ensembles d'au moins 4 sommets et de dimension au plus 2 pour l'hypercube $[0, 1]^3$.

7.1.c Calcul de $\#P(d, 1)$

La construction de \mathcal{E} constitue une étape préliminaire pour le calcul du nombre de 0/1-polytopes. L'algorithme suivant, résume la méthode de calcul de $\#P(d, 1)$.

Algorithme 4 : Calcul du nombre de 0/1-polytopes de dimension d

Entrées : L'ensemble \mathcal{E}

Sorties : Le nombre $\#P(d, 1)$ de 0/1-polytopes

$\#\bar{P}(d) \leftarrow 0$

pour chaque $E \in \mathcal{E}$ **faire**

for $n = d + 1$ **to** $|E|$ **do**

$b_n(E) \leftarrow \binom{|E|}{n}$

pour tous les $F \in \mathcal{E}$ **tel que** $F \subset E$ **et** $\dim F < \dim E$ **faire**

$b_n(E) \leftarrow b_n(E) - b_n(F)$

$\#\bar{P}(d) \leftarrow \#\bar{P}(d) + b_n(E)$

$\#P(d, 1) \leftarrow 2^{2^d} - \sum_{i=0}^d \binom{2^d}{i} - \#\bar{P}(d)$

retourner $\#P(d, 1)$

Remarque 7.1.9

Notre procédé permet d'obtenir directement le nombre de 0/1-polytopes de dimension d avec un nombre de sommets fixé n_0 . Pour y parvenir, il suffit de calculer

$$\#\bar{P}_{n_0}(d) = \sum_{E \in \mathcal{E}} b_{n_0}(E),$$

et de retirer cette quantité à $\binom{2^d}{n_0}$. On a alors,

$$\#P_{n_0}(d, 1) = \binom{2^d}{n_0} - \#\bar{P}_{n_0}(d).$$

7.1.d Éléments d'implantation

Les principes de codage utilisés lors du calcul du nombre de 0/1-polytopes sont esquissés ci-dessous.

1. Les sommets de $[0, 1]^d$ sont stockés dans un tableau `lattice` $[2^d][d]$ à 2^d lignes et d colonnes. Ils sont directement ordonnés lexicographiquement.
2. Tous les sous-ensembles S de $d + 1$ sommets sont ainsi engendrés en considérant chaque $(d + 1)$ -uplet de sommets dans `lattice` $[i]$.
3. Un élément de $E \in \mathcal{E}$ est un mot binaire de longueur 2^d dont le i -ème bit vaut 1 si le sommet `lattice` $[i]$ est contenu dans E , et 0 sinon. Ceci est fait pour optimiser le stockage ainsi que de vérifier l'inclusion de deux éléments E et F de \mathcal{E} .
4. Pour deux éléments E et $F \in \mathcal{E}$. Pour vérifier si $F \subset E$, on utilise le OU logique : si

$$E \text{ OU } F = E,$$

alors $F \subset E$.

5. L'ensemble \mathcal{E} est encodé dans une structure de données dans laquelle une recherche peut-être effectuée en temps logarithmique, afin de tester l'appartenance de E à \mathcal{E} efficacement dans l'algorithme 3.
6. Le calcul d'enveloppe affine de S est fait avec l'algorithme de GAUSS-JORDAN en nombres exacts.

7.2 Nombre de polygones en nombres entiers

Lorsque $k \geq 2$, la stratégie est différente de celle utilisée pour le cas $[0, 1]^d$. Contrairement à ce dernier, un ensemble de points à coordonnées entières contenu dans $[0, k]^d$ n'est pas forcément l'ensemble de sommets d'un polytope convexe. Nous proposons une méthode de comptage itératif des (d, k) -polytopes selon leur nombre de sommets, pour d fixé à 2^2 et pour différentes valeurs de k .

La première étape consiste à engendrer tous les triangles en nombres entiers contenus dans $[0, k]^2$. Pour chaque triangle ainsi engendré, on établit la liste des quadrilatères que l'on obtient à la suite d'une insertion d'un point de $\{0, 1, 2, \dots, k\}^2$ dans ce triangle. Cette insertion est au sens de l'insertion introduite dans le chapitre 3. On rappelle qu'une insertion est valide si elle ajoute exactement un sommet au nombre de sommets d'un polytope P et que si celle-ci ne supprime aucun sommet de P déjà existant.

Après cette étape préliminaire, on obtient tous les triangles ainsi que tous les quadrilatères de $[0, k]^2$. On réitère ensuite la procédure pour compter les polygones à n sommets à partir des polygones à $n - 1$ sommets. Cette méthode revient à effectuer un parcours en largeur de l'ordre partiel des polygones en nombres entiers où la relation d'ordre est donnée par l'inclusion de deux polygones.

2. Sous des hypothèses supplémentaires la méthode pourrait être étendue pour des valeurs quelconques de d , cependant nous n'aborderons dans cette section que l'étude en dimension 2.

7.2.a Principes de comptage

De la même manière que pour la section 7.1, les points à coordonnées entières de $[0, k]^2$ seront ordonnés selon l'ordre lexicographique. Cet ordre sera représenté par les symboles " $<$ " et " $>$ ". Dans cette section, un ensemble de n points de $\{0, 1, 2, \dots, k\}^2$ sera noté

$$\{x_1, x_2, \dots, x_n\},$$

avec la convention que $x_1 < x_2 < \dots < x_n$.

Définition 7.2.1

Pour tout $n \geq 3$. On définit l'ensemble V_n des ensembles de sommets \mathcal{V} des polygones en nombre entiers à n sommets. Un élément \mathcal{V} de V_n est un ensemble de sommets de la forme

$$\mathcal{V} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$$

où $v_i \in \{0, 1, 2, \dots, k\}^d$ pour tout i allant de 1 à n .

Rappelons ensuite que notre stratégie est d'obtenir V_{n+1} en insérant un nouveau point dans un élément de V_n . On a alors la définition suivante.

Définition 7.2.2

Pour chaque $\mathcal{V} \in V_n$ on définit, l'ensemble $\mathcal{J}(\mathcal{V})$ des points $x \in \{0, 1, 2, \dots, k\}^2$ tels que :

- (i) x peut être inséré dans $\text{conv}(\mathcal{V})$.
- (ii) $x > y$ pour tout sommet $y \in \mathcal{V}$.

On remarque que $\mathcal{J}(\mathcal{V})$ peut être vide. Un exemple de construction de $\mathcal{J}(\mathcal{V})$ est illustré par la figure 7.3.

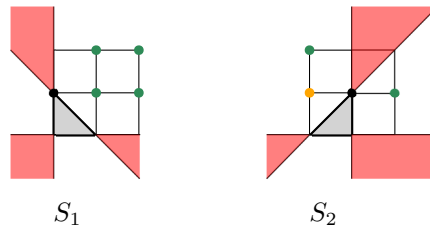


FIGURE 7.3 – Pour deux triangles S_1 et S_2 , dont les ensembles de sommets respectifs \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 appartiennent à V_3 . Les points appartenant à $\mathcal{J}(\mathcal{S}_1)$ et $\mathcal{J}(\mathcal{S}_2)$ sont marqués en vert. Le plus grand sommet lexicographiquement, est marqué en noir. Pour S_2 , le point marqué en orange n'est pas contenu dans $\mathcal{J}(\mathcal{S}_2)$ car il existe un sommet dans \mathcal{S}_2 qui lui est supérieur dans l'ordre lexicographique.

Pour chaque $\mathcal{V} \in V_n$ on définit également, l'ensemble $A_{\mathcal{V}}$ tel que

$$A_{\mathcal{V}} := \{\mathcal{V} \cup \{x\} : x \in \mathcal{J}(\mathcal{V})\}.$$

Un élément de $A_{\mathcal{V}}$ ainsi défini est une famille d'ensemble de sommets de polytopes à $n+1$ sommets. Remarquons que pour un élément $\mathcal{V} \in V_n$, $|A_{\mathcal{V}}| = |\mathcal{J}(\mathcal{V})|$. Le résultat suivant permet de construire V_{n+1} à partir de V_n .

Théorème 7.2.3

Pour tout $n > 3$. La famille d'ensembles $(A_{\mathcal{V}})_{\mathcal{V} \in V_n}$ forme une partition de V_{n+1} .

Démonstration. Il s'agit de prouver que pour tout $n > 3$, la famille d'ensembles $(A_{\mathcal{V}})_{\mathcal{V} \in V_n}$ forme une famille de parties de V_{n+1} telle que

- (i) $\bigcup_{\mathcal{V} \in V_n} A_{\mathcal{V}} = V_{n+1}$,
- (ii) $A_{\mathcal{V}} \cap A_{\mathcal{V}'} = \emptyset$, pour tout \mathcal{V} et $\mathcal{V}' \in V_n$ tels que $\mathcal{V} \neq \mathcal{V}'$.

POUR (i). Vérifions tout d'abord que la réunion de tous les $A_{\mathcal{V}}$ pour tous les \mathcal{V} de V_n constitue bien V_{n+1} .

(\Rightarrow) Si $\mathcal{V} \in V_n$ et $x \in \mathcal{J}(\mathcal{V})$, puisque x est un point dans $\{0, 1, 2, \dots, k\}^2$ qui peut être inséré dans l'enveloppe convexe de \mathcal{V} , la réunion $\mathcal{V} \cup \{x\}$ est bien l'ensemble des sommets d'un polygone en nombres entiers contenu dans $[0, k]^2$. En outre, $\mathcal{V} \cup \{x\}$ contient bien $n + 1$ points et par conséquent, cet ensemble appartient à V_{n+1} .

(\Leftarrow) Considérons à présent $\mathcal{W} \in V_{n+1}$, et vérifions qu'il existe un $\mathcal{V} \in V_n$ tel que $\mathcal{W} = \mathcal{V} \cup \{x\}$ avec $x \in \mathcal{J}(\mathcal{V})$. Soit x le plus grand élément de \mathcal{W} . Par construction, $x \in \mathcal{J}(\mathcal{W} \setminus \{x\})$. On prend alors $\mathcal{V} = \mathcal{W} \setminus \{x\}$. Ainsi $\mathcal{W} \in A_{\mathcal{V}}$, et on conclut que \mathcal{W} appartient également à la réunion des $(A_{\mathcal{V}})_{\mathcal{V} \in V_n}$.

POUR (ii). Montrons ensuite que les $(A_{\mathcal{V}})_{\mathcal{V} \in V_n}$ sont deux à deux disjoints. La preuve est faite par contraposition. Considérons \mathcal{V} et $\mathcal{V}' \in V_n$ tels que $A_{\mathcal{V}} \cap A_{\mathcal{V}'} \neq \emptyset$, c'est-à-dire qu'il existe un polygone en nombres entiers à $n + 1$ sommets tel que son ensemble de sommets \mathcal{W} est à la fois contenu dans $A_{\mathcal{V}}$ et $A_{\mathcal{V}'}$. On a alors $\mathcal{W} = \mathcal{V} \cup \{x\} = \mathcal{V}' \cup \{y\}$, où x et y appartiennent respectivement à $\mathcal{J}(\mathcal{V})$ et $\mathcal{J}(\mathcal{V}')$. On veut montrer que $\mathcal{V} = \mathcal{V}'$. Deux cas peuvent alors se présenter : soit x et y sont les mêmes points et dans ce cas $\mathcal{V} = \mathcal{V}'$. Dans le cas où $x \neq y$, ceci implique que $x \in \mathcal{V}'$ et que $y \in \mathcal{V}$. Par symétrie, supposons que $x < y$. Dans cette configuration, $y \in \mathcal{V}$. Comme $x < y$, par construction de $\mathcal{J}(\mathcal{V})$, x ne peut pas appartenir à $\mathcal{J}(\mathcal{V})$, ce qui contredit notre hypothèse. On conclut que x est forcément égal à y , d'où $\mathcal{V} = \mathcal{V}'$. \square

Le théorème 7.2.3 indique que l'ensemble des sommets tous les polygones en nombres entiers à $n + 1$ sommets sont tous comptés exactement une fois, à partir des éléments \mathcal{V} dans V_n et des points appartenant à $\mathcal{J}(\mathcal{V})$. Le corollaire suivant en est la conséquence immédiate.

Corollaire 7.2.4

$$|V_{n+1}| = \sum_{\mathcal{V} \in V_n} |\mathcal{J}(\mathcal{V})|.$$

On prouve également le résultat suivant.

Théorème 7.2.5

Pour tout $n > 3$, pour tout $\mathcal{V} \in V_n$

$$\mathcal{J}(\mathcal{V}) = \bigcap_{\mathcal{S}} \mathcal{J}(\mathcal{S}),$$

où l'intersection est sur les sous-ensembles \mathcal{S} de \mathcal{V} qui appartiennent à V_3 .

Démonstration. La preuve se découpe en deux parties, et vérifiera l'inclusion de ces ensembles dans les deux sens.

(\Rightarrow) Soit $x \in \mathcal{J}(\mathcal{V})$ et $\mathcal{S} \in V_3$ un sous-ensemble de \mathcal{V} . Montrons que $x \in \mathcal{J}(\mathcal{S})$, autrement dit que x peut être inséré dans $\text{conv}(\mathcal{S})$ et que pour tout $y \in \mathcal{S}$, $y < x$. Comme $x \in \mathcal{J}(\mathcal{V})$, x n'est pas contenu dans $\text{conv}(\mathcal{V})$, ce qui implique que $x \notin \mathcal{S}$ puisque $\mathcal{S} \subset \mathcal{V}$. Supposons que x ne puisse pas être inséré dans $\text{conv}(\mathcal{S})$, il existerait alors un sommet y dans \mathcal{S} tel que $x \in C_y(\text{conv}(\mathcal{S})) \subset C_y(\text{conv}(\mathcal{V}))$. Par conséquent, x ne pourrait pas être inséré dans $\text{conv}(\mathcal{V})$, ce qui contredirait notre hypothèse. On conclut que x peut être inséré dans $\text{conv}(\mathcal{S})$.

Ensuite, vérifions que pour tout $y \in \mathcal{S}$, $y < x$. Par définition, $x \in \mathcal{J}(\mathcal{V})$ implique que pour tout $z \in \mathcal{V}$, $z < x$. Par conséquent, tous les sommets $y \in \mathcal{S} \subset \mathcal{V}$ sont inférieurs à x dans l'ordre lexicographique. On déduit que $x \in \mathcal{J}(\mathcal{S})$ et par conséquent $\mathcal{J}(\mathcal{V}) \subset \mathcal{J}(\mathcal{S})$ pour tout $\mathcal{S} \subset \mathcal{V}$ tel que $\mathcal{S} \in V_3$. On a donc

$$\mathcal{J}(\mathcal{V}) \subset \bigcap_{\mathcal{S}} \mathcal{J}(\mathcal{S}),$$

(\Leftarrow) Considérons à présent un point $x \in \bigcap_{\mathcal{S}} \mathcal{J}(\mathcal{S})$ et montrons que $x \in \mathcal{J}(\mathcal{V})$. Deux choses sont à prouver : premièrement que x peut être inséré dans $\text{conv}(\mathcal{V})$, ensuite que pour tout point $y \in \mathcal{V}$, $y < x$. Considérons un point $z \in \mathcal{V}$ tel que z soit le plus grand dans l'ordre lexicographique. Il existe alors un $\mathcal{S} \subset \mathcal{V}$ tel que $z \in \mathcal{S}$. Puisque $x \in \mathcal{J}(\mathcal{S})$, alors $x > z$. Ce qui implique que $y < x$ quelque soit $y \in \mathcal{V}$.

Montrons ensuite que x ainsi choisi peut être inséré dans $\text{conv}(\mathcal{V})$. On sait que, pour tout $\mathcal{S} \subset \mathcal{V}$ tel que $\mathcal{S} \in \text{conv}(\mathcal{S}_j)$, $x \notin \mathcal{S}$. Puisque \mathcal{V} est la réunion de ces sous-ensembles \mathcal{S} , x ne peut pas appartenir à \mathcal{V} . À présent, on observe que parmi les tous les sous-ensembles $\mathcal{S} \subset \mathcal{V}$ tel que $\mathcal{S} \in V_3$, il existe une famille finie $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \dots, \mathcal{S}_p$ de ces sous-ensembles de telle sorte que les enveloppes convexes des \mathcal{S}_j sont les faces de dimension 2 d'une triangulation de $\text{conv}(\mathcal{V})$. On choisit également les \mathcal{S}_j de façon à ce que la triangulation contienne le moins de triangles possible. Ainsi, pour tout $j \in \{1, 2, \dots, p\}$, et pour tout v dans \mathcal{S}_j , on a

$$x \notin C_v(\text{conv}(\mathcal{S}_j)).$$

Par conséquent

$$x \notin \bigcup_{j=1}^p C_v(\text{conv}(\mathcal{S}_j)).$$

Et comme

$$\bigcup_{j=1}^p C_v(\text{conv}(\mathcal{S}_j)) = C_v\left(\bigcup_{j=1}^p \text{conv}(\mathcal{S}_j)\right) = C_v(\text{conv}(\mathcal{V})),$$

on conclut que x peut être inséré dans $\text{conv}(\mathcal{V})$. D'où

$$\bigcap_S \mathcal{J}(\mathcal{S}) \subset \mathcal{J}(\mathcal{V}).$$

où l'intersection est sur les sous-ensembles $\mathcal{S} \in V_3$ et tel que $\mathcal{S} \subset \mathcal{V}$.

□

7.2.b Initialisation avec les triangles en nombres entiers de $[0, k]^2$

Cette étape préliminaire consiste à énumérer tous les sous-ensembles de triplés de $\{0, k\}^2$ dont l'enveloppe convexe est un triangle, c'est-à-dire construire l'ensemble V_3 . Ensuite, pour chaque élément $\mathcal{S} \in V_3$, l'ensemble $\mathcal{J}(\mathcal{S})$ est calculé. Les algorithmes suivants initialisent notre méthode de comptage.

Algorithme 5 : Initialisation de V_3

Entrées : Le côté k du carré $[0, k]^2$

Sorties : V_3

$V_3 \leftarrow \emptyset$

pour chaque \mathcal{S} *un sous-ensemble de 3 points de $\{0, 1, 2, \dots, k\}^2$* **faire**

 calculer $\text{aff}(\mathcal{S})$

si $\dim(\text{aff}(\mathcal{S})) = 2$ **alors**

 ajouter \mathcal{S} dans V_3

Algorithme 6 : Initialisation de $\mathcal{J}(\mathcal{S})$

Entrées : Un sous ensemble $\mathcal{S} = \{s_1, s_2, s_3\} \in V_3$

Sorties : $\mathcal{J}(\mathcal{S})$

$\mathcal{J}(\mathcal{S}) \leftarrow \emptyset$

pour chaque $x \in \{0, 1, 2, \dots, k\}^2$ **faire**

si $s_3 < x$ **alors**

si $\forall y$ *sommet de \mathcal{S} , $x \notin C_y(\text{conv}(\mathcal{S}))$* **alors**

 ajouter x dans $\mathcal{J}(\mathcal{S})$

retourner $\mathcal{J}(\mathcal{S})$

Exemple 7.2.6

Quand $d = 2$ et $k = 2$, la figure 7.4 illustre tous les triangles de $[0, 2]^2$.

7.2.c Itération de l'algorithme de comptage

Une fois $\mathcal{J}(\mathcal{S})$ calculé pour chaque sous-ensemble $\mathcal{S} \in V_3$, nous sommes en mesure de calculer le nombre $\#P_4(2, k)$ des quadrilatères en nombres entiers de $[0, k]^2$. En effet le corollaire 7.2.4 nous donne directement

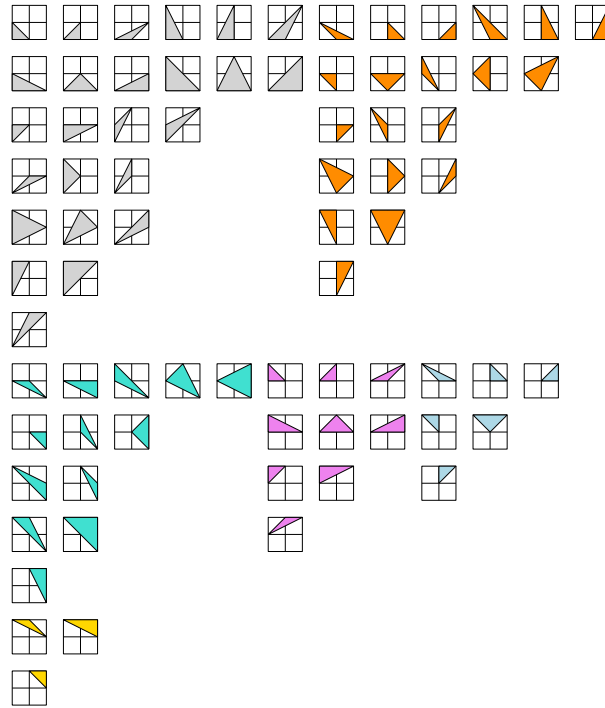


FIGURE 7.4 – Tous les triangles de $[0, 2]^2$. Ils sont ordonnés dans l'ordre lexicographique de leur ensemble de sommets de la manière suivante : gauche à droite et de haut en bas. Et cela pour chaque couleur : gris, orange, turquoise, mauve, bleu et enfin jaune.

le résultat,

$$\#P_4(2, k) = \sum_{\mathcal{S} \in V_3} |\mathcal{J}(\mathcal{S})|.$$

Ensuite à partir de V_3 , on construit alors l'ensemble V_4 , et ainsi de suite. Le nombre exact de $(2, k)$ -polytopes à $n + 1$ sommets est entièrement déterminé par V_n et $\mathcal{J}(\mathcal{V})$ pour tout $\mathcal{V} \in V_n$. Et d'après le théorème 7.2.5, pour tout $\mathcal{V} \in V_n$, les sous-ensembles $\mathcal{J}(\mathcal{V})$ sont déterminés par les sous-ensembles $\mathcal{S} \subset \mathcal{V}$ contenus dans V_3 . En somme, après l'initialisation avec les triangles, et en associant les résultats obtenus avec le théorème 7.2.3

et le théorème 7.2.5, le comptage est itéré de la manière suivante.

Algorithme 7 : Construction de V_{n+1} pour tout $n \geq 3$.

Entrées : $V_n, \mathcal{J}(\mathcal{V})$ pour tous les $\mathcal{V} \in V_n$

Sorties : V_{n+1}

$\mathcal{W} \leftarrow \emptyset$

$V_{n+1} \leftarrow \emptyset$

pour tous les $\mathcal{V} \in V_n$ **faire**

pour chaque $x \in \mathcal{J}(\mathcal{V})$ **faire**

$\mathcal{W} \leftarrow \mathcal{V} \cup \{x\}$

 ajouter \mathcal{W} dans V_{n+1}

retourner V_{n+1}

Algorithme 8 : Construction de $\mathcal{J}(\mathcal{W})$.

Entrées : \mathcal{W} élément de $V_{n+1}, \mathcal{J}(\mathcal{S})$ pour tous les $\mathcal{S} \in V_3$

Sorties : $\mathcal{J}(\mathcal{W})$

$\mathcal{S}_0 \subset \mathcal{W}$ et $\mathcal{S}_0 \in V_3$

$\mathcal{J}(\mathcal{W}) \leftarrow \mathcal{J}(\mathcal{S}_0)$

pour tous les $x \in \mathcal{J}(\mathcal{W})$ **faire**

pour tous les $\mathcal{S} \subset \mathcal{W}$ et $\mathcal{S} \neq \mathcal{S}_0$ **faire**

si $x \notin \mathcal{J}(\mathcal{S})$ **alors**

 retirer x de $\mathcal{J}(\mathcal{W})$

retourner $\mathcal{J}(\mathcal{W})$

Le comptage est ainsi réitéré tant que l'on a pas parcouru tous les \mathcal{V} de V_n et que $\mathcal{J}(\mathcal{V})$ n'est pas vide. Dans ce cas là, on arrête le comptage quand tous les ensembles de sommets polygones en nombres entiers ont été découverts. La proposition suivante, donne alors le nombre exact $\#P(2, k)$ des $(2, k)$ -polytopes.

Proposition 7.2.7

Pour $k \geq 2$,

$$\#P(2, k) = \#S(2, k) + \sum_{n=4}^N \sum_{\mathcal{V} \in V_n} |\mathcal{J}(\mathcal{V})|,$$

où $\#S(2, k)$ est le nombre de triangles en nombres entiers contenus dans $[0, k]^2$, et N le nombre maximal de sommets d'un polygone en nombres entiers contenus dans $[0, k]^2$.

7.2.d Éléments d'implantation et pistes d'optimisation

Les éléments d'implantation de la méthode de comptage des $(2, k)$ -polytopes dans le cas général reprenne à peu près les mêmes idées que celles utilisées pour les polytopes 0/1. En effet, les points à coordonnées entières du carré $[0, k]^2$ sont ordonnés lexicographiquement et sont stockés dans un tableau lattice à $(k+1)^2$ lignes et 2 colonnes. Ensuite,

1. Chaque sous-ensemble S de 3 points, à partir desquels sont engendrés les triangles, est calculé en considérant chaque triplé de points dans `lattice[i]`.
2. Le calcul d'enveloppe affine utilise encore la méthode de résolution exacte de GAUSS-JORDAN.
3. Un ensemble de sommets \mathcal{V} est stocké dans une structure de données ayant deux champs : `vertices` et `insertible`, qui encode respectivement les points à coordonnées entières de $[0, k]^2$ contenus dans \mathcal{V} ainsi que les points contenus dans $\mathcal{J}(\mathcal{V})$. Les ensembles V_n sont une liste de ces structures.
4. Les champs `vertices` et `insertible` sont des mots binaires de longueur $(k+1)^2$, tel que le i -ème caractère vaut 1 si le point `lattice[i]` y est contenu, et vaut 0 sinon. Une fois encore, cette manière de procéder sert à optimiser l'espace de stockage.
5. Le OU logique est utilisé pour calculer la réunion de sous-ensemble, tandis que le ET logique permet de calculer les intersections.

La manière dont la méthode a été implantée est encore perfectible. Par exemple, directement trouver une triangulation de $\text{conv}(\mathcal{V})$ au lieu de passer par tous les sous-ensembles $S \in V_3$ tel que $S \subset \mathcal{V}$ permettra d'optimiser la méthode quand n est grand.

7.3 Résultats expérimentaux

Cette section regroupe les résultats obtenus à partir des deux méthodes de calcul présentées précédemment.

7.3.a Nombre exact de $(d, 1)$ -polytopes

Le tableau 7.2 représente les nombres totaux de 0/1-polytopes pour d allant de 2 à 6. Le tableau 7.3 regroupe les résultats intermédiaires pour chaque nombre de sommets n allant de 3 jusqu'à 32. Le temps d'exécution du programme est quant à lui rapporté par le tableau 7.4.

d	$\#P(d, 1)$	$\#P(d, 1)/2^{2^d}$
2	5	0.3125
3	151	0.5898
4	60 879	0.9289
5	4 292 660 729	0.9994
6	18 446 743 888 401 503 325	0.9999

TABLE 7.2 – Le nombre exact de 0/1-polytopes ainsi que le ratio par rapport au nombre total de sous-ensembles de sommets de $[0, 1]^d$.

7.3.b Nombre exact de $(2, k)$ -polytopes

Le tableau 7.5 montre le nombre de polygones en nombres entiers contenus dans $[0, k]^2$.

7.4 Comportement asymptotique

On conclut ce chapitre sur une analyse asymptotique pour le cas des 0/1-polytopes. Dans le corollaire 14 de [43], Günter Ziegler donne le résultat suivant pour les d -simplexes de $[0, 1]^d$.

Théorème 7.4.1(Ziegler [43])

Pour $k = 1$,

$$\lim_{d \rightarrow \infty} \frac{\# \text{simplexes}}{\binom{2^d}{d+1}} = 1,$$

où $\# \text{simplexes}$ est le nombre de simplexes contenus dans $[0, 1]^d$.

On prouve alors le résultat suivant,

Théorème 7.4.2

Pour $k = 1$,

$$\lim_{d \rightarrow \infty} \frac{\#P(d, 1)}{2^{2^d}} = 1.$$

Démonstration. La preuve repose sur un encadrement de $\#P(d, 1)$. Une borne supérieure naturelle est directement donnée par le nombre total de polytopes en nombres entiers contenus dans $[0, 1]^d$. On a alors,

$$\#P(d, 1) \leq 2^{2^d}. \quad (7.4.1)$$

Trouvons à présent, une quantité qui bornera inférieurement $\#P(d, 1)$. Reprenons dans ce cas le lemme 7.1.2, nous avons :

$$\#P(d, 1) = 2^{2^d} - \sum_{i=0}^d \binom{2^d}{i} - \#\bar{P}(d).$$

En passant $\#\bar{P}(d)$ dans le membre de gauche, nous obtenons :

$$\#P(d, 1) + \#\bar{P}(d) = 2^{2^d} - \sum_{i=0}^d \binom{2^d}{i}. \quad (7.4.2)$$

Comme

$$\sum_{i=0}^d \binom{2^d}{i} \leq (d+1) \binom{2^d}{d},$$

la relation (7.4.2) devient

$$\#P(d, 1) + \#\bar{P}(d) \geq 2^{2^d} - (d+1) \binom{2^d}{d}. \quad (7.4.3)$$

Il suffit alors de trouver une borne supérieure à $\#\bar{P}(d)$ va permettre d'obtenir une borne inférieure sur $\#P(d, 1)$. En effet, si $\alpha \geq \#\bar{P}(d)$ alors d'après (7.4.3), on a :

$$\begin{aligned} \#P(d, 1) + \alpha &\geq 2^{2^d} - (d+1) \binom{2^d}{d} \\ \#P(d, 1) &\geq 2^{2^d} - (d+1) \binom{2^d}{d} - \alpha. \end{aligned} \quad (7.4.4)$$

Estimons dans ce cas α .

On rappelle que $\#\bar{P}(d)$ compte le nombre de polytopes avec au moins $d+1$ et au plus 2^{d-1} sommets dont la dimension est strictement inférieure à d . Autrement dit, $\#\bar{P}(d)$ compte les polytopes contenus dans des sous-espaces affines de dimension inférieure ou égale à $d-1$ et qui sont engendrés par au moins $d+1$ points.

Dans $[0, 1]^d$, il existe $\binom{2^d}{d+1}$ sous-espaces affines engendrés par $d+1$ points, toutes dimensions confondues. Et chacun de ces sous-espaces contiennent tout au plus $2^{2^{d-1}}$ polytopes de dimension inférieure ou égale à $d-1$. On déduit alors que :

$$\#\bar{P}(d) \leq \binom{2^d}{d+1} \times 2^{2^{d-1}}. \quad (7.4.5)$$

En remplaçant α dans la dernière inégalité de (7.4.4) par la borne supérieure en (7.4.5), nous avons :

$$\begin{aligned} \#P(d, 1) &\geq 2^{2^d} - (d+1) \binom{2^d}{d} - \binom{2^d}{d+1} \times 2^{2^{d-1}} \\ &\geq 2^{2^d} - (d+1) \binom{2^d}{d} - \frac{(2^d)^{d+1}}{(d+1)!} 2^{2^{d-1}} \\ &\geq 2^{2^d} - (d+1) \binom{2^d}{d} - \frac{2^{2^{d-1}+d^2+d}}{(d+1)!} \\ &\geq 2^{2^d} \left(1 - (d+1) \binom{2^d}{d} 2^{-2^d} - \frac{2^{-2^{d-1}+d^2+d}}{(d+1)!} \right) \\ &\geq 2^{2^d} (1 - o(1)). \end{aligned} \quad (7.4.6)$$

Des relations (7.4.1) et (7.4.6), nous obtenons :

$$2^{2^d} (1 - o(1)) \leq \#P(d, 1) \leq 2^{2^d}. \quad (7.4.7)$$

Il en découle de cet encadrement qu'asymptotiquement, $\#P(d, 1) \sim 2^{2^d}$. □

n	$\#P_n(2, 1)$	$\#P_n(3, 1)$	$\#P_n(4, 1)$	$\#P_n(5, 1)$	$\#P_n(6, 1)$
3	4				
4	1	58			
5		56	3 008		
6		28	7 408	556 192	
7		8	11 280	2 925 056	366 179 200
8		1	12 850	10 071 580	3 745 082 448
9			11 440	27 678 880	25 952 440 192
10			8 008	64 264 048	148 168 599 040
11			4 368	128 892 000	737 437 996 736
12			1 820	225 738 120	3 273 945 278 016
13			560	347 356 800	13 121 552 663 744
14			120	471 432 000	47 835 341 802 816
15			16	565 722 240	159 494 869 931 776
16			1	601 080 360	488 501 484 685 900
17				565 722 720	1 379 346 317 764 800
18				471 435 600	3 601 668 952 993 440
19				347 373 600	8 719 863 524 025 920
20				225 792 840	19 619 716 296 376 336
21				129 024 480	41 107 991 458 340 800
22				64 512 240	80 347 445 733 646 560
23				28 048 800	146 721 426 413 943 360
24				10 518 300	250 649 105 027 897 240
25				3 365 856	401 038 568 610 099 840
26				906 192	601 557 853 089 138 624
27				201 376	846 636 978 466 858 880
28				35 960	1 118 770 292 983 729 568
29				4 960	1 388 818 294 740 089 472
30				496	1 620 288 010 530 326 592
31				32	1 777 090 076 065 540 992
32				1	1 832 624 140 942 590 492

TABLE 7.3 – Le nombre exact de 0/1-polytopes ayant n sommets. Pour $d = 6$, quand $n > 32$ alors $\#P_n(6, 1) = \binom{64}{n}$.

d	2	3	4	5	6
Temps d'exécution	0m0.009s	0m0.010s	0m0.018s	0m2.473s	97m43.109s

TABLE 7.4 – Temps d'exécution pour $k = 1$.

n	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$	$k = 6$	$k = 7$	$k = 8$	$k = 9$
3	4	76	516	2148	6768	17600	40120	82608	157252
4	1	70	1038	7398	35727	130768	400116	1062016	2531001
5		20	848	11628	91052	487436	2047252	7126116	21528000
6		2	292	8760	117660	963788	5696760	26532028	103112800
7			24	2772	73656	1004016	8743648	56221100	287464776
8			1	331	21745	541206	7428032	68665450	475697420
9				4	2528	139912	3383584	47808392	467671784
10					92	15502	775274	18387220	269047166
11						588	78088	3659020	87363680
12						4	2745	335102	15008951
13							20	11036	1215276
14								74	37588
15									296
16									1

TABLE 7.5 – Le nombre de polygones en nombres entiers à n sommets contenus dans la grille $[0, k]^2$.

8 | Conclusion et perspectives

Les questions auxquelles nous nous sommes intéressés durant cette thèse sont celles axées sur la combinatoire des (d, k) -polytopes. Les principaux résultats obtenus portent sur la connexité des structures de graphe que l'on définit dans le chapitre 4. De ces résultats découlent les générateurs aléatoires uniformes décrits dans le chapitre 6 et les algorithmes d'énumérations exactes du chapitre 7. L'introduction des opérations élémentaires ainsi que l'étude des structures de graphe ont été menées pour remédier à l'approche combinatoire classique, difficilement applicable aux (d, k) -polytopes. Cependant, ce travail a permis une approche assez originale qui a abouti à des résultats intéressants autant sur l'aspect géométrique que sur l'aspect combinatoire de nos objets.

Ce chapitre conclut cette thèse et regroupe les perspectives vers lesquelles sera orientée la suite de nos travaux.

8.1 Sur les structures de graphe

Au chapitre 4, nous avons introduit le graphe $\Gamma(d)$ dont les sommets sont les d -polytopes de \mathbb{R}^d . Nous prouvons que ce graphe, ainsi que ses sous-graphes induits par les polytopes en nombres entiers sont connexes. La distance mesurée entre deux sommets de $\Gamma(d)$ se calcule en nombre d'étapes nécessaires pour transformer l'un en l'autre (transformation faisant référence aux opérations élémentaires décrites dans le chapitre 3). Cette distance donne alors une certaine notion de dissimilarité sur les polytopes. Elle nous a permis de mettre en place une métrique cohérente sur l'ensemble des d -polytopes.

L'étude de la connexité de $\Gamma(d)$ et de ses sous-graphes passent par l'étude des sous-graphes induits par les d -polytopes à n et $n + 1$ sommets. On considère dans ce cas là le nombre de sommets comme étant une propriété que l'on fixe sur les polytopes. Ensuite, le sous-graphe à étudier est celui induit par les sommets vérifiant cette propriété. Pour l'étude de la connexité, le choix du nombre de sommets restreint à n et $n + 1$ est tout indiqué, tout d'abord par la nature des opérations élémentaires, mais également par le fait qu'elle établit une récurrence assez élégante.

Ainsi, on se propose d'étudier des sous-graphes de $\Gamma(d)$ de telle sorte qu'au lieu de considérer le nombre de sommets, on prend en compte d'autres propriétés des d -polytopes qui restent plus ou moins constantes (dans le même sous-graphe). On pourrait par exemple considérer le volume. Dans ce cas là, on se pose la question suivante.

Question 1

Considérons un intervalle non-trivial $I \subset]0, +\infty[$. Est-ce que le sous-graphe induit dans $\Gamma(d)$ par les polytopes dont les volumes appartiennent à I est connexe ?

On pourrait également envisager de considérer plusieurs propriétés des d -polytopes de manière simultanée, puis étudier la connexité des sous-graphes induits dans $\Gamma(d)$ par les d -polytopes vérifiant ces propriétés (par exemple regarder en même temps le volume et le nombre de sommets).

Pour le cas entier, comme nous nous sommes surtout intéressés aux (d, k) -polytopes, nous avons donc considéré le sous-graphe induit dans $\Lambda(d)$ par les (d, k) -polytopes. Certains auteurs ont cependant pris en compte des polytopes en nombres entiers contenus dans une boule [4], d'autres ceux contenus dans un polytope en nombres entiers choisi de manière arbitraire [39]. Dans ce même esprit, on se pose les questions suivantes.

Question 2

Soit B une boule de \mathbb{R}^d de rayon r . Le sous-graphe induit dans $\Lambda(d)$ par les polytopes contenus dans B est-il connexe ? Pour quels polytopes en nombres entiers P le sous-graphe induit dans $\Lambda(d)$ par les polytopes contenus dans P est-il connexe ?

Dans le chapitre 5 nous mettons en évidence l'existence de sommets isolés dans le sous-graphe de $\Lambda(d)$ induits par les polytopes à n et $n + 1$ sommets. Ces sommets isolés influent sur la connexité de ce sous-graphe. En dimension 2, on prouve par exemple avec les théorèmes 4.3.3 et 5.0.2 et le lemme 5.1.7 que ce sous-graphe est connexe que si n vaut 3 ou 5.

En dimensions supérieures ce sous-graphe est parfois connexe et certaines fois non. Le théorème 4.3.3 indique qu'il est connexe pour $n = d + 1$ pour tout $d \geq 2$. Tandis que le théorème 5.1.10 établit que celui-ci est non connexe pour $d \geq 4$ et une valeur arbitrairement large de n .

De manière générale la question reste encore ouverte pour le cas des dimensions supérieures.

Question 3

Lorsque $d \geq 3$, existe-il des valeurs de $n \geq d + 2$ tels que le sous-graphe induit dans $\Lambda(d)$ par les polytopes à n et $n + 1$ sommets est connexe ?

8.2 Sur les chaînes de Markov

AMÉLIORATION DES BORNES SUR LE TEMPS DE MÉLANGE. Le *temps de relaxation*, noté t_{rel} , d'une chaîne de Markov est définie comme étant l'inverse du *trou spectral* $1 - \lambda_{\star}$ de sa matrice de transition P . λ_{\star} dénote la plus grande valeur propre de P (en valeur absolue) différente de 1. On a alors $t_{\text{rel}} = (1 - \lambda_{\star})^{-1}$.

En combinant les théorèmes 12.3 et 12.4 de [32], on a les relations suivantes :

Théorème 8.2.1([32])

Pour une chaîne irréductible, apériodique et symétrique,

$$(t_{\text{rel}} - 1) \log \left(\frac{1}{2\varepsilon} \right) \leq t_{\text{mix}}(\varepsilon) \leq \log \left(\frac{1}{\varepsilon \min_{x \in \Omega} \pi(x)} \right). \quad (8.2.1)$$

Cependant, dans notre cas l'analyse spectrale de la matrice de transition n'est pas appropriée tant l'espace d'états est grand. De plus la matrice de transition n'est pas explicite. Pour estimer t_{rel} on peut choisir de regarder la propriété suivante.

Propriété 8.2.2

Pour toute fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, on a :

$$\text{Var}_{\pi}(f) \leq t_{\text{rel}} \mathcal{E}_{\pi}(f, f).$$

Si f est telle que $\text{Var}_{\pi}(f) \geq c \cdot \mathcal{E}_{\pi}(f, f)$ alors

$$t_{\text{rel}} \geq c.$$

Avec

$$\text{Var}_{\pi}(f) = \sum_{x \in \Omega} \pi(x) (f(x) - \mathbb{E}_{\pi}(f))^2$$

et

$$\mathcal{E}_{\pi}(f, f) = \frac{1}{2} \sum_{x \in \Omega} \pi(x) \sum_y P(x, y) (f(x) - f(y))^2$$

où $\mathcal{E}_{\pi}(f, f)$ est la forme de Dirichlet de la fonction f qui définit une de "variance locale" sur les voisins de l'état x .

Question 4

Peut-on mesurer une propriété des (d, k) -polytopes, c'est-à-dire trouver une fonction f , qui satisfait la propriété 8.2.2?

Un problème que l'on pourrait aborder est également la suivante pour obtenir une chaîne de Markov à convergence rapide.

Question 5

Pour des valeurs fixes de d (ou de k), est-ce que les graphes $\Lambda(d, k)$ forment une famille de graphes expandeurs?

UNE AUTRE VARIANTE DE LA CHAÎNE DE MARKOV. On considère la chaîne dont l'espace d'états Ω est l'ensemble des (d, k) -polytopes à n sommets et dont les règles de transitions sont les suivantes :

1. Avec probabilité $1/3$, on choisit de faire une "rotation" du polytope laissant \mathbb{Z}^d invariant. On effectue ensuite une rotation dont le sens est choisi uniformément sur l'espace des possibilités.

2. Avec probabilité $1/3$, on choisit de faire une translation du polytope. Puis on choisit la direction de la translation parmi les vecteurs $\{-1, 0, 1\}^d$.
3. Avec probabilité $1/3$, on choisit de faire une translation d'un sommet du polytope. Puis on tire aléatoirement parmi les n sommets pour le déplacer sur un des $(k+1)^d$ points de $\{0, 1, 2, \dots, k\}^d$ (le déplacement est autorisé si celle-ci valide les conditions de suppression et d'insertion d'un point).

A priori, cette variante est également irréductible, apériodique et symétrique puisque le graphe sous-jacent est celui que l'on décrit dans le chapitre 6 mais auquel on rajoute des transitions. La question que l'on se pose porte alors sur les propriétés de mélange de celle-ci.

Question 6

Quels sont les propriétés de mélange de cette nouvelle variante de la chaîne de Markov ?

8.3 Sur l'énumération exacte de (d, k) -polytopes

Les algorithmes d'énumération que l'on propose dans le chapitre 7 montrent certaines limites. La première méthode, pour le comptage des 0/1-polytopes nous a permis d'atteindre la dimension $d = 6$. La deuxième méthode, bien que plus générale, reste quand même limitée à des petites valeurs de d et de k dans la pratique.

ENUMÉRATION EN DIMENSIONS SUPÉRIEURES POUR $k \geq 2$. La méthode d'énumération pour une valeur quelconque de k consiste en une méthode itérative qui énumère les (d, k) -polytopes selon leur nombre de sommets. Cependant notre algorithme ne permet qu'une énumération en dimension 2.

L'ensemble V_n regroupe tous les ensembles sommets \mathcal{V} de polygones à n sommets. L'itération est effectuée en décrivant l'ensemble des $\mathcal{S}(\mathcal{V})$ points de $\{0, 1, 2, \dots, k\}^2$ que l'on peut insérer dans chaque $\mathcal{V} \in V_n$ pour obtenir de manière unique tous les éléments de V_{n+1} . Pour ce faire, nous avons utilisé l'ordre lexicographique sur les points de $\{0, 1, 2, \dots, k\}^2$ de telle sorte que $x \in \mathcal{S}(\mathcal{V})$ si :

- (i) x peut être inséré dans $\text{conv}(\mathcal{V})$,
- (ii) $y < x$, pour tout $y \in \mathcal{V}$.

Pour étendre la méthode en dimension $d \geq 3$, l'ensemble $\mathcal{S}(\mathcal{V})$ peut être redéfini de la manière suivante.

Définition 8.3.1

Pour chaque $\mathcal{V} \in V_n$ on définit, l'ensemble $\mathcal{S}(\mathcal{V})$ des points $x \in \{0, 1, 2, \dots, k\}^d$ tels que :

- (i) x peut être inséré dans $\text{conv}(\mathcal{V})$.
- (ii) Pour tout sommet $y \in \mathcal{V}$, si $x < y$ alors $\text{conv}([\mathcal{V} \setminus \{y\}] \cup \{x\})$ est de dimension $d - 1$.

Exemple 8.3.2(Pour $d = 3$)

On considère un simplexe S de dimension 3 contenu dans $[0, k]^3$ représenté en bleu dans la figure 8.1. Son ensemble de sommets est $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\} \in V_4$. Soient deux points x_1 et $x_2 \in \{0, 1, \dots, k\}^d$, susceptibles d'appartenir à $\mathcal{F}(\mathcal{V})$ et tel que

$$v_1 < v_2 < v_3 < x_1 < x_2 < v_4.$$

Dans la figure 8.1, x_1 et x_2 sont colorés en orange. On suppose que x_1 et x_2 peuvent tout deux être insérés dans S . Vérifions leur appartenance à $\mathcal{F}(\mathcal{V})$. Le troisième dessin de la figure 8.1 montre que $\text{conv}(\mathcal{V} \setminus \{v_4\} \cup \{x_1\})$ est de dimension 2, par conséquent $x_1 \in \mathcal{F}(\mathcal{V})$. Par contre, on voit que sur le dernier dessin, $\text{conv}(\mathcal{V} \setminus \{v_4\} \cup \{x_2\})$ reste de dimension 3, ce qui implique que x_2 n'appartient pas à $\mathcal{F}(\mathcal{V})$.



FIGURE 8.1 – Exemple en dimension 3 de l'appartenance de x_1 et x_2 à $\mathcal{F}(\mathcal{V})$. Dans cet exemple $x_1 \in \mathcal{F}(\mathcal{V})$ et $x_2 \notin \mathcal{F}(\mathcal{V})$.

Question 7

Avec cette nouvelle définition de l'ensemble $\mathcal{F}(\mathcal{V})$, est-ce que le théorème 7.2.5 reste valable?

OPTIMISATION DE L'ALGORITHME D'ÉNUMÉRATION POUR $k \geq 2$. Bien que pensés pour des valeurs quelconques de d et de k les algorithmes d'énumération du chapitre 7 admettent en pratique des limites. La complexité de ces algorithmes n'ont pas été étudiée dans cette thèse. Cependant, ils sont perfectibles pour meilleure gestion de l'espace ainsi que pour une sortie plus rapide.

Question 8

Peut-on trouver un algorithme d'énumération à délai polynomial, en temps et en espace, pour les (d, k) -polyèdres?

Une fois cet algorithme obtenu, pour un délai raisonnable entre deux solution, nous seront apte à donner nos sorties en entrées à des programmes de calcul d'enveloppe convexe. On peut par exemple citer le logiciel polymake.

Bibliographie

- [1] Dragan Acketa and Joviša Žunić. On the maximal number of edges of convex digital polygons included into an $m \times m$ -grid. *Journal of Combinatorial Theory A*, 69 :358–368, 1995.
- [2] Oswin Aichholzer. Extremal properties of 0/1-polytopes of dimension 5. In *Polytopes—combinatorics and computation*, pages 111–130. Springer, 2000.
- [3] Antal Balog and Imre Bárány. On the convex hull of the integer points in a disc. In *Proceedings of the Seventh Annual Symposium on Computational Geometry*, pages 162–165, 1991.
- [4] Imre Bárány and David G Larman. The convex hull of the integer points in a large ball. *Mathematische Annalen*, 312(1) :167–181, 1998.
- [5] Mónica Blanco and Francisco Santos. Lattice 3-polytopes with six lattice points. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 30(2) :687–717, 2016.
- [6] Mónica Blanco and Francisco Santos. Enumeration of lattice 3-polytopes by their number of lattice points. *Discrete & Computational Geometry*, pages 1–45, 2018.
- [7] Mónica Blanco and Francisco Santos. Non-spanning lattice 3-polytopes. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 161 :112–133, 2019.
- [8] Mónica Blanco Gómez et al. Enumeration and width of lattice polytopes by their number of lattice points. 2017.
- [9] Olivier Bodini, Ph Duchon, Alice Jacquot, and L Mutařchiev. Asymptotic analysis and random sampling of digitally convex polyominoes. In *International Conference on Discrete Geometry for Computer Imagery*, pages 95–106. Springer, 2013.
- [10] Julien Bureaux and Nathanaël Enriquez. On the number of lattice convex chains. *arXiv preprint arXiv :1603.09587*, 2016.
- [11] Vincent Carnino and Sven De Felice. Random generation of deterministic acyclic automata using markov chains. In *International Conference on Implementation and Application of Automata*, pages 65–75. Springer, 2011.
- [12] Richard W Cottle. Minimal triangulation of the 4-cube. *Discrete Mathematics*, 40(1) :25–29, 1982.
- [13] George Bernard Dantzig. *Linear programming and extensions*. Princeton university press, 1998.
- [14] Julien David, Lionel Pournin, and Rakotonarivo Rado. Elementary moves on lattice polytopes. 2018.
- [15] Julien David, Lionel Pournin, and Rado Rakotonarivo. A markov chain for lattice polytopes. In *GAS-Com*, pages 132–139, 2018.

- [16] Jesús A De Loera, Jörg Rambau, and Francisco Santos. *Triangulations : Structures for algorithms and applications*. Springer, 2010.
- [17] Olivier Devillers, Philippe Duchon, and Rémy Thomasse. A generator of random convex polygons in a disc. In *AofA 2014-25th International Conference on Probabilistic, Combinatorial and Asymptotic Methods for the Analysis of Algorithms*, 2014.
- [18] Antoine Deza, George Manoussakis, and Shmuel Onn. Primitive zonotopes. *Discrete and Computational Geometry*.
- [19] Antoine Deza, Lionel Pournin, and Rado Rakotonarivo. The vertices of primitive zonotopes. *Contemporary Mathematics, to appear*, 2019.
- [20] Antoine Deza, Lionel Pournin, and Noriyoshi Sukegawa. The diameter of lattice zonotopes. *Proceedings of the American Mathematical Society, to appear*, 2019.
- [21] Julius Farkas. Theorie der einfachen ungleichungen. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 124 :1–27, 1902.
- [22] Philippe Flajolet and Robert Sedgewick. *Analytic combinatorics*. cambridge University press, 2009.
- [23] Christopher Francese and David Richeson. The flaw in euler’s proof of his polyhedral formula. *The American Mathematical Monthly*, 114(4) :286–296, 2007.
- [24] Michael Gromov. Groups of polynomial growth and expanding maps (with an appendix by jacques tits). *Publications Mathématiques de l’IHÉS*, 53 :53–78, 1981.
- [25] Branko Grünbaum. *Convex Polytopes*, volume 221 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, 2003.
- [26] Branko Grünbaum and Geoffrey C Shephard. Convex polytopes. *Bulletin of the London Mathematical Society*, 1(3) :257–300, 1969.
- [27] Jean-François Hêche, Thomas M Liebling, and Dominique De Werra. *Recherche opérationnelle pour ingénieurs*, volume 2. PPUR presses polytechniques, 2003.
- [28] Robert B Hughes. Minimum-cardinality triangulations of the d-cube for d= 5 and d= 6. *Discrete mathematics*, 118(1-3) :75–118, 1993.
- [29] Robert B Hughes and Michael R Anderson. A triangulation of the 6-cube with 308 simplices. *Discrete mathematics*, 117(1-3) :253–256, 1993.
- [30] Gil Kalai. The number of faces of centrally-symmetric polytopes. *Graphs and Combinatorics*, 5(1) :389–391, 1989.
- [31] Henri Lebesgue. Remarques sur les deux premières démonstrations du théorème d’euler relatif aux polyèdres. *Bulletin de la Société mathématique de France*, 52 :315–336, 1924.
- [32] David Asher Levin, Yuval Peres, and Elizabeth Lee Wilmer. *Markov chains and mixing times*. American Mathematical Soc., 2009.
- [33] L Lovasz. A new linear programming algorithm—better or worse than the simplex method? *The Mathematical Intelligencer*, 2(3) :141–146, 1980.
- [34] Patrick Scott Mara. Triangulations for the cube. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 20(2) :170–177, 1976.
- [35] Guy Melançon, Isabelle Dutour, and Mireille Bousquet-Mélou. Random generation of directed acyclic graphs. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 10 :202–207, 2001.

-
- [36] Dennis Naddef. The Hirsch conjecture is true for $(0, 1)$ -polytopes. *Mathematical Programming*, 45 :109–110, 1989.
 - [37] Lionel Pournin. The flip-graph of the 4-dimensional cube is connected. *Discrete & Computational Geometry*, 49(3) :511–530, 2013.
 - [38] Francisco Santos. A counterexample to the hirsch conjecture. *Annals of mathematics*, pages 383–412, 2012.
 - [39] Ivan Soprunov and Jenya Soprunova. Eventual quasi-linearity of the minkowski length. *European Journal of Combinatorics*, 58 :107–117, 2016.
 - [40] Ernst Steinitz. Polyeder und raumeinteilungen. *Encyk der Math Wiss*, 12 :38–43, 1922.
 - [41] Torsten Thiele. Extremalprobleme für Punktmengen. *Diplomarbeit, Freie Universität Berlin*, 1991.
 - [42] Günter M Ziegler. *Lectures on polytopes*, volume 152. Springer Science & Business Media, 1995.
 - [43] Günter M Ziegler. Lectures on $0/1$ -polytopes. In *Polytopes—combinatorics and computation*, pages 1–41. Springer, 2000.
 - [44] Chuanming Zong. What is known about unit cubes. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 42(2) :181–211, 2005.