Exercício

Construir

$$(A \to (B \to (C \to D))) \to (C \to (A \to (B \to D)))$$

Incialmente usarei `J2` e trasitividade para agrupar todos os antecendentes de

$$(A \to (B \to (C \to D)))$$

usando conjunção:

$$\xRightarrow{\texttt{J2}} (A \to (B \to (C \to D))) \to ((A \land B) \to (C \to D))$$

$$\xRightarrow{\texttt{J2}} ((A \to B) \to (C \to D))) \to ((A \land B) \land C) \to D))$$

$$\xRightarrow{\texttt{Transit.}} (A \to (B \to (C \to D))) \to (((A \land B) \land C) \to D) \quad (\square)$$

Nesse ponto é mais fácil de ver que, se tivéssemos

$$(((A \land B) \land C) \to D) \to (((C \land A) \land B) \to D) \quad (*)$$

Poderíamos usar `J3` duas vezes para obter

$$(((C \land A) \land B) \to D) \to ((C \land A) \to (B \to D))$$

e

$$((C \land A) \to (B \to D)) \to (C \to (A \to (B \to D)))$$

Então, vamos tentar mostrar (*).

Para isso, podemos usar transitividade assim

$$\xRightarrow{\texttt{Transit.}} (((C \land A) \land B) \to ((A \land B) \land C)))$$
$$\to (((A \land B) \land C) \to D) \to (((C \land A) \land B) \to D)$$

O antecedente dessa implicação consiste em mudar as posições de fórmulas em uma conjunção.

Podemos trocar as posições das fórmulas nas conjunções

$\xRightarrow{\texttt{H4}} ((C \wedge A) \wedge B) \to (C \wedge A) \quad (1)$

$\xRightarrow{\texttt{H5}} ((C \wedge A) \wedge B) \to B \quad (2)$

$\xRightarrow{\texttt{H4}} (C \wedge A) \to C \quad (3)$

$\xRightarrow{\texttt{H5}} (C \wedge A) \to A \quad (4)$

De (1), (3) e (4), e transitividade, temos

$\xRightarrow{\texttt{Transit.}} ((C \wedge A) \wedge B) \to C \quad (5)$

$\xRightarrow{\texttt{Transit.}} ((A \wedge B) \wedge C) \to A \quad (6)$

Usando `J1`, (2), (5) e (6), conseguimos

$\xRightarrow{\texttt{J1}} ((C \wedge A) \wedge B) \to (A \wedge B) \quad (7)$

$\xRightarrow{\texttt{J1}} ((C \wedge A) \wedge B) \to ((A \wedge B) \wedge C) \quad (8)$

Agora podemos fazer modus ponens com a instância de transitividade lá de cima para obter (*)

$\xRightarrow{\texttt{Transit.}} (((A \wedge B) \wedge C) \to D) \to (((C \wedge A) \wedge B) \to D)$

Juntamente com ($\square$) e usando novamente transitividade, temos

$\xRightarrow{\texttt{Transit.}} (A \to (B \to (C \to D))) \to (((C \wedge A) \wedge B) \to D) \quad (\circ)$

Mas agora podemos usar `J3` para transforma as conjunções novamente em implicações

$\xRightarrow{\texttt{J3}} (((C \wedge A) \wedge B) \to D) \to ((C \wedge A) \to (B \to D))$

$\xRightarrow{\texttt{J3}} ((C \wedge A) \to (B \to D)) \to (C \to (A \to (B \to D)))$

$\xRightarrow{\texttt{Transit.}} (((C \wedge A) \wedge B) \to D) \to (C \to (A \to (B \to D)))$

Juntamente com ($\circ$) e transitividade chegamos onde queríamos

$\xRightarrow{\texttt{Transit.}} (A \to (B \to (C \to D))) \to (C \to (A \to (B \to D)))$