Exercícios
Cana - 2021.1

Questão 1. Prove ou refute as seguintes afirmações sobre notação assintótica:

(a) $n^3/100 - 25n^2 + 100n - 7 = \Theta(n^3)$

(b) $3 + \frac{2}{n} = O(1)$

(c) $n^3 = O(n^2)$

(d) $\frac{n^2}{2} - 3n = \Theta(n^2)$

(e) $6n^3 = \Theta(n^2)$

(f) $2n^2 = o(n^3)$

(g) $\frac{n^2}{2} = \omega(n^2)$

Questão 2. Resolva as seguintes relações de recorrência:

(a) $T(n) = T(n-1) + n$;

(b) $T(n) = T(n/2) + n$;

(c) $T(n) = T(n/5) + T(7n/10) + n$.

Questão 3. Considere o algoritmo abaixo que recebe um vetor ordenado $A[1 \ldots n]$ de números inteiros positivos e um outro número inteiro positivo x.

Algoritmo 1: Algoritmo $B(A[i \ldots f], x)$

se $f < i$ **então**
  Retorna -1;

$j \leftarrow \lfloor (i+f)/2 \rfloor$

se $A[j] = x$ **então**
  Retorna j;

se $A[j] < x$ **então**
  $B(A[j+1 \ldots f], x)$;

se $A[j] > x$ **então**
  $B(A[i \ldots j-1], x)$;

(a) Simule a execução do Algoritmo B no vetor $< 3, 5, 9, 14, 17, 23, 29 >$ com os números 23 e 6, indicando as comparações de elementos que são realizadas durante a execução.

(b) Descreva sucintamente a funcionalidade do Algoritmo B.

(c) Apresente uma equação de recorrência que descreva o tempo de execução $T(n)$ do Algoritmo B em um vetor com n elementos. Faça uma estimativa do comportamento assintótico de $T(n)$ (através da árvore de recursão ou da extensão de $T(n)$).

Questão 4. Altere o algoritmo HEAP-SORT para trabalhar com heaps mínimos ao invés de heaps máximos. Argumente porque é melhor trabalhar com heaps máximos neste caso. Prove a corretude do algoritmo.

Questão 5. Considere a seguinte variação de PARTICIONA proposta por N. Lomuto. Para particionar $A[p \dots r]$, esta versão cresce duas regiões, $A[p \dots i]$ e $A[(i+1) \dots j]$, tal que cada elemento na primeira região é menor ou igual a $x = A[r]$ e todo elemento na segunda região é maior que x.

Algoritmo 2: Particiona de Lomuto

Entrada: $A[]$, p e r

$x \longleftarrow A[r]$;
$i \longleftarrow p - 1$;
para todo $j \longleftarrow p \dots r$ **faça**
  se $A[j] \leq x$ **então**
    $i \longleftarrow i + 1$
    Troca$(A[i], A[j])$
se $i<r$ **então**
  Retorna i
Retorna $i - 1$

(a) Argumente que o Algoritmo Particiona de Lomuto é correto utilizando invariantes.

(b) Prove a corretude do Algoritmo QUICK-SORT, supondo que o mesmo utiliza como sub-rotina de particionamento o algoritmo acima.

Questão 6. Elabore um algoritmo em $\Theta(n \log n)$ que, dado um vetor S com $n > 0$ elementos, retorna um vetor V de tamanho n com a seguinte propriedade: $V[i]$ é o número de ocorrências de $S[i]$ em S. Prove esta complexidade.

Questão 7. Elabore um algoritmo em $\mathcal{O}(n)$ de decomposição de um vetor S em três subvetores. Esse algoritmo recebe como entrada, além do vetor S, um valor *piv* pertencente a S, e os índices p e r, $1 \leq p \leq r$. O algoritmo deve rearrumar os elementos em $S[p \dots r]$ e retornar dois índices q_1 e q_2 satisfazendo as seguintes propriedades:

(a) se $p \leq k \leq q_1$, então $S[k] < piv$;

(b) se $q_1 < k \leq q_2$, então $S[k] = piv$;

(c) se $q_2 < k \leq r$, então $S[k] > piv$.

Questão 8 (3,0 pontos)**.** Seja $X[1..n]$ um vetor de inteiros. Dados $i < j$ em $\{1, \dots, n\}$, dizemos que (i, j) é uma inversão de X se $X[i] > X[j]$. Escreve um algoritmo em $\Theta(n \log n)$ que devolva o número de inversões de um vetor X. Explique como seu algoritmo obtém tal complexidade.

Questão 9. Suponha que os pivots escolhidos em uma execução de QUICK-SORT particionam o vetor na proporção $9 : 1$. Calcule a complexidade do algoritmo neste caso.

Questão 10. Apresente uma implementação do algoritmo COUNTING-SORT que não utiliza o vetor auxiliar B (com apenas um vetor auxiliar).

Questão 11. O algoritmo RADIX-SORT recebe como entrada números com vários dígitos (no máximo d) e os ordena a partir do dígito menos significativo. Apresente uma implementação deste algoritmo. Para quais valores de k ele seria melhor que o COUNTING-SORT? Explique a sua resposta.

Questão 12. O algoritmo do k-ésimo mínimo elemento ainda seria $\Theta(n)$ se tomássemos grupos de 3 elementos, ao invés de 5? E se tomássemos grupos de 7 elementos? Justifique usando o método da árvore de recursão.