Différence symétrique et distance dans (X_t)

Julien David, Lionel Pournin, Rakotonarivo Rado

14 novembre 2017

1 Définition

Soient deux polytopes $x = \{u_1, \dots, u_l\}$ et $y = \{v_1, \dots, v_k\} \in \Omega$. On définit par $x \triangle y$ la **différence symétrique** entre x et y telle que

$$x \triangle y = \{u \in x : u \notin y \text{ et } v \in y : v \notin x\} \tag{1}$$

On peut voir la différence symétrique de manière ensembliste comme étant $x \triangle y = x \cup y \setminus x \cap y$ cependant quelques précisions sont à mentionner :

— $x \cup y$ ne constitue pas forcément une enveloppe convexe.

— $|x \cup y| = |x| + |y|$ si $x \cap y = \emptyset$.

— $x \triangle y$ est maximal quand x et y n'ont aucun sommet en commun.

Proposition 1. *La distance entre x et y dans le graphe de X_t est bornée par le cardinal de $x \triangle y$, on notera cette distance $\delta(x, y)$ et on a :*

$$\delta(x, y) \geq |x \triangle y| \tag{2}$$

Démonstration. Considérons x et $y \in \Omega$. Comme $x \triangle y$ constitue l'ensemble des sommets sur lesquels x diffère de y et réciproquement, passer de x en y avec un nombre minimal d'étapes consiste à choisir un chemin qui fera en sorte de réduire $x \triangle y$ d'un sommet à chaque étape. Par conséquent, il faut au moins $|x \triangle y|$ étapes pour passer de x en y. ■

Mettre en place la notion de différence symétrique entre deux états x et y va permettre d'assurer l'irréductibilité de notre chaîne (X_t). En effet passer de x en y consiste en à trouver un nombre fini d'opérations d'ajouts et de suppressions de sommets. L'idéal serait de directement ajouter des sommets de y et de supprimer ceux de x. Toutefois on peut tomber dans des cas où on ne peut ni supprimer des sommets de x (le cas où x est un simplexe) ni ajouter des sommets de y. On met alors en emphase plusieurs cas à distinguer :

1. x est n'est pas un simplexe.
   (a) $x \subset y$: On ajoute un élément de $y \setminus x$
   (b) $x \not\subset y$: On supprime un élément de $x \setminus y$
2. x est un simplexe.
   (a) Si on peut ajouter un élément de $y \setminus x$ alors on le fait
   (b) Sinon :
      i. Ajouter un point extérieur à $x \triangle y$
      ii. Supprimer un élémént de $x \setminus y$
      iii. Ajouter un élément de $y \setminus x$

Proposition 2. *On pose la conjecture suivante :* $\exists z \in \Omega$, *tel que* $x \triangle y \supset z \triangle y$, *pour lequel on a* $\delta(x, z) \leq 3$

Cette conjecture nous dit qu'on peut trouver un état transitoire z entre x et y tel qu'en au plus de 3 étapes on peut réduire $x \triangle y$ d'un sommet.