Irréductibilité de X_t

Rado Rakotonarivo, Julien David

24 janvier 2018

Définition 0.0.1. *On définit par $x \bigtriangleup y$ la **différence symétrique** entre x et y telle que*

$$x \bigtriangleup y = \{u \in x : u \notin y \text{ et } v \in y : v \notin x\} \tag{1}$$

On peut voir la différence symétrique de manière ensembliste comme étant $x \bigtriangleup y = x \cup y \setminus x \cap y$ cependant quelques précisions sont à mentionner :

— $x \cup y$ ne constitue pas forcément une enveloppe convexe.

— $|x \cup y| = |x| + |y|$ si $x \cap y = \emptyset$.

— $x \bigtriangleup y$ est maximal quand x et y n'ont aucun sommet en commun.

Lemme 0.0.1. *Le cardinal de $x \bigtriangleup y$ constitue une borne inférieure de la distance entre x et y dans le graphe de X_t, on notera cette distance $\delta(x, y)$ et on a :*

$$\delta(x, y) \geq |x \bigtriangleup y| \tag{2}$$

Démonstration. Considérons x et $y \in \Omega$. Comme $x \bigtriangleup y$ constitue l'ensemble des sommets sur lesquels x diffère de y et réciproquement, passer de x en y avec un nombre minimal d'étapes consiste à choisir un chemin qui fera en sorte de réduire $x \bigtriangleup y$ d'un sommet à chaque étape. Par conséquent, il faut au moins $|x \bigtriangleup y|$ étapes pour passer de x en y. ∎

Remarque 0.0.1. *Pour passer d'un état x à un état y de Ω, l'idéal serait de directement ajouter des sommets de y et de supprimer ceux de x, mais certaines configurations ne le permettent pas. Il faut alors trouver des états transitiores entre x et y.*

Lemme 0.0.2. *Soit $\mathcal{S}$ un* d$-$*simplexe. Le nombre d'arêtes $\nu_{\mathcal{S}}$ de $\mathcal{S}$ est donné par la relation suivante :*

$$\nu_{\mathcal{S}} = \frac{d(d+1)}{2} \tag{3}$$

Démonstration. La preuve est immédiate vu que $\nu_{\mathcal{S}}$ est exactement le nombre de manières de relier deux à deux les $d+1$ sommets de $\mathcal{S}$, i.e. $\nu_{\mathcal{S}} = \binom{d+1}{2} = \frac{d(d+1)}{2}$. ■

Lemme 0.0.3. *Pour tout simplexe $x \in \Omega$ et pour tout $y \in \Omega$. Si on ne peut pas réduire $|x \triangle y|$ en ajoutant un point dans $y \setminus x$, alors il existe un simplexe z, un état transitoire entre x et y, avec $\delta(x,z) = 2$ et $|x \triangle y| = |z \triangle y|$, tel qu'on peut ajouter un point dans $y \setminus z$ dans le chemin de z vers y.*

Démonstration. Considérons un simplexe x et un état y de Ω et $\mathcal{H}$ l'hypercube $[0,k]^d$.

Les seuls cas où l'on ne puisse ajouter aucun point de $y \setminus x$ sont les cas où les éléménts de $y \setminus y$ sont tous des points intérieurs à $Conv(x)$ et/ou des points sur les droites qui supportent les arêtes de x. Pour exemple voir le point (1) de la figure 1. Comme on considère le cas de figure où x est un simplexe, ces droites sont au nombre de $\frac{d(d+1)}{2}$ d'après le lemme 0.0.2.

Puisque x est un simplexe, la seule transition sortante de x ne peut résulter que d'un ajout de point. L'idée est donc de prouver qu'on peut toujours ajouter un point extérieur à $x \triangle y$ et d'enlever ensuite un élément de $x \setminus y$. On se retrouverait alors dans un état z qui est un simplexe avec $\delta(x,z) = 2$.

Deux choses sont à prouver :

1. On peut toujours trouver un point u extérieur à $x \setminus y$
2. On peut toujours ajouter un point de $z \setminus y$ lors de la transition de z vers y

Claim 1 Comme on se trouve dans le cas où l'on ne peut ajouter aucun points de $y \setminus x$, l'idée est de montrer que le nombre de points de $\mathcal{H}$ auquel on a soustrait les points que l'on ne peut ajouter n'est pas nul. En particulier un point nous u suffit.

Prenons u parmi les sommets de l'hypercube. $\mathcal{H}$ a 2^d sommets, au plus $(d+1)$ sommets de $\mathcal{H}$ sont des sommets de x et enfin, au plus 2 sommets de $\mathcal{H}$ peuvent se trouver sur les ν_x droites supportant les arêtes de x. On pose, n_a le nombre de sommets de $\mathcal{H}$ restants. On a :

$$n_a \geq 2^d - (d+1) - d(d+1) \tag{4}$$

On vérifie que (4) est positif non nul dès que $d \geq 6$. Pour $d < 6$, on considère les quantités suivantes :

— $n_h = (k+1)^d$, le nombre de points entiers dans $[0,k]^d$

— n_s le nombre de points entiers dans un simplexe, où

$$n_s \leq \begin{cases} \frac{(k-1)(k-2)}{2} & \text{si } d = 2 \\ \frac{(k+2)(k+1)^{d-1}}{2} & \text{si } d \geq 3 \end{cases}$$

— n_c le nombre de points entiers sur les droites supportant les arêtes du simplexe, avec :

$$n_c = (k+1) + (d-1)k + \binom{d}{2}(k-1)$$

Le nombre de points ≪*non-interdits*≫ n_r est alors donné par la relation $n_r \geq n_h - n_s - n_c$.

■

Lemme 0.0.4. *Pour tout x et $y \in \Omega$, $\exists z \in \Omega$, tel que $|x \triangle y| > |z \triangle y|$, pour lequel on a $\delta(x, z) \leq 3$.*

Démonstration. Considérons x et $y \in \Omega$, tel que $P(x, y) = 0$. Passer de x en y consiste en à trouver un nombre fini d'opérations d'ajouts et de suppressions de sommets ; chaque opération correspond à une transition vers un état z qui doit être à priori plus proche de y. On observe alors les cas suivants :

1. x est n'est pas un simplexe.
   (a) $x \subset y$: On ajoute $v \in y \setminus x$ et $z = x \cup \{v\}$, alors $\delta(x, z) = 1$
   (b) $x \not\subset y$: On supprime $v \in x \setminus y$ et $z = x - \{v\}$, alors $\delta(x, z) = 1$
2. x est un simplexe.
   (a) Si on peut ajouter $v \in y \setminus x$ alors on le fait, alors $z = x \cup \{v\}$ et $\delta(x, z) = 1$
   (b) Sinon :
      i. Ajouter un point u extérieur à $x \triangle y$
      ii. Supprimer un élément de $x \setminus y$
      iii. Ajouter un élément de $y \setminus x$
      Dans ce cas on trouve un z tel que $\delta(x, z) = 3$

D'après le lemme 0.0.3, on peut toujours ajouter un point u extérieur à $x \triangle y$. Dans tous les cas $\delta(x, z) \leq 3$. Voir figure 1.

■

Corollaire 0.0.1. *Pour tout état x et y de Ω, on a :*

$$\delta(x, y) \leq |x| + |y| + 4(d + 1) \tag{5}$$

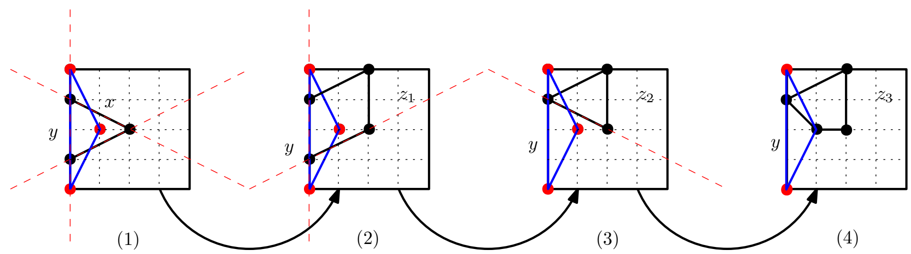

FIGURE 1 – Ici pour x et $y \in [0,4]^2$, avec $|x \bigtriangleup y| = 6$. On trouve un $z_3 \in \Omega$, tel que $|x \bigtriangleup y| > |z_3 \bigtriangleup y| = 5$, pour lequel on a $\delta(x, z_3) = 3$.

Démonstration. La preuve est immédiate en applicant le lemme 0.0.4. Soient x et $y \in \Omega$. Considérons deux simplexes $x^\star$ et $y^\star$ tels que $\delta(x, x^\star) = |x| - (d+1)$, et de même $\delta(y, y^\star) = |y| - (d+1)$. On a la relation suivante :

$$\delta(x, y) \leq \delta(x, x^\star) + \delta(x^\star, y^\star) + \delta(y, y^\star) \tag{6}$$

Comme $x^\star$ est un simplexe, au plus il faudra $3(|x^\star| + |y^\star|) = 3 \times 2(d+1)$ étapes, à la marche, pour atteindre $y^\star$ en partant de $x^\star$. Par conséquent :

$$\delta(x, y) \leq |x| - (d+1) + |y| - (d+1) + 6(d+1) = |x| + |y| + 4(d+1) \tag{7}$$

■

Corollaire 0.0.2. *X_t est une chaîne de Markov irréductible.*

Démonstration. L'irréductibilité découle du corollaire 0.0.1. En effet, pour prouver l'irréductibilité de X_t, il suffit de trouver un r_0 tel que pour tout x et $y \in \Omega$ quand $r \geq r_0$ alors $P^r(x, y) > 0$. On prend alors $r_0 = |x| + |y| + 4(d+1)$. ■