Avaliação de Cálculo II

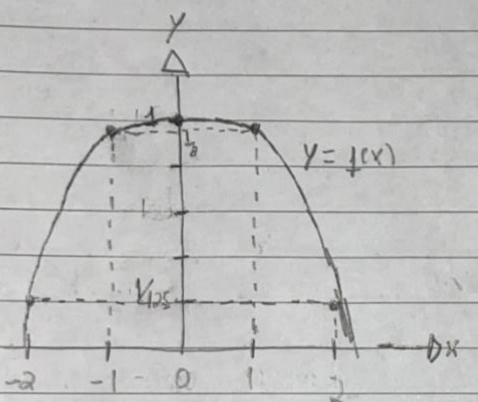
Aluno: José Douglas Gondim Soares
Matrícula: 485347

S T Q Q S S D __/__/__

Avaliação Cálculo II José Douglas Gondim Soares, 485347

1- Calcular valor médio

$f(x) = \frac{1}{(1+x^2)^3}$, para $x \in [-2,2]$



O valor médio da função $f(x)$ no intervalo $[a,b]$ é $\bar{f} = \frac{1}{b-a} \cdot \int f(x)dx$.

= Logo, f média =

$$\frac{1}{2-(-2)} \cdot \int_{-2}^{2} \frac{1}{(x^2+1)^3} dx = \int_{-2}^{2} \frac{1}{4(x^2+1)^3} dx$$

$$\int \frac{1}{4(x^2+1)^3} dx = \int \frac{\frac{1}{(x^2+1)^3}}{4} dx =$$

Para calcular a integral $\int \frac{1}{(x^2+1)^3} dx$, aplica-se a integração por partes $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$

$u = \frac{1}{(x^2+1)^2}$ e $dv = dx$, $v = x$

logo, $du = \left(\frac{1}{(x^2+1)^2}\right)' dx$ = composição $f(g(x))$ de duas funções $f(u) = \frac{1}{u^2}$ e $g(x) = x^2+1$,

CONTINUA...

 spiral

1- Continuação

Aplicando a regra da cadeia $\frac{d}{dx}(f(g(x))) =$

$$\frac{d}{du}(f(u))\frac{d}{dx}(g(x)) =$$

$$\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{(x^2+1)^2}\right)\right) = \left(\frac{d}{du}\left(\frac{1}{u^2}\right)\frac{d}{dx}(x^2+1)\right)$$

Aplicando a regra da potência $\frac{d}{du}(u^n) = n.u^{n-1}$ com $n = -2$

$$\left(\frac{d}{du}\left(\frac{1}{u^2}\right)\right)\frac{d}{dx}(x^2+1) = \left(\frac{-2}{u^3}\right)\frac{d}{dx}(x^2+1)$$

logo, $\frac{-2\frac{d}{dx}(x^2+1)}{u^3} = \frac{2\frac{d}{dx}(x^2+1)}{(x^2+1)^3}$

A derivada da soma é igual a soma das derivadas, logo

$$\frac{-2\left(\frac{d}{dx}(x^2+1)\right)}{(x^2+1)^3} = \frac{2\left(\frac{d}{dx}(x^2)+\frac{d}{dx}(1)\right)}{(x^2+1)^3}$$

A derivada de uma constante é 0, logo:

$$\frac{-2\left(\frac{d}{dx}(x^2)\right)}{(x^2+1)^3} = \frac{-2(2x)}{(x^2+1)^3} = \frac{-4x}{(x^2+1)^3} = du$$

CONTINUA...

1- Continuação

Logo, $\int \frac{1}{(x^2+1)^3}\,dx = \frac{1}{(x^2+1)^2} \cdot x - \int x \cdot \left(\frac{-4x}{(x^2+1)^3}\right) dx =$

$\frac{x}{(x^2+1)^2} - \int \left(\frac{-4x^2}{(x^2+1)^3}\right) dx =$

Removendo a constante

$\frac{x}{(x^2+1)^2} - \int \left(\frac{-4x^2}{(x^2+1)^3}\right) dx = \frac{x}{(x^2+1)^2} + 4\int \frac{x^2}{(x^2+1)^3}\,dx$

Reescrevendo o numerador do integrando como $x^2 = x^2+1-1$:

$\frac{x}{(x^2+1)^2} + 4\int \frac{x^2}{(x^2+1)^3}\,dx = \frac{x}{(x^2+1)^2} + 4$

$\int \left(-\frac{1}{(x^2+1)^3} + \frac{x^2+1}{(x^2+1)^3}\right) dx = \frac{x}{(x^2+1)^2} + 4$

$\int \left(\frac{1}{(x^2+1)^2} - \frac{1}{(x^2+1)^3}\right) dx$

Separando as integrais

$\frac{x}{(x^2+1)^2} + 4\int \left(\frac{1}{(x^2+1)^2} - \frac{1}{(x^2+1)^3}\right) dx =$

$\frac{x}{(x^2+1)^2} - 4\int \frac{1}{(x^2+1)^3}\,dx + 4\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx$

CONTINUO...

1- Continuação

Logo, chegamos na seguinte equação linear:

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx = \frac{x}{(x^2+1)^2} + 4\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx - 4\int \frac{1}{(x^2+1)^3}\,dx$$

Temos $\int \frac{1}{(x^2+1)^3}\,dx = \frac{x}{4(x^2+1)^2} + \frac{3\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx}{4}$

Então $\frac{\int \frac{1}{(x^2+1)^3}\,dx}{4} = \frac{\left(\frac{x}{4(x^2+1)^2} + \frac{3\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx}{4}\right)}{4}$

Para calcular a integral $\int \frac{1}{(x^2+1)^2}$, integramos por partes:

a integral $\int \frac{1}{x^2+1}\,dx$

Seja $u = \frac{1}{x^2+1}$ e $dv = dx$, $v = x$

Logo, $du =$

A função $\frac{1}{x^2+1}$ é a composição $f(g(x))$ de duas funções

$f(u) = \frac{1}{u}$ e $g(x) = x^2+1$

CONTINUA...

1- Continuação

Aplicando a regra da cadeia

$$\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2+1}\right)\right) = \left(\frac{d}{du}\left(\frac{1}{u}\right)\frac{d}{dx}(x^2+1)\right)$$

Aplicando a regra da potência

$$\left(\frac{d}{du}\left(\frac{1}{u}\right)\right)\frac{d}{dx}(x^2+1) = \left(-\frac{1}{u^2}\right)\frac{d}{dx}(x^2+1)$$

logo,

$$\frac{-\frac{d}{dx}(x^2+1)}{u^2} = \frac{-\frac{d}{dx}(x^2+1)}{(x^2+1)^2} =$$

$$\frac{-\frac{d}{dx}(x^2)}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x}{(x^2+1)^2} = du$$

Portanto

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx = \frac{1}{x^2+1}\cdot x - \int x\cdot\left(\frac{-2x}{(x^2+1)^2}\right)dx =$$

$$\frac{x}{x^2+1} - \int\left(\frac{-2x^2}{(x^2+1)^2}\right)dx =$$

$$\frac{x}{x^2+1} + 2\int\frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,dx$$

CONTINUA...

___/___/___ S T Q Q S S D

① Continuação

Reescrevendo o numerador do integrando como $x^2 = x^2+1-1$

$$\frac{x}{x^2+1} + 2\int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,dx = \frac{x}{x^2+1} +$$

$$2\int\left(-\frac{1}{(x^2+1)^2} + \frac{x^2+1}{(x^2+1)^2}\right)dx = \frac{x}{x^2+1} +$$

$$2\int\left(\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{(x^2+1)^2}\right)dx = \frac{x}{x^2+1} -$$

$$2\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx + 2\int \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

Logo, temos a seguinte equação linear

$$\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \frac{x}{x^2+1} + \int \frac{1}{x^2+1}\,dx - 2\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx$$

$$= \frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{\int \frac{1}{x^2+1}\,dx}{2}$$

Logo,

$$\frac{x}{16(x^2+1)^2} + \frac{3\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx}{16} = \frac{x}{16(x^2+1)} +$$

$$\frac{3\left(\frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{\int \frac{1}{x^2+1}\,dx}{2}\right)}{16}$$

CONTINUO...

S T Q Q S S D __/__/__

① Continuação

A integral de $\frac{1}{x^2+1}$ é $\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \text{arctg}(x)$

$$\frac{3x}{32(x^2+1)} + \frac{x}{16(x^2+1)^2} + \frac{3\int \frac{1}{x^2+1}\,dx}{32} = \frac{3x}{32(x^2+1)} +$$

$$\frac{x}{16(x^2+1)^2} + \frac{3.\,\text{arctg}(x)}{32}$$

Então

$$\int \frac{1}{4(x^2+1)^3} = \frac{3x}{32(x^2+1)} + \frac{x}{16(x^2+1)^2} + \frac{3.\,\text{arctg}(x)}{32}$$

$$\boxed{= \frac{3x(x^2+1) + 2x + 3(x^2+1)^2.\,\text{arctg}(x)}{32(x^2+1)^2} + C}$$

De acordo com o teorema fundamental do cálculo,

$\int_a^b F(x)dx = f(b) - f(a)$, portanto

$$\left(\frac{3x(x^2+1) + 2x + 3(x^2+1)^2.\,\text{arctg}(x)}{32}\right)\Bigg|_{-2}^{2} =$$

$$\frac{17}{400} + \frac{3\,\text{arctg}(2)}{32} - \left(-\frac{3\,\text{arctg}(2)}{32} - \frac{17}{400}\right) =$$

$$\frac{17}{200} + \frac{3.\,\text{arctg}(2)}{16} \approx \boxed{0,2925}$$

S T Q Q S S D

___/___/___

(2-) a) Calcular a expressão

$$F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-sx}\, sen(x)\, dx \quad , \quad para \quad 0 \leq s \leq \mathbb{R}$$

Primeiro vamos integrar por partes

$$\int u . dv = u . v - \int du . v$$

$$u = sen(x) \quad , \quad dv = e^{-sx}$$

$$du = cos(x) \qquad v = \frac{e^{-sx}}{s}$$

Logo,

$$\int e^{-sx} . sen(x) dx = -\frac{e^{sx} . sen(x)}{s} - \int -\frac{e^{sx} . cos(x)}{s} dx$$

Integrando por partes

$$u = cos(x) \quad , \quad dv = -\frac{e^{-sx}}{s}$$

$$du = -sen(x) \quad , \quad v = -\frac{e^{-sx}}{s}$$

Então, temos

$$= -\frac{e^{sx} . sen(x)}{s} - \left(\frac{e^{-sx} . cos(x)}{s^2} - \int -\frac{e^{-sx} . sen(x)}{s^2} dx \right)$$

$$= -\frac{e^{-sx} . sen(x)}{s} - \left(\frac{e^{-sx} . cos(x)}{s^2} + \frac{1}{s^2} \int e^{-sx} . sen(x)\, dx \right)$$

CONTINUA

2-a) Continuação

$$= \frac{-s e^{-sx} \cdot \text{sen}(x) - e^{-sx} \cdot \cos(x)}{s^2+1}$$

$$= \frac{-e^{-sx}(s \cdot \text{sen}(x) + \cos(x))}{s^2+1} + C$$

$$\lim_{L\to+\infty}\left[\frac{-e^{-sx}(s \cdot \text{sen}(x) + \cos(x))}{s^2+1}\right]_0^L$$

Logo, $\int_0^{+\infty} e^{-sx} \cdot \text{sen}(x)\, dx = 0 - \left(-\frac{1}{1+s^2}\right) = \boxed{\frac{1}{s^2+1}}$

b) $\int_0^{+\infty} F(s)\, ds = \int_0^{+\infty} \frac{1}{s^2+1}\, ds = \text{arctg}(s) + c$

$= \lim_{L\to+\infty} [\text{arctg}(s)]_0^L = \frac{\pi}{2} - 0 = \boxed{\frac{\pi}{2}} \Rightarrow$ converge.