FIAP

MBA+

MBA EM DATA SCIENCE - DTS

MBA+

Linear Algebra for Data Scientists

Prof. Dr.: Enock Godoy de Souza
E-mail: enock.godoy@fiap.com.br

Enock Godoy de Souza

- Doutor em Administração - FEA/USP - 2012.
- *MSc in Analysis, Design and Management of Information Systems*, The London School of Economics and Political Science (LSE), University of London - 2003.
- MBA em Big Data - FIAP - 2022.
- Pós-Graduado em Administração (CEAG) - EAESP/FGV - 2001.
- Bacharel em Ciências de Computação - USP/São Carlos - 1996.
- Professor de pós-graduação desde abril de 2005.
- Coordenador do MBA em Gestão de Projetos da FIAP desde julho de 2014.
- 18 artigos publicados (congressos nacionais e internacionais, revistas nacionais).
- Auditor Fiscal da Receita Estadual na Secretaria da Fazenda-SP desde março de 2010, incluindo cinco anos de experiência como diretor (Desenvolvimento de Sistemas e Escritórios de Projetos).
- Atualmente, atuando como Scrum Master no Centro de Desenvolvimento de Sistemas.
- Mais de 20 anos de experiência profissional (FMC do Brasil, Spectrum Engenharia, ABN-AMRO Bank, Banco Santos, BOVESPA e Secretaria da Fazenda-SP): Gerente de equipes e projetos de TI no mercado financeiro e no setor público.
- Hobbies: Karatê, astronomia, corrida e caminhada.

Contatos do Professor

enock.godoy@fiap.com.br

http://br.linkedin.com/in/egsouza/

QRcode-pro.com

Objetivos da Disciplina

- Teoria dos Conjuntos
- Vetores, Matrizes, Espaços Vetoriais, Determinantes
- Logaritmo
- Introdução ao Cálculo Numérico

REGRAS DE OURO PARA APROVAÇÃO

10

Listas de Exercícios

1,5

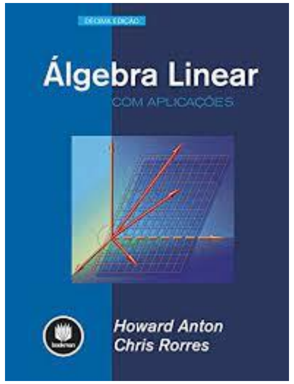
Bônus Individual Kahoot!

0,5 ponto por dia para os 3 maiores acertos.

A FAZER	FAZENDO	FEITO
Teoria dos Conjuntos		
Sistemas Lineares		
Vetores e Matrizes		
Operações com Matrizes		
Inversas e Transpostas		
Espaços Vetoriais e Subespaços		
Determinantes		
Aplicações		
Logaritmo		
Introdução ao Cálculo Numérico		

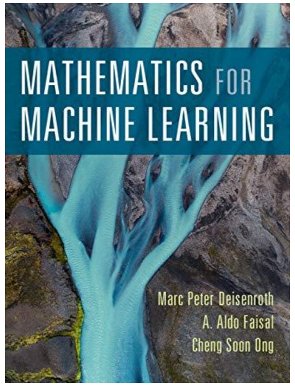
Materiais de Estudo (complementar)

FEITOSA, Hércules de Araújo; NASCIMENTO, Mauri Cunha do; ALFONSO, Alexys Bruno. **Teoria dos Conjuntos.** 1ª ed. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda.: setembro/2021.



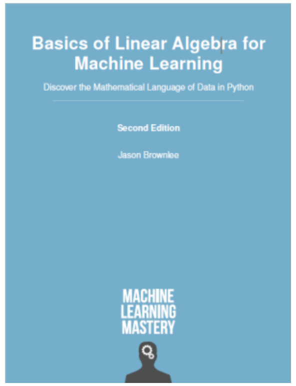
ANTON, Howard; RORRES, Chris. Álgebra Linear com Aplicações. 10ª Edição. Porto Alegre: Bookman, 2012.

Materiais de Estudo (complementar)



DEISENROTH, Marc Peter; FAISAL, A. Aldo; ONG, Cheng Soon. ***Mathematics for Machine Learning.*** Cambridge University Press: Abril/2020.

https://mml-book.github.io/book/mml-book.pdf



BROWNLEE, Jason. ***Basics of Linear Algebra for Machine Learning:*** *Discover the Mathematical Language of Data in Python.* 2ª ed. MachineLearningMastery.com: 2021.

Sites

- Curso de Álgebra Linear do MIT:

  https://ocw.mit.edu/courses/mathematics/18-06-linear-algebra-spring-2010/video-lectures/

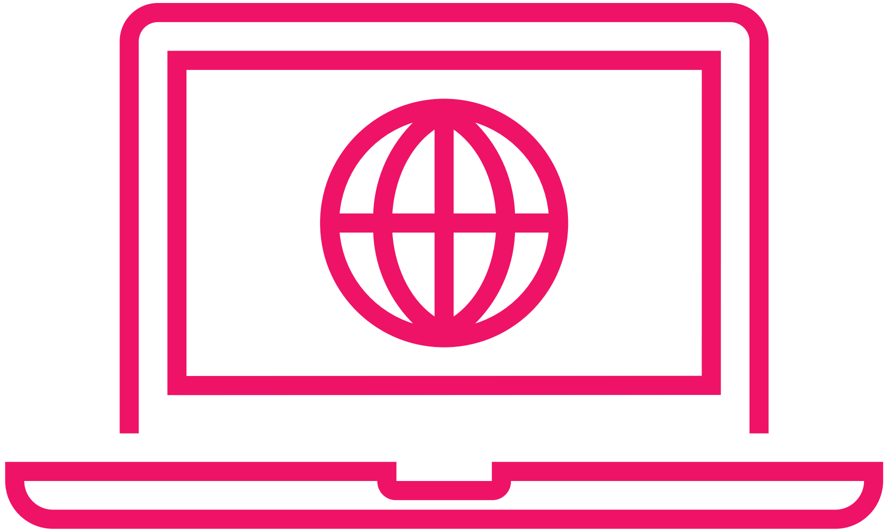
- Unicamp:

  https://www.ime.unicamp.br/~marcia/AlgebraLinear/

  http://www.ime.unicamp.br/~pulino/ALESA/

- USP:

  https://www.ime.usp.br/~pplopes/verao



A FAZER

- Teoria dos Conjuntos
- Sistemas Lineares
- Vetores e Matrizes
- Operações com Matrizes
- Inversas e Transpostas
- Espaços Vetoriais e Subespaços
- Determinantes
- Aplicações
- Logaritmo
- Introdução ao Cálculo Numérico

FAZENDO

FEITO

Por que estudar Teoria dos Conjuntos?

FIAP

- A **Teoria dos Conjuntos** é a base para a compreensão dos conjuntos numéricos naturais, inteiros, racionais, reais e complexos;
- Em boa parte de seu estudo e trabalho em **Ciência de Dados**, vocês estarão aplicando algoritmos para solucionar problemas com variáveis numéricas pertencentes a algum dos conjuntos mencionados acima;
- O conhecimento da Teoria dos conjuntos é fundamental para entender **Cálculo**, **Estatística**, ***Machine Learning*** e ***Deep Learning***;
- O conhecimento da Teoria dos conjuntos é importante para entender o próximo assunto desta disciplina: **Álgebra Linear**.

O Que Precisamos Saber Sobre Conjuntos?

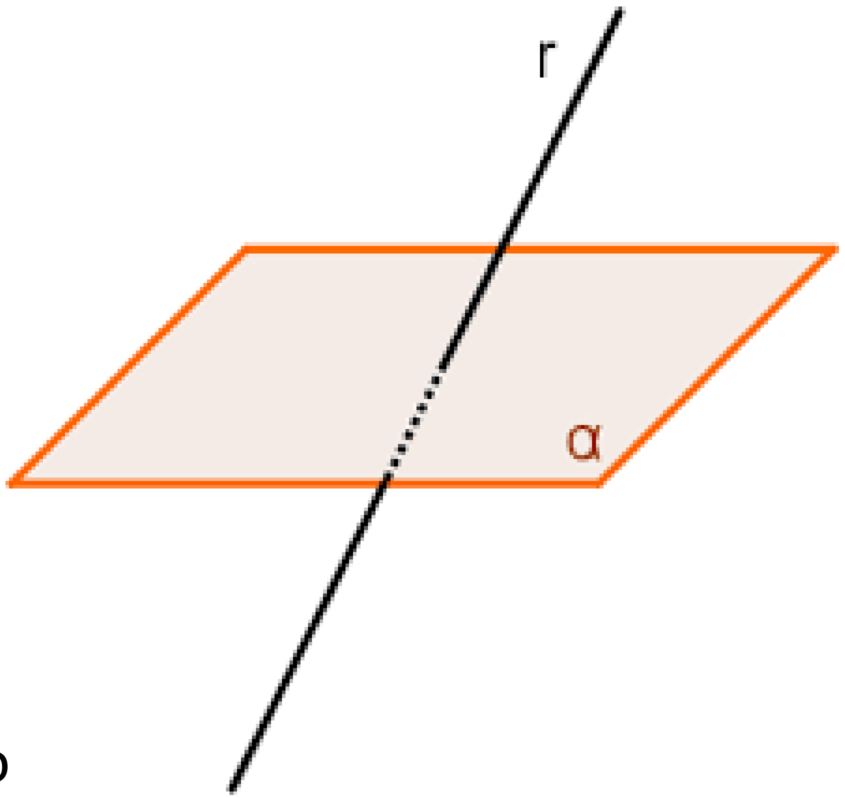
FIAP

- Definição (entender o que denominamos conjunto, do ponto de vista da Teoria dos Conjuntos);
- Princípios;
- Relações e operações entre conjuntos;
- Funções;
- Conjuntos numéricos.

- Para esta disciplina, optamos por basear a teoria apresentada no sistema de Zarmelo e Fraenkel, acrescido do axioma da escolha (indicado na teoria pela letra C), denominado ZFC. Assim, esse sistema é indicado na literatura como **ZFC**.

Conjunto: Definição

- Um **conjunto é uma coleção de objetos** e esses objetos são denominados de **membros** ou **elementos** do conjunto;
- No sistema ZFC, tudo é conjunto, inclusive os membros dos conjuntos;
- A Matemática está repleta de exemplos de conjuntos de conjuntos:
  - ✓ Um reta é um conjunto de pontos;
  - ✓ O plano é um conjunto de retas;
  - ✓ O conjunto de todas as retas de um plano é um exemplo natural de um conjunto de conjuntos de pontos.



Fonte: Adaptado de Feitosa, Nascimento e Alfonso (2021, p. 4)

Princípios

- **Extensionalidade**: dois conjuntos são iguais quando têm os mesmos elementos;
- **Abstração** (ou compreensão): para toda propriedade existe um conjunto cujos membros são as entidades que satisfazem a dada propriedade;
  - ✓ Exemplo: no conjunto de alunos da classe, a propriedade de ser torcedor de um time de futebol específico;

- **Axioma da escolha**: o produto cartesiano de uma coleção não vazia de conjuntos não vazios é uma coleção não vazia.
  - ✓ Exemplo: se separarmos a classe em grupos (conjuntos) não vazios: (pessoas que não torcem para nenhum time, torcedores do time A, torcedores do time B, etc.), é possível criar um grupo (conjunto) contendo uma pessoa de cada grupo.

Fonte: Adaptado de Feitosa, Nascimento e Alfonso (2021, p. 11,12)

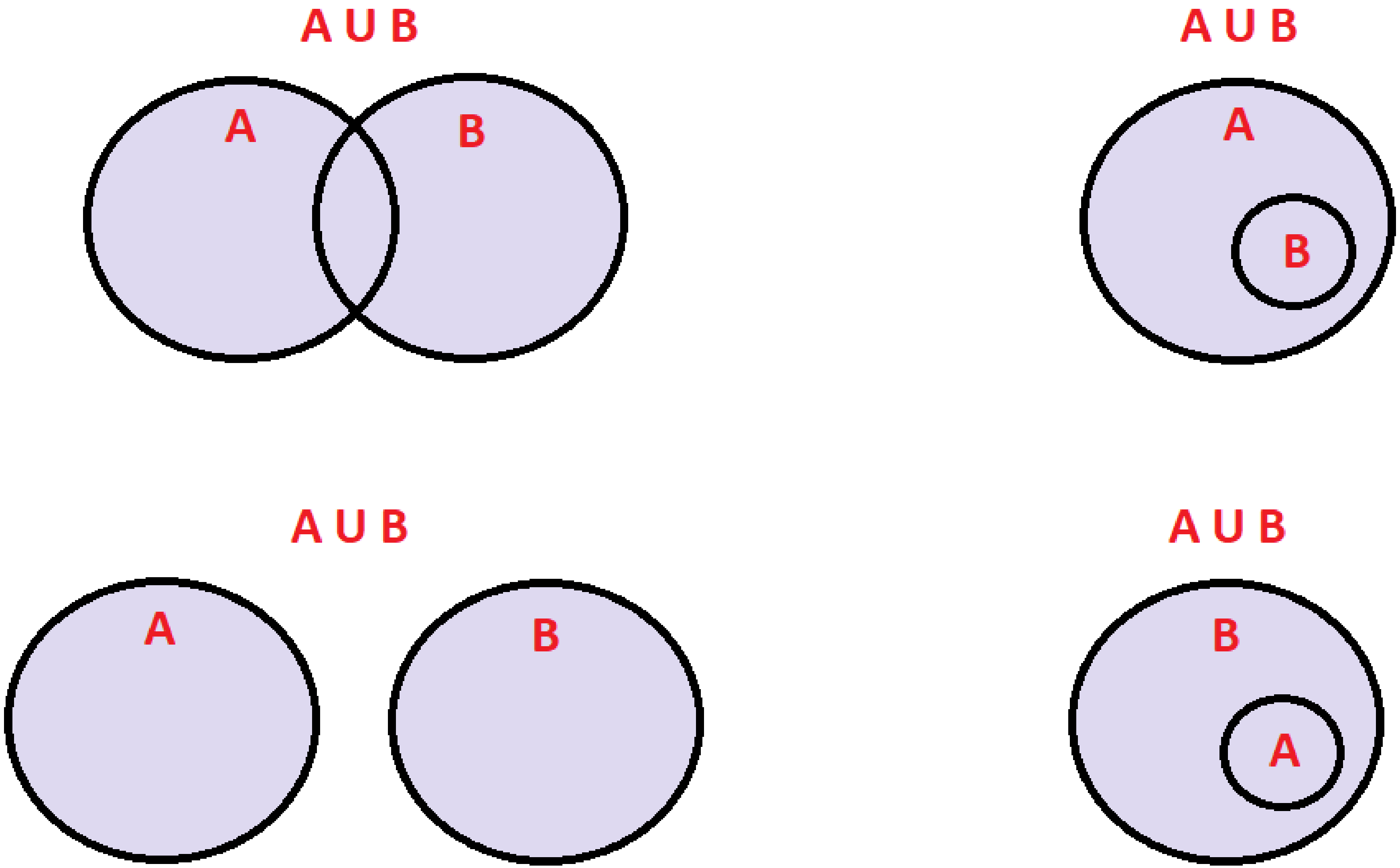
Relações e Operações entre Conjuntos

- Relações:
  - ✓ **União**;
  - ✓ **Intersecção**;
  - ✓ **Subtração**;
  - ✓ **Complementar**.

- Operações:
  - ✓ **Pertinência**: $\in$ e $\notin$;
  - ✓ **Continência**: $\supset$, $\subset$,$\not\supset$, $\not\subset$.

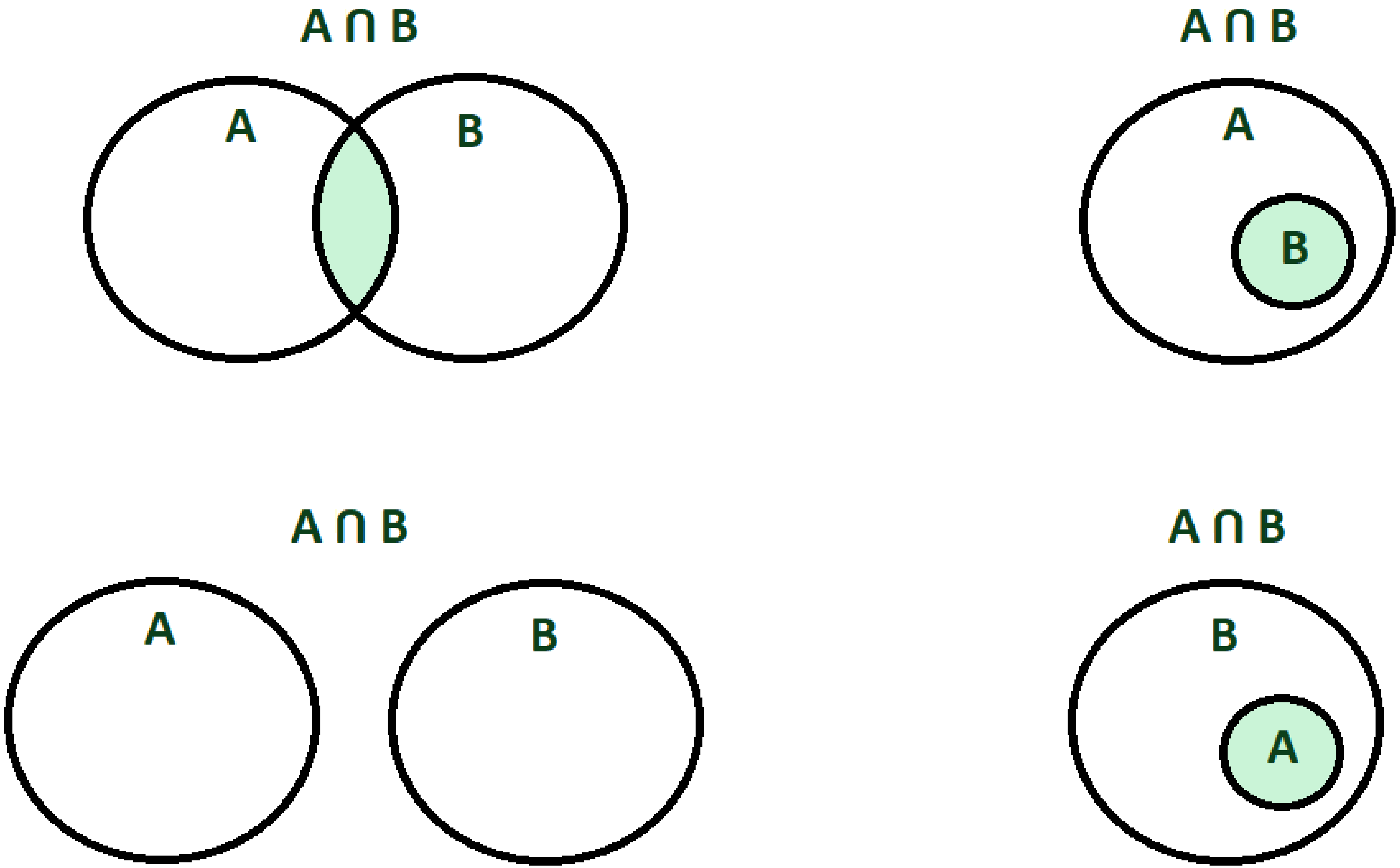
Fonte: Adaptado de Feitosa, Nascimento e Alfonso (2021, p. 36,37)

Diagramas de Venn: União



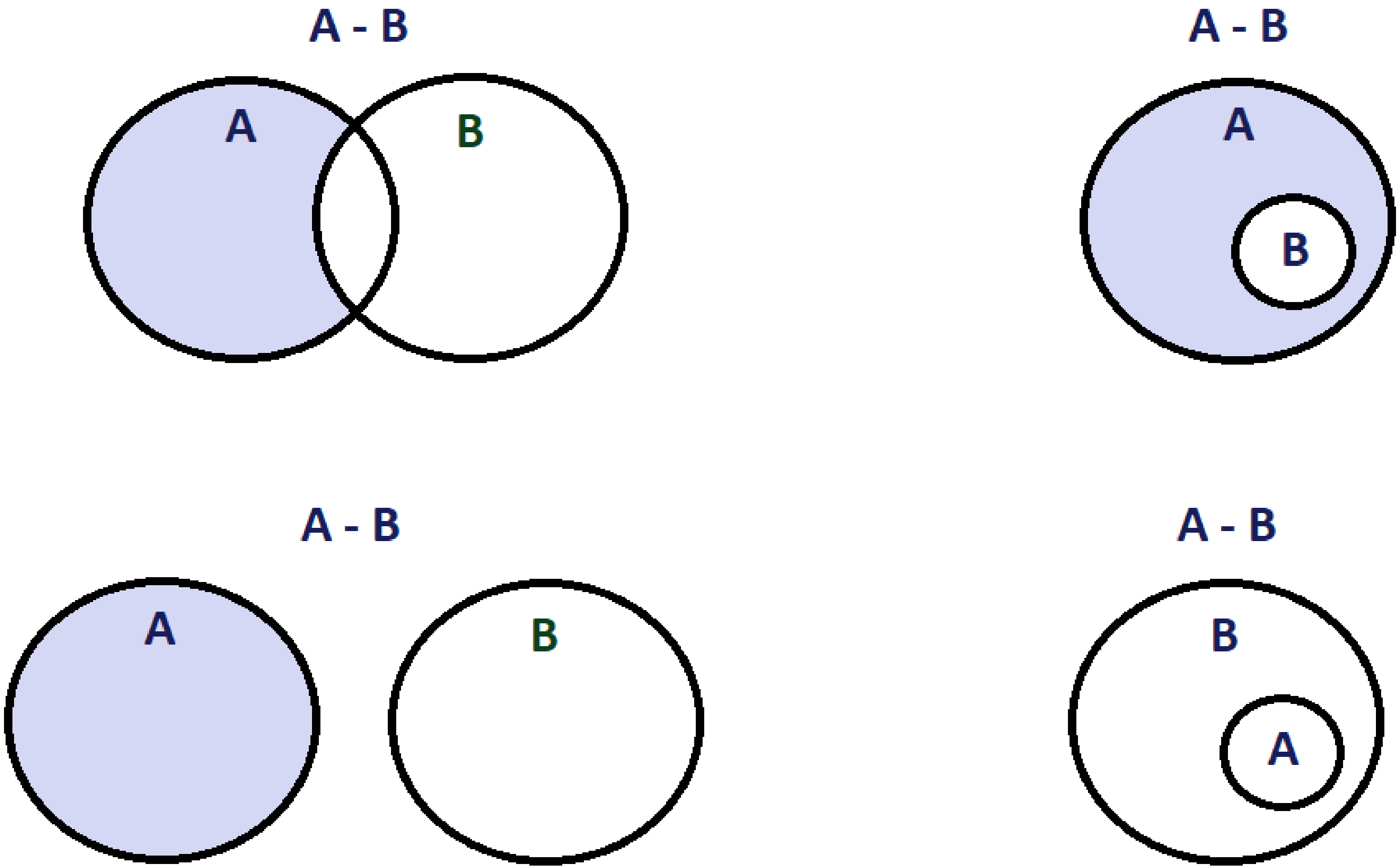
Fonte: Adaptado de Feitosa, Nascimento e Alfonso (2021, p. 39)

Diagramas de Venn: Intersecção



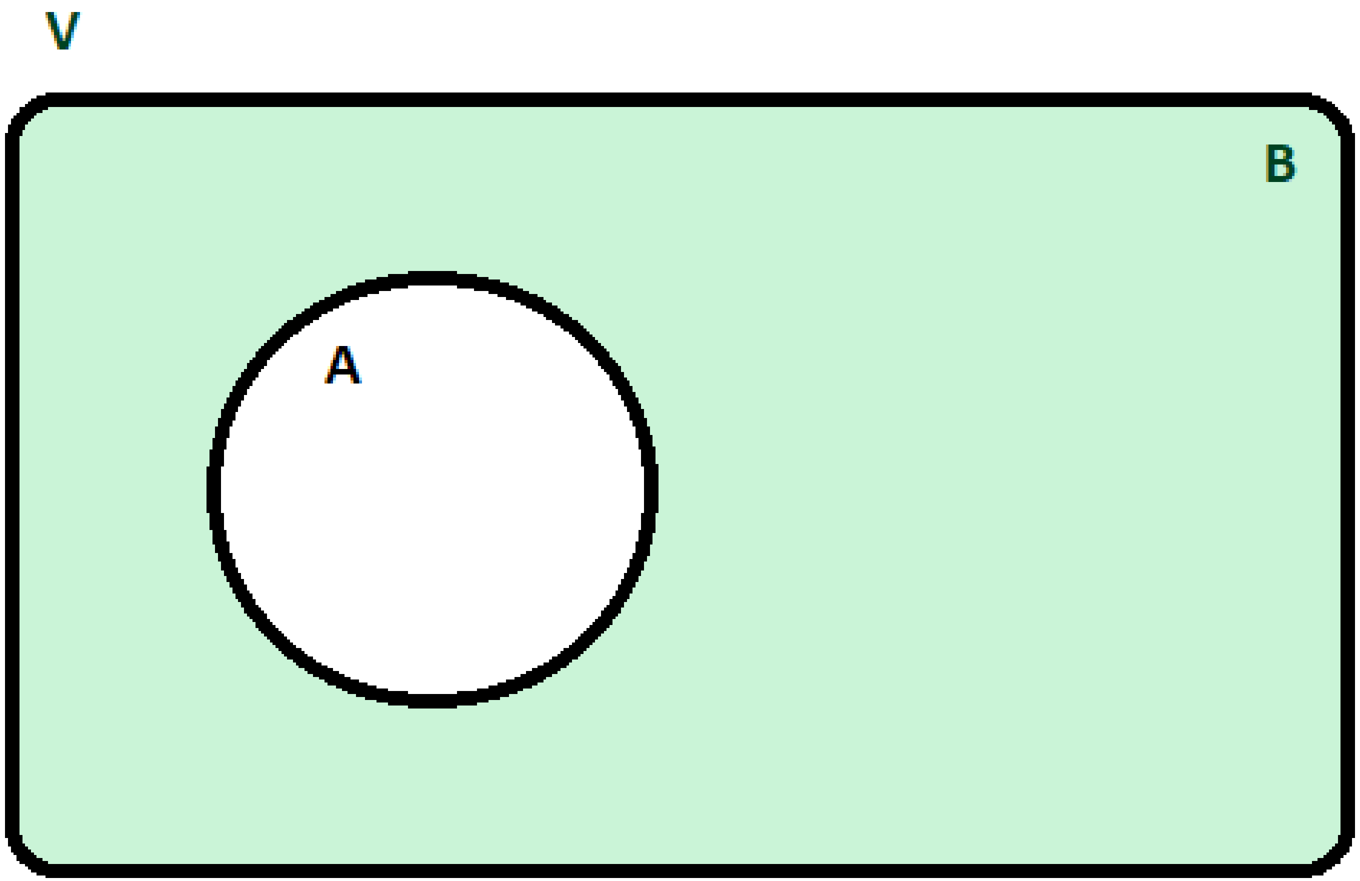
Fonte: Adaptado de Feitosa, Nascimento e Alfonso (2021, p. 39)

Diagramas de Venn: Subtração



Fonte: Adaptado de Feitosa, Nascimento e Alfonso (2021, p. 39)

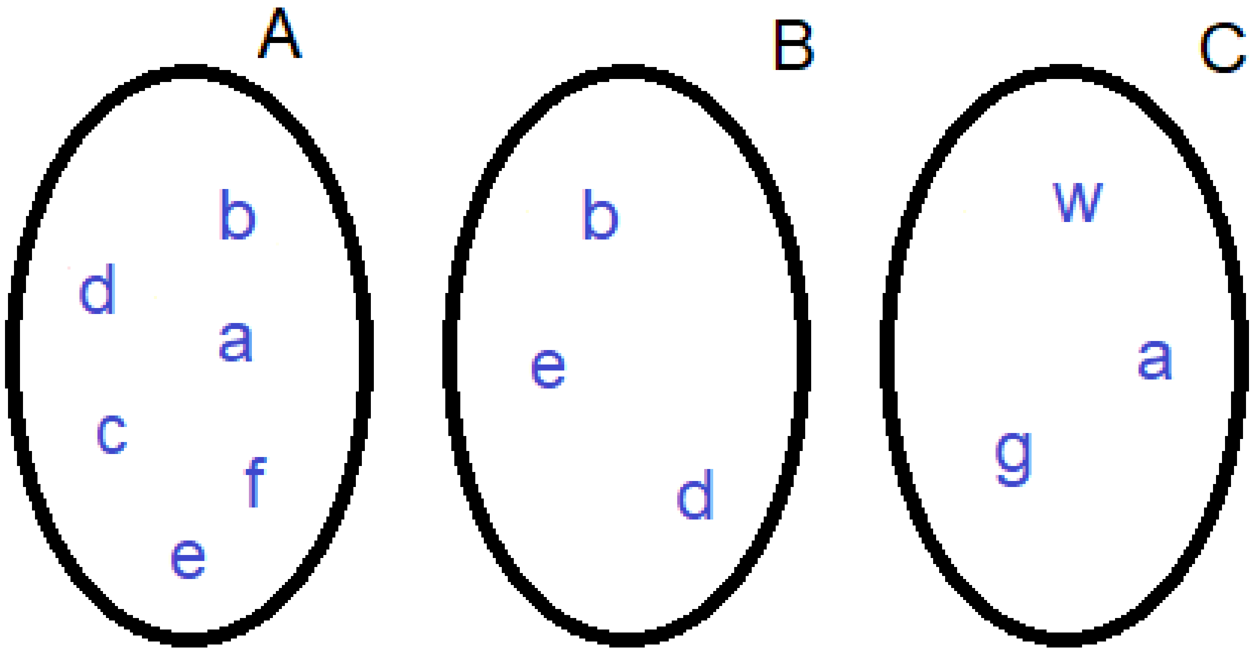
Diagrama de Venn: Complementar



O complementar B é formado por todo elemento que não pertence ao conjunto A em relação ao conjunto V, em que ele está contido.

Fonte: Adaptado de Feitosa, Nascimento e Alfonso (2021, p. 37)

Operações



- $a \in A$
- $a \notin B$
- $a \in C$
- $B \subset A$
- $A \supset B$
- $A \not\supset C$
- $C \not\subset B$

Quiz

- Linda é uma mulher de 31 anos, solteira, extrovertida e brilhante. Ela se graduou em filosofia. Como estudante, ela era profundamente preocupada com assuntos relacionados à discriminação e justiça social, e também participou de protestos antinucleares.
- Classifique na ordem de mais provável:
  - ✓ Linda é uma professora em uma escola primária;
  - ✓ Linda trabalha em uma livraria e faz aulas de yoga;
  - ✓ Linda é ativa no movimento feminista;
  - ✓ Linda é uma assistente social psiquiátrica;
  - ✓ Linda é membro de uma Ong chamada Liga das Mulheres Eleitoras;
  - ✓ Linda trabalha como caixa em uma agência bancária;
  - ✓ Linda é uma vendedora de seguros;
  - ✓ Linda trabalha como caixa em uma agência bancária e é ativa no movimento feminista.

Fonte: Adaptado de Kahneman (2011, p. 37)

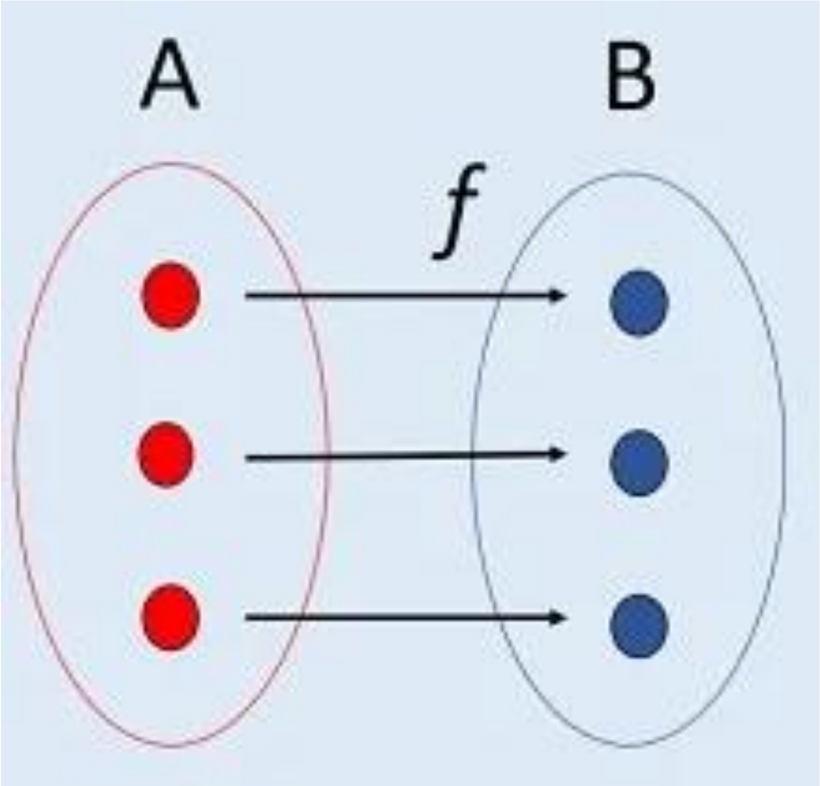
Quiz

- Qual alternativa é mais provável?
  - ✓ Linda trabalha como caixa em uma agência bancária;
  - ✓ Linda trabalha como caixa em uma agência bancária e é ativa no movimento feminista.

Fonte: Adaptado de Kahneman (2011, p. 37)

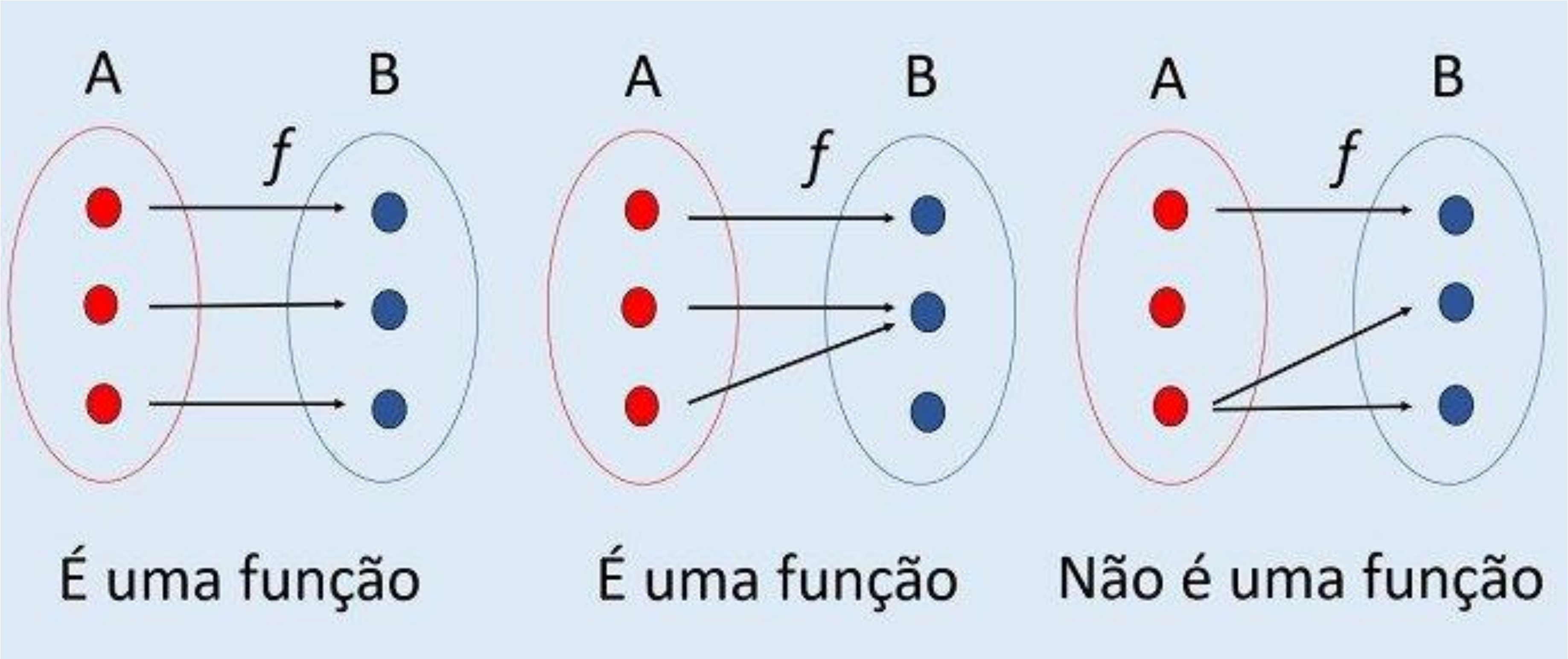
Funções

- Uma função é uma relação φ de A em B tal que Dom (φ) = A e para cada x ∈ Dom (φ) existe um único y, de modo que (x, y) ∈ φ;
- O conjunto B é o contradomínio de φ.
- Nesse caso, dizemos que φ é uma função de A em B. Assim, uma função φ de A em B é uma relação que satisfaz as seguintes condições:
  - ✓ $\varphi \subset A \times B$;
  - ✓ Para todo $x \in A$, existe $y \in B$, de maneira que $(x,y) \in \varphi$;
  - ✓ Se $(x,y) \in \varphi$ e $(x,z) \in \varphi$, então $y = z$.



Fonte: Adaptado de Feitosa, Nascimento e Alfonso (2021, p. 22,23)

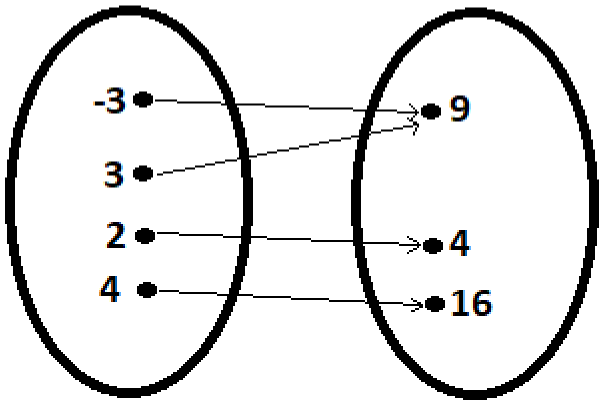
Funções



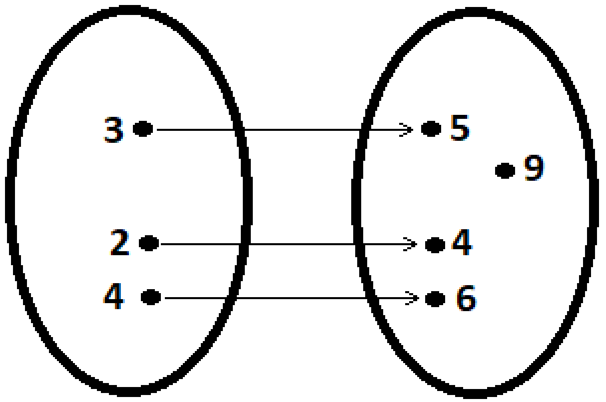
Fonte: https://www.todamateria.com.br/funcao/

Tipos de Funções

- **Sobrejetiva (sobrejetora)**: o contradomínio é igual ao conjunto imagem.
  - ✓ Todo elemento de B é imagem de pelo menos um elemento de A.



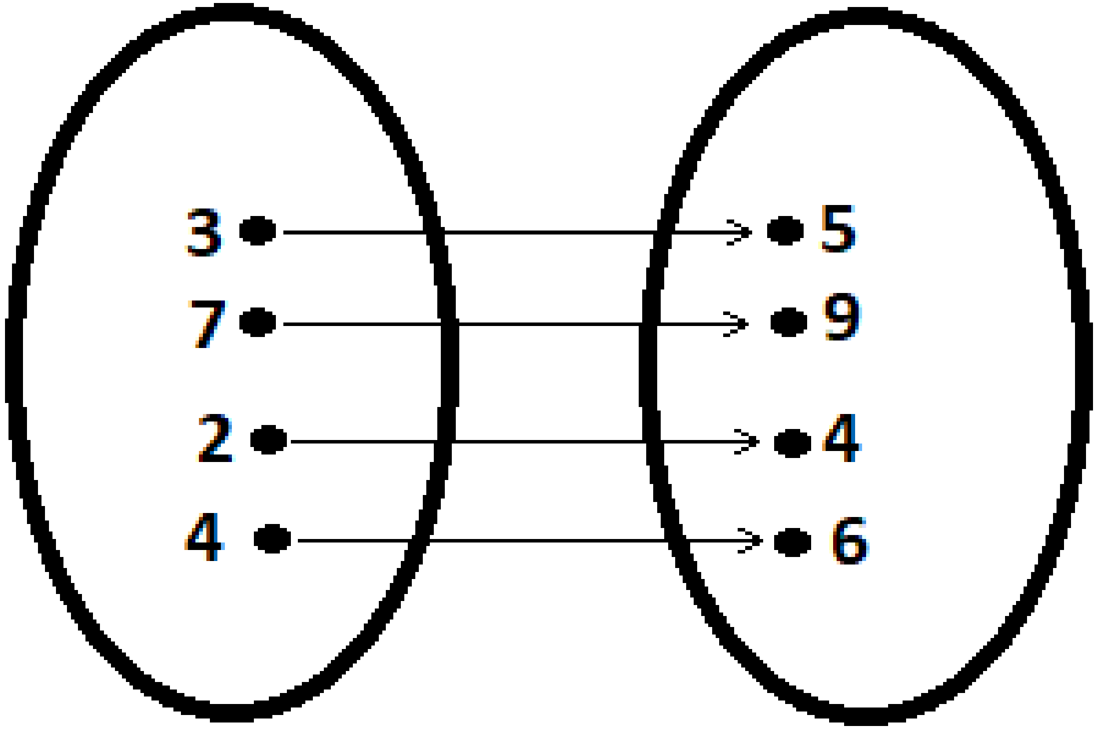
- **Injetiva (injetora)**: todos os elementos de A possuem correspondentes distintos em B e nenhum dos elementos de A compartilham de uma mesma imagem em B.
  - ✓ Podem existir elementos em B que não estejam relacionados a nenhum elemento de A.



Fonte: Adaptado de Feitosa, Nascimento e Alfonso (2021, p. 75)

Tipos de Funções

- **Bijetiva (bijetora)**: é ao mesmo tempo sobrejetiva e injetiva.

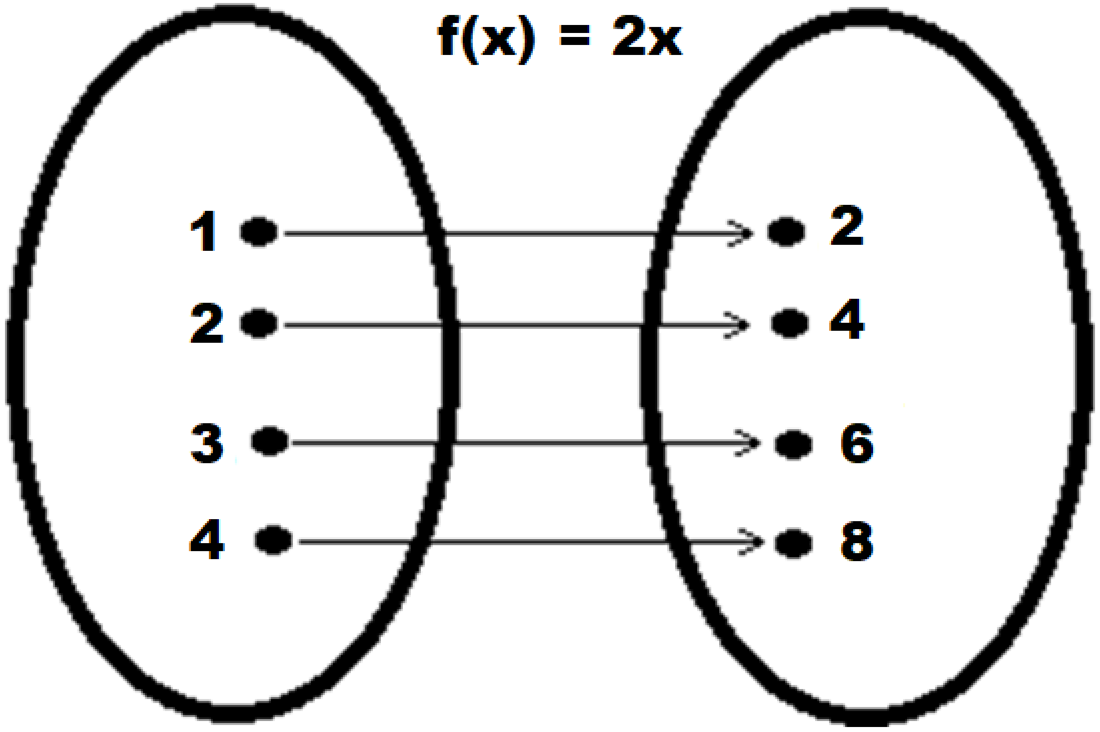


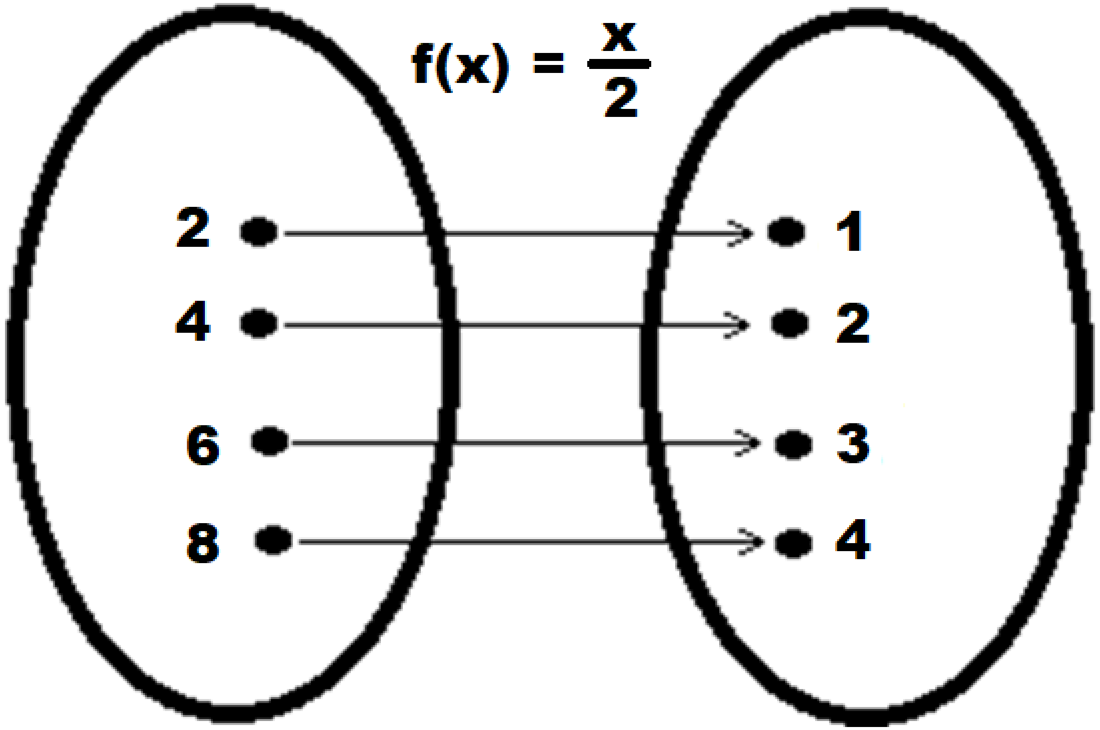
- Em geral, a relação inversa de uma função não é uma função.

- **Para existir uma função inversa, é necessário que a função original seja bijetiva.**

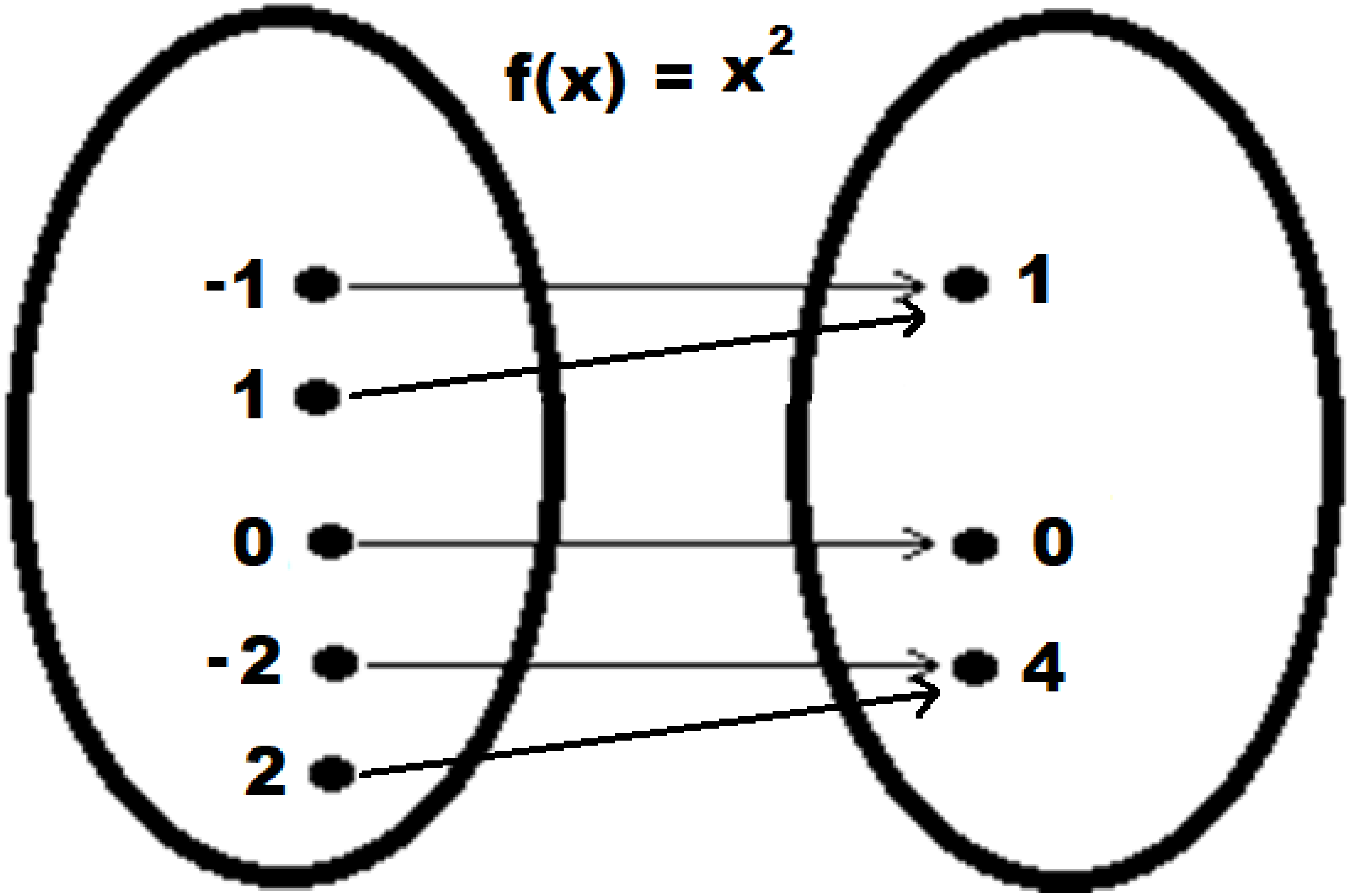
Fonte: Adaptado de Feitosa, Nascimento e Alfonso (2021, p. 76)

Exemplo bijetora: f(x) = 2x



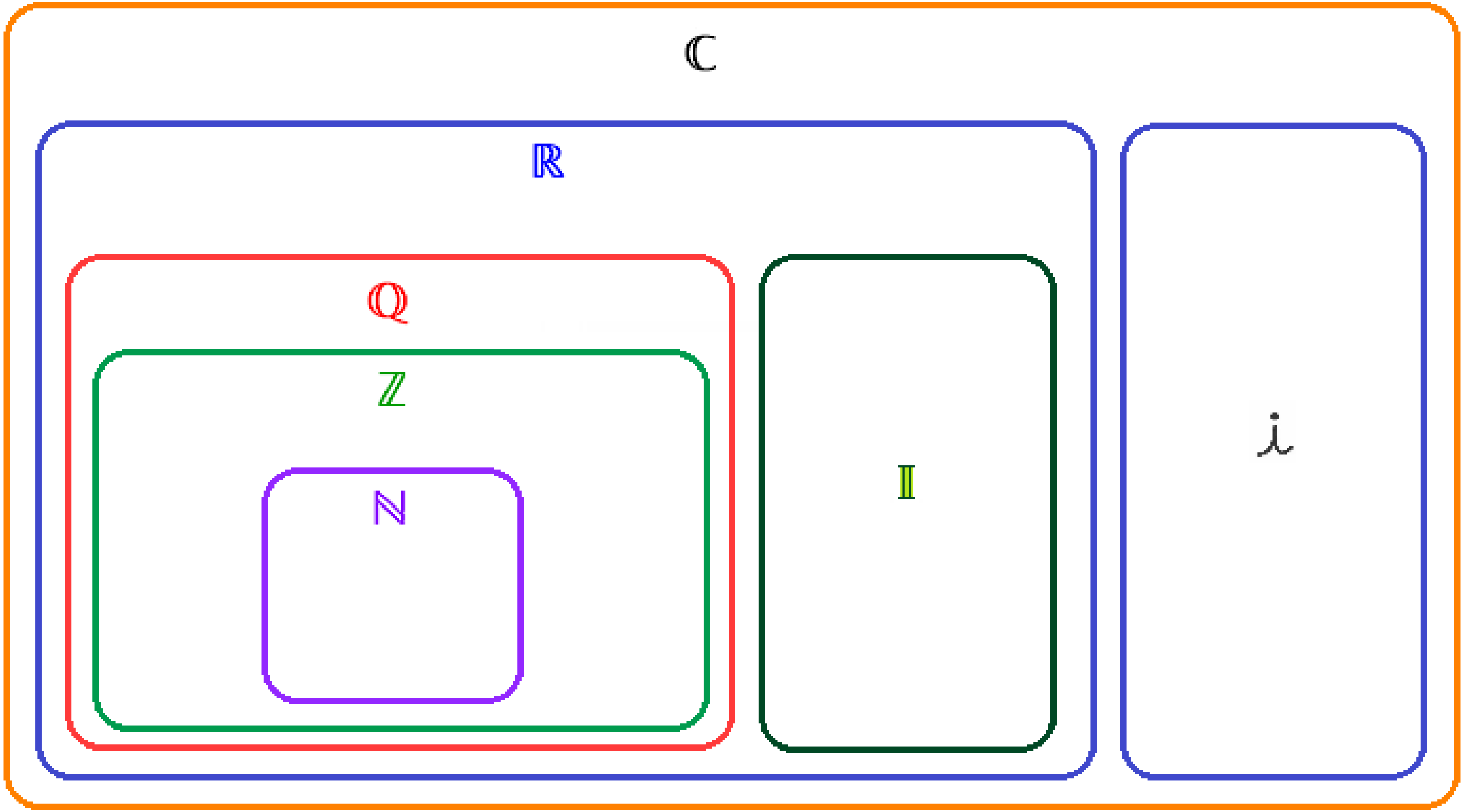


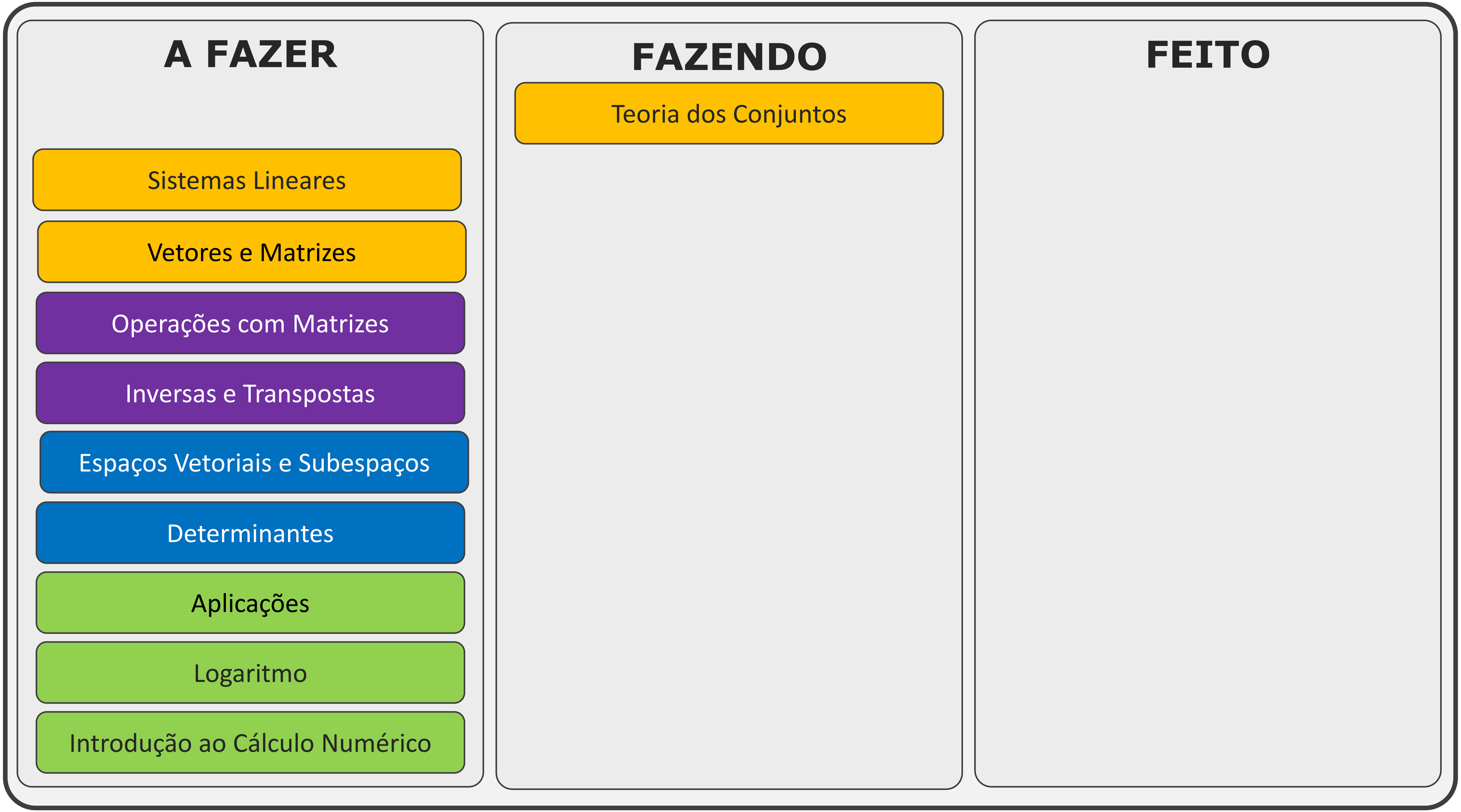
Exemplo não-injetora: $f(x) = x^2$



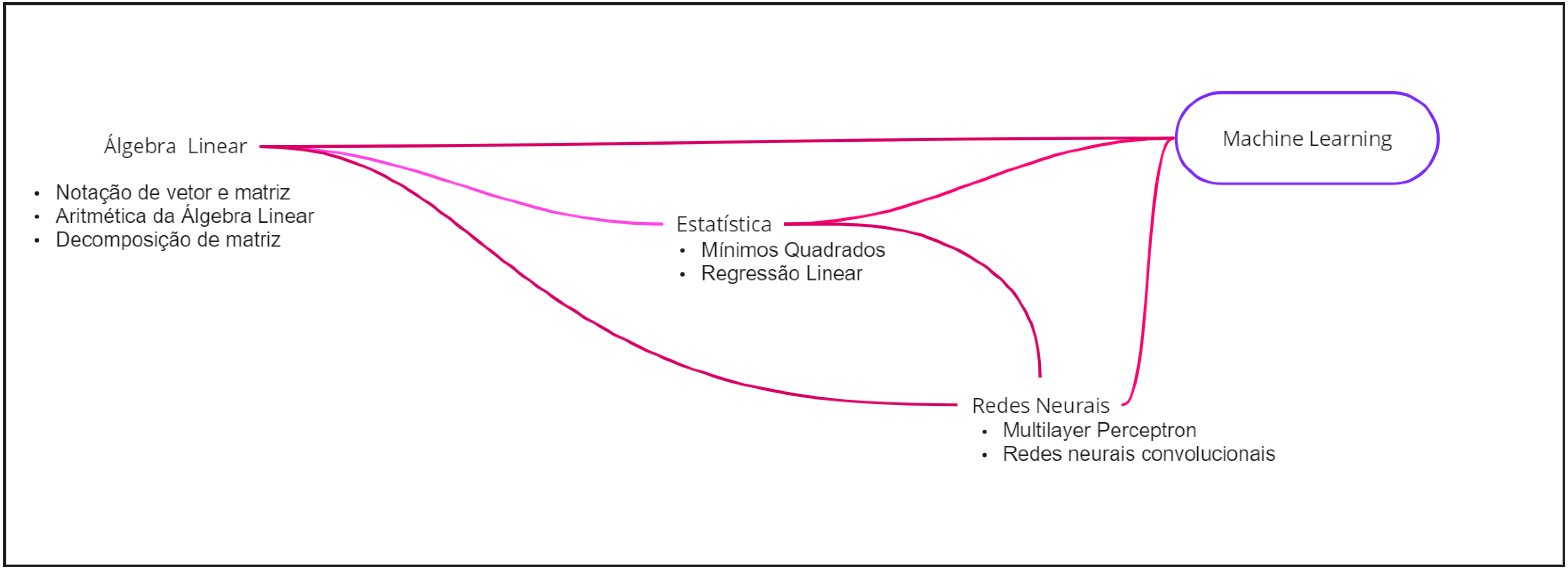
Essa função possui elementos distintos do domínio com a mesma imagem no contradomínio. Portanto, não é injetora.

Conjuntos Numéricos



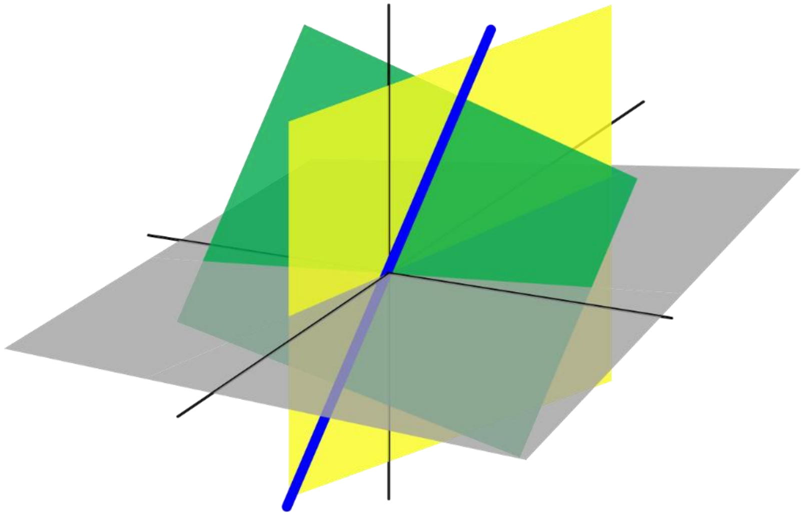

A FAZER
Sistemas Lineares
Vetores e Matrizes
Operações com Matrizes
Inversas e Transpostas
Espaços Vetoriais e Subespaços
Determinantes
Aplicações
Logaritmo
Introdução ao Cálculo Numérico
FAZENDO
Teoria dos Conjuntos
FEITO

Por que estudar Álgebra Linear?



Álgebra Linear

- **Álgebra:** Uso de símbolos abstratos para representar objetos matemáticos (números, linhas, matrizes, transformações) e o estudo das regras para combinar esses símbolos (DERBYSHIRE, 2003).



- **Álgebra linear** é o estudo de vetores e certas regras para manipular vetores (DEISENROTH; FAISAL; ONG, 2020).

- Os **sistemas de equações lineares** desempenham um papel central na álgebra linear. Muitos problemas podem ser formulados como sistemas de equações lineares, e a álgebra linear nos dá as ferramentas para resolvê-los (DEISENROTH; FAISAL; ONG, 2020).

Sistemas de Equações Lineares

- Considere o seguinte sistema de equações, com duas equações e duas incógnitas:

$$1x + 2y = 3$$

$$4x + 5y = 6$$

- Observação 1: esses sistemas são chamados de lineares, pois são formados por equações lineares;
- Observação 2: uma equação linear pode ter uma ou mais variáveis, mas, cada variável tem expoente igual a um (não está elevada a número diferente de 1) e não existem multiplicações ou divisões entre as variáveis.

Fonte: Strang (2010, p. 1)

Sistemas de Equações Lineares

- Substituição: subtraia 4 vezes a primeira equação da segunda.

$$4 \text{ vezes } (1x + 2y = 3) \quad \rightarrow \quad 4x + 8y = 12$$

$$\left.\begin{array}{l} 4x + 5y = 6 \\ -4x - 8y = -12 \end{array}\right\}$$

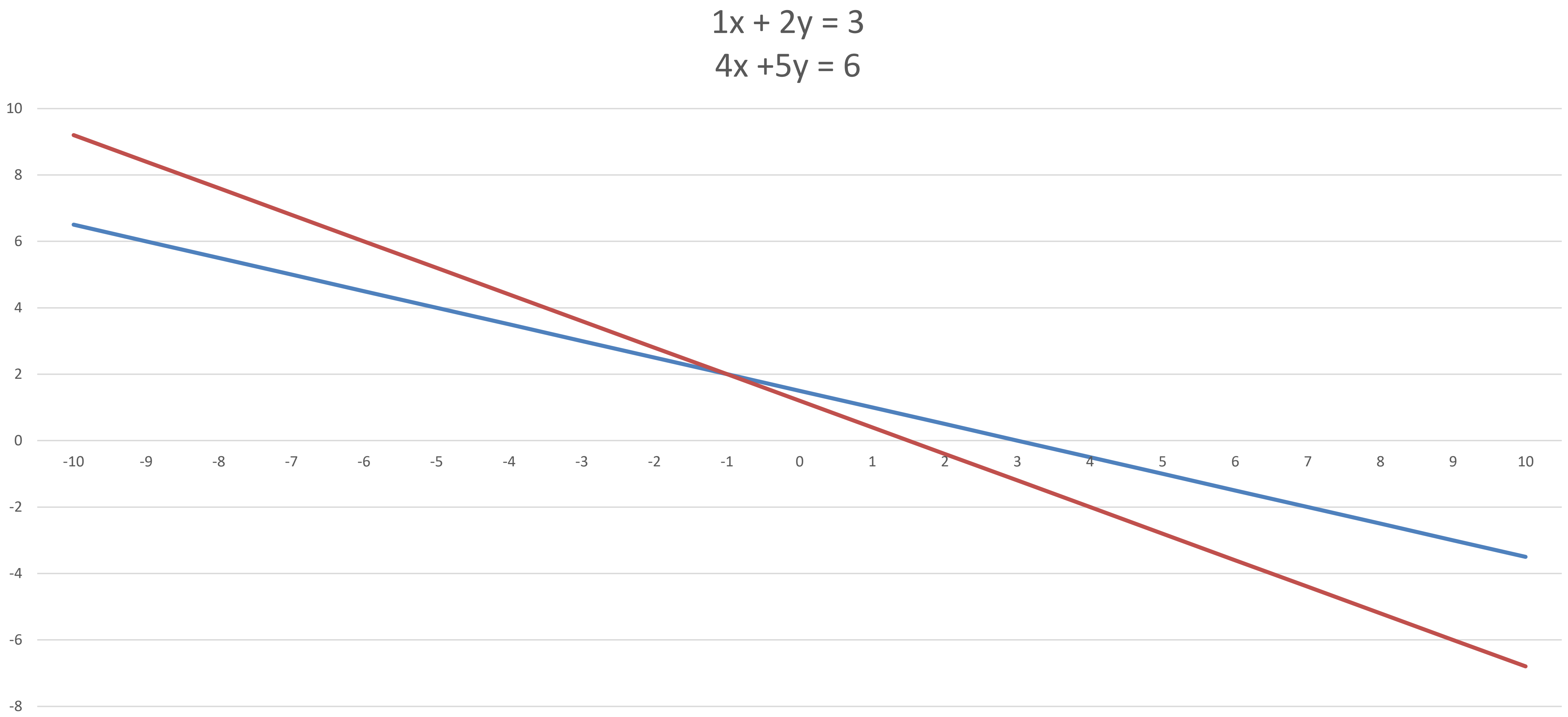
$$-3y = -6 \quad \rightarrow \quad y = 2$$

- Substituição:

$$1x + 2y = 3 \quad \rightarrow \quad 1x + 4 = 3 \quad \rightarrow \quad x = 3 - 4 \quad \rightarrow \quad x = -1$$

Fonte: Strang (2010, p. 1)

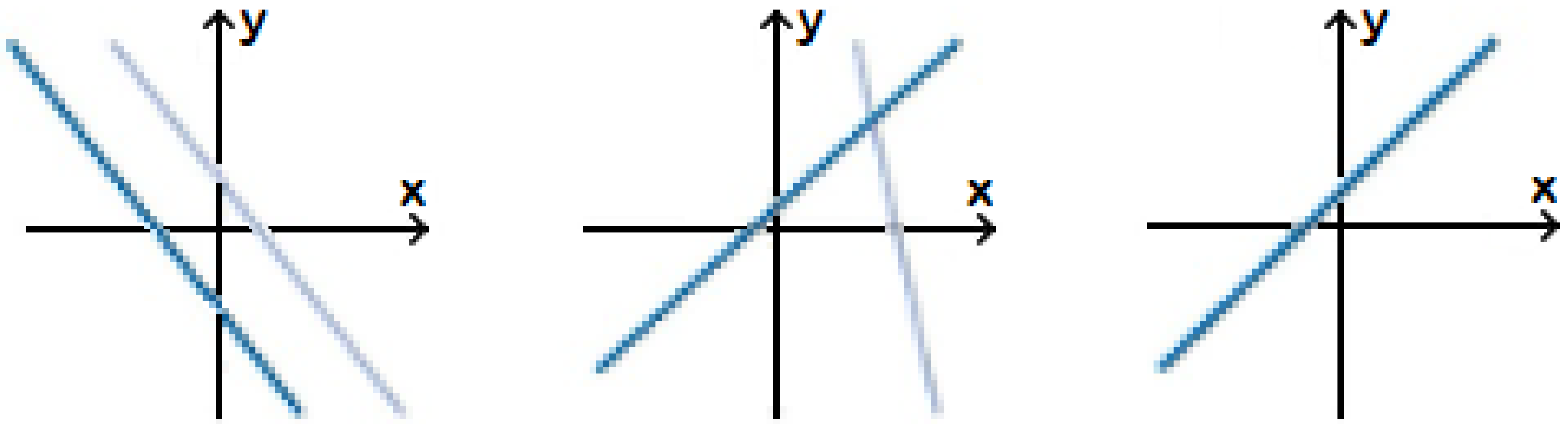
Sistemas de Equações Lineares



Fonte: Strang (2010, p. 1)

Sistemas de Equações Lineares

- Duas equações e duas incógnitas:



Nenhuma solução

Uma solução

Uma infinidade de soluções (retas coincidentes)

Fonte: Anton; Rorres (2012, p. 4)

Sistemas de Equações Lineares

- Três equações e Três incógnitas:

Nenhuma solução
(três planos paralelos,
sem intersecção comum)

Nenhuma solução
(dois planos paralelos,
sem intersecção comum)

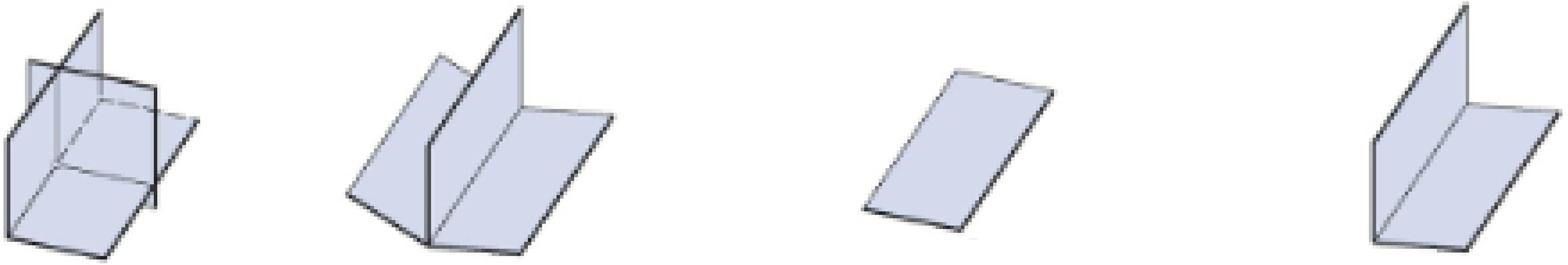
Nenhuma solução
(sem intersecção comum)

Nenhuma solução
(dois planos coincidentes,
paralelos ao terceiro,
sem intersecção comum)

Fonte: Anton; Rorres (2012, p. 4)

Sistemas de Equações Lineares

- Três equações e Três incógnitas:



Uma solução (a intersecção é um ponto)

Uma infinidade de soluções (a intersecção é uma reta)

Uma infinidade de soluções (todos os planos coincidem; a intersecção é um plano)

Uma infinidade de soluções (dois planos coincidentes; a intersecção é uma reta)

- Todo sistema de equações lineares tem zero, uma ou uma infinidade de soluções. Não existem outras possibilidades.

Fonte: Anton; Rorres (2012, p. 4)

A FAZER	FAZENDO	FEITO
Vetores e Matrizes	Sistemas Lineares	Teoria dos Conjuntos
Operações com Matrizes		
Inversas e Transpostas		
Espaços Vetoriais e Subespaços		
Determinantes		
Aplicações		
Logaritmo		
Introdução ao Cálculo Numérico		

Sistemas de Equações Lineares

- À medida que cresce o número de equações e de incógnitas num sistema linear, cresce também a complexidade da álgebra envolvida em sua resolução.
- As contas que precisamos fazer podem ficar mais tratáveis **simplificando a notação** e padronizando os procedimentos.
- Por exemplo, mantendo na memória a localização das somas, das variáveis e das igualdades no sistema linear:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

Fonte: Anton; Rorres (2012, p. 6)

Sistemas de Equações Lineares

- Podemos abreviar a escrita do sistema, escrevendo somente a tabela retangular de números:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

- Denominada **matriz aumentada** do sistema.

Fonte: Anton; Rorres (2012, p. 6)

Sistemas de Equações Lineares

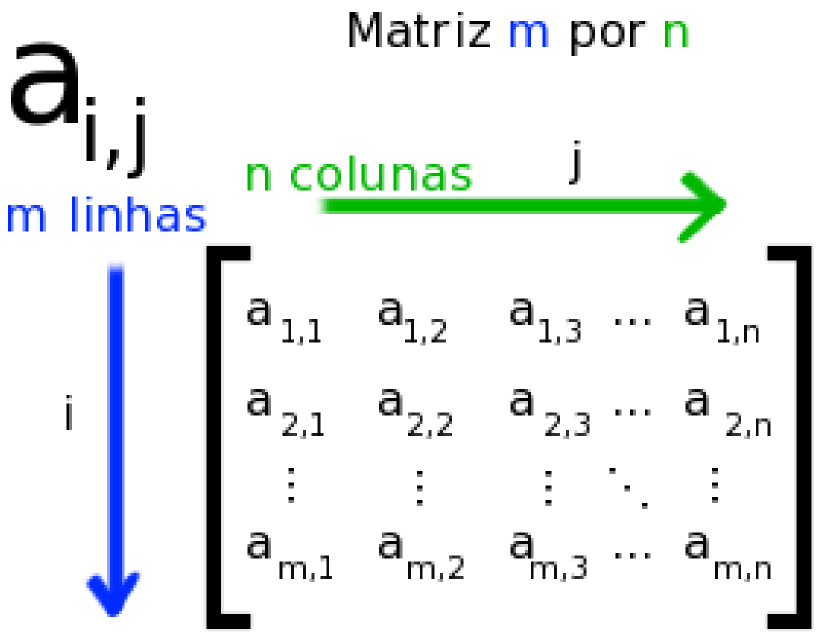
- Por exemplo, a matriz aumentada do sistema de equações:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 9 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 6x_2 - 5x_3 &= 0 \end{aligned} \qquad \text{é} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

Fonte: Anton; Rorres (2012, p. 6)

Matriz

- Um definição simples de matriz é o de uma **coleção retangular de números** (Anton; Rorres, 2012, p. 6).
- Matriz é um conjunto de números reais (ou complexos) ou elementos dispostos ordenadamente, em forma retangular (Bregalda; Oliveira; Bornstein, 1988, p.17).



Resolução de um Sistema de Equações

- O método básico de resolver um **sistema de equações lineares** é efetuar operações algébricas no sistema que não alterem o seu conjunto de soluções e que produzam uma sucessão de sistemas cada vez mais simples, até que se possa alcançar um ponto em que se possa decidir se o sistema é consistente e, se for, quais são suas soluções.
- As operações típicas são as seguintes:
  - ✓ Multiplicar uma equação por uma constante não nula;
  - ✓ Trocar duas equações entre si;
  - ✓ Somar uma constante vezes uma equação a uma outra equação.

Fonte: Anton; Rorres (2012, p. 7)

Resolução de um Sistema de Equações

- Como as linhas (horizontais) de uma matriz aumentada correspondem às equações no sistema associado, essas três operações correspondem às seguintes operações nas linhas da matriz aumentada:
  - ✓ Multiplicar uma linha inteira por uma constante não nula;
  - ✓ Trocar duas linhas entre si;
  - ✓ Somar uma constante vezes uma linha a uma outra linha.

- Essas operações são denominadas **operações elementares com linhas** de uma matriz.

Fonte: Anton; Rorres (2012, p. 7)

Resolução de um Sistema de Equações

- Basicamente, a partir das operações elementares com linhas, transformamos a matriz original em uma matriz equivalente escalonada ou escalonada reduzida:

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ 2x + 4y - 3z &= 1 \\ 3x + 6y - 5z &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ y - \tfrac{7}{2}z &= -\tfrac{17}{2} \\ -\tfrac{1}{2}z &= -\tfrac{3}{2} \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x &= 1 \\ y &= 2 \\ z &= 3 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Fonte: Anton; Rorres (2012, p. 7,8)

Resolução de um Sistema de Equações

- Na Eliminação Gaussiana ou Eliminação de Gauss, aplicamos as operações básicas para transformar a matriz original em uma matriz equivalente escalonada:

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ 2x + 4y - 3z &= 1 \\ 3x + 6y - 5z &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ y - \tfrac{7}{2}z &= -\tfrac{17}{2} \\ -\tfrac{1}{2}z &= -\tfrac{3}{2} \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

- Depois, aplicamos a substituição para chegar no valor de cada variável.

Fonte: Anton; Rorres (2012, p. 7,8)

Resolução de um Sistema de Equações

- Na Eliminação Gauss-Jordan, aplicamos as operações básicas , para transformar a matriz original em uma matriz equivalente escalonada reduzida:

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ 2x + 4y - 3z &= 1 \\ 3x + 6y - 5z &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

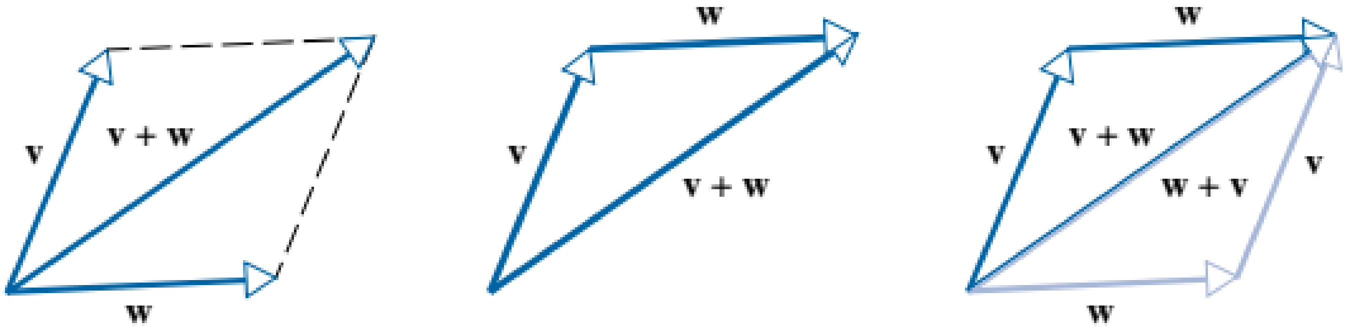
$$\begin{aligned} x &= 1 \\ y &= 2 \\ z &= 3 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

- https://drive.google.com/drive/folders/1RG_Qi-grF-gViB_s_4m--LfzGPIXYLlV?usp=sharing

Fonte: Anton; Rorres (2012, p. 7,8)

Vetor

- Em várias aplicações físicas aparecem certas quantidades, tais como temperatura e peso, que possuem apenas uma “magnitude”. Tais quantidades podem ser representadas por números reais e são chamadas **escalares**.
- Por outro lado, há também quantidades como força e velocidade, que são caracterizadas não só pela magnitude, como também pela direção.
- Essas quantidades podem ser representadas por setas com comprimento e direção adequados, emanando de um ponto de referência *0*, e são chamadas de **vetores**.



Fonte: Lipschutz(1994, p. 54)

Vetor

- Embora nem todos os dados sejam numéricos, geralmente é útil considerar os dados em um formato numérico.
- Em nossa disciplina, vamos considerar que os dados já foram convertidos apropriadamente em uma representação numérica adequada para ler dados como vetores em um programa de computador. Portanto, pensamos em **dados como vetores**.
- Como outra ilustração de como as palavras são sutis, existem (pelo menos) três maneiras diferentes de pensar sobre vetores:
  - ✓ Lista ordenada (*array*) de números (uma visão da Ciência da Computação);
  - ✓ Seta com direção e magnitude (uma visão da Física);
  - ✓ Objeto que obedece a adição e escala (uma visão da Matemática).

Fonte: Deisenroth; Faisal; Ong (2020, p. 12)

Escalar x Vetor x Matriz

Escalar

$$24$$

Vetor

$$\begin{bmatrix} 2 & -8 & 7 \end{bmatrix}$$

linha

ou

coluna

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -8 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Matriz

$$\begin{bmatrix} 6 & 4 & 24 \\ 1 & -9 & 8 \end{bmatrix}$$

linha(s) x coluna(s)

Vetor em Python

```
# create a vector
from numpy import array
# define vector
v = array([1, 2, 3])
print(v)
```

```
[1 2 3]
```

https://drive.google.com/drive/folders/1RG_Qi-grF-gViB_s_4m--LfzGPIXYLlV?usp=sharing

Fonte: Brownlee (2018, p. 54)

A FAZER

- Operações com Matrizes
- Inversas e Transpostas
- Espaços Vetoriais e Subespaços
- Determinantes
- Aplicações
- Logaritmo
- Introdução ao Cálculo Numérico

FAZENDO

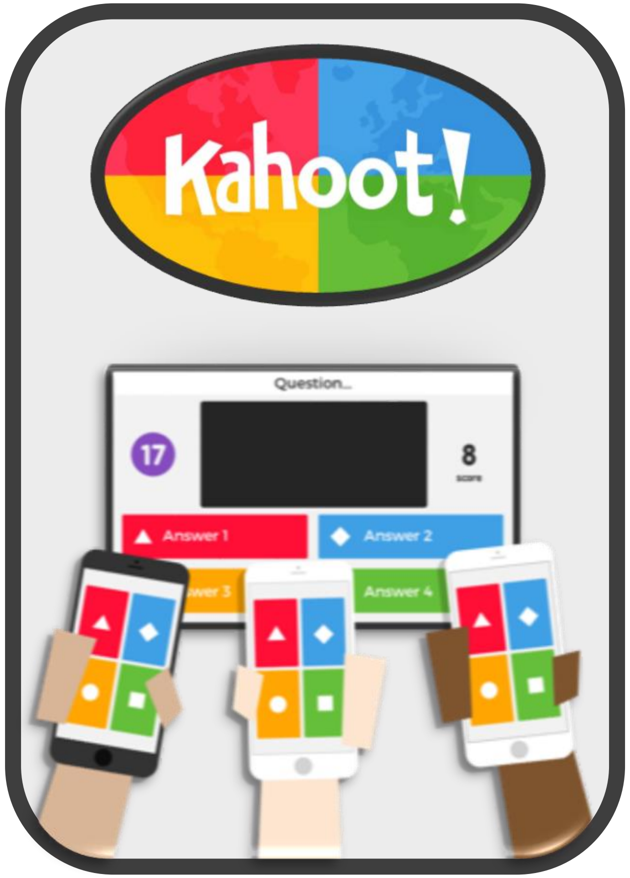
- Vetores e Matrizes

FEITO

- Teoria dos Conjuntos
- Sistemas Lineares

Enunciado para o Kahoot

- Numa sala de aula estão 50 alunos.
- Desses, 13 usam relógio, 37 usam óculos e 6 usam óculos e relógios.



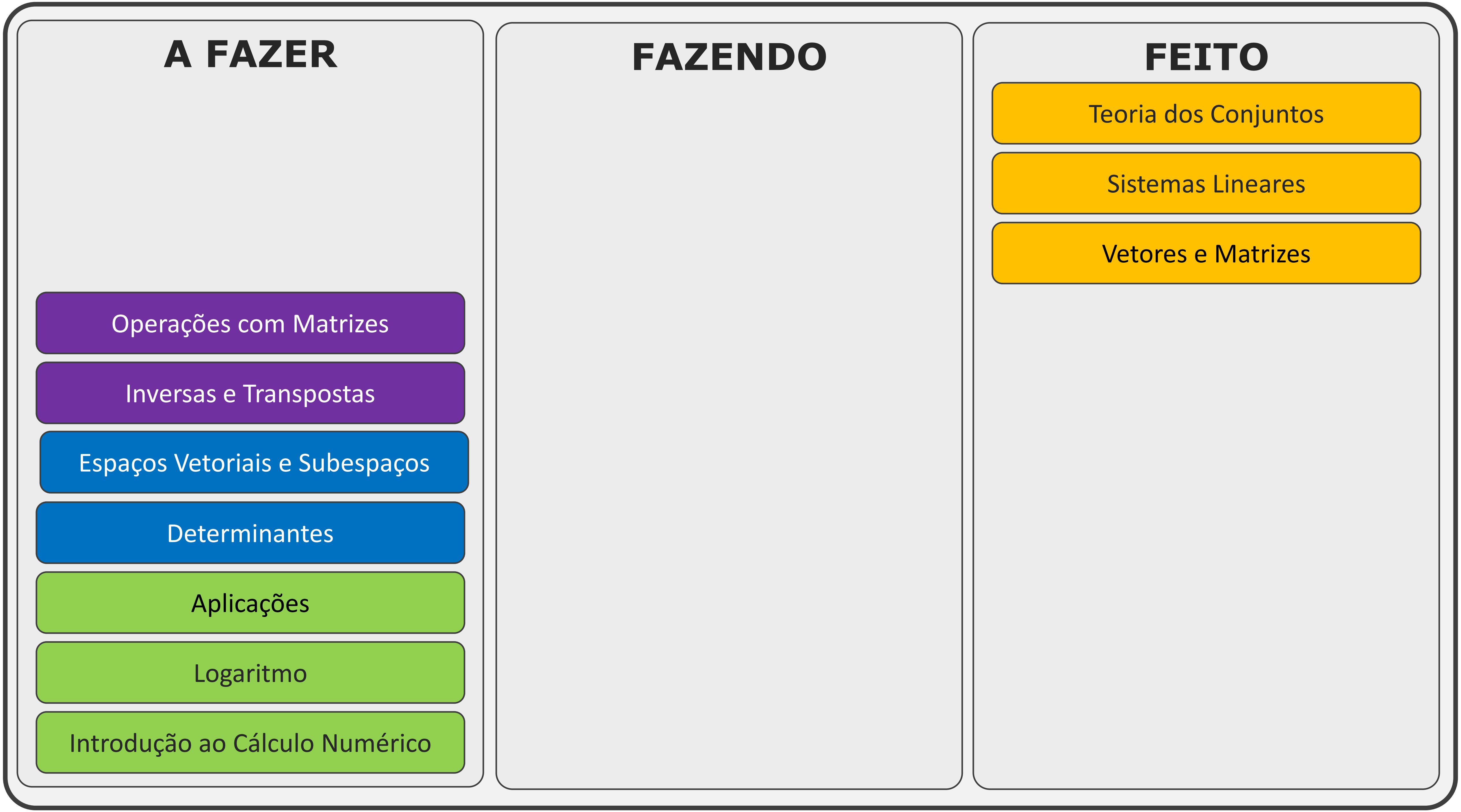
Seu feedback é importante ☺

aplicativo ou portal

A pesquisa se encontra na aba

MBA Experience Survey

Muito obrigado!


A FAZER
Operações com Matrizes
Inversas e Transpostas
Espaços Vetoriais e Subespaços
Determinantes
Aplicações
Logaritmo
Introdução ao Cálculo Numérico
FAZENDO
FEITO
Teoria dos Conjuntos
Sistemas Lineares
Vetores e Matrizes

Operações com Matrizes

- Uma matriz é um **agrupamento retangular de números**. Dizemos que os números nesse agrupamento são as entradas da matriz.
- Duas matrizes são definidas como sendo **iguais** se tiverem o **mesmo tamanho e suas entradas correspondentes forem iguais**.
- Se A e B são matrizes de mesmo tamanho, então a soma A + B é a matriz obtida somando as entradas de B às entradas correspondentes de A, e a diferença A - B é a matriz obtida subtraindo as entradas de B das entradas correspondentes de A.
  - ✓ **Matrizes de tamanhos distintos não podem ser somadas ou subtraídas.**

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 4 \\ 4 & -2 & 7 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -4 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -4 & 5 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Fonte: Anton; Rorres (2012, p. 26 a 28)

Soma de Matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 4 \\ 4 & -2 & 7 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -4 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -4 & 5 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Então

$$A + B = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 7 & 0 & 3 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A - B = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -5 & 2 \\ -3 & -2 & 2 & 5 \\ 1 & -4 & 11 & -5 \end{bmatrix}$$

- Não é possível somar a matriz C com as matrizes A ou B.

Fonte: Anton; Rorres (2012, p. 28)

Multiplicação de uma Matriz por um Escalar

- Se A for uma matriz e c um escalar, então o produto cA é a matriz obtida pela multiplicação de cada entrada da matriz A por c.
- Dizemos que a matriz cA é um múltiplo escalar de A.

Para as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 7 \\ -1 & 3 & -5 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 9 & -6 & 3 \\ 3 & 0 & 12 \end{bmatrix}$$

temos

$$2A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 2 & 6 & 2 \end{bmatrix}, \quad (-1)B = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -7 \\ 1 & -3 & 5 \end{bmatrix}, \quad \tfrac{1}{3}C = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

- É usual denotar (-1)B por -B.

Fonte: Anton; Rorres (2012, p. 28)

Multiplicação de Matrizes

- Se A for uma matriz m x r e B uma matriz r x n, então o produto AB é a matriz m x n cujas entradas são determinadas como segue. Para obter a entrada na linha i e coluna j de AB, destacamos a linha i de A e a coluna j de B. Multiplicamos as entradas correspondentes da linha e da coluna e então somamos os produtos resultantes.

- Considere as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

Fonte: Anton; Rorres (2012, p. 28)

Multiplicação de Matrizes

- Como A é uma matriz 2 x 3 e B é uma matriz 3 x 4, o produto AB é uma matriz 2 x 4. Para determinar, por exemplo, a entrada na linha 2 e coluna 3 de AB, destacamos a linha 2 de A e a coluna 3 de B. Então, como ilustrado, multiplicamos as entradas correspondentes e somamos esses produtos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \boxed{26} & \square \end{bmatrix}$$

$$(2 \cdot 4) + (6 \cdot 3) + (0 \cdot 5) = 26$$

Fonte: Anton; Rorres (2012, p. 29)

Multiplicação de Matrizes

- A entrada na linha 1 e coluna 4 de AB é calculada como segue:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \square & \square & \square & \boxed{13} \\ \square & \square & \square & \square \end{bmatrix}$$

$$(1 \cdot 3) + (2 \cdot 1) + (4 \cdot 2) = 13$$

Fonte: Anton; Rorres (2012, p. 29)

Multiplicação de Matrizes

- As contas para as demais entradas são:

$$
\begin{aligned}
(1\cdot 4)+(2\cdot 0)+(4\cdot 2) &= 12\\
(1\cdot 1)-(2\cdot 1)+(4\cdot 7) &= 27\\
(1\cdot 4)+(2\cdot 3)+(4\cdot 5) &= 30\\
(2\cdot 4)+(6\cdot 0)+(0\cdot 2) &= 8\\
(2\cdot 1)-(6\cdot 1)+(0\cdot 7) &= -4\\
(2\cdot 3)+(6\cdot 1)+(0\cdot 2) &= 12
\end{aligned}
\qquad
AB = \begin{bmatrix} 12 & 27 & 30 & 13 \\ 8 & -4 & 26 & 12 \end{bmatrix}
$$

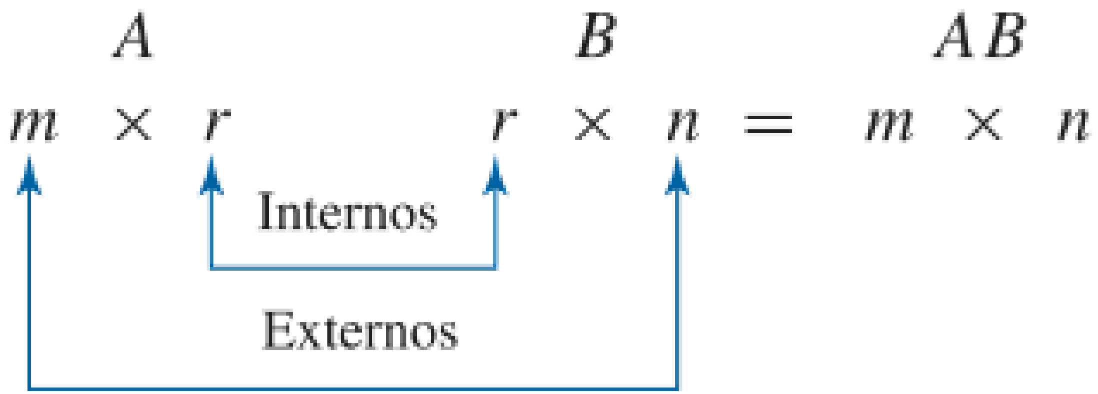
- Logo:

$$
\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 27 & 30 & 13 \\ 8 & -4 & 26 & 12 \end{bmatrix}
$$

Fonte: Anton; Rorres (2012, p. 29)

Multiplicação de Matrizes

- A definição de multiplicação de matrizes exige que o número de colunas do primeiro fator A seja igual ao número de linhas do segundo fator B para que seja possível formar o produto AB.
- Se essa condição não for satisfeita, o produto não estará definido.
- Uma maneira conveniente de determinar se o produto de duas matrizes está ou não definido é escrever o tamanho do primeiro fator e, à direita, escrever o tamanho do segundo fator. Se, como na figura abaixo, os números internos coincidirem, então o produto estará definido.



Fonte: Anton; Rorres (2012, p. 29)

Partição de Matrizes

- Uma matriz pode ser particionada, ou subdividida, em blocos de matrizes menores inserindo cortes horizontais e verticais entre linhas e colunas selecionadas.
- Por exemplo, as seguintes são três partições possíveis de uma matriz 3 x 4 arbitrária A: a primeira é uma partição de A em quatro submatrizes A11, A12, A21 e A22; a segunda é uma partição de A em seus vetores linha r1, r2, e r3; a terceira é uma partição de A em seus vetores coluna c1, c2, c3 e c4:

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

$$A = \left[\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \hline a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{r}_3 \end{bmatrix}$$

$$A = \left[\begin{array}{c|c|c|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right] = [\mathbf{c}_1 \quad \mathbf{c}_2 \quad \mathbf{c}_3 \quad \mathbf{c}_4]$$

Fonte: Anton; Rorres (2012, p. 30)

Partição de Matrizes

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

$$A_{11} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \qquad A_{12} = \begin{bmatrix} a_{14} \\ a_{24} \end{bmatrix}$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad A_{22} = \begin{bmatrix} a_{34} \end{bmatrix}$$

Fonte: Anton; Rorres (2012, p. 30)

Partição de Matrizes

- A partição de matrizes em blocos tem muitas utilidades, uma das quais sendo encontrar uma linha ou coluna específica de um produto matricial AB sem calcular todo o produto.
- Considerando as matrizes A e B abaixo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

- O segundo vetor coluna de AB pode ser obtido calculando:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix}}_{\text{Segunda coluna de } B} = \underbrace{\begin{bmatrix} 27 \\ -4 \end{bmatrix}}_{\text{Segunda coluna de } AB}$$

Fonte: Anton; Rorres (2012, p. 30, 31)

Partição de Matrizes

- O primeiro vetor linha de AB pode ser obtido calculando:

$$\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 2 & 4\end{bmatrix}}_{\text{Primeira linha de } B}\begin{bmatrix}4 & 1 & 4 & 3\\ 0 & -1 & 3 & 1\\ 2 & 7 & 5 & 2\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix}12 & 27 & 30 & 13\end{bmatrix}}_{\text{Primeira linha de } AB}$$

- Lembrando que:

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 4\\ 2 & 6 & 0\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}4 & 1 & 4 & 3\\ 0 & -1 & 3 & 1\\ 2 & 7 & 5 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}12 & 27 & 30 & 13\\ 8 & -4 & 26 & 12\end{bmatrix}$$

Fonte: Anton; Rorres (2012, p. 31)

Produtos Matriciais como Combinações Lineares

- Se A1, A2,..., Ar são matrizes de mesmo tamanho e se x1, x2,..., xr são escalares, então uma expressão da forma x1A1 + x2A2 + · · · + xrAr é denominada combinação linear de A1, A2,..., Ar com coeficientes x1, x2,..., xr:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Então

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{11}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_2 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

Fonte: Anton; Rorres (2012, p. 31, 32)

Produtos Matriciais como Combinações Lineares

- **Teorema**: Sejam A uma matriz m x n e v um vetor coluna n x 1. Então o produto Ax pode ser expresso como uma combinação linear dos vetores coluna de A em que os coeficientes são as entradas de v.
- A matriz produto:

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -9 \\ -3 \end{bmatrix}$$

- Pode ser escrita como a combinação linear dos vetores coluna:

$$2\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - 1\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -9 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Fonte: Anton; Rorres (2012, p. 32)

Traço de uma matriz

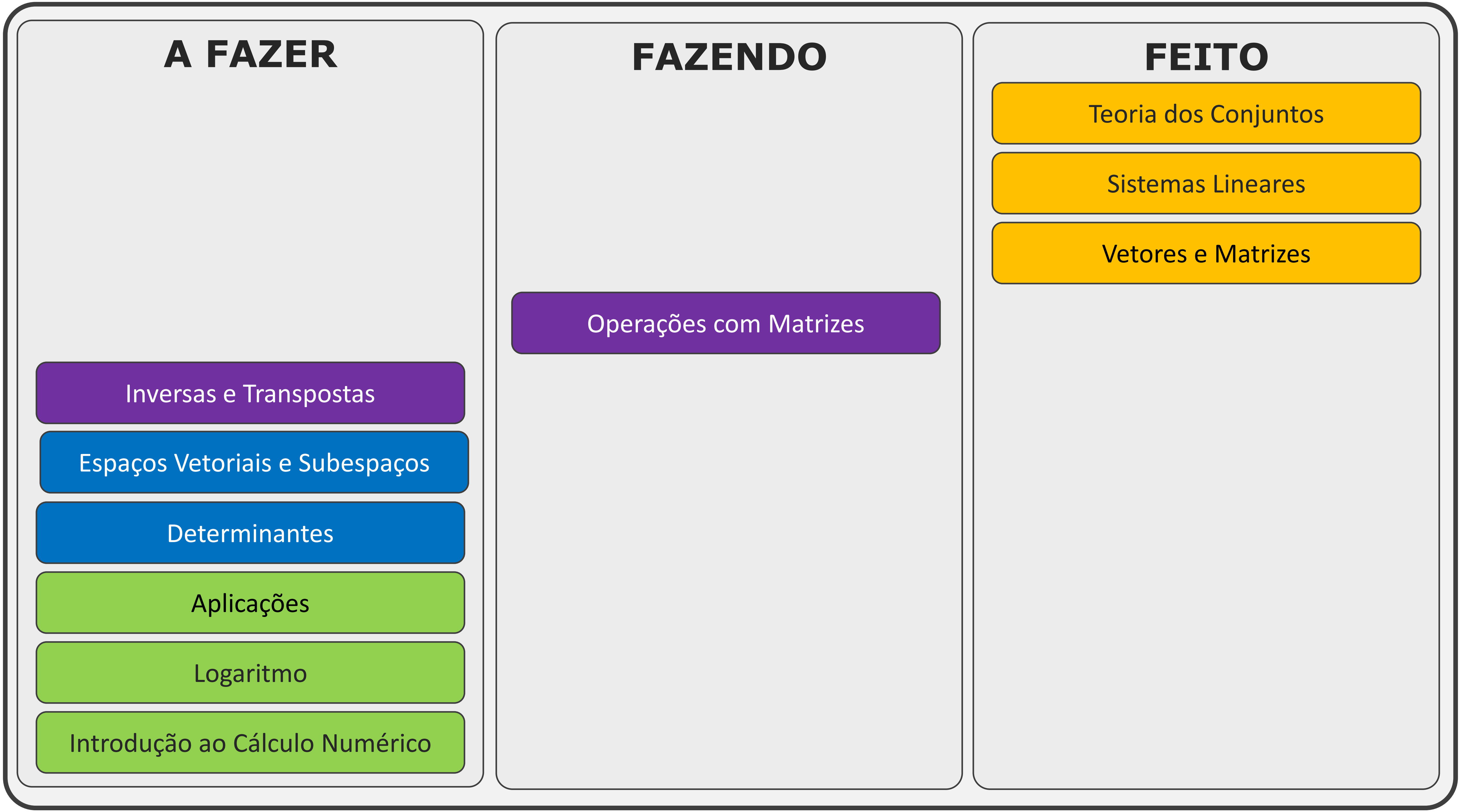
- Se A for uma **matriz quadrada**, então o traço de A, denotado por tr(A), é definido pela soma das entradas na diagonal principal de A. O traço de A não é definido se A não for uma matriz quadrada:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 7 & 0 \\ 3 & 5 & -8 & 4 \\ 1 & 2 & 7 & -3 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33}$$

$$\mathrm{tr}(B) = -1 + 5 + 7 + 0 = 11$$

Fonte: Anton; Rorres (2012, p. 35)


A FAZER
Inversas e Transpostas
Espaços Vetoriais e Subespaços
Determinantes
Aplicações
Logaritmo
Introdução ao Cálculo Numérico
FAZENDO
Operações com Matrizes
FEITO
Teoria dos Conjuntos
Sistemas Lineares
Vetores e Matrizes

Transposta de uma Matriz

- Se A for uma matriz m x n qualquer, então a transposta de A, denotada por A^T, é definida como a matriz n x m que resulta da troca das linhas com as colunas de A; ou seja, a primeira coluna de AT é a primeira linha de A, a segunda coluna de A^T é a segunda linha de A, e assim por diante:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 3 \quad 5], \quad D = [4]$$

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{31} \\ a_{13} & a_{23} & a_{31} \\ a_{14} & a_{24} & a_{31} \end{bmatrix}, \quad B^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}, \quad C^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad D^T = [4]$$

$$(A^T)_{ij} = (A)_{ji}$$

Fonte: Anton; Rorres (2012, p. 34)

Transposta de uma Matriz em Python

```
# transpose matrix
from numpy import array
# define matrix
A = array([
    [1, 2],
    [3, 4],
    [5, 6]])
print(A)
# calculate transpose
C = A.T
print(C)
```

```
[[1 2]
 [3 4]
 [5 6]]

[[1 3 5]
 [2 4 6]]
```

https://drive.google.com/drive/folders/1RG_Qi-grF-gViB_s_4m--LfzGPIXYLlV?usp=sharing

Fonte: Brownlee (2018, p. 90)

Propriedades da Aritmética Matricial

- **Teorema**: Supondo que os tamanhos das matrizes sejam tais que as operações indicadas possam ser efetuadas, valem as seguintes regras da aritmética matricial:

✓ $A + B = B + A$	[Lei da comutatividade da adição]
✓ $A + (B + C) = (A + B) + C$	[Lei da associatividade da adição]
✓ $A(BC) = (AB)C$	[Lei da associatividade da multiplicação]
✓ $A(B + C) = AB + AC$	[Lei da distributividade à esquerda]
✓ $(A + B)C = AC + BC$	[Lei da distributividade à direita]
✓ $A(B - C) = AB - AC$	
✓ $(B - C)A = BA - CA$	
✓ $a(B + C) = aB + aC$	

Fonte: Anton; Rorres (2012, p. 38)

Propriedades da Aritmética Matricial

- Continuando...
  - ✓ $a(B - C) = aB - aC$
  - ✓ $(a + b)C = aC + bC$
  - ✓ $(a - b)C = aC - bC$
  - ✓ $a(bC) = (ab)C$
  - ✓ $a(BC) = (aB)C = B(aC)$

Fonte: Anton; Rorres (2012, p. 38)

Propriedades da Multiplicação Matricial

FIAP

- Não deixe o teorema dos slides anteriores iludí-lo a acreditar que todas as leis da aritmética real sejam válidas na aritmética matricial.
- Por exemplo, sabemos que na aritmética real sempre vale que ab = ba, que é a lei da comutatividade da multiplicação.
- Na aritmética matricial, contudo, a igualdade de AB e BA pode não ser válida por três razões possíveis.
    1. AB pode estar definida e BA não (por exemplo, se A é uma matriz 2 x 3 e B é 3 x 4).
    2. AB e BA podem ambas estar definidas, mas têm tamanhos diferentes (por exemplo, se A é uma matriz 2 x 3 e B é 3 x 2).
    3. AB e BA podem ambas estar definidas e ter o mesmo tamanho, mas as matrizes podem ser diferentes (conforme ilustrado no exemplo seguinte).

Fonte: Anton; Rorres (2012, p. 40)

Propriedades da Aritmética Matricial

- A ordem é importante na multiplicação matricial.
- Considere as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

- Multiplicando, obtemos:

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 11 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad BA = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

- Assim, AB ≠ BA.

Fonte: Anton; Rorres (2012, p. 40)

Matrizes Zero

- Uma matriz cujas entradas são todas nulas, é denominada matriz zero ou matriz nula.
- Alguns exemplos são:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [0]$$

- Denotamos uma matriz nula por 0, a menos que seja importante enfatizar seu tamanho, caso em que a matriz m x n é denotada por 0mxn.
- Deveria ser evidente que se A e 0 forem matrizes de mesmo tamanho, então:
  A + 0 = 0 + A = A

Fonte: Anton; Rorres (2012, p. 40)

Matrizes Zero

- Assim, nessa equação matricial, a matriz 0 desempenha o mesmo papel que o número 0 na equação numérica $a + 0 = 0 + a = a$.
- O teorema seguinte lista as propriedades básicas das matrizes nulas:
  - ✓ $A + 0 = 0 + A = A$
  - ✓ $A - 0 = A$
  - ✓ $A - A = A + (-A) = 0$
  - ✓ $0A = 0$
  - ✓ Se $cA = 0$, então $c = 0$ ou $A = 0$.

Fonte: Anton; Rorres (2012, p. 40)

Lei de Cancelamento não Vale

- Considere as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$AB = AC = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$

- Embora $A \neq 0$, o cancelamento de A de ambos lados da equação AB = AC levaria à conclusão incorreta que B = C. Assim, a lei de cancelamento não é válida, em geral, na multiplicação matricial.

Fonte: Anton; Rorres (2012, p. 41)

Um Produto Nulo com Fatores não Nulos

- Aqui temos duas matrizes tais que AB = 0, mas A ≠ 0 e B ≠ 0.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Fonte: Anton; Rorres (2012, p. 41)

Matriz Identidade

- Uma matriz quadrada com entradas 1 na diagonal principal e demais entradas nulas é denominada **matriz identidade**. Alguns exemplos são:

$$[1], \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Uma matriz identidade é denotada pela letra I. Se for importante enfatizar seu tamanho, escrevemos In para a matriz identidade de tamanho n x n.

Fonte: Anton; Rorres (2012, p. 41)

Matriz Identidade

- Para explicar o papel das matrizes identidade na aritmética matricial, consideremos o efeito de multiplicar uma matriz A de tamanho 2 x 3 nos dois lados por uma matriz identidade. Multiplicando à direita pela matriz identidade 3 x 3, obtemos:

$$AI_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = A$$

- e multiplicando pela esquerda pela matriz identidade 2 x 2, obtemos:

$$I_2 A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = A$$

- O mesmo resultado vale em geral, ou seja, se A for uma matriz m x n, então:

$$AI_n = A \quad \text{e} \quad I_m A = A$$

Fonte: Anton; Rorres (2012, p. 41)

Matriz Identidade

- Assim, as matrizes identidade desempenham nas equações matriciais o mesmo papel que o número 1 desempenha na equação numérica a x 1 = 1 x a = a.
- Como mostra o teorema seguinte, as matrizes identidade surgem naturalmente no estudo da forma escalonada reduzida por linhas de matrizes quadradas.
- **Teorema**: Se R é a forma escalonada reduzida por linhas de uma matriz A de tamanho n x n, então ou R tem uma linha de zeros ou R é a matriz identidade In.

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nn} \end{bmatrix}$$

- **Pergunta**: qual é o significado de ter uma linha composta somente por zeros?

Fonte: Anton; Rorres (2012, p. 42)

Matriz Inversa

- Se A for uma matriz quadrada e se pudermos encontrar uma matriz B de mesmo tamanho tal que AB = BA = I, então diremos que A é **invertível** (ou **não singular**) e que B é uma **inversa** de A.
- Se não puder ser encontrada uma tal matriz B, diremos que A é **não invertível** ou **singular**.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$BA = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

Fonte: Anton; Rorres (2012, p. 42)

Propriedades das Matrizes Inversas

- **Teorema**: Se B e C são ambas inversas da matriz A, então B = C (uma matriz invertível tem exatamente uma inversa).

- **Teorema**: Uma matriz é invertível somente se o seu determinante for diferente de 0.

Fonte: Anton; Rorres (2012, p. 43)

Inversa de uma Matriz em Python

```python
# invert matrix
from numpy import array
from numpy.linalg import inv
# define matrix
A = array([
    [1.0, 2.0],
    [3.0, 4.0]])
print(A)
# invert matrix
B = inv(A)
print(B)
# multiply A and B
# alternative syntax in Python 3.5: I = A @ B
I = A.dot(B)
print(I)
```

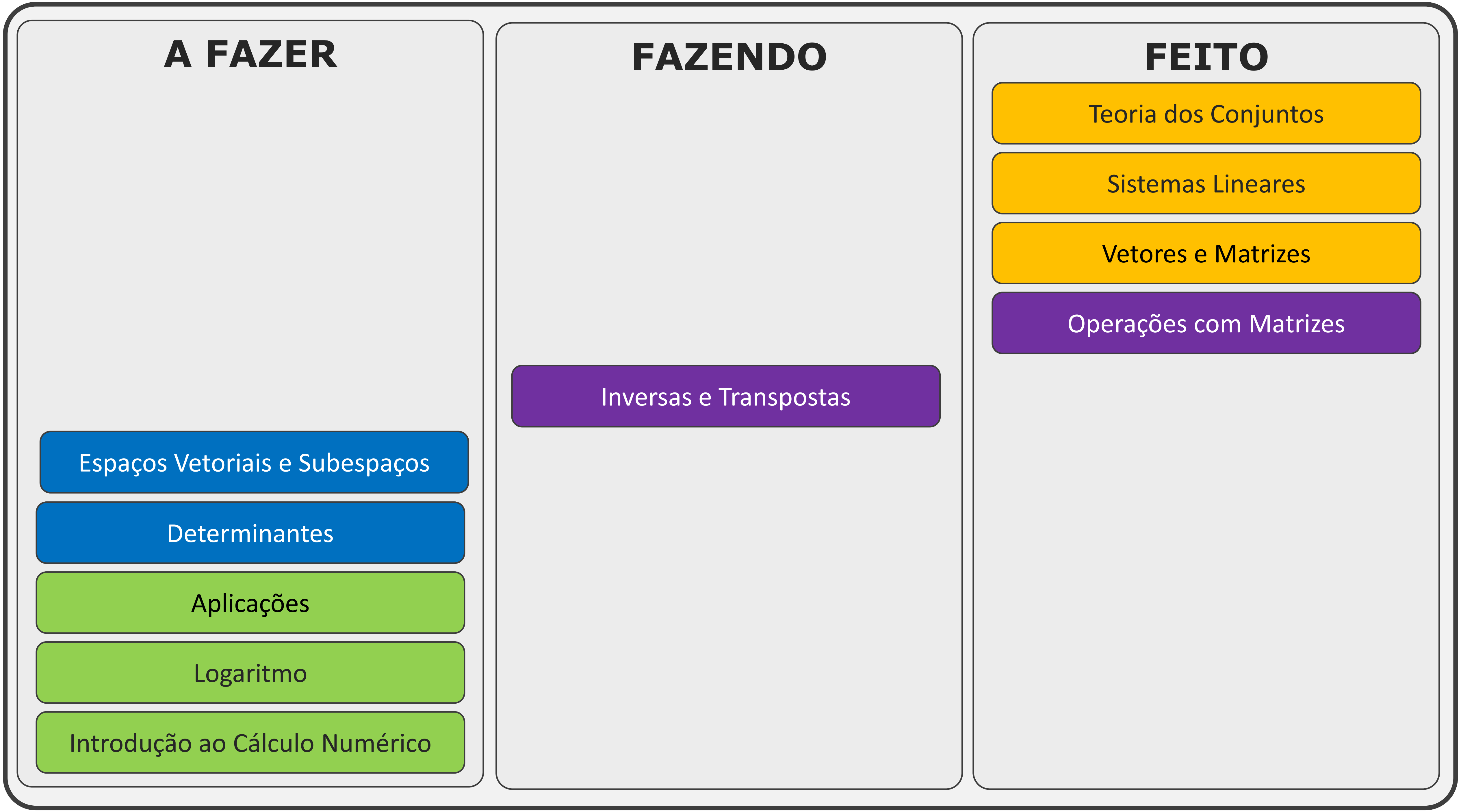
```
[[ 1.  2.]
 [ 3.  4.]]

[[-2.   1. ]
 [ 1.5 -0.5]]

[[  1.00000000e+00   0.00000000e+00]
 [  8.88178420e-16   1.00000000e+00]]
```

➧ https://drive.google.com/drive/folders/1RG_Qi-grF-gViB_s_4m--LfzGPIXYLlV?usp=sharing

Fonte: Brownlee (2018, p. 90)


A FAZER
Espaços Vetoriais e Subespaços
Determinantes
Aplicações
Logaritmo
Introdução ao Cálculo Numérico
FAZENDO
Inversas e Transpostas
FEITO
Teoria dos Conjuntos
Sistemas Lineares
Vetores e Matrizes
Operações com Matrizes

Vamos nos Divertir!

Kahoot!

www.kahoot.it

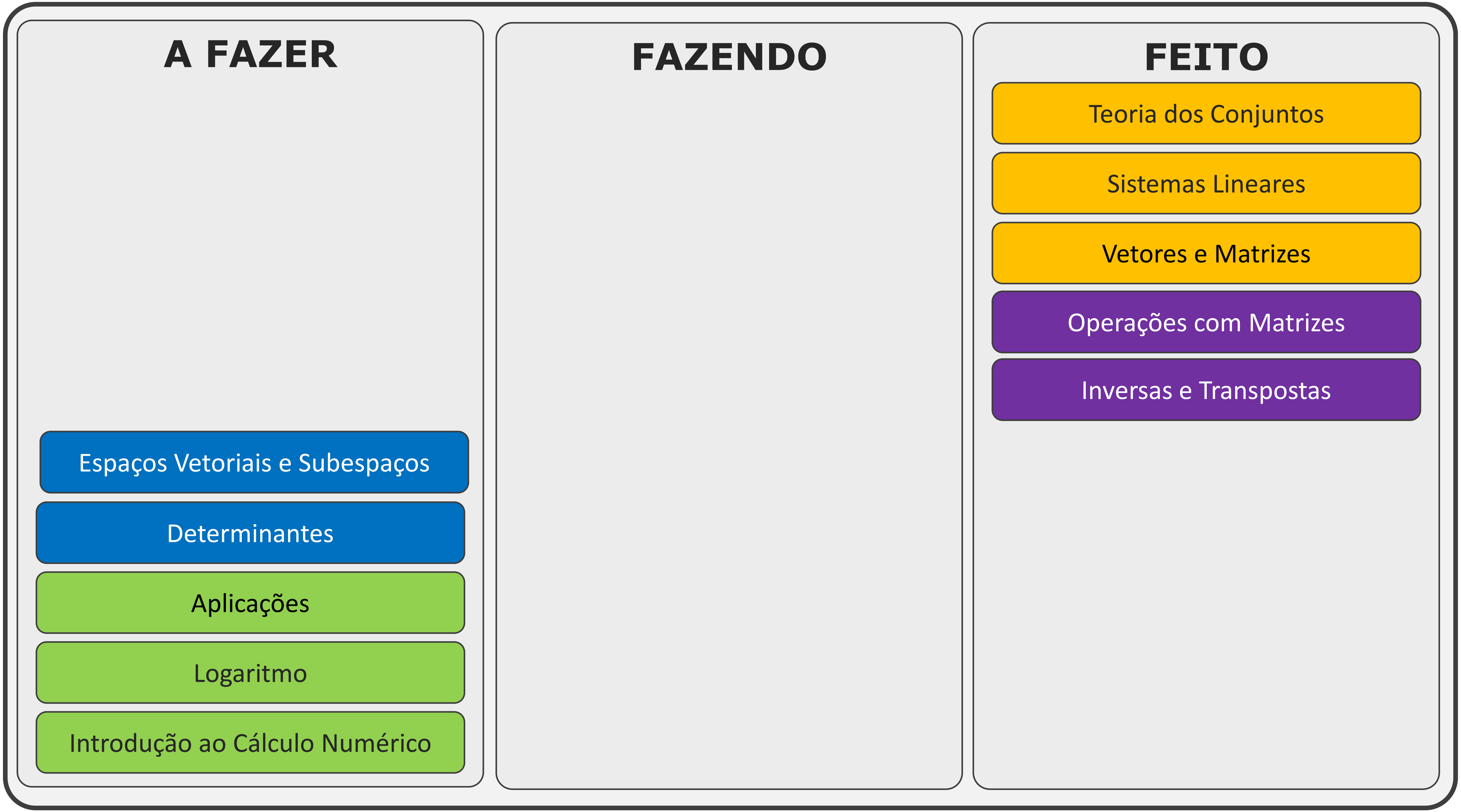
Seu feedback é importante ☺

aplicativo ou portal

A pesquisa se encontra na aba

MBA Experience Survey

Muito obrigado!


A FAZER
Espaços Vetoriais e Subespaços
Determinantes
Aplicações
Logaritmo
Introdução ao Cálculo Numérico
FAZENDO
FEITO
Teoria dos Conjuntos
Sistemas Lineares
Vetores e Matrizes
Operações com Matrizes
Inversas e Transpostas

Escalar x Vetor x Matriz

Escalar

$$24$$

Vetor

$$\begin{bmatrix} 2 & -8 & 7 \end{bmatrix}$$

linha

ou

coluna

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -8 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Matriz

$$\begin{bmatrix} 6 & 4 & 24 \\ 1 & -9 & 8 \end{bmatrix}$$

linha(s) x coluna(s)

Espaço Vetorial

- Espaço vetorial é um termo matemático que define algumas operações vetoriais.
- Em termos leigos, podemos imaginar que é um espaço métrico n-dimensional onde cada ponto é representado por um vetor n-dimensional.
- Neste espaço, podemos fazer qualquer adição de vetores ou multiplicações de vetores por escalares.
- É útil considerar um espaço vetorial porque é útil representar coisas como um vetor.
- Por exemplo, em aprendizado de máquina, geralmente temos um ponto de dados com várias características.
    - ✓ Portanto, é conveniente representarmos um ponto de dados como um vetor.

Fonte: Brownlee (2018, p. 187)

Espaço Vetorial Euclidiano ou Espaço R^n

- Se n for um inteiro positivo, então uma ênupla ordenada é uma sequência de n números reais (v1, v2,..., vn). O conjunto de todas as ênuplas ordenadas é denominado o espaço de dimensão n e é denotado por R^n(Anton; Rorres, 2012, p. 124).

- Exemplo de vetor no R^2: **v** = [2, 4];
- Exemplo de vetor no R^3: **v** = [1, 7, 8];
- Exemplo de vetor no R^4: **v** = [3, 7, 2, 9];
- Exemplo de vetor no R^5: **v** = [9, 0, 3, 2, 5];
- ...
- Vetor no R^n: **v** = [v1, v2, v3,..., vn];

Ênuplas

- Algumas aplicações típicas que levam a ênuplas:

✓ **Dados Experimentais**: Um cientista realiza uma série de experimentos e toma n medições numéricas a cada realização do experimento;

✓ **Transporte e Armazenamento**: Uma companhia nacional de transporte de cargas tem 15 terminais com depósitos de armazenamento de carga e oficinas de manutenção de seus caminhões;

✓ **Circuitos Elétricos**: Um certo tipo de microprocessador eletrônico é projetado para receber quatro voltagens de entrada e produzir três voltagens em resposta. As voltagens de entrada podem ser consideradas como vetores de R^4 e as de resposta, como vetores de R^3;

✓ **Imagens Digitalizadas**: Uma maneira pela qual são criadas as imagens coloridas nas telas dos monitores de computadores é associar a cada pixel (que é um ponto endereçável da tela) três números, que descrevem o matiz, a saturação e o brilho do pixel;

✓ **Economia**: Uma abordagem da Análise Econômica é dividir uma economia em setores (manufatura, serviços, utilidades, e assim por diante) e medir o produto de cada setor com um valor monetário.

Fonte: Anton; Rorres (2012, p. 124)

Espaço Vetorial

- Dizemos que um **conjunto** V ≠ 0 é um **espaço vetorial sobre R**, quando e somente quando:

1. Se **u** e **v** são objetos em V, então **u** + **v** é um objeto em V;
2. **u** + **v** = **v** + **u**;
3. **u** + (**v** + **w**) = (**u** + **v**) + **w**;
4. Existe um objeto **0** em V, denominado vetor nulo de V, ou vetor zero, tal que **0** + **u** = **u** + **0** = **u**, com qualquer **u** em V;
5. Dado qualquer **u** em V, existe algum objeto -**u**, denominado negativo de **u**, tal que **u** + (-**u**) = (-**u**) + **u** = **0**;
6. Se a for qualquer escalar e **u** um objeto em V, então a**u** é um objeto em V;
7. a(**u** + **v**) = a**u** + a**v**;

Fonte: Anton; Rorres (2012, p. 172)

Espaço Vetorial

- ...continuação:

  8. $(a + b)\mathbf{u} = a\mathbf{u} + b\mathbf{u}$;
  9. $a(b\mathbf{u}) = (ab)\mathbf{u}$;
  10. $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$.

- Vídeo recomendado:

  https://www.youtube.com/watch?v=kqZUFEOAoW4

Fonte: Anton; Rorres (2012, p. 172)

Subespaço Vetorial

- É possível para um espaço vetorial estar contido num outro espaço vetorial.
- Um subconjunto W de um espaço vetorial V é denominado **subespaço de V** se W for um espaço vetorial por si só com as operações de adição e multiplicação por escalar definidas em V.
- **Teorema**: Se W for um conjunto de um ou mais vetores num espaço vetorial V, então W é um subespaço de V se, e somente se, as condições seguintes forem válidas:
  - ✓ Se **u** e **v** forem vetores em W, então **u** + **v** está em W.
  - ✓ Se a for um escalar qualquer e **u** algum vetor de W, então a**u** está em W.

Fonte: Anton; Rorres (2012, p. 179, 180)

Norma de um Vetor

- Neste texto, denotamos o comprimento de um vetor v pelo símbolo ||v|| e dizemos que este é a norma, o comprimento ou a magnitude de v (sendo que o termo “norma” é um sinônimo matemático comum para **comprimento**).
- Como sugere a figura abaixo, segue pelo Teorema de Pitágoras que a norma de um vetor (v1, v2) de R^2 é:

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$

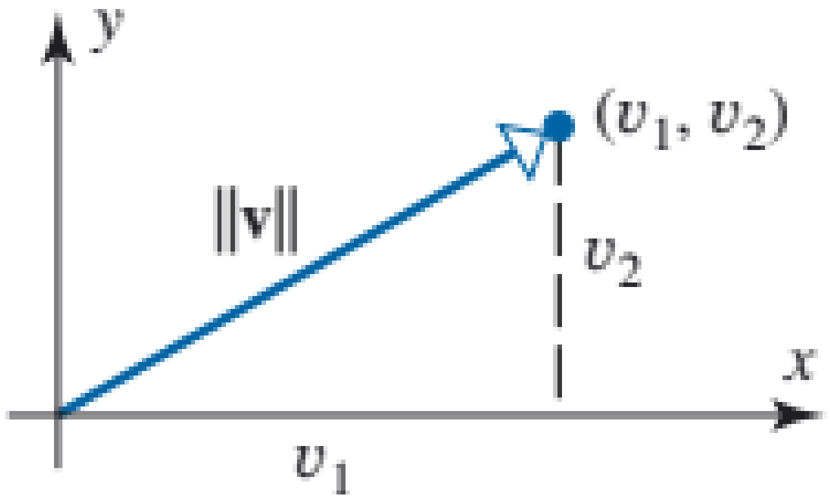
- A norma de um vetor (v1, v2, v3,..., vn) é:

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + \cdots + v_n^2}$$

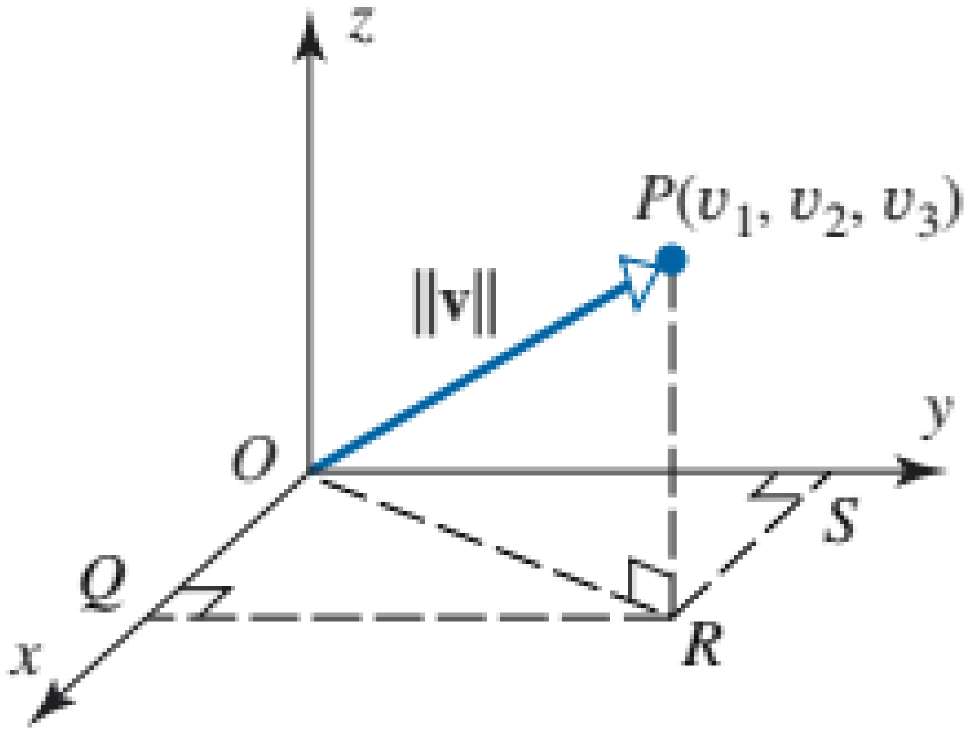
Fonte: Anton; Rorres (2012, p. 130, 131)

Norma de um Vetor

R^2



R^3



➡ https://drive.google.com/drive/folders/1RG_Qi-grF-gViB_s_4m--LfzGPIXYLlV?usp=sharing

Fonte: Anton; Rorres (2012, p. 130, 131)

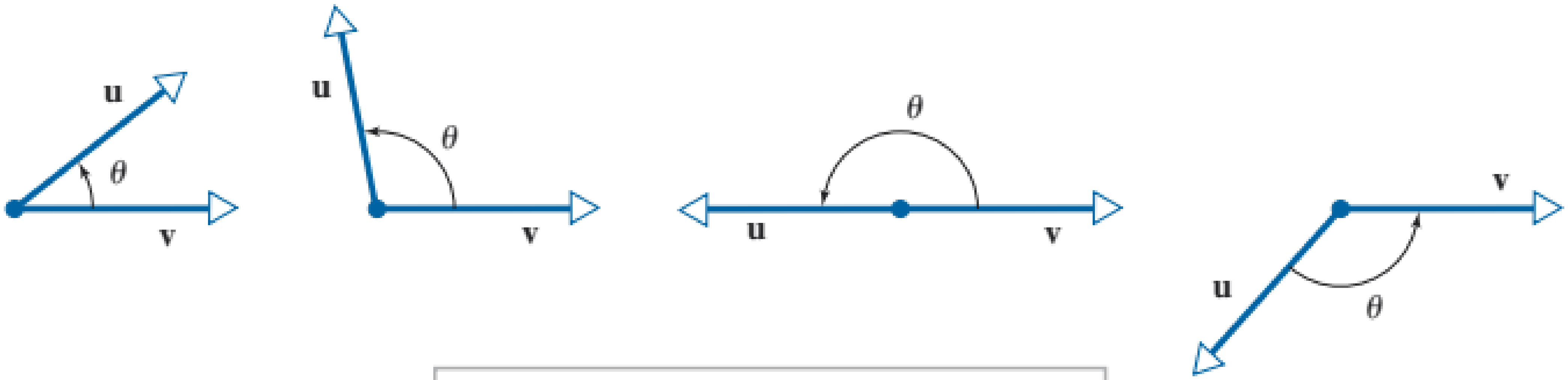
Multiplicação por Escalar

- É possível generalizar ao R^n os três fatos familiares seguintes, relativos a vetores em R^2 e R^3:
  - ✓ Distâncias são números não negativos;
  - ✓ O vetor zero é o único vetor de comprimento zero;
  - ✓ Multiplicar um vetor por um escalar **multiplica seu comprimento pelo valor absoluto daquele escalar**.

Fonte: Anton; Rorres (2012, p. 131)

Ângulo entre Dois Vetores

- Sejam **u** e **v** vetores não nulos em R^2 ou R^3 posicionados de tal forma que seus pontos iniciais coincidam.
- Definimos o ângulo entre **u** e **v** como o ângulo θ determinado por **u** e **v** que satisfaz as desigualdades $0 \leq \theta \leq \pi$.

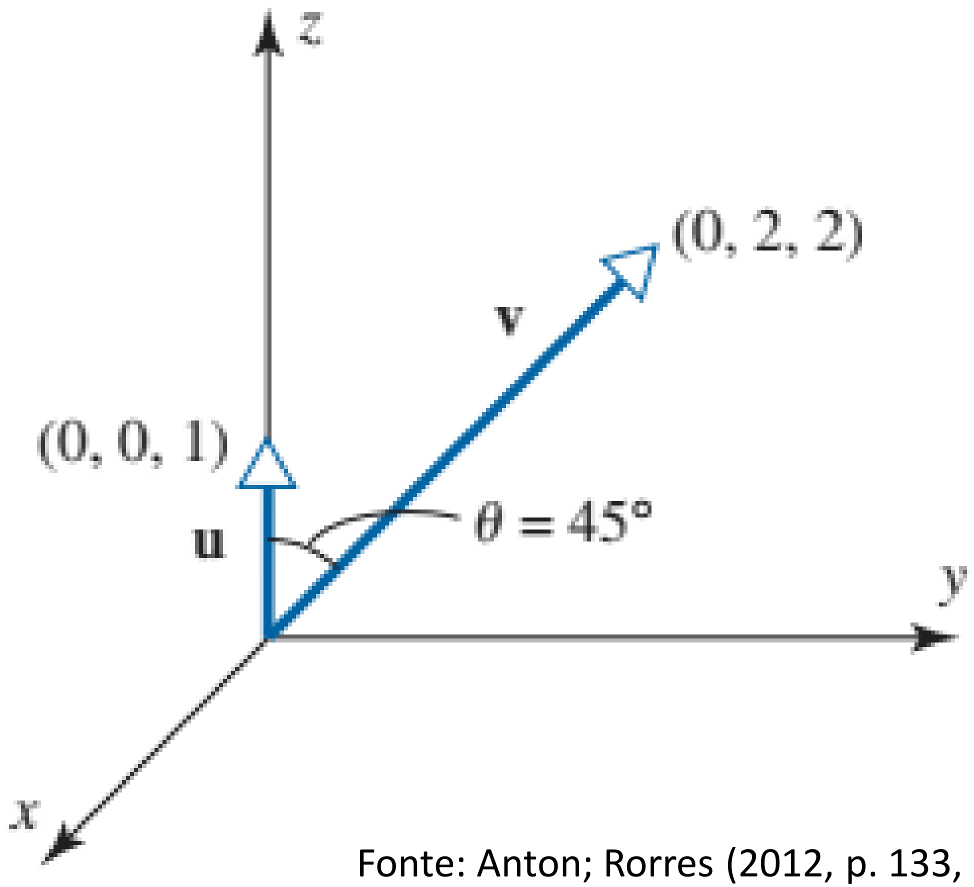


O ângulo θ entre **u** e **v** satisfaz $0 \leq \theta \leq \pi$.

Fonte: Anton; Rorres (2012, p. 133)

Produto Escalar

- Se **u** e **v** forem vetores não nulos em R^2 ou R^3 e se θ for o ângulo entre **u** e **v**, então o produto escalar (também denominado produto interno euclidiano) de **u** e **v** é denotado por **u** · **v** e definido por $u \cdot v = ||u||\ ||v|| \cos \theta$;
- Se u = 0 ou v = 0, definimos u · v como sendo 0.
- Exemplo:
  - ✓ Encontre o produto escalar dos vetores mostrados na figura:



Fonte: Anton; Rorres (2012, p. 133, 134)

Exemplo de Produto Escalar

- **u** está exatamente sobre o eixo z, logo, seu comprimento é igual a 1; $\|\mathbf{u}\| = 1$
- v é perpendicular ao eixo x (x=0). Será necessário calcular seu comprimento, aplicando a fórmula da norma de um vetor: $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + \cdots + v_n^2}$

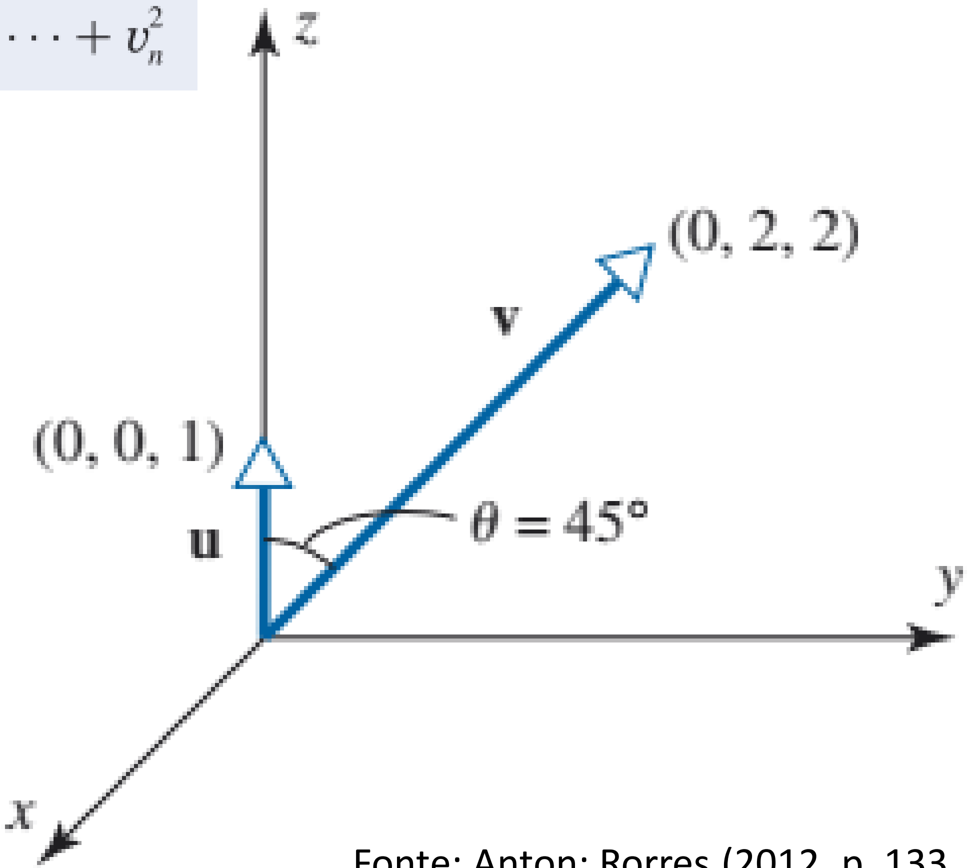
$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{0^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

- O cosseno do ângulo θ entre eles é:

$$\cos(45^\circ) = 1/\sqrt{2}$$

- Aplicando a fórmula u · v = ||u|| ||v|| cos θ:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| \cos\theta = (1)(2\sqrt{2})(1/\sqrt{2}) = 2$$



Fonte: Anton; Rorres (2012, p. 133, 134)

Produto Escalar

- Para calcular o produto escalar (produto interno euclidiano), multiplicamos componentes correspondentes dos vetores e somamos os produtos resultantes.
- Se **u** = (u1, u2,..., un) e **v** = (v1, v2,..., vn) forem vetores em R^n, então o produto escalar (também denominado produto interno euclidiano) de **u** e **v** é denotado por **u** · **v** e definido por:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 \cdots + u_n v_n$$

- Considerando o exemplo do slide 108, temos u = (0, 0, 1) e v = (0, 2, 2). Assim:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (0)(0) + (0)(2) + (1)(2) = 2$$

Fonte: Anton; Rorres (2012, p. 135)

Distância Euclidiana

- A distância entre dois vetores é denotada por d(u, v) e definida por:

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (u_i - v_i)^2}$$

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + \cdots + (u_n - v_n)^2}$$

- Aplicada nos Métodos de análise de clusters vistos na disciplina "Machine Learning I", como KNN (K-Nearest Neighbour) e KMeans.
- https://drive.google.com/drive/folders/1RG_Qi-grF-gViB_s_4m--LfzGPIXYLlV?usp=sharing

Fonte: Anton; Rorres (2012, p. 133, 336)

Transformação

- Se V e W forem espaços vetoriais e se f for uma função de domínio V e contradomínio W, dizemos que f é uma **transformação** de V em W, ou uma **aplicação** de V em W, que denotamos por
  - ✓ $f: V \to W$
- No caso especial em que V = W, também dizermos que uma transformação é um **operador** de V.

Fonte: Anton; Rorres (2012, p. 248)

A FAZER

- Determinantes
- Aplicações
- Logaritmo
- Introdução ao Cálculo Numérico

FAZENDO

- Espaços Vetoriais e Subespaços

FEITO

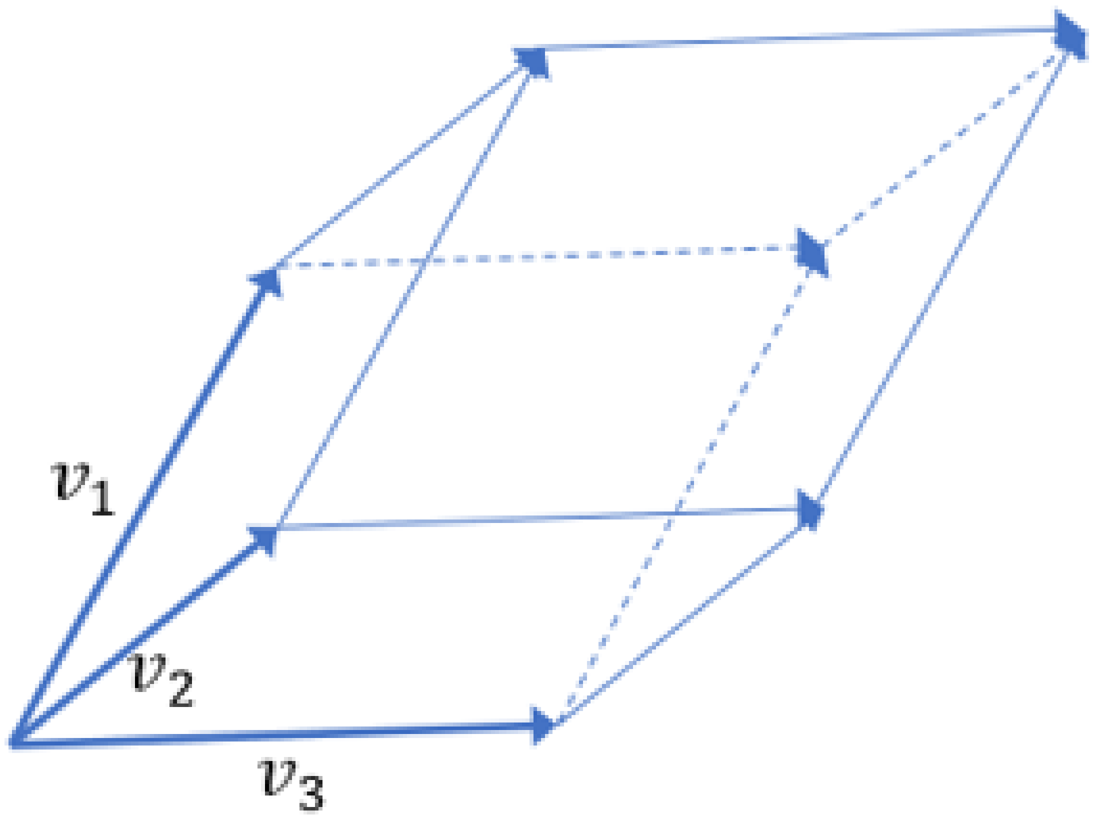
- Teoria dos Conjuntos
- Sistemas Lineares
- Vetores e Matrizes
- Operações com Matrizes
- Inversas e Transpostas

Determinantes

- O determinante de uma matriz quadrada é uma **representação escalar do volume da matriz**.

- O determinante descreve a geometria relativa dos vetores que compõem as linhas da matriz.

- Mais especificamente, o determinante de uma matriz A informa o **volume de uma caixa com os lados dados por linhas de A**.



Fonte: Brownlee (2018, p. 93)

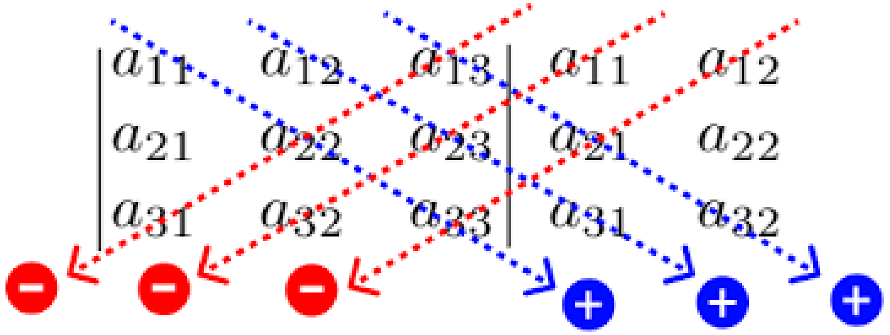
Determinantes

- Principais usos dos determinantes:
  - ✓ Testar a **invertibilidade** de uma matriz: se o determinante de A é diferente de 0, então A é invertível;
  - ✓ O determinante de A é igual ao **volume de uma caixa no espaço** de n dimensões. As arestas da caixa surgem a partir das linhas de A. As colunas de A resultariam em uma caixa completamente diferente com o mesmo volume;
  - ✓ O determinante fornece uma **fórmula para cada pivô**. Teoricamente, podemos prever quando um elemento do pivô será zero, exigindo uma troca de linha;
  - ✓ O determinante mede a dependência de $A^{-1}b$ em relação a cada elemento de b. Se um parâmetro for alterado, experimentalmente ou se uma observação for corrigida, o "**coeficiente de influência**" em A^{-1} é uma razão de determinantes.
- Os aspectos simples sobre os determinantes não são suas fórmulas explícitas, mas as propriedades que eles possuem.

Fonte: Strang(2010, p. 201, 202)

Como Calcular o Determinante

- Determinantes por expansão em cofatores;
- Calculando determinantes por meio de redução por linhas.



- Lembrando que o determinante é sempre um escalar!
- O determinante de uma matriz de ordem 1 é o próprio elemento (único) da matriz;

$$A = [a] \qquad \det(A) = a$$

- O determinante de uma matriz de ordem 2 é calculado da seguinte forma:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad \det(A) = ad - bc \quad \text{ou} \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Fonte: Anton; Rorres (2012, p. 93)

Determinantes por Expansão em Cofatores

- Se A for uma matriz quadrada, então o menor da entrada a_{ij} é denotado por M_{ij} e definido como o determinante da submatriz que sobra quando suprimimos a i-ésima linha e a j-ésima coluna de A.
- O número $(-1)^{i+j} M_{ij}$ é denotado por C_{ij} e é denominado **cofator da entrada a_{ij}**.
- Considerando a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

- O menor da entrada a_{11} é:

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 16$$

- O cofator de a_{11} é:

$$C_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = M_{11} = 16$$

Fonte: Anton; Rorres (2012, p. 94)

Determinantes por Expansão em Cofatores

- Ainda na matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

- O menor da entrada a_{32} é:

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 26$$

- O cofator de a_{32} é:

$$C_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = -M_{32} = -26$$

Fonte: Anton; Rorres (2012, p. 94)

Determinantes por Expansão em Cofatores

- Um menor M_{ij} e seu cofator correspondente C_{ij} são ou iguais ou negativos um do outro, e o sinal $(-1)^{i+j}$ que os relaciona é +1 ou -1 de acordo com o padrão de tabuleiro de xadrez:

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & + & \cdots \\ - & + & - & + & - & \cdots \\ + & - & + & - & + & \cdots \\ - & + & - & + & - & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}$$

- Por exemplo:

$$C_{11} = M_{11}, \qquad C_{21} = -M_{21}, \qquad C_{22} = M_{22}$$

Fonte: Anton; Rorres (2012, p. 95)

Determinantes por Expansão em Cofatores

- Se A for uma matriz de tamanho n x n, então o número obtido multiplicando as entradas de uma linha ou coluna qualquer de A pelos cofatores correspondentes e somando os produtos assim obtidos é denominado determinante de A.
- As próprias somas são denominadas expansões em cofatores de det(A), ou seja:

$$\det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj}$$

[expansão em cofatores ao longo da coluna *j*]

- e:

$$\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in}$$

[expansão em cofatores ao longo da linha *i*]

Fonte: Anton; Rorres (2012, p. 96)

Determinantes por Expansão em Cofatores

- Exemplo:
  - ✓ Encontre o determinante da matriz expandindo em cofatores ao longo da primeira linha:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 3(-4) - (1)(-11) + 0 = -1$$

Fonte: Anton; Rorres (2012, p. 96)

Teoremas

- Seja A uma matriz quadrada. Se A tem uma linha ou uma coluna de zeros, então det(A) = 0.
- Seja A uma matriz quadrada. Então det(A) = det(A^T).
- Seja A uma matriz n x n:
  - ✓ Se B for a matriz que resulta quando uma única linha ou coluna de A é multiplicada por um escalar k, então det(B) = k det(A);
  - ✓ Se B for a matriz que resulta quando duas linhas ou colunas de A são permutadas, então det(B) = -det(A).
  - ✓ Se B for a matriz que resulta quando um múltiplo de uma linha de A é somado a uma outra linha, ou quando um múltiplo de uma coluna de A é somado a uma outra coluna, então det(B) = det(A).

Fonte: Anton; Rorres (2012, p. 100, 101)

Matrizes Elementares

- Seja E uma matriz elementar n x n:
  - ✓ Se E resulta da multiplicação de uma linha de I_n por um número não nulo k, então det(E) = k.
  - ✓ Se E resulta da permutação de duas linhas de I_n, então det(E) = -1.
  - ✓ Se E resulta da soma de um múltiplo de uma linha de I_n com uma outra linha, então det(E) = 1.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1,$$

Fonte: Anton; Rorres (2012, p. 102)

Linhas ou Colunas Proporcionais

- Se A for uma matriz quadrada com duas linhas proporcionais ou duas colunas proporcionais, então det(A) = 0.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 2 & 6 & -4 & 8 \\ 3 & 9 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 9 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

Fonte: Anton; Rorres (2012, p. 102)

Determinantes por Redução por Linhas

- A ideia do método é reduzir a matriz dada ao formato triangular superior por operações elementares com as linhas, depois calcular o determinante da matriz triangular superior (uma conta fácil) e, finalmente, relacionar esse determinante com o da matriz original.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

- Vamos reduzir A a uma forma escalonada (que é triangular superior):

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$

A primeira e segunda linhas de A foram permutadas.

Fonte: Anton; Rorres (2012, p. 103)

Determinantes por Redução por Linhas

$$= -3\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$

Um fator comum de 3 da primeira linha foi trazido para fora do determinante.

$$= -3\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 10 & -5 \end{vmatrix}$$

-2 vezes a primeira linha foi somado à terceira linha.

$$= -3\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -55 \end{vmatrix}$$

-10 vezes a segunda linha foi somado à terceira linha.

$$= (-3)(-55)\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Um fator comum de -55 da última linha foi trazido para fora do determinante.

$$= (-3)(-55)(1) = 165$$

Fonte: Anton; Rorres (2012, p. 103)

Determinante em Python

```python
# matrix determinant
from numpy import array
from numpy.linalg import det
# define matrix
A = array([
    [1, 2, 3],
    [4, 5, 6],
    [7, 8, 9]])
print(A)
# calculate determinant
B = det(A)
print(B)
```

```
[[1 2 3]
 [4 5 6]
 [7 8 9]]

-9.51619735393e-16
```

https://drive.google.com/drive/folders/1RG_Qi-grF-gViB_s_4m--LfzGPIXYLlV?usp=sharing

Fonte: Brownlee (2018, p. 93, 94)

Mais Teoremas

- Se A e B são matrizes quadradas de mesmo tamanho, então det(AB) = det(A) det(B).
- Se A for invertível, então:

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

Fonte: Anton; Rorres (2012, p. 109, 110)

Matriz de Cofatores e Adjunta

- Se A for uma matriz n x n qualquer e Cij o cofator de a_{ij}, então a matriz é denominada matriz de cofatores de A.

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

- A transposta dessa matriz é denominada adjunta de A e denotada por adj(A).

Fonte: Anton; Rorres (2012, p. 111)

Exemplo de Matriz de Cofatores e Adjunta

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

- Os cofatores de A são:

$$\begin{array}{lll} C_{11} = 12 & C_{12} = 6 & C_{13} = -16 \\ C_{21} = 4 & C_{22} = 2 & C_{23} = 16 \\ C_{31} = 12 & C_{32} = -10 & C_{33} = 16 \end{array}$$

- de modo que a matriz dos cofatores é:

$$\begin{bmatrix} 12 & 6 & -16 \\ 4 & 2 & 16 \\ 12 & -10 & 16 \end{bmatrix}$$

Fonte: Anton; Rorres (2012, p. 111)

Exemplo de Matriz de Cofatores e Adjunta

- Para a matriz dos cofatores:

$$\begin{bmatrix} 12 & 6 & -16 \\ 4 & 2 & 16 \\ 12 & -10 & 16 \end{bmatrix}$$

- A adjunta é:

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 6 & 2 & -10 \\ -16 & 16 & 16 \end{bmatrix}$$

Fonte: Anton; Rorres (2012, p. 111)

Inversa a partir da Adjunta

- Se A for uma matriz invertível, então:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A)$$

Fonte: Anton; Rorres (2012, p. 111)

Regra de Cramer

- Se Ax = b for um sistema de n equações lineares em n incógnitas tal que det(A) = 0, então o sistema tem uma única solução. Essa solução é:

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}, \quad x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}, \ldots, \quad x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}$$

- Em que A_j é a matriz obtida substituindo as entradas da j-ésima coluna de A pelas entradas da matriz:

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Fonte: Anton; Rorres (2012, p. 112)

Regra de Cramer

$$\begin{aligned} x_1 + \quad\quad + 2x_3 &= 6 \\ -3x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 30 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 8 \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 30 & 4 & 6 \\ 8 & -2 & 3 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 \\ -3 & 30 & 6 \\ -1 & 8 & 3 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ -3 & 4 & 30 \\ -1 & -2 & 8 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{-40}{44} = \frac{-10}{11}, \quad x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{72}{44} = \frac{18}{11},$$

$$x_3 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = \frac{152}{44} = \frac{38}{11}$$

Fonte: Anton; Rorres (2012, p. 112)

Regra de Cramer

- Com n > 3, a eliminação de Gauss-Jordan é, em geral, mais eficiente para resolver um sistema linear de n equações em n incógnitas do que a regra de Cramer.

- O uso mais importante dessa regra é na obtenção de propriedades de soluções de um sistema linear sem precisar resolvê-lo.

Fonte: Anton; Rorres (2012, p. 113)

A FAZER

- Aplicações
- Logaritmo
- Introdução ao Cálculo Numérico

FAZENDO

- Determinantes

FEITO

- Teoria dos Conjuntos
- Sistemas Lineares
- Vetores e Matrizes
- Operações com Matrizes
- Inversas e Transpostas
- Espaços Vetoriais e Subespaços

Vamos nos Divertir!

www.kahoot.it

Seu feedback é importante ☺

aplicativo ou portal

A pesquisa se encontra na aba

MBA Experience Survey

Muito obrigado!

A FAZER

- Aplicações
- Logaritmo
- Introdução ao Cálculo Numérico

FAZENDO

FEITO

- Teoria dos Conjuntos
- Sistemas Lineares
- Vetores e Matrizes
- Operações com Matrizes
- Inversas e Transpostas
- Espaços Vetoriais e Subespaços
- Determinantes

Aplicações

- Regressão Linear e Mínimos Quadrados;
- Autovalores e autovetores;
- Análise de Componentes Principais;
- Redes Neurais Convolucionais.

Regressão Linear

- A regressão linear é um método para modelar a relação entre dois valores escalares: a variável de entrada x e a variável de saída y;

- O modelo assume que y é uma **função linear** ou uma soma ponderada da variável de entrada: $y = f(x)$;

- Ou, considerando os coeficientes: $\mathbf{y = a_0 + b_0x}$;

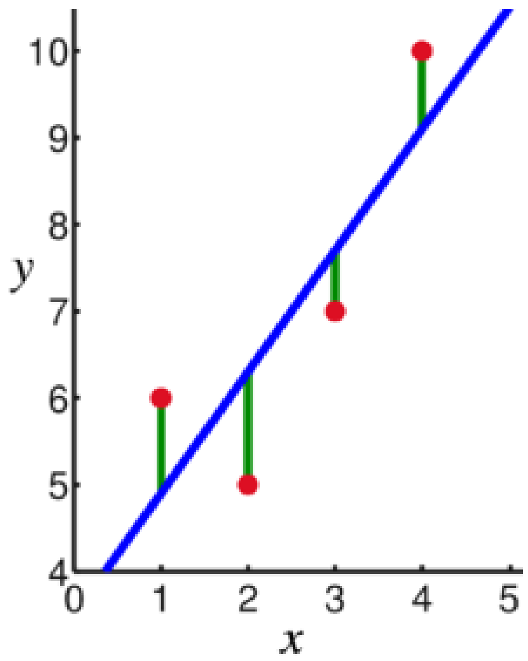
- O modelo também pode ser usado para modelar uma variável de saída com várias variáveis de entrada chamadas regressão linear multivariada:
  $y = b_0 + (b_1x_1) + (b_2x_2) + (b_3x_3) + \cdot\cdot\cdot$

Fonte: Brownlee (2018, p. 160, 161)

Regressão Linear

- O objetivo de criar um modelo de regressão linear é **encontrar os valores para os coeficientes (b) que minimizem o erro na previsão da variável de saída y** (Bownlee, 2019, p. 161).

- Na regressão linear, assume-se que diferença entre os dados de entrada (as observações em **vermelho**) em relação à f(x), que é a relação subjacente (reta em **azul**) entre uma variável dependente (y) e uma variável independente (x), são o resultado de desvios aleatórios (retas **verdes**).



Fonte: Brownlee (2018, p. 160, 161)

Regressão Linear

- A regressão linear pode ser formulada usando a notação matricial: y = Xb
- Reformulado, o problema passa a ser um sistema de equações lineares onde os valores do vetor **b** são desconhecidos (incógnita);
- Esse tipo de sistema é chamado de sobredeterminado porque há mais equações do que incógnitas, ou seja, cada coeficiente é usado em cada linha de dados;
- É um problema desafiador para resolver analiticamente porque existem várias soluções inconsistentes (isto é, vários valores possíveis para os coeficientes).

$$X = \begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,3} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & x_{2,3} \\ x_{3,1} & x_{3,2} & x_{3,3} \\ x_{4,1} & x_{4,2} & x_{4,3} \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$$

Fonte: Brownlee (2018, p. 161)

Regressão Linear e Mínimos Quadrados

- Além disso, todas as soluções terão algum erro porque não há nenhuma linha que passe por quase todos os pontos, portanto, a abordagem para resolver as equações deve ser capaz de lidar com isso.

- A maneira como isso é normalmente alcançado é encontrar uma solução em que os valores de b no modelo minimizem o erro quadrado. Isso é chamado de **mínimos quadrados lineares**:

$$||X \cdot b - y||^2 = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} X_{i,j} \cdot (b_j - y_i)^2$$

- Esta formulação tem uma solução única desde que as colunas de entrada sejam independentes (isto é, não correlacionadas).

Fonte: Brownlee (2018, p. 161)

Regressão Linear

- A primeira abordagem é tentar resolver o problema de regressão diretamente usando a matriz inversa.

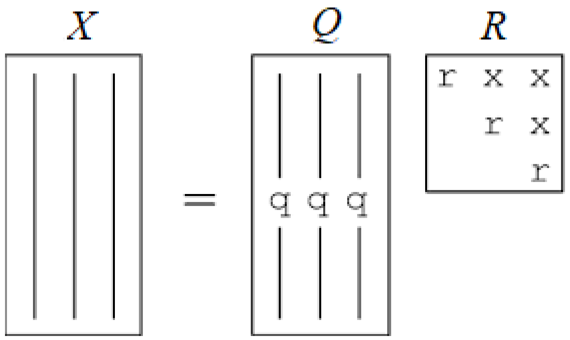
- Ou seja, dado X, quais são os conjuntos de coeficientes b que multiplicados por X dão y.

$$b = (X^T \cdot X)^{-1} \cdot X^T \cdot y$$

Fonte: Brownlee (2018, p. 161)

Regressão Linear

- Além disso, podem ser usadas outras abordagens, tais como:
  - ✓ Decomposição QR;



  - ✓ **Singular-Value Decomposition** (SVD) e Pseudoinversa: padrão de fato para soluções computacionais;
  - ✓ NumPy fornece uma função chamada lstsq() que resolve a função linear de mínimos quadrados usando a abordagem SVD.

- https://drive.google.com/drive/folders/1RG_Qi-grF-gViB_s_4m--LfzGPIXYLlV?usp=sharing

Fonte: Brownlee (2018)

Autovalores e Autovetores

- Na solução da regressão linear pelo método SVD e Pseudoinversa :

$$\overset{\text{Original Matrix}}{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}} = \overset{\text{Eigenvectors Matrix}}{\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}} \overset{\text{Eigenvalues Matrix}}{\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}} \underset{\text{Inverse of Eigenvectors Matrix}}{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}}$$

- Logo, precisamos entender os conceitos de Autovalores (*eigenvalues*) e Autovetores (*eigenvectors*).

Autovalores e Autovetores

- Se A for uma matriz n x n, então um vetor não nulo **x** em R^n é denominado **autovetor** (*eigenvector*) de A (ou do operador matricial T_A) se A_x for um múltiplo escalar de x, isto é,

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

- com algum escalar λ.

- O escalar λ é denominado **autovalor** (*eigenvalue*) de A (ou de T_A), e dizemos que **x** é um autovetor associado a λ.

Fonte: Anton; Rorres (2012, p. 111)

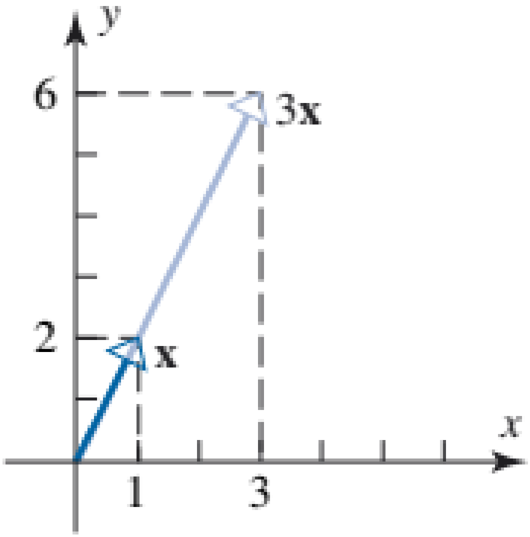
Autovalores e Autovetores

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$$

- O vetor **x** é um autovetor de A associado ao autovalor λ=3, pois:

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = 3\mathbf{x}$$

- Geometricamente, a multiplicação por A expandiu o vetor x pelo fator 3:



Fonte: Anton; Rorres (2012, p. 296)

Calculando Autovalores

- Se A for uma matriz n x n, então λ é um autovalor de A se, e somente se, satisfaz a equação det(λI - A) = 0 (essa equação é a **equação característica** de A).
- Exemplo em uma matriz 2 x 2 (a mesma do slide anterior):
  - ✓ A partir da fórmula det(λI - A) = 0:

$$\begin{vmatrix} \lambda - 3 & 0 \\ -8 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = 0$$

  - ✓ (λ - 3)(λ + 1) = 0, logo, ou λ = 3, ou λ = -1.

Fonte: Anton; Rorres (2012, p. 297)

Calculando Autovetores

- A partir da fórmula:

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

- Ou seja (considerando a matriz dos slides anteriores):

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3a \\ 3b \end{bmatrix} = 3\mathbf{x}$$

- Multiplicando a matriz e o vetor: 3a + 0b = 3a e 8a – 1b = 3b → 8a=4b → a=b/2 ou **b=2a** (ou seja, múltiplas soluções; 1, 2 é a mais trivial).

Fonte: Anton; Rorres (2012, p. 297)

Calculando Autovetores

- A outra possibilidade (autovetor para λ = -1):

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a \\ -b \end{bmatrix} = -1\mathbf{x}$$

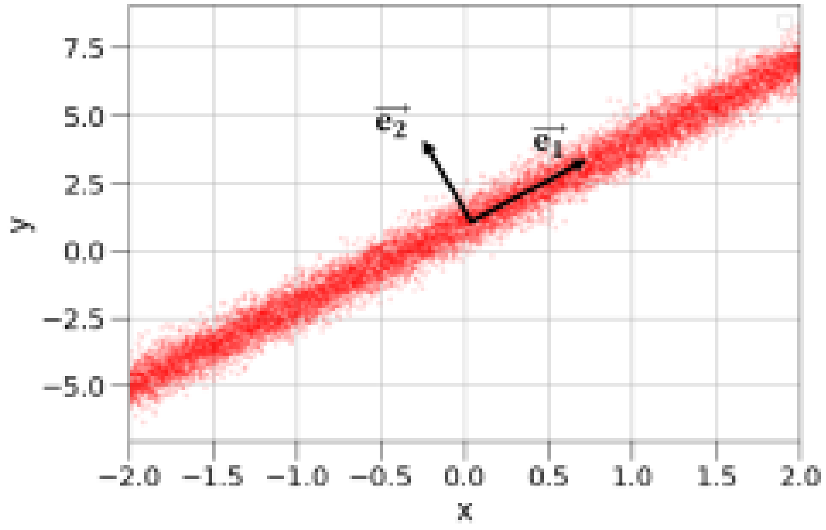
- Multiplicando a matriz e o vetor: 3a + 0b = -1a e 8a - 1b = -1b
  → pela primeira fórmula: 3a = -1a → a = 0
  → pela segunda fórmula: 8a = 0 → a = 0
  (ou seja, múltiplas soluções; b pode ser qualquer número, basta que **a=0**).

- https://drive.google.com/drive/folders/1RG_Qi-grF-gViB_s_4m--LfzGPIXYLIV?usp=sharing

Fonte: Anton; Rorres (2012, p. 297)

Análise de Componentes Principais

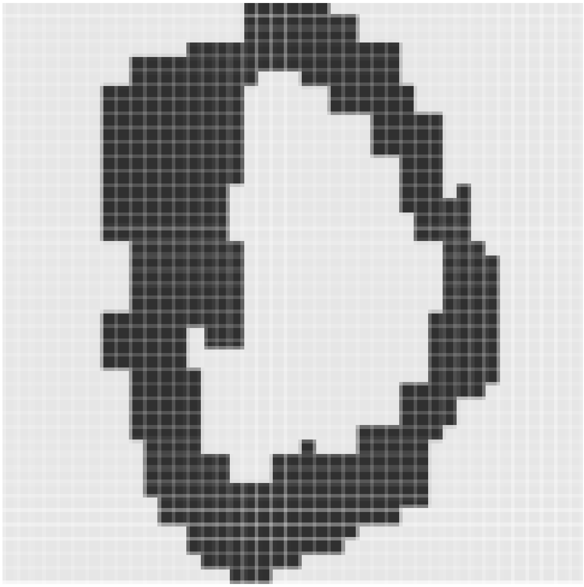
- Os autovalores e autovetores também são usados na técnica análise de componentes principais (PCA – ***Principal Component Analysis***).
  - ✓ A redução de dimensionalidade por meio do PCA considera, dentro do contexto da álgebra linear, os conceitos de **autovalores** e **autovetores**.
  - ✓ Tem-se que a direção que concentra a maior variância de um sistema de dimensão n coincide com a de um dos n autovetores do sistema.



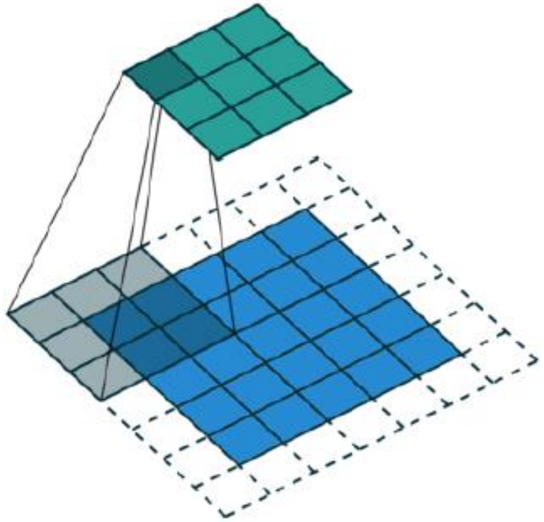
Fonte: Alpaydin (2009) apud Silva(2022, p. 52)

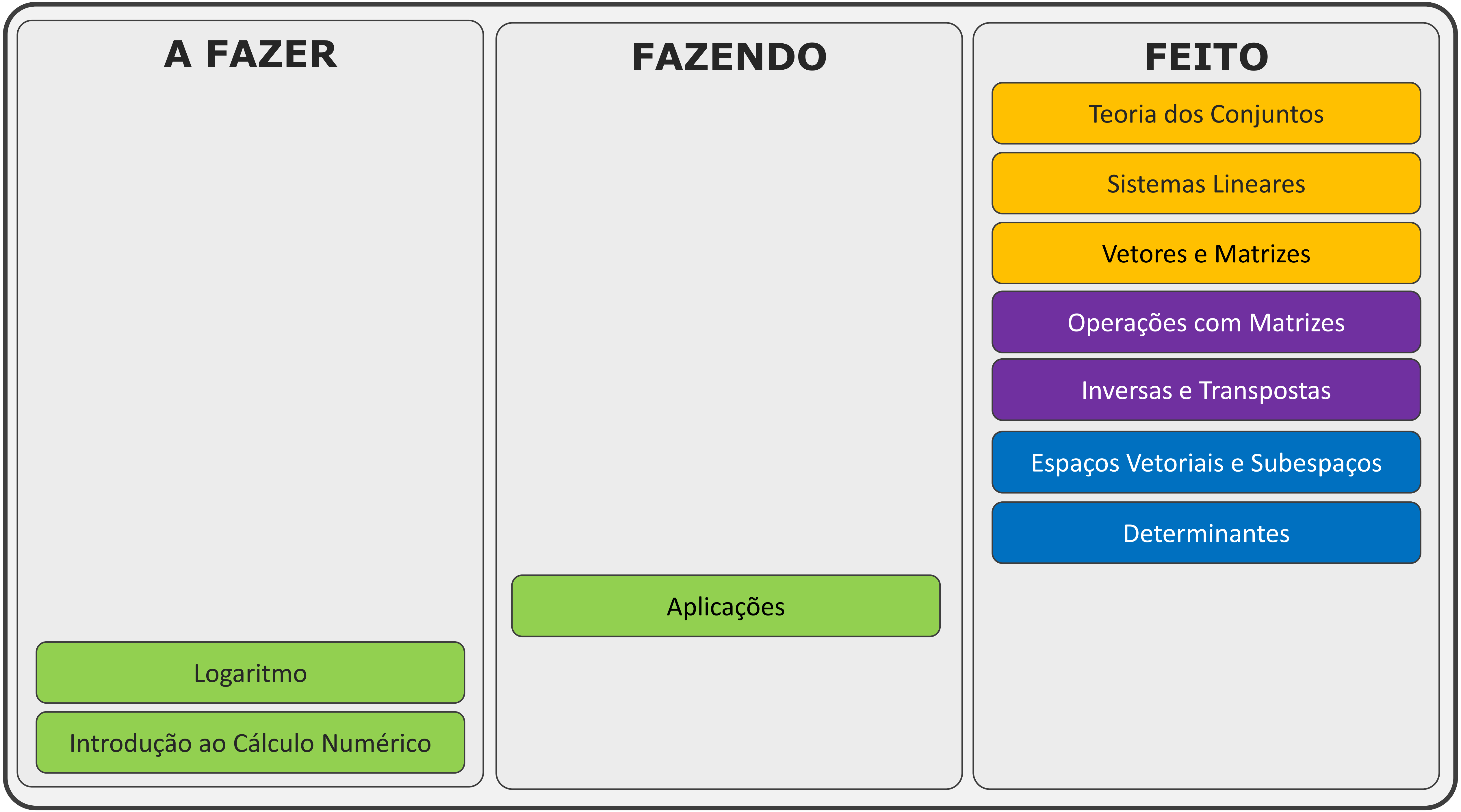
Redes Neurais Convolucionais

- Dados de entrada em formato matricial:



- Mapeamento de uma região da imagem em um mapa de atributos:
  - ✓ Conceito de partição de matrizes;
  - ✓ Conceito de espaço vetorial;
  - ✓ Conceito de produto escalar.





A FAZER
Logaritmo
Introdução ao Cálculo Numérico
FAZENDO
Aplicações
FEITO
Teoria dos Conjuntos
Sistemas Lineares
Vetores e Matrizes
Operações com Matrizes
Inversas e Transpostas
Espaços Vetoriais e Subespaços
Determinantes

Logaritmo

- Sendo *a* e *b* números reais e positivos, com $a \neq 1$, chama-se logaritmo de *b* na base *a* o expoente que se deve dar à base *a*, de modo que a potência obtida seja igual a *b*.

- Ou seja, se $a, b \in R$, $0 < a \neq 1$ e $b > 0$, então:

$$\log_a b = x \leftrightarrow a^x = b$$

- Em $\log_a b = x$, dizemos:

- *a* é a **base** do logaritmo, *b* é o **logaritmando** e *x* é o **logaritmo**.

Fonte: Iezzi; Dolce; Murakami(2013, p. 57)

Propriedades

1. Uma função logarítmica L: $R^+ \to R$ é sempre injetiva (injetora), isto é, números positivos diferentes têm logaritmos diferentes;

2. O logaritmo de 1 é 0 (zero);

3. Os números maiores do que 1 têm logaritmos positivos e os números positivos menores do que 1 têm logaritmos negativos;

4. Para todo $x > 0$, tem-se $L(1/x) = -L(x)$;

5. Para quaisquer $x, y \in R$, vale $L(x/y) = L(x) - L(y)$;

6. Para todo $x \in R^+$ e todo número racional $r = p/q$, têm-se $L(x^r) = r \, . \, L(x)$;

7. Uma função logarítmica L: $R^+ \to R$ é ilimitada, superior e inferiormente.

Fonte: Lima (1991, p. 13, 14, 15)

Teoremas e Corolário

- **Teorema**: Dadas as funções logarítmicas L, M: $R^+ \to R$, existe uma constante $c > 0$, tal que $M(x) = c \,.\, L(x)$, para todo $x > 0$;

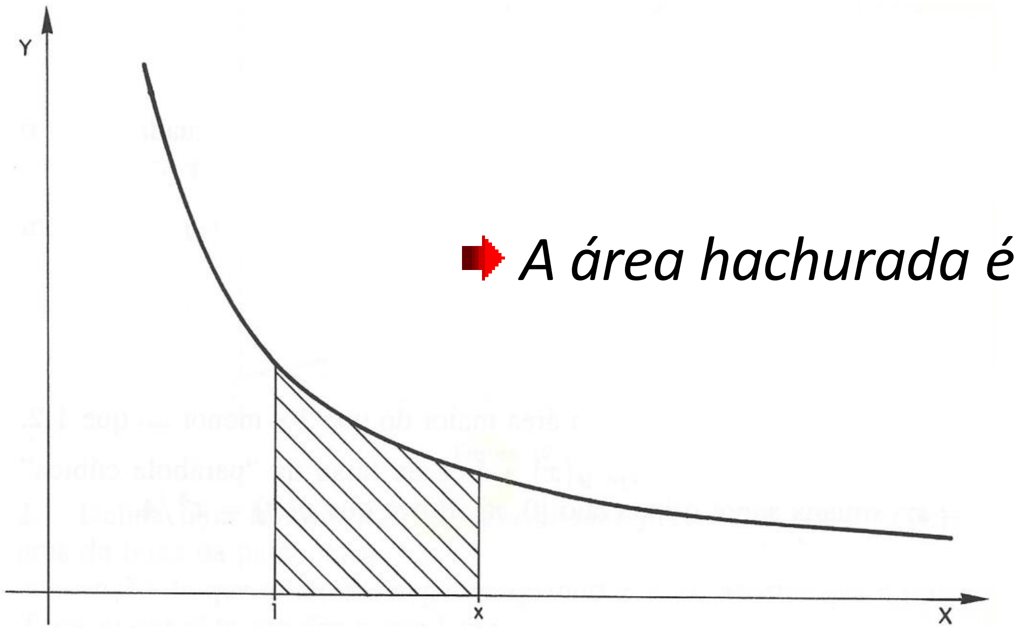
- **Teorema**: Toda função logarítmica é sobrejetiva (sobrejetora), isto é, dado qualquer número real c, existe sempre um (único) número real positivo x, tal que $L(x) = c$.

- **Corolário**: Toda função logarítmica L: $R^+ \to R$ é uma correspondência biunívoca (bijetora) entre R^+ e R.

Fonte: Lima (1991, p. 17, 18, 21)

Logaritmos Naturais

- Seja *x* um número real positivo. Definiremos o **logaritmo natural** (ou logaritmo neperiano) de x como a área da faixa H^x_1 .
- Assim, por definição, quando x > 0, escrevendo ln x para indicar o logaritmo natural de x, temos:
- Ln x = Área (H^x_1)



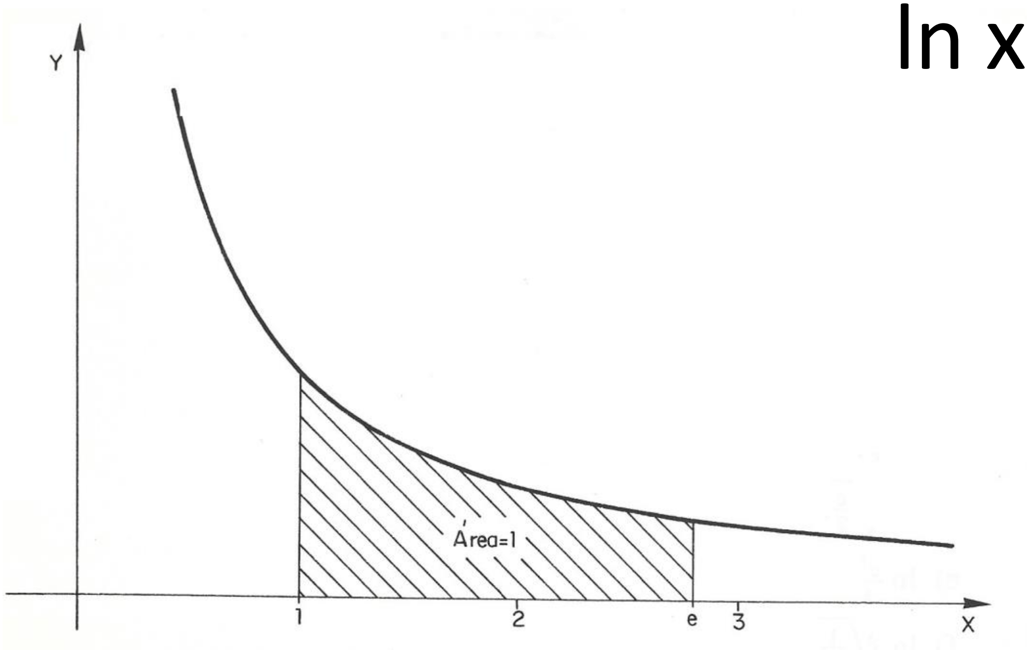
- *A área hachurada é igual a ln x.*

Fonte: Lima(1991, p. 44)

O Número *e*

- Em virtude do segundo teorema apresentado no slide 159, existe um único número real positivo cujo logaritmo natural é igual a 1;
- Tal número é representado pela letra ***e***;
- Ele é a base do sistema de logaritmos naturais.

$$\ln x = 1 \leftrightarrow x = e$$



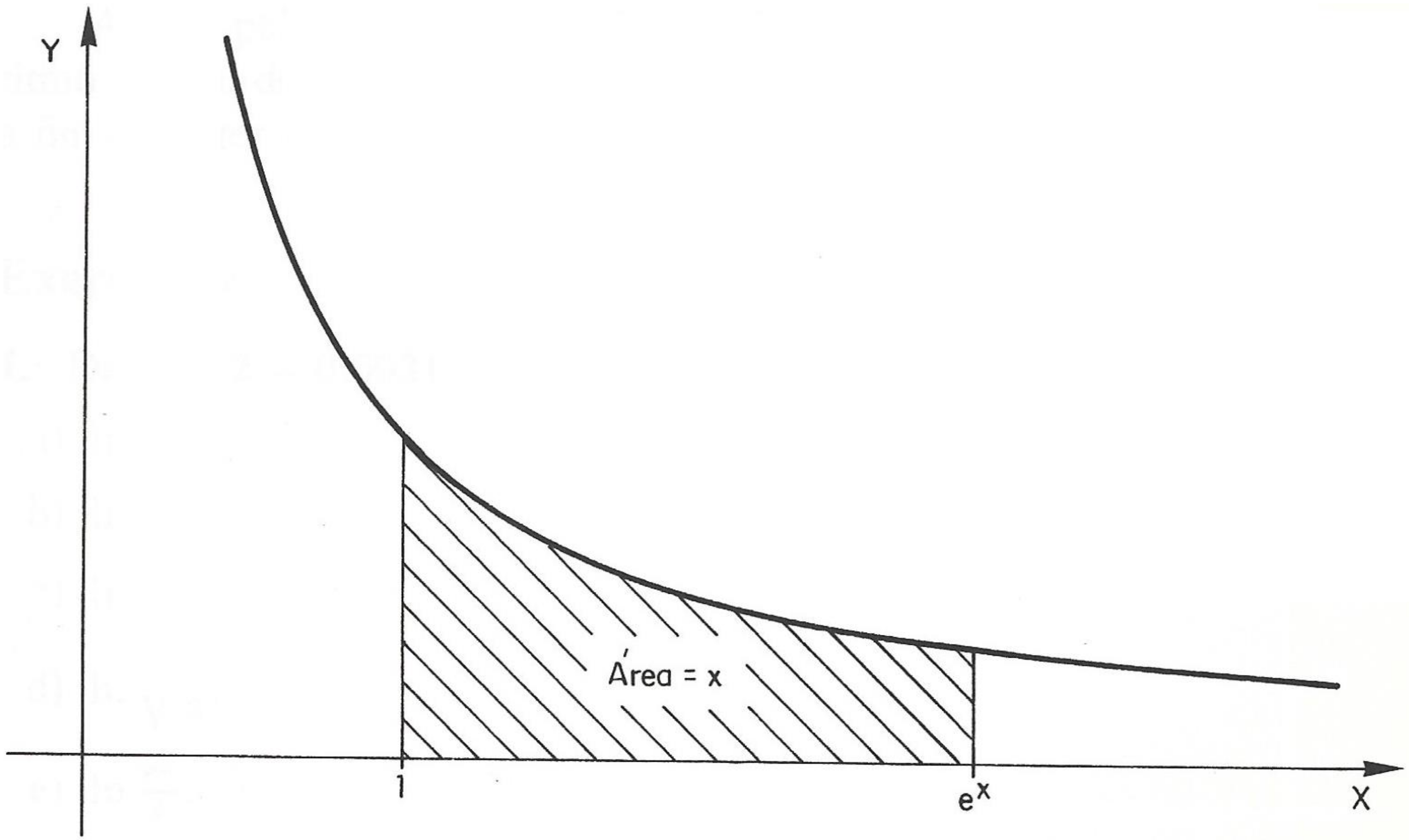
$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots$$

Fonte: Lima(1991, p. 53)

A Função Exponencial

- Dado o número real *x*, e^x é o único número positivo cujo logaritmo natural é x.

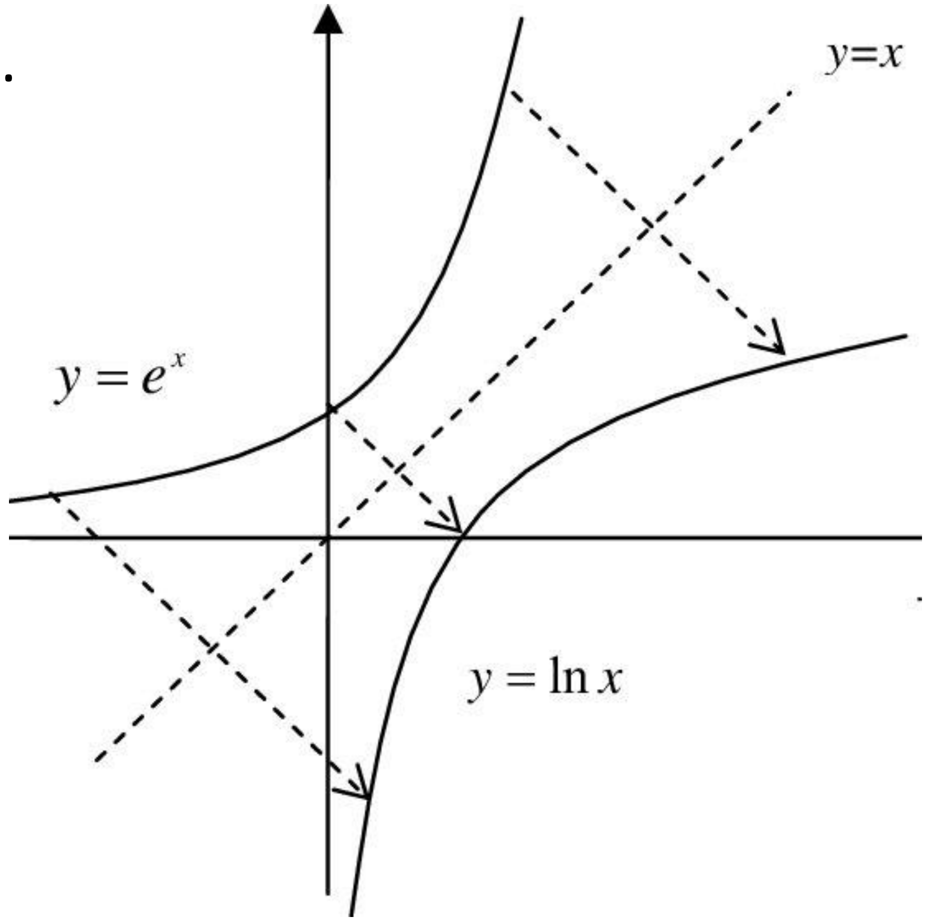
$$\ln e^x = x$$



Fonte: Lima(1991, p. 53)

Aplicação

- Logaritmos são úteis no tratamento de dados não lineares.
- Em alguns casos, em razão de **crescimento exponencial**, é mais fácil trabalhar com o logaritmo de uma função exponencial do que com a própria função exponencial em problemas de Machine Learning.
- Em outros casos, quando a **diferença de magnitude** entre os pontos de dados é muito grande, é mais fácil trabalhar com os logaritmos dos dados.



- Texto recomendado: https://towardsdatascience.com/logarithms-what-why-and-how-ff9d050d3fd7

A FAZER

- Introdução ao Cálculo Numérico

FAZENDO

- Logaritmo

FEITO

- Teoria dos Conjuntos
- Sistemas Lineares
- Vetores e Matrizes
- Operações com Matrizes
- Inversas e Transpostas
- Espaços Vetoriais e Subespaços
- Determinantes
- Aplicações

Introdução ao Cálculo Numérico

- O Cálculo Numérico contempla diversos métodos numéricos para resolver problemas matemáticos, tais como:
  - ✓ Arredondamento em ponto flutuante;
  - ✓ Equações não lineares;
  - ✓ Sistemas lineares (métodos iterativos);
  - ✓ Determinação de autovalores e autovetores;
  - ✓ Método dos Mínimos Quadrados;
  - ✓ Métodos de Interpolação Polinomial;
  - ✓ Integração Numérica;
  - ✓ Solução de Equações Diferenciais Ordinárias;
  - ✓ Solução de Equações Diferenciais Parciais.

Fonte: Franco (2007)

Exemplo: Método da Eliminação de Gauss

FIAP

- Na nossa disciplina, nós abordamos os Métodos da Eliminação de Gauss e Gauss-Jordan.
- O Método de Eliminação de Gauss consiste em transformar um sistema linear dado num sistema triangular equivalente, por meio de uma sequência de operações elementares sobre as linhas do sistema original.
- Basicamente, o sistema equivalente é obtido pela aplicação repetida da operação:
  - ✓ Substituir uma equação pela diferença dessa mesma equação e uma outra equação multiplicada por uma constante diferente de zero.

- https://drive.google.com/drive/folders/1RG_Qi-grF-gViB_s_4m--LfzGPIXYLlV?usp=sharing

Fonte: Franco (2007, p.129)

Vantagens do Cálculo Numérico

- A grande vantagem da aplicação dos algoritmos do Cálculo Numérico na resolução de problemas é o ganho no tempo de resolução.
- Mesmo com os computadores mais velozes de hoje, levaria milhões de anos para calcular um determinante 25 x 25 por expansão em cofatores, motivo pelo qual, para determinantes grandes, são utilizados, muitas vezes, métodos com base em redução por linhas. Para determinantes pequenos, uma escolha razoável é a expansão em cofatores (Anton; Rorres, 2012, p. 103).
- **Caso real**: na minha época de faculdade, eu construí um programa recursivo que aplicava o algoritmo de expansão em cofatores para calcular determinantes. Como meu computador (um 486 DLC de 40GHz) travou, eu estimei quanto tempo levaria para calcular o determinante de uma **matriz 20 x 20** no meu computador: **1,5 milhões de anos** (fórmula: k x n!).
  - ✓ Com o método numérico da Eliminação de Gauss, meu 486 resolvia matrizes 20 x 20 a 30 x 30 em, aproximadamente, 20 segundos.
  - ✓ Para saber o tempo necessário para calcular uma matriz 25 x 25 no meu antigo 486 com o método da expansão em cofatores, basta multiplicar **1,5 milhões de anos** por 25x24x23x22x21 = 9,563 trilhões de anos.

Gráfico do Fatorial

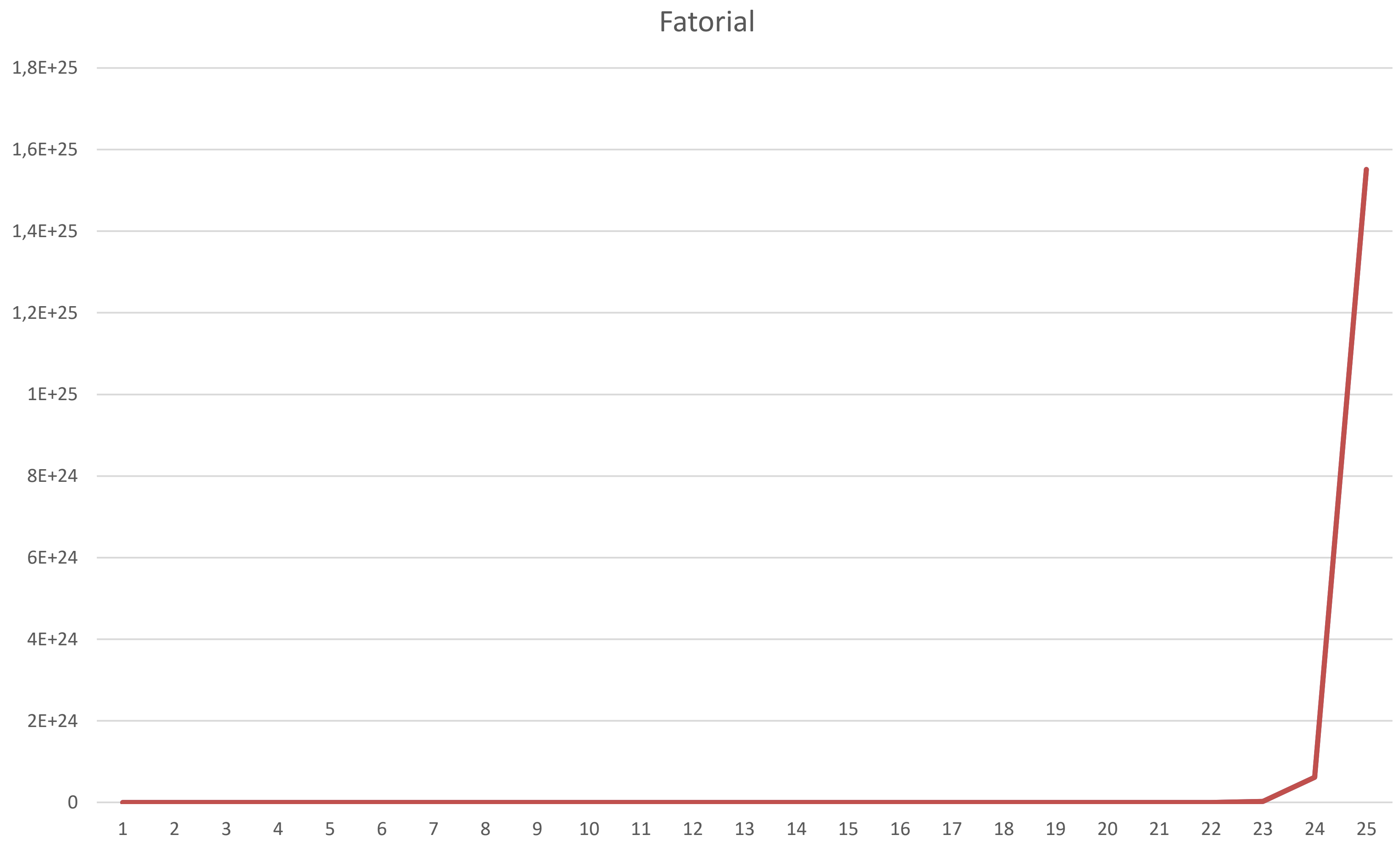
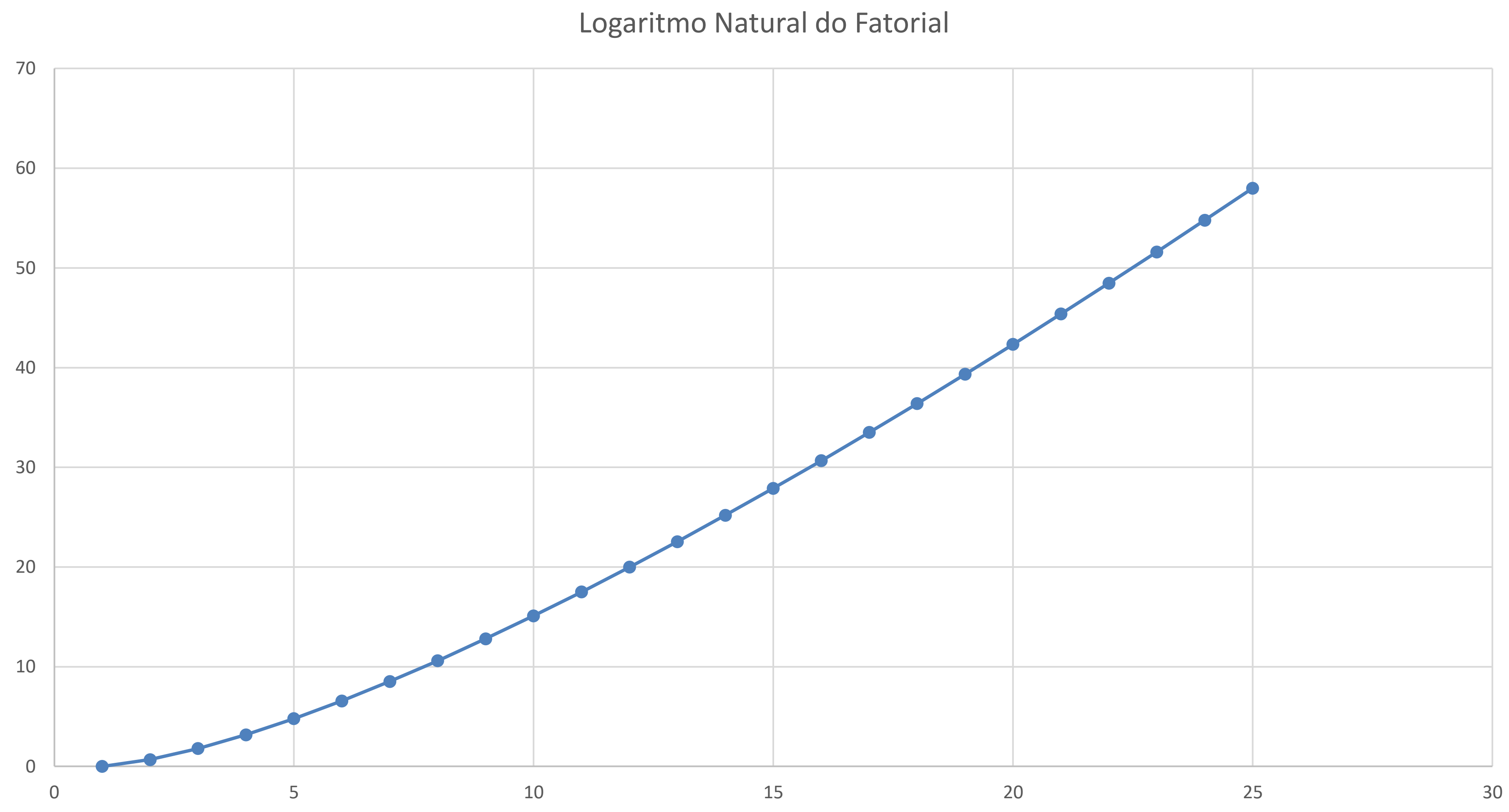
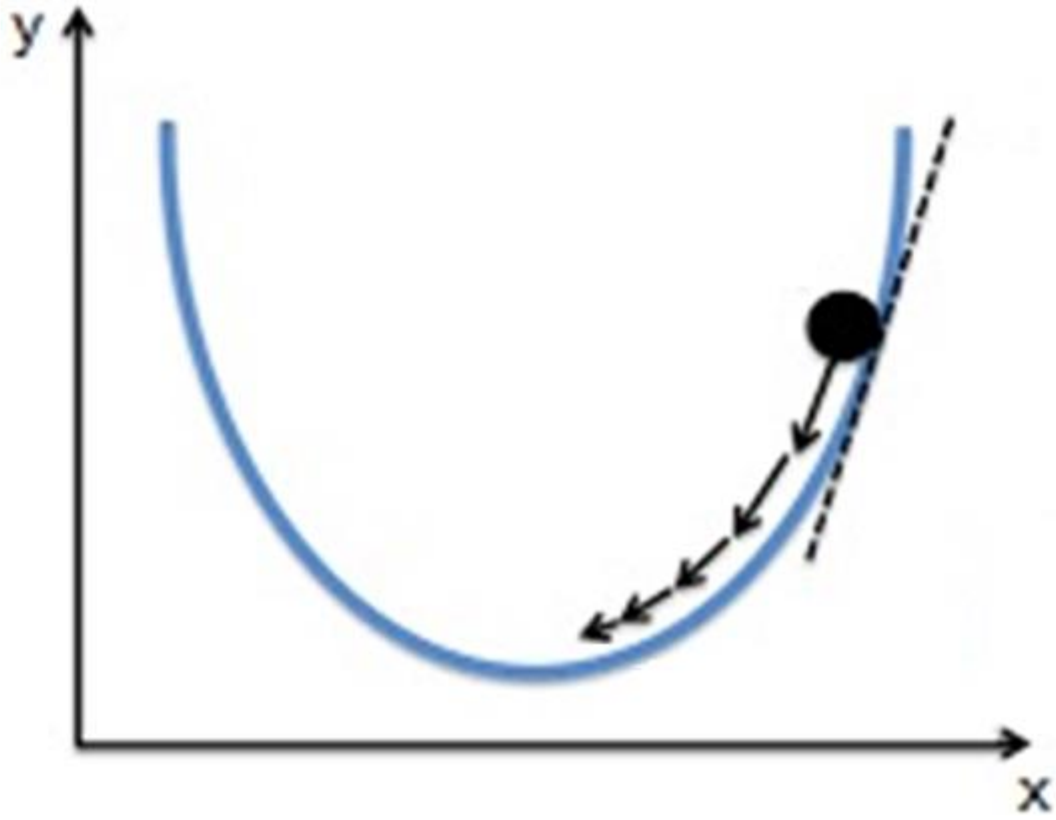


Gráfico do Logaritmo Natural do Fatorial



Exemplo: Mínimos Quadrados

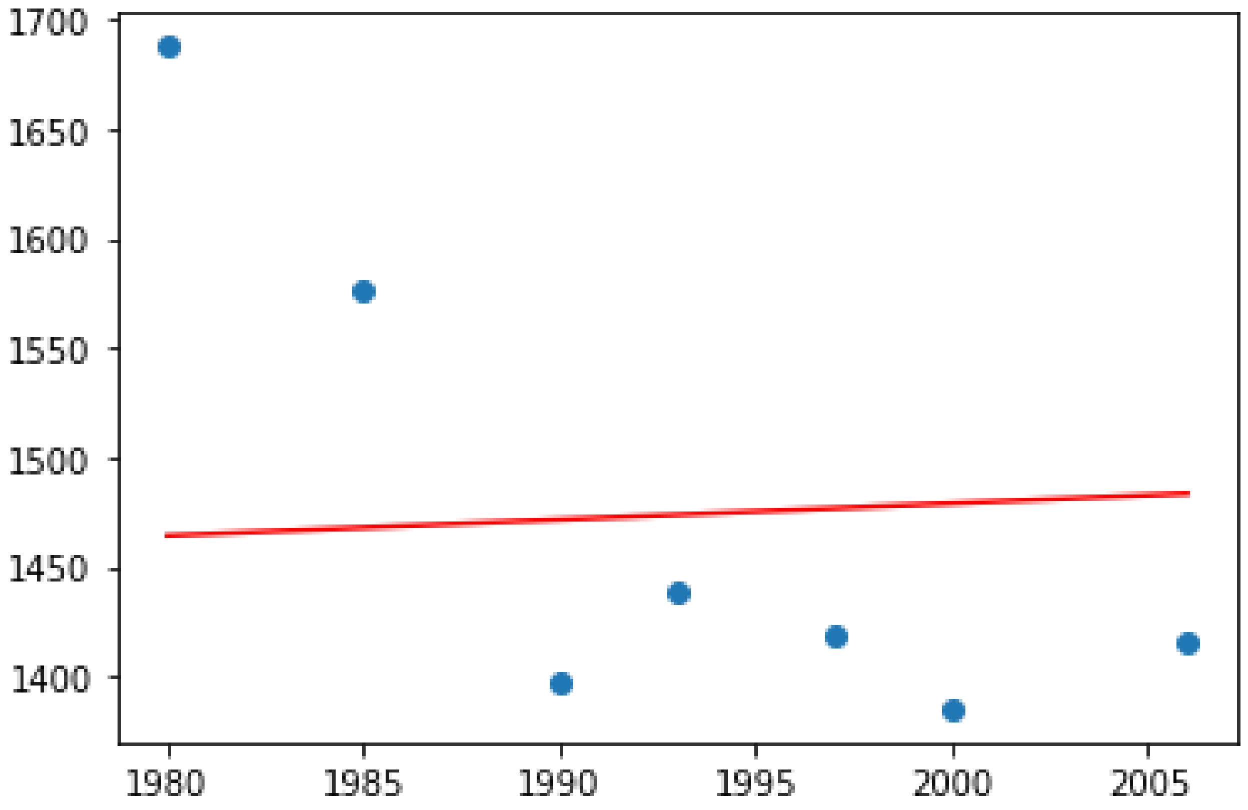
- Nos slides a seguir, será apresentada uma solução da regressão linear, aplicando os conceitos de **Mínimos Quadrados** e **Descida do Gradiente**.



Método dos Mínimos Quadrados

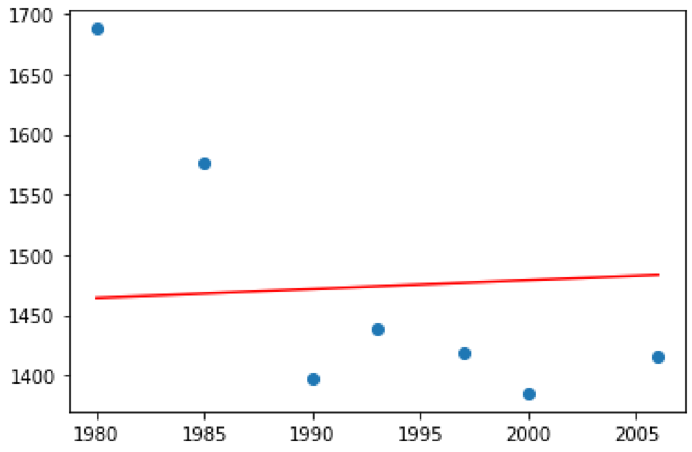
- Nosso objetivo consiste em resolver o seguinte problema:
aproximar uma função y = f(x) (real e de variável real) por uma função reg(x).

- f(x) é conhecida através de pares de pontos, obtidos por meio de medidas experimentais, e desejamos substituí-la por uma função reg(x) (reg de regressão linear), cujo gráfico se ajuste aos pontos observados.



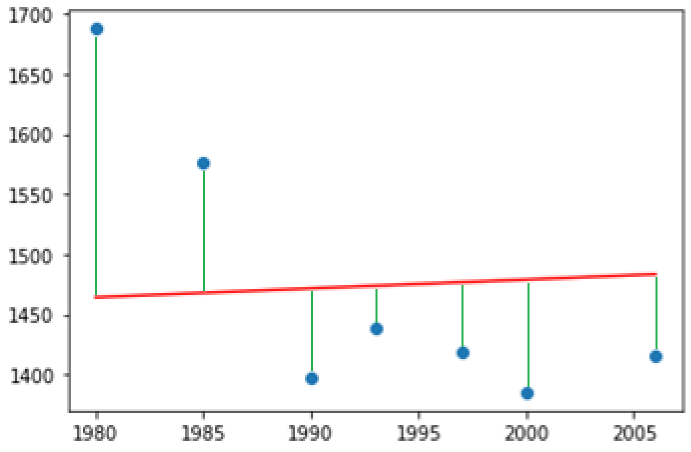
Fonte: adaptado de Franco (2007, p. 247)

Equação da Reta



- Equação da reta:
  $y = f(x) = mx + b$
- m é uma constante e indica o coeficiente angular, ou seja, o quão inclinada estará a reta;
- b é uma constante e indica o coeficiente linear, ou seja, o quanto a reta estará deslocada em relação ao ponto x = 0, y = 0.
  b é o ponto no qual a reta corta o eixo y.
- Dessa forma, queremos encontrar uma equação da reta reg = mx + b, que seja a melhor solução aproximada à equação f(x).
- Nós não conhecemos a equação f(x). Mas, **nós obtivemos dados experimentais e assumimos a premissa de que eles se comportam de acordo com a equação** f(x).
- Entretanto, também assumimos que nossos dados experimentais contém um erro (variação em relação à equação f(x) e, consequentemente, em relação à equação reg).

Erro e Função de Custo



- Em cada ponto, o erro é a distância entre o ponto (em azul) e a reta da equação f(x) (em vermelho). A distância de cada ponto está destacada nas linhas verdes.
- Em razão do erro, a formulação completa de f(x) se torna:
  $y = f(x) = mx + b + \varepsilon$
- A soma de todos os erros compõem a função custo:

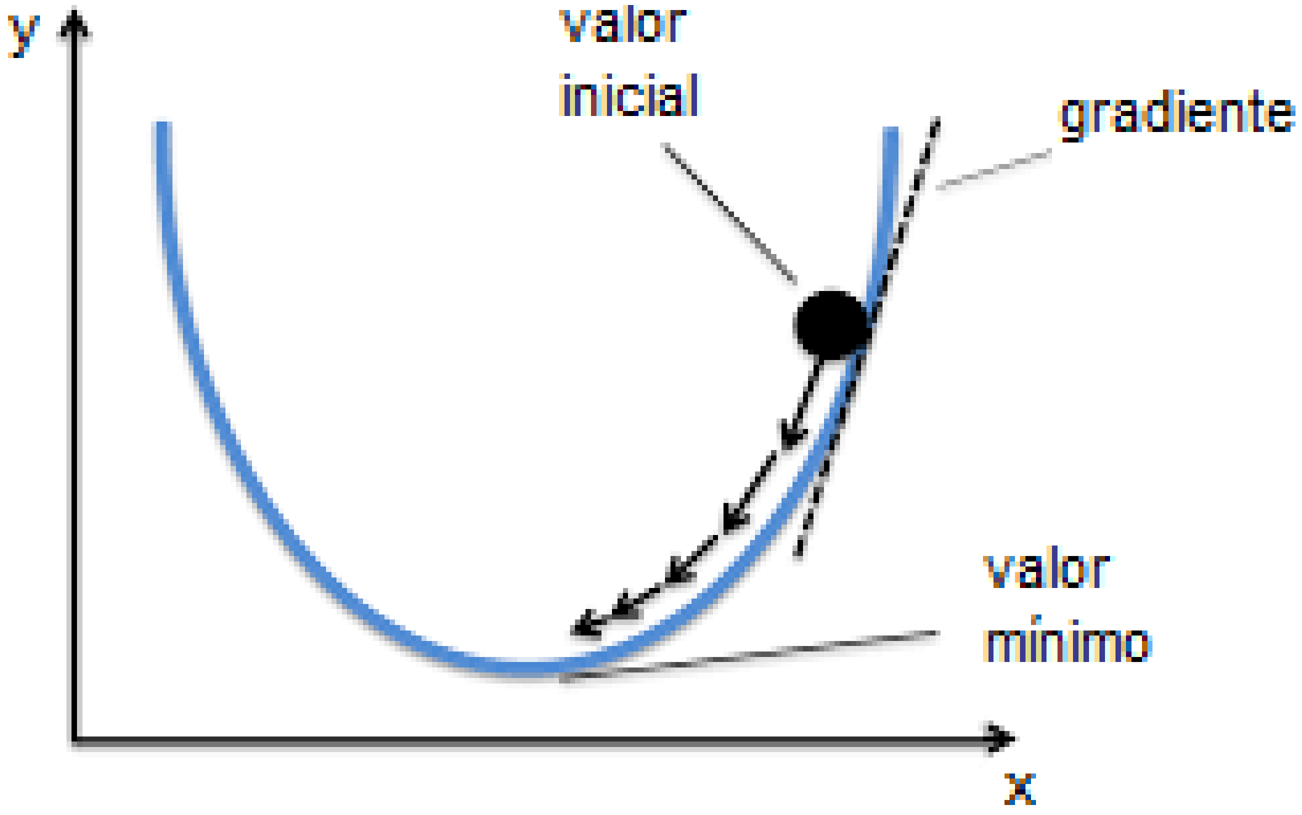
$$custo = \sum_{i=1}^{n} (reg_i - y_i)^2$$

- Qual é a nossa missão?
  Encontrar valores de m e b que minimizem a função de custo. Ou seja, valores de m e b para a equação reg = mx + b, que formem a melhor solução aproximada da equação f(x).

Gráfico da Função Custo

- Onde o **gradiente** é a taxa de variação, a inclinação da reta tangente, a derivada nesse ponto.

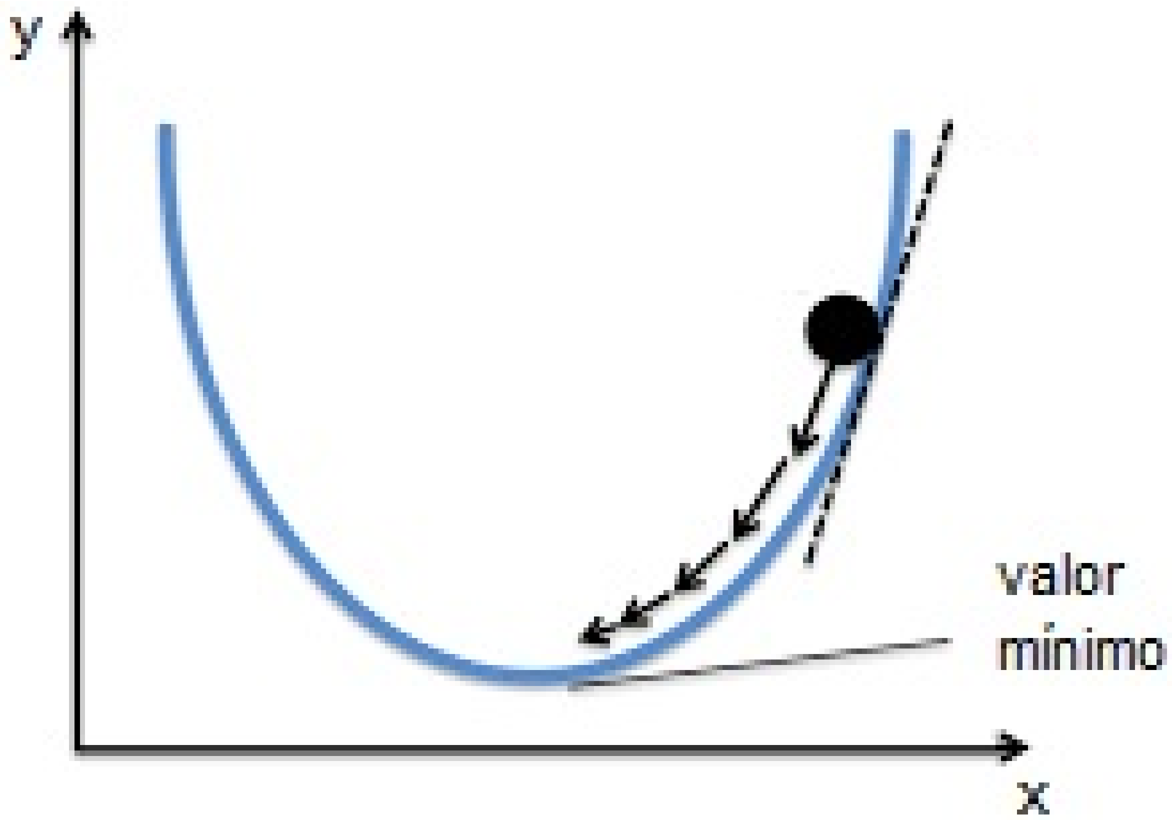
- Quanto mais próximo do ponto do valor mínimo, menor a inclinação da reta tangente, ou seja, menor é a taxa de variação.



- Dessa forma, chamamos de **descida do gradiente**, pois, conforme se aproxima do ponto mínimo (na visão gráfica), ocorre um decréscimo na taxa de variação.

Como Acelerar a Convergência?

- **Alternativa 1**: Selecionar valores aleatórios de m e b (por exemplo, milhões de possibilidades). Calcular a função de custo e escolher o menor (alto custo computacional).



- **Alternativa 2**: Selecionar valores iniciais de m e b. Calcular a função de custo e convergir para o mínimo em uma taxa fixa (demora mais para convergir, em comparação com a Alternativa 3).

- **Alternativa 3**: Selecionar valores iniciais de m e b. Calcular a função de custo e convergir para o mínimo em uma taxa variável (mais alta quando estiver distante do mínimo e mais baixa quando estiver próxima do mínimo).

Resolução da Derivada (∂ custo/∂ m)

- $m \leftarrow m - \alpha \dfrac{\partial\, custo}{\partial\, m}$

- $\dfrac{\partial\, custo}{\partial\, m} = \dfrac{\partial\, custo}{\partial\, erro} \cdot \dfrac{\partial\, erro}{\partial\, m}$

- $\dfrac{\partial\, custo}{\partial\, m} = \Sigma\ 2.\ erro\ .\ X_i$

- $\dfrac{\partial\, custo}{\partial\, m} = 2\ .\ \Sigma\ ((mx_i + b - y_i)\ .\ X_i)$

$m \leftarrow$ **$m - \alpha\ .\ 2\ .\ \Sigma\ ((mx_i + b - y_i)\ .\ x_i)$**

$$custo = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{(reg_i - y_i)}_{erro}{}^2$$

$erro = reg_i - y_i = mx_i + b - y_i$

Resolução da Derivada (∂ custo/∂ b)

- $b \leftarrow b - \beta \dfrac{\partial\ custo}{\partial\ b}$

- $\dfrac{\partial\ custo}{\partial\ b} = \dfrac{\partial\ custo}{\partial\ erro} \cdot \dfrac{\partial\ erro}{\partial\ b}$

- $\dfrac{\partial\ custo}{\partial\ b} = \Sigma\ 2.\ erro\ .\ 1$

- $\dfrac{\partial\ custo}{\partial\ b} = 2\ .\ \Sigma\ (mx_i + b - y_{i)}$

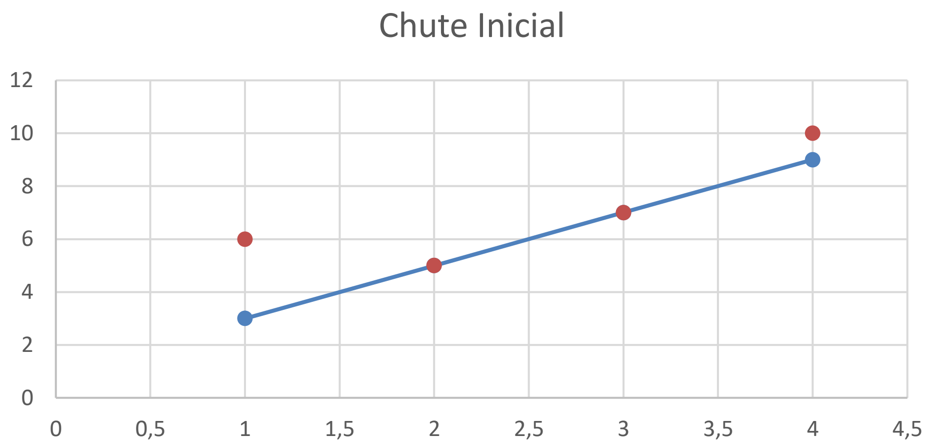
- $b \leftarrow$ **$b - \beta\ .\ 2\ .\ \Sigma\ (mx_i + b - y_i)$**

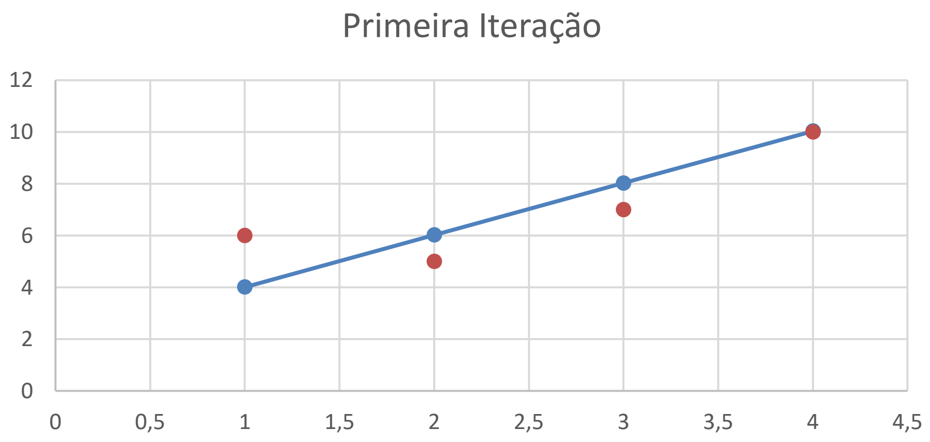
$$custo = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{(reg_i - y_i)}_{erro}^{2}$$

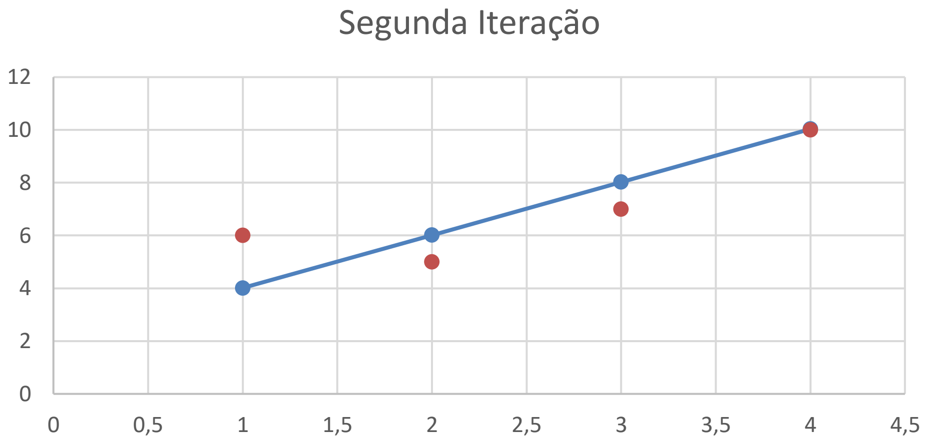
$erro = reg_i - y_i = mx_i + b - y_i$

Aplicação no Excel

x	y
1	6
2	5
3	7
4	10







A FAZER

FAZENDO

- Introdução ao Cálculo Numérico

FEITO

- Teoria dos Conjuntos
- Sistemas Lineares
- Vetores e Matrizes
- Operações com Matrizes
- Inversas e Transpostas
- Espaços Vetoriais e Subespaços
- Determinantes
- Aplicações
- Logaritmo

Vamos nos Divertir!

Kahoot!

www.kahoot.it

Seu feedback é importante ☺

aplicativo ou portal

A pesquisa se encontra na aba

MBA Experience Survey

Muito obrigado!

Bibliografia Básica

ALPAYDIN, Ethem. Introduction to machine learning. 2nd ed., MIT press, 2009.

ANTON, Howard; RORRES, Chris. **Álgebra Linear com Aplicações.** 10ª Edição. Porto Alegre: Bookman, 2012.

BREGALDA, Paulo F.; OLIVEIRA, Antonio A. F. de; BORNSTEIN, Cláudio T. **Introdução a Programação Linear.** 3ª ed. Rio de Janeiro: Campus, 1988.

BROWNLEE, Jason. ***Basics of Linear Algebra for Machine Learning:*** *Discover the Mathematical Language of Data in Python.* 2ª ed. MachineLearningMastery.com: 2021.

CALLIOLI, Carlos. A.; DOMINGUES, Hygino H.; COSTA, Roberto C. F. **Álgebra Linear e Aplicações**. 7ª ed. Atual Editora: 2000.

DEISENROTH, Marc Peter; FAISAL, A. Aldo; ONG, Cheng Soon. ***Mathematics for Machine Learning.*** Cambridge University Press: Abril/2020.

FEITOSA, Hércules de Araújo; NASCIMENTO, Mauri Cunha do; ALFONSO, Alexys Bruno**. Teoria dos Conjuntos.** 1ª ed. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda.: setembro/2021.

FRANCO, Neide Maria Bertoldi. **Cálculo Numérico.** 1ª ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006.

Bibliografia Básica

KAHNEMAN, Daniel. ***Thinking, Fast and Slow.*** New York: Farrar, Straus and Giroux, 2011.

KELLEHER, John D.; TIERNEY, Brendan. ***Data Science.*** Cambridge, MA: The MIT Press: 2018. (The MIT Press Essential Knowledge Series)

IEZZI, Gleison; DOLCE, Osvaldo; MURAKAMI, Carlos. **Fundamentos de Matemática Elementar:** Logaritmos. 10a ed. São Paulo: Atual Editora, 2013, v.2.

LIMA, Elon Lages. **Logaritmo**s. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 1991.

LIPSCHUTZ, Seymour. **Álgebra Linear.** 3ª ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 1994.

MAGALHÃES, Marcos Nascimento; LIMA, Antonio Carlos Pedroso de. **Noções de Probabilidade e Estatística**. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo (EDUSP): 2015.

SILVA, Lucas Marin da. **Redes neurais convolucionais para predição de probabilidade de erro de bit em sistemas de comunicações ópticas coerentes digitais limitados por modulação de fase não linear**, 2022. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) - Universidade Estadual de São Paulo, São João da Boa Vista, São Paulo, 2006.

STRANG, Gilbert. **Álgebra Linear e Suas Aplicações.** 4ª ed. Cengage Learning: 2010.

Bibliografia Complementar

BOLDRINI, J. L., COSTA, S. I. R., FIGUEIREDO, V. L. e WETZLER, H. G. **Álgebra Linear.** 3ª ed. Editora Harbra:1986.

DERBYSHIRE, John. ***Prime Obsession:*** *Bernhard Riemann and the Greatest Unsolved Problem in Mathematics.* Washington, D.C.: National Academies Press, 2003.

HOFFMAN, Kenneth; KUNZE, Ray. **Álgebra Linear.** Pearson. 2 ª Edição Revisada. Pearson: abril/1971.

RUGGIERO, M. A. G. e LOPES, V. L. da R. **Cálculo Numérico** - Aspectos Teóricos e Computacionais. 2ª ed. Makron Books: 1996.

SANTOS, Rafael F.V.C. **Álgebra Linear com Python:** Aprenda na Prática os Principais Conceitos. 1ª ed. 2018. (Cientista de dados - Analista Quant Livro 1)

STEINBRUCH, Alfredo; WINTERLE, Paulo. **Álgebra Linear.** 2ª ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 1987.

STRANG, Gilbert. **Introduction to Linear Algebra.** 3ª ed. Wellesley-Cambridge Press: 2003.

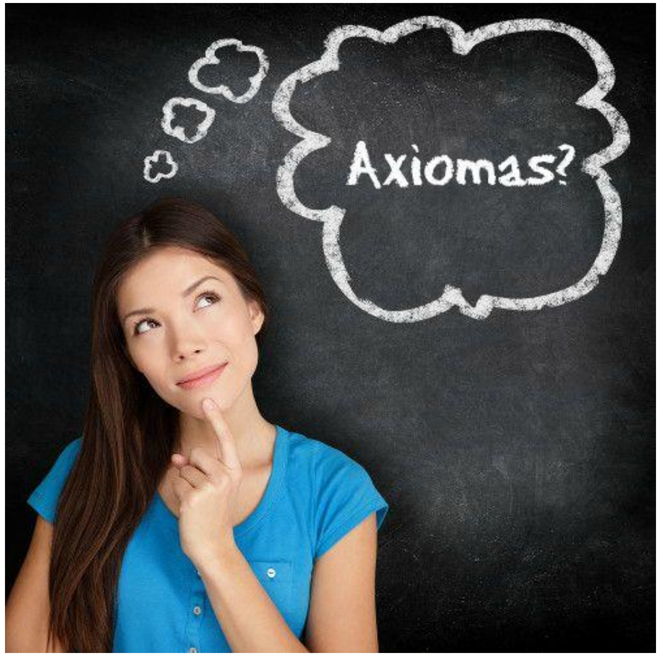
STRANG, Gilbert. ***Linear Algebra and Learning from Data.*** Wellesley-Cambridge Press: 2019.

WATKINS, D. S. **Fundamentals of Matrix Computations.** 3ª ed. John Wiley & Sons: 2002.

Anexo: Axiomas de Conjuntos

Axiomas

- Axiomas:
  - ✓ Um axioma é uma "premissa considerada necessariamente evidente e verdadeira, fundamento de uma demonstração, porém, ela mesma indemonstrável" (Houaiss, 2007, p. 360);

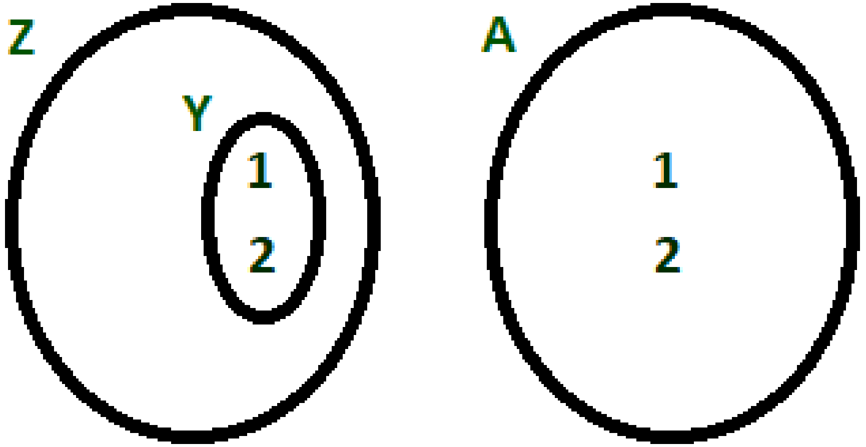


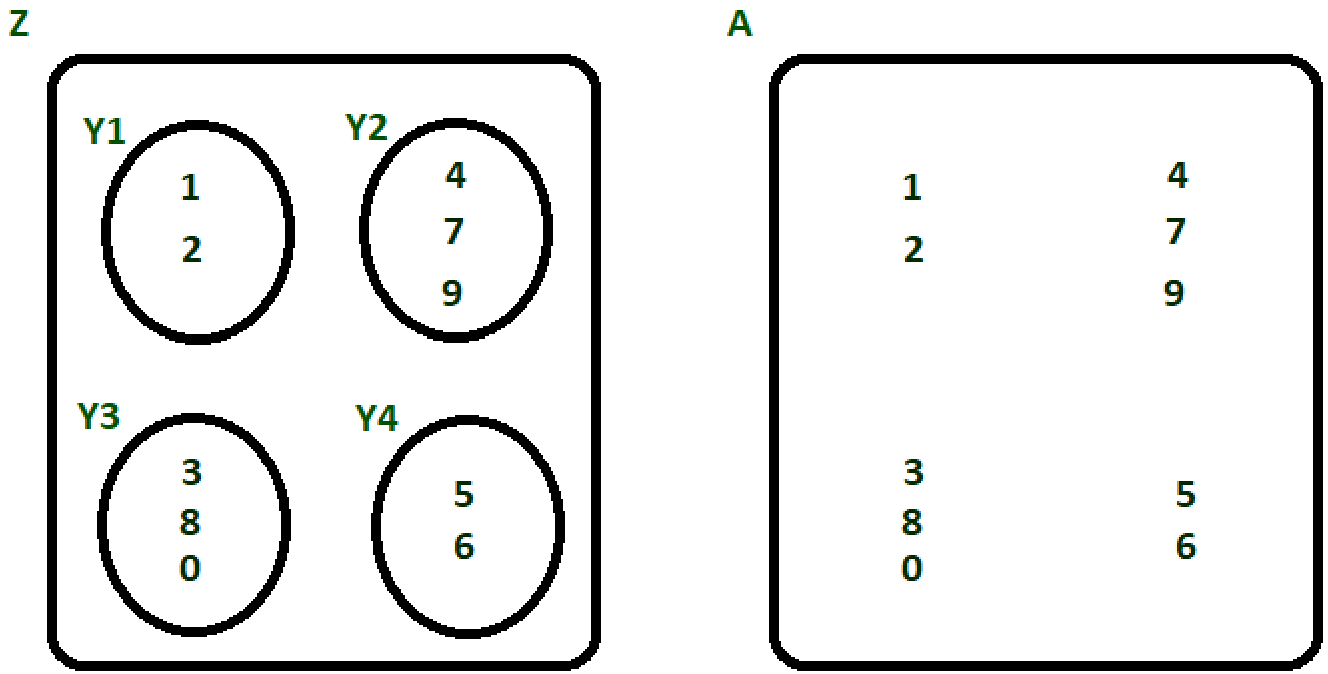
- **Axioma do conjunto vazio**: existe um conjunto que não tem elementos;
- **Axioma da extensionalidade**: se dois conjuntos têm exatamente os mesmos elementos, então eles são idênticos;
- **Axioma esquema da compreensão**: para cada propriedade P e cada conjunto dado, existe um conjunto, cujos elementos são os elementos do conjunto, cujos elementos são os elementos do conjunto dados que satisfazem a propriedade P em questão;
- **Axioma do par**: dados os conjuntos *y* e *z*, existe um conjunto cujos elementos são exatamente *y* e *z*;

Fonte: Adaptado de Feitosa, Nascimento e Alfonso (2021, p. 21,22)

Axiomas - 2

- **Axioma da união**: para todo conjunto Z, existe um conjunto A tal que X está em A se, e somente se, X está em algum Y e Y é elemento de Z:
  - ✓ Para todo conjunto Z, existe o conjunto A, cujos elementos são, precisamente, os elementos dos elementos de Z.

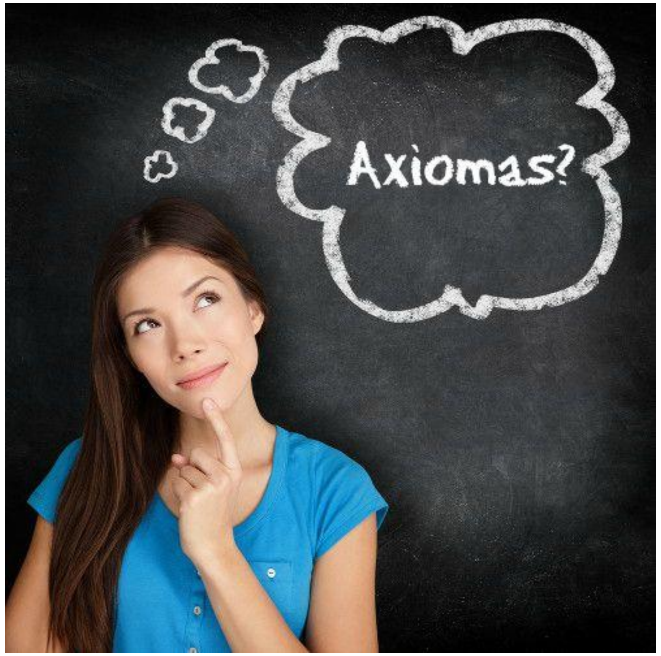




Fonte: Adaptado de Feitosa, Nascimento e Alfonso (2021, p. 22)

Axiomas - 3

- **Axioma do conjunto das partes**: para cada conjunto, existe um conjunto cujos membros são, exatamente, os subconjuntos do conjunto dado:
  - ✓ Para todo conjunto A existe o conjunto B, cujos elementos são, precisamente, os subconjuntos do conjunto A;



$A = \{ 1, 2 \}$

$\{ 1 \} \subseteq A$ $\quad$ $\{ 2 \} \subseteq A$ $\quad$ $\{ 1, 2 \} \subseteq A$ $\quad$ $\emptyset \subseteq A$

$B = P(A) = \{\emptyset, \{ 1 \}, \{ 2 \}, \{ 1, 2 \} \}$

Fonte: Adaptado de Feitosa, Nascimento e Alfonso (2021, p. 22,23)

Axiomas - 4

- **Axioma do infinito**: existe um conjunto indutivo, onde sempre podemos adicionar um novo elemento;

  $\emptyset$

  $\{\emptyset\}$ $\{\{\emptyset\}\}$

  $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ $\{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

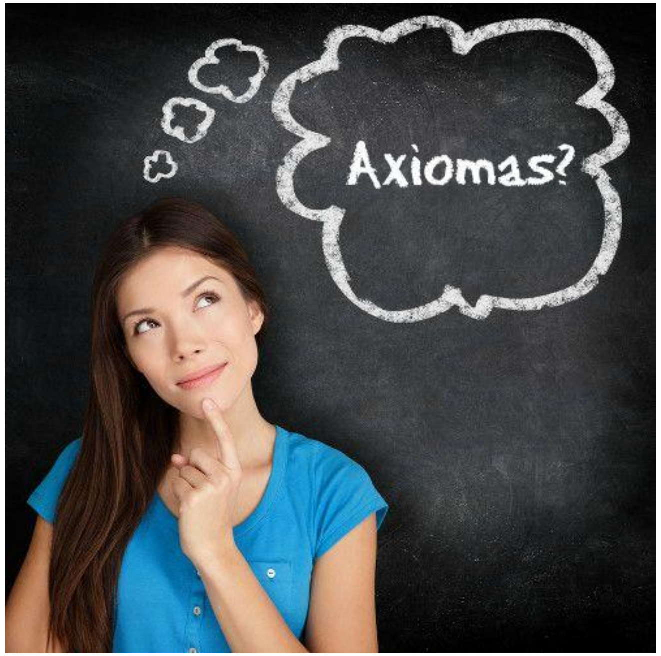
  $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

  Podemos gerar novos conjuntos, mas, sempre, com **finitos** elementos!

  Por outro lado, sempre existe um conjunto sucessor.

  Para todo conjunto A, o sucessor de A é:

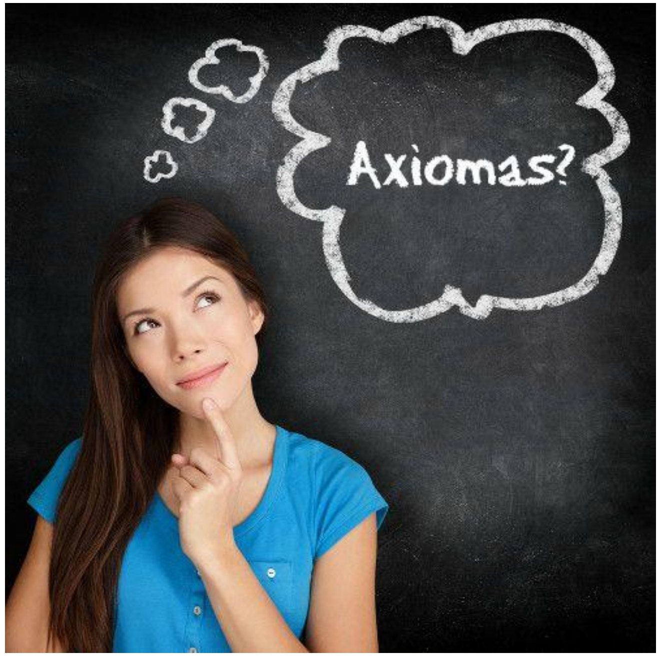
  $A^{+} = A \cup \{A\}$



Fonte: Adaptado de Feitosa, Nascimento e Alfonso (2021, p. 22,23)

Axiomas - 5

- **Axioma esquema da substituição**: se a relação obtida de P(x,y) é uma relação funcional em x e em y, então, dado um conjunto B, existe um conjunto A, cujos elementos são aqueles elementos de B que satisfazem a fórmula P(x,y), isto é,
  $A = \{ z \in B / P (x,y)$
- **Axioma da escolha**: todo conjunto de conjuntos tem uma função escolha;
- **Axioma da fundamentação (ou da regularidade)**: todo conjunto não vazio tem um conjunto com o qual não tem elementos em comum.



Fonte: Adaptado de Feitosa, Nascimento e Alfonso (2021, p. 22,23)

MBA+