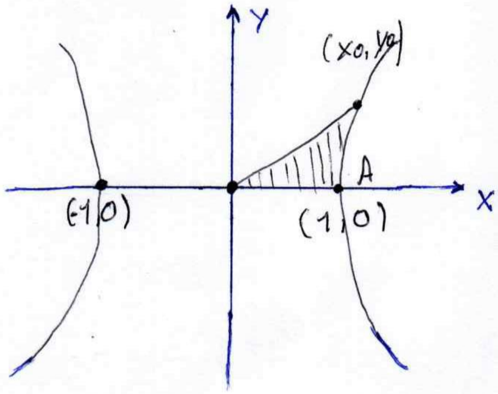
Lista de Exercícios de Cálculo II

Grupo

José Douglas Gondim Soares, 485347
Fernanda Costa de Sousa, 485404
Luís Antônio da Silva Maia, 493458
Ítalo de Sousa Alencar, 495638
Tiago José Pires Santos, 413160

1)



$$x^2 - y^2 = 1 \Rightarrow -y^2 = 1 - x^2$$
$$y^2 = x^2 - 1$$
$$y = \sqrt{x^2-1}$$

$$S_{x_0} = \int_{x_0}^{1} \sqrt{x^2-1}\,dx \qquad x = \sin\theta \begin{cases} \theta = \frac{\pi}{2} \\ \theta = \sin^{-1} x_0 \end{cases}$$

$$dx = \cos\theta\, d\theta$$

$$\int_{\sin^{-1}x_0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin^2\theta - 1}\,.\,\cos\theta\, d\theta$$

$$\int_{\sin^{-1}x_0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\, d\theta \qquad \frac{\cos\theta \sin\theta}{2} + \frac{\theta}{2} \Big|_{\sin^{-1}x_0}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\frac{\cos\frac{\pi}{2} \sin\frac{\pi}{2}}{2} + \frac{\pi}{4} - \frac{\cos(\sin^{-1}x_0)\sin(\sin^{-1}x_0)}{2} - \frac{\sin^{-1}x_0}{2}$$

$$S_{x_0} = \frac{\pi}{4} - \frac{\cos(\sin^{-1}x_0)\,.\,x_0}{2} - \frac{\sin^{-1}x_0}{2}$$

$$S_{y_0} = \int_{y_0}^{0} \sqrt{1+y^2}\, dy = -\int_{0}^{y_0} \sqrt{1+y^2}\, dy$$

$y = tg\,\theta$

$dy = \sec^2\theta\, d\theta$

$$-\int \sqrt{1+tg^2\theta}\,.\,\sec^2\theta\, d\theta$$

$$-\int \sqrt{\sec^2\theta}\,.\,\sec^2\theta\, d\theta$$

$$-\int \sec^3\theta\, d\theta$$

FORMULA = $\int \sec^n v\, dv = \frac{1}{n-1} \sec^{n-2} v\; tg\, v + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} v\, dv$

$\downarrow$

$$-\left[\frac{1}{2} \sec\theta\, tg\,\theta + \frac{1}{2}\left[\ln|\sec\theta + tg\,\theta\right]\right]$$

$$-\left[\frac{1}{2} \sec\theta\, tg\,\theta + \frac{\ln|\sec\theta + tg\,\theta|}{2}\right]$$

$\downarrow$

$$-\left[\frac{1}{2}\sqrt{y^2+1}\,.\,y + \frac{\ln|\sqrt{y^2+1}+y|}{2}\right|_{0}^{y_0}$$

$$-\frac{1}{2}\sqrt{y^{0}+1}\,.\,y_0 - \frac{\ln|\sqrt{y^{0}+1}+y_0|}{2}$$

$$S_{y_0} = -\frac{1}{2}\sqrt{y^{0}+1}\,.\,y_0 - \frac{\ln|\sqrt{y^{0}+1}+y_0}{2}$$

___/___/___ S T Q Q S S D

2-a) $I_n = \int \cos^n x \, dx = \int \underbrace{\cos^{n-1} x}_{u} \cdot \underbrace{\cos x \, dx}_{dv}$

$\Rightarrow I_n = \cos^{n-1} x \cdot \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x \cdot (n-1) \cdot \cos^{n-2} x \cdot (-\operatorname{sen} x) dx$

$= \cos^{n-1} x \cdot \operatorname{sen} x + (n-1) \int \cos^{n-2} x \cdot \operatorname{sen}^2 x \, dx$

$= \cos^{n-1} x \ \operatorname{sen} x + (n-1) \int \cos^{n-2} x \ (1 - \cos^2 x) \, dx$

$= \cos^{n-1} x \cdot \operatorname{sen} x + (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n$

$\Leftrightarrow n \cdot I_n = \cos^{n-1} x \cdot \operatorname{sen} x + (n-1) I_{n-2}$

$\Leftrightarrow I_n = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \cdot \operatorname{sen} x + \left(\frac{n-1}{n}\right) I_{n-2}$

$I_3 = \frac{1}{3} \cdot \cos^2 x \cdot \operatorname{sen} x + \frac{2}{3} \cdot \left[\frac{1}{1} \cdot \cos^0 x \cdot \operatorname{sen} x + \frac{0}{1} \cdot I_{-1}\right]$

$= \frac{1}{3} \cdot \cos^2 x \cdot \operatorname{sen} x + \frac{2}{3} \cdot \left[\operatorname{sen} x \ I_{-1}\right]$

S T Q Q S S D ___/___/___

2-b) $I_n = \int sen^n x \, dx = \int \underbrace{sen\, x}_{dv} \cdot \underbrace{sen^{n-1} x \, dx}_{u}$

$$\begin{cases} u = sen^{n-1} x, & du = (n-1) \cdot \cos x \cdot sen^{n-2} x \\ dv = sen\, x, & v = -\cos x \end{cases}$$

$\int u \cdot dv = uv - \int v \cdot du \Rightarrow$

$-\cos x \cdot sen^{n-1} x + (n-1) \int \cos^2 x \cdot sen^{n-2} x \, dx$

$= -\cos x \cdot sen^{n-1} x + (n-1) \int (sen^{n-2} x - sen^n x) \, dx$

$I_n = -\cos x \cdot sen^{n-1} x + (n-1) \cdot I_{n-2} - (n-1) I_n$

$n \cdot I_n = -\cos x \cdot sen^{n-1} x + (n-1) I_{n-2} \Rightarrow$

$I_n = \frac{-1}{n} \cdot \cos x \cdot sen^{n-1} x + \frac{n-1}{n} \cdot I_{n-2}$

$I_3 = ?$

$\int sen^3 x \, dx = I_3 = \frac{-1}{3} \cdot \cos x \cdot sen^2 x + \frac{2}{3} \cdot I_1$

$= \frac{-1}{3} \cdot \cos x \cdot sen^2 x + \frac{2}{3} \left[\frac{-1}{1} \cdot \cos x \cdot sen^0 x + \frac{0}{1} \cdot I_{-1} \right]$

$= -\frac{1}{3} \cdot \cos x \cdot sen^2 x + \frac{2}{3} \left[-\cos x \cdot sen^0 x \right] + C$

__/__/__

S T Q Q S S D

c) $I_n = \int tg^n x \, dx = \int tg^2 x \cdot tg^{n-2} x \, dx =$

$= \int (sec^2 x - 1) \cdot tg^{n-2} x \, dx = \int (sec^2 x \cdot tg^{n-2} x - tg^{n-2} x) \, dx$

$= \int sec^2 x \cdot tg^{n-2} x - I_{n-2} \Rightarrow I_n = \frac{tg^{n-1} x}{n-1} - I_{n-2}$

$I = 3$?

$I_3 = \frac{tan^2 x}{2} - \left[\frac{tan^0 x}{0} - I_{-1} \right]$

d) $I_n = \int sec^n x \, dx = \int sec^{n-2} x \cdot sec^2 x \, dx$

$= sec^{n-2} x \int sec^2 x \, dx - \int (n-2) \, sec^{n-2} x \cdot tg^2 x \, dx$

$= sec^{n-2} x \, tg \, x - (n-2) \int sec^{n-2} x \cdot (sec^2 x - 1) \, dx$

$= sec^{n-2} x \, tg \, x - (n-2) \int (sec^n x - sec^{n-2} x) \, dx$

$= sec^{n-2} x \, tg \, x - (n-2) . I_n + (n-2) \, I_{n-2}$

$= (n-2) . I_n = sec^{n-2} x \cdot tan \, x - (n-2) I_{n-2} + C$

Continua...

S T Q Q S S D

__/__/__

2- d) $I_n = \frac{\sec^{n-2} x \cdot \tan x}{(n-1)} + \left(\frac{n-2}{n-1}\right) \cdot I_{n-2}$

$I_3 = ?$

$I_3 = \frac{\sec^1 x \cdot \tan x}{2} + \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{\sec^{-1} x \cdot \tan x}{0} + \frac{-1}{0} \cdot I_{-1}\right]$

$=$

e) $I_n = \int \cot g^n x \, dx = \int \cot g^{n-2} x \cdot \cot g^2 x \, dx$

$= \int \cot g^{n-2} x \cdot (\operatorname{cossec}^2 x - 1) \, dx$

$= \int \cot g^{n-2} x \cdot \operatorname{cossec}^2 x \, dx - \int \cot g^{n-2} x \, dx$

$= \frac{-\cot g^{n-1} x}{n-1} - I_{n-2} + C$

$I_3 = ?$

$I_3 = -\frac{\cot g^2 x}{2} - \left[\frac{-\cot g^0 x}{0} - I_{-1}\right]$

S T Q Q S S D

__/__/__

1) $I_n = \int \operatorname{cossec}^n x = \int \operatorname{cossec}^{n-2} x \cdot \operatorname{cossec}^2 x$

$= \operatorname{cossec}^{n-2} x\,(-\operatorname{cotg} x) - \int (-\operatorname{cotg} x)(n-2) \cdot \operatorname{cossec}^{n-3} x \cdot (-\operatorname{cossec} x)$

$\cdot \operatorname{cotg} x \, dx$

$= -\operatorname{cossec}^{n-2} x \cdot \operatorname{cotg} x - (n-2) \int \operatorname{cossec}^{n-2} x \cdot \operatorname{cotg}^2 x$

$I_n = -\operatorname{cossec}^{n-2} x \cdot \operatorname{cotg} x - (n-2) \int \operatorname{cossec}^{n-2} x\,(\operatorname{cossec}^2 x - 1)$

$= \dfrac{\operatorname{cossec}^{n-2} x \cdot \operatorname{cotg} x}{n-1} + \dfrac{n-2}{n-1} \cdot I_{n-2}$

$I_3 = ?$

$I_3 = \dfrac{\operatorname{cossec}^{1} x \cdot \operatorname{cotg} x}{2} + \dfrac{1}{2} \cdot \left[\dfrac{\operatorname{cossec}^{-1} x \cdot \operatorname{cotg} x}{0} + \dfrac{-1}{0} \cdot I_{-1} \right]$

Questão 2.

Mostrando o teorema Fundamental do Cálculo: Sabemos que f é uma função contínua em um intervalo fechado genérica [a,b] e F é uma primitiva f, assim temos:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big]_a^b$$

Após demonstração da definição do T.F.C, podemos iniciar os quesitos seguintes:

a) $\int_0^x \cos(t^2)\,dt$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Assumindo que esta integral é igual a F(x), sendo G(t) a primitiva de $\cos(t^2)$, ou seja $G(t) = \cos(t^2)$. Pelo (T.F.C) podemos colocar a igualdade $F(x) = G(x) - G(0)$. Como $G(0)$ é uma função constante igual a zero, podemos desconsiderar do cálculo e temos que $G'(x) = \cos(x^2)$; que é contínua e atende aos requisitos do T.F.C.

b) $\int_0^{\operatorname{sen} x} e^{t^2}\,dt$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

Utilizando o método da substituição, fazemos $u = \operatorname{sen} x$, e a regra da cadeia e ainda T.F.C temos:

$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx}\left[\int_0^{\operatorname{sen} x} e^{t^2}\,dt\right] \xrightarrow[u=\operatorname{sen} x]{\text{substituição}} \frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{du}\left[\int_0^u e^{t^2}\,dt\right]\frac{du}{dx},$$

$u = \operatorname{sen} x \rightarrow du = \cos dx \rightarrow \frac{du}{dx} = \cos x$ .. (I)

$\frac{d}{du}\left[\int_0^u e^{t^2}\right]\frac{du}{dx} = e^{u^2}\cdot\frac{du}{dx}$, substituindo por (t), temos: $e^{u^2}\cdot\cos x$

Assim,

$f'(x) = e^{\operatorname{sen}^2 x}\cdot\cos x$

c) $\int_{-\log x}^{e^x} e^{-t^2} dt \quad \forall x > 0.$

Usando uma propriedade das integrais finitas, pegaremos a ponta entre os limites de integração. Assume a ponta entre os limites = C, uma constante entre a e b. na função de integração.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^C f(x)\,dx + \int_C^b f(x)\,dx.$$

A constante C é definida como uma ponta entre $-\log x$ e e^x.
Assim,

$$f(x) = \int_{-\log x}^{C} e^{-t^2} dt + \int_C^{e^x} e^{-t^2}$$

Usando a propriedade das integrais definidas, vamos inverter os limites de integração, trocando o seu sinal, teremos então:

$$f(x) = -\int_C^{-\log x} e^{-t^2} dt + \int_C^{e^x} e^{-t^2} dt.$$

Agora, usando a Regra da Cadeia e do T.F.C:

$$f'(x) = -e^{-\log^2 x} \cdot \left(\frac{-1}{x}\right) + e^{-x^2} \cdot e^x =$$

$$= f'(x) = \frac{e^{-\log^2 x}}{x} + e^x \cdot e^{-x^2} \blacksquare$$

Questão 4. Calcular $\lim_{x\to 1} \frac{1}{x^2-1} \int_1^{x^2} \log(t^2+1)\,dt = 0.$

Observando a equação, percebemos que:

$g(x) \Leftarrow \lim_{x\to 1} (x^2-1) = 0$ e $\lim_{x\to 1} \int_1^{x^2} \log(t^2+1)\,dt = 0 \Rightarrow f(x)$

Após análises, para fugir de indeterminações, optamos por usar a regra do L'Hospital, o que nos é garantido a possibilidade uma vez que tais funções são deriváveis e $g'(x) = 0$ e $f(a) = g(a) = 0$, sendo a um ponto dentro do nosso intervalo.

Por L'Hospital note que:

$g(x) = x^2+1 \rightarrow g'(x) = 2x$ (I)

$f(x) = \int_1^{x^2} \log(t^2+1)\,dt$ e $f'(x) = \log(x^4+1)\cdot 2x$ (II)

I, II, usando a regra da cadeia e o T.F.C.

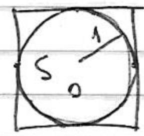
Assim, teremos:

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{x^2-1} \cdot \int_1^{x^2} \log(t^2+1)\,dt = \lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 1} \frac{f'(x)}{g'(x)} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 1} \frac{\log(x^4+1)\cdot 2x}{2x} = \log(x^4+1),$$

Com x tende a 1, obtemos a resposta: $\log(1^4+1) = \log 2$ ■

Questão 5



$\pi = S$

Mostrar que $3 < \pi < 4$.

Seja Q_c: quadrado circunscrito.

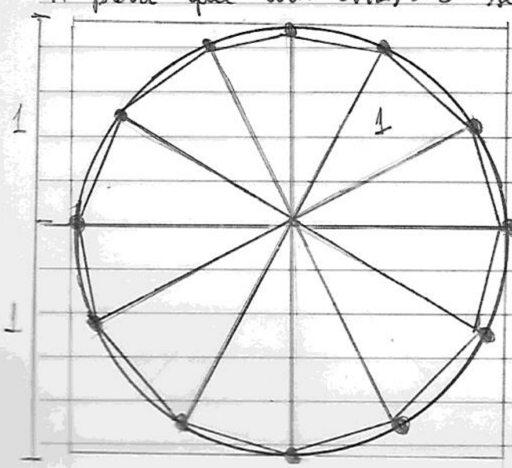
Temos que, $S <$ área (Q_c)

$\Rightarrow S < 4$

Seja P_{12} o dodecágono inscrito no círculo de raio $=1$, regular.

Neste caso, temos que área $(P_{12}) < \pi$.

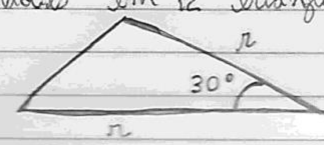
A prova que área $(P_{12}) = 3$ se dá a seguir:



Juntamente com o dodecágono, temos um quadrado circunscrito à circunferência. O quadrado apresenta lado $= 2$, $l = 2$.

Calculando as áreas:

1. Quadrado: $l^2 = 2^2 = 4$.
2. Para calcular a área do dodecágono, primeiramente vamos dividi-lo em 12 triângulos isósceles.



Nota que a soma dos ângulos entre os raios de todos os triângulos será 360 graus. Assim, $\theta = \frac{360}{12} = 30°$.

$$A_T = \frac{r \cdot r \cdot \operatorname{sen}\theta}{2} = \frac{1 \cdot 1 \cdot 1/2}{2} = \frac{1}{4}$$

O dodecágono possui 12 triângulos, então: $A_D = 12 \cdot A_T = 12 \cdot \frac{1}{4} = 3$

Como o dodecágono está inscrito na circunferência e o quadrado está circunscrito temos que:

$$A_D < \pi < A_Q$$
$$3 < \pi < 4$$

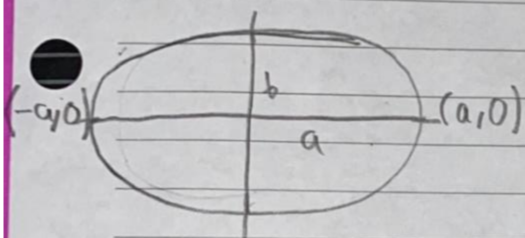
S T Q Q S S D

__/__/__

6- $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}$

$\Leftrightarrow y^2 = b^2 \cdot \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \Leftrightarrow y = b \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$

$\Leftrightarrow y = \frac{b}{a} \cdot \sqrt{a^2 - x^2}$



$A = 4 \cdot \frac{b}{a} \cdot \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$

Integral para substituição trigonométrica:

$x = a \cdot \operatorname{sen}\theta \ , \ dx = a \cdot \cos\theta \, dx$

$A = 4 \cdot \frac{b}{a} \cdot \int_0^{a \cdot \operatorname{sen}(a)} \sqrt{a^2 - a^2 \cdot \operatorname{sen}^2\theta} \cdot a \cdot \cos\theta \cdot d\theta$

$A = 4 \cdot \frac{b}{a} \cdot \int_0^{a \cdot \operatorname{sen}(a)} a \cdot \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\theta} \cdot a \cdot \cos\theta \, d\theta$

$A = 4 \cdot \frac{b}{a} \cdot a^2 \int_0^{a \operatorname{sen}(a)} \cdot \sqrt{\cos^2\theta} \cdot \cos\theta \cdot d\theta$

$A = 4 \cdot \frac{b}{a} \cdot a^2 \cdot \int_0^{a \cdot \operatorname{sen}(a)} \cdot \cos\theta \cdot d\theta$

$A = 4 \cdot a \cdot b \cdot \int_0^{a \cdot \operatorname{sen}(a)} \cdot \cos^2\theta \cdot d\theta$

Continua...

__/__/__ S T Q Q S S D

6-) Em geral

$$\int \cos^2 x \cdot dx = \frac{\operatorname{sen} x \cdot \cos x}{2} + \frac{x}{2}$$

Logo,

$$A = 4 \cdot a \cdot b \cdot \left(\frac{\operatorname{sen}\theta \cdot \cos\theta}{2} + \frac{\theta}{2} \right)_0^{a \cdot \operatorname{sen}(a)}$$

$$A = 2 \cdot a \cdot b \cdot \left(\operatorname{sen}(\theta) \cdot \cos(\theta) + \theta \right)_0^{a \cdot \operatorname{sen}(a)}$$

Substituindo em x

$x = a \cdot \operatorname{sen}(\theta)$ $\qquad \cos(a \cdot \operatorname{sen}(t)) = \sqrt{1 - t^2}$

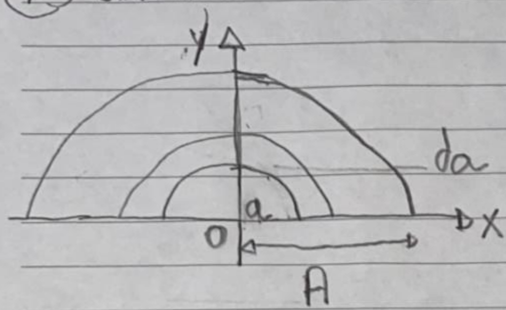
$\theta = a \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{x}{a}\right)$ $\qquad \cos\left(a \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{x^2}{a^2}\right)\right) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$

$$A = 2 \cdot a \cdot b \cdot \left(\frac{x}{a} \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} + a \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{x}{a}\right) \right)_0^{a}$$

$$A = 2 \cdot a \cdot b \cdot \frac{\pi}{2} = \boxed{a \cdot b \cdot \pi = \text{Área da Elipse}}$$

S T Q Q S S D __/__/__

7- Ilustração



Temos que M é a massa da semi disco e A, o raio. Então a massa por unidade de área do disco é:

$$\sigma = \frac{M}{\left(\frac{\pi A^2}{2}\right)} = \frac{2M}{\pi . A^2}$$

Área do elemento é:

$$\frac{1}{2} . \left[\pi (a + da)^2 - \pi . a^2 \right] = \pi . a . da \ (\therefore (da)^2 \ll 0)$$

Massa elementar do anel

$$dM = (\pi . a . da)\sigma = (\pi . a . da)\left(\frac{2M}{\pi . A^2}\right) = \left(\frac{2Ma}{A^2}\right) . da$$

Sejam (X, Y) as coordenadas do centro de massa do elemento, Então:

$$(X, Y) = \left(0, \frac{2a}{\pi}\right), \text{ então } X = 0 \text{ e } Y = \frac{2 . a}{\pi}$$

Tendo X_{CM} e Y_{CM} as coordenadas do centro de massa do semidisco, Então:

$$X_{CM} = 0 \text{ (simetria) e } Y_{CM} = \frac{1}{M} . \int y . dM$$

CONTINUA...

__/__/__

S T Q Q S S D

7)

Substituindo os valores do y e dM

$$y_{CM} = \frac{1}{M}\int_0^A \left(\frac{2a}{\pi}\right)\frac{2.M.a}{A^2}\,da$$

$$y_{CM} = \left(\frac{4}{\pi . A^2}\right)\left(\frac{A^3}{3}\right) = \frac{4.A}{3\pi}$$

(8) Ilustração:

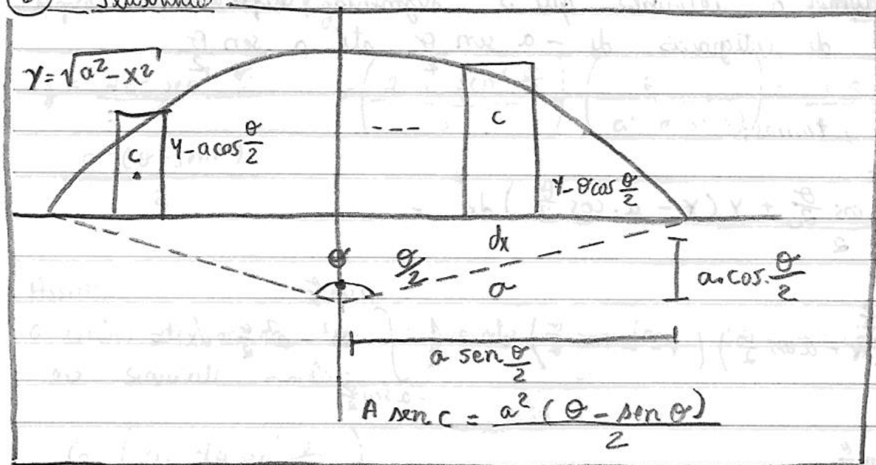


figura 01

De acordo com a figura 01, nós temos que:

$$C_{rw} = \frac{Y + a\cdot\cos\frac{\theta}{2}}{2} \quad ; \quad A_{rw} = \left(Y - a\cos\frac{\theta}{2}\cdot dx\right)$$

$dm = \left(Y - a\cos\frac{\theta}{2}\right)dx$, a massa de cada retângulo.

Obs: Estamos trabalhando com figuras homogêneas

Tomando $G(X_g, Y_g)$ equivalente ao centro de massa, e sabendo por simetria que $X_g = 0$, pelo menos neste caso.

Iremos calcular o Y_g pela fórmula:

$$Y_g = \frac{\int C_{rw}\,dm}{A\,\text{seg}.\,C}$$

- C_{rw} é Y_g dos retângulos que irão compor a figura 01,
- dm é a área dos retângulos.
- $A\,\text{seg}\,C$ área do segmento circular.

/ /

$Y = \sqrt{a^2 - x^2}$

Iremos definir o intervalo que o segmento ocupa, os limites de integração de $-a\ sen\frac{\theta}{2}$ até $a\ .sen\frac{\theta}{2}$

Calculando, temos:

$$\int_{-a\ sen\frac{\theta}{2}}^{a\cdot sen\frac{\theta}{2}} \frac{a.\cos\frac{\theta}{2} + Y}{2}\left(Y - a.\cos\frac{\theta}{2}\right) dx =$$

$$\frac{1}{2}\int_{-a\ sen\frac{\theta}{2}}^{a\ sen\frac{\theta}{2}} \left(Y + a\cos\frac{\theta}{2}\right)\left(Y - a\cos\frac{\theta}{2}\right) dx = \frac{1}{2}\int_{-a\ sen\frac{\theta}{2}}^{a\ sen\frac{\theta}{2}} Y^2 - a^2\frac{\theta}{2}\ dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-a\ sen\frac{\theta}{2}}^{a\ sen\frac{\theta}{2}} a^2 - x^2 - a^2\cos^2\frac{\theta}{2}\ dx =$$

dos: $\cos^2\frac{\theta}{2} = 1 - sen^2\frac{\theta}{2}$

$$= \frac{1}{2}\left(a^2x - \frac{x^3}{3} - a^2x\cos^2\frac{\theta}{2}\right)\Bigg|_{-a\ sen\frac{\theta}{2}}^{a\ sen\frac{\theta}{2}} =$$

$$\left(\left(a^3\ sen\frac{\theta}{2} - \frac{a^3\ sen^3\frac{\theta}{2}}{3} - a^3\ sen\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}\right) - \left(-a^3 sen\frac{\theta}{2} + \frac{a^3 sen^3\frac{\theta}{2}}{3} + a^3\ sen\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(2a^3\ sen\frac{\theta}{2} - \frac{2}{3}a^3\ sen^3\frac{\theta}{2} - 2a^3\ sen\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}\right) =$$

$$\frac{1}{2}\left(2a^3\ sen\frac{\theta}{2} - \frac{2a^3 sen^3\frac{\theta}{2}}{3} - 2a^3\ sen\frac{\theta}{2} + 2a^3\ sen^3\frac{\theta}{2}\right) =$$

$$\frac{1}{2}\left(0 + \frac{4}{3}\cdot a^3\cdot sen^3\frac{\theta}{2}\right) = \frac{4}{6}\cdot a^3\ sen^3\frac{\theta}{2} = \frac{2a^3\ sen^3\frac{\theta}{2}}{3}.$$

Agora, calculando Y_g :

$$Y_g = \frac{\frac{2a^3 \operatorname{sen}^3 \frac{\theta}{2}}{3}}{\frac{a^2(\theta - \operatorname{sen}\theta)}{2}} = \left(\frac{2a^3 \operatorname{sen}^3 \frac{\theta}{2}}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{a^2(\theta - \operatorname{sen}\theta)}\right) = \frac{4a \cdot \operatorname{sen}^3 \frac{\theta}{2}}{3(\theta - \operatorname{sen}\theta)}$$

Assim,

o centro de massa do segmento circular se localiza no seguinte ponto:

$$G\left(0, \frac{4a \operatorname{sen}^3 \frac{\theta}{2}}{3(\theta - \operatorname{sen}\theta)}\right)$$

Parte 3/3

9. Ilustração 1:

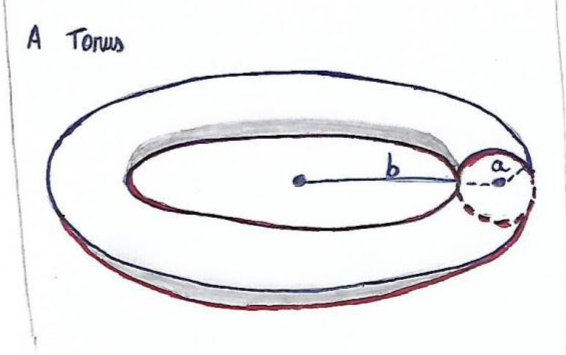
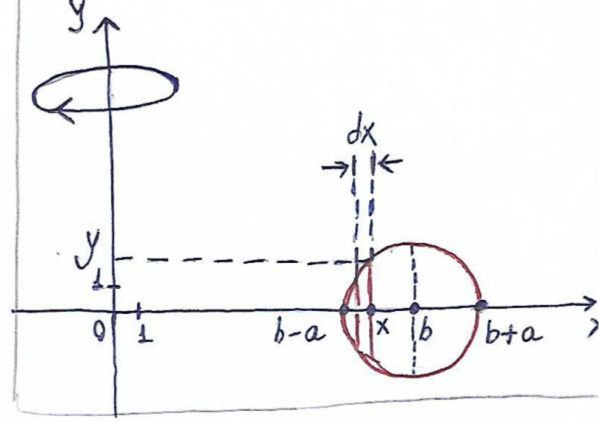


Ilustração 2:



O torus pode ser gerado girando o disco com centro $(b,0)$ e raio $=a$ em torno do eixo $y = \sqrt{a^2-(x-b)^2}$. Um retângulo vertical em um ponto x em $[b-a, b+a]$ de largura dx empurra uma concha cilíndrica, cujo volume é $dV = 2\pi x(2y)\,dx = 4\pi x\sqrt{a^2-(x-b)^2}\,dx$.

Assim, o volume do toro é: $V = 4\pi\int_{b-a}^{b+a} x\sqrt{a^2-(x-b)^2}\,dx$.

Seja $u = x-b$. Então $x = u+b$, $dx = du$, $x=b-a \Rightarrow u=-a$, e $x=b+a \Rightarrow u=a$, consequentemente,

$$V = 4\pi\int_{-a}^{a}(u+b)\sqrt{a^2-u^2}\,du = 4\pi\int_{-a}^{a}u\sqrt{a^2-u^2}\,du + 4\pi b\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-u^2}\,du.$$

Agora $u\sqrt{a^2-u^2}$ é uma função ímpar e o intervalo de integração é simétrico em relação a 0. Isso dá: $\int_{-a}^{a}u\sqrt{a^2-u^2}\,du = 0$.

Fazendo $y = \sqrt{a^2-u^2}$, essa é a equação do semi-círculo superior com centro na origem e raio $=a$ no sistema de coordenada uy.

Isso mostra que $\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-u^2}\,du$ é a área do semi-disco superior.

Assim,

$$V = 0 + 4\pi b\left(\frac{1}{2}\pi a^2\right) = 2\pi^2 a^2 b \text{ unidades cúbicas.}$$

(10) a) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha^2|x|}\,dx$, $\alpha \neq 0$.

$$\int_{-\infty}^{0} e^{-\alpha^2(-x)}\,dx + \int_{0}^{\infty} e^{-\alpha^2 x}\,dx =$$

$$\frac{1}{\alpha^2} e^{\alpha^2 x}\Big|_{-\infty}^{0} + -e^{-\alpha^2 x}\frac{1}{\alpha^2}\Big|_{0}^{\infty} = \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^2} = \frac{2}{\alpha^2}$$

Resposta: Converge.

S T Q Q S S D

__/__/__

10-

b) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+a^2}\,dx, \ a \neq 0$

Primeiro vamos calcular a integral indefinida:

$\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx =$ $\quad u = \frac{x}{a}, \ du = \left(\frac{x}{a}\right)' dx = \frac{dx}{a}$

temos $dx = a.du$

logo,

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \int \frac{1}{a.(u^2+1)}\,du$$

Aplicando a regra da constante múltipla

$\int c f(u)\,du = c.\int f(u)\,du$ com $c = \frac{1}{a}$ e $f(u) = \frac{1}{u^2+1}$:

$$\int \frac{1}{a.(u^2+1)}\,du = \int \frac{1}{\frac{u^2+1}{a}}\,du$$

A integral de $\frac{1}{u^2+1}$ é $\int \frac{1}{u^2+1}\,du = \text{arctg}(u)$:

$$\int \frac{1}{\frac{u^2+1}{a}}\,du = \frac{\text{arc tg}(u)}{a}$$

CONTINUA..

spiral

__/__/__ S T Q Q S S D

10 - b -) CONTINUAÇÃO

$u = \frac{x}{a}$;

$$\frac{\operatorname{arctg}(u)}{a} = \frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right)}{a}$$

Logo,
$$\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right)}{a} + C$$

Desde que temos infinita nos limites, esta é uma integral imprópria do tipo 1.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{a^2+x^2}\right) dx = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right)}{a}\right) - \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right)}{a}\right) = \infty$$

Como o valor do integral não é finita, então ela é uma integral divergente.

(10) c) $I = \int_{1}^{+\infty} \frac{x}{1-e^x} \, dx$

Podemos dizer que $I = \log_2(1-e^x) + \frac{x^2}{2} \Big|_{1}^{+\infty} =$

então,

$\lim_{x \to \infty} \log_2(1-e^x) + \frac{x^2}{2} - \lim_{x \to 1} \log_2(1-e^x) + \frac{x^2}{2} =$

$-\infty - \lim_{x \to 1} \log_2(1-e^x) + \frac{x^2}{2} =$

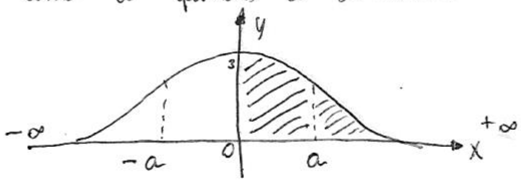
Resposta: Não converge

11/item a) $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$

Mostrar que I é finita, ou seja, converge.

$f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}, \ x \geq 0.$

Como a função é simétrica:



$f(a) = f(-a)$

Então a $\int_{-\infty}^{+\infty}$ se for finita, é duas vezes a integral de zero mais infinito,

logo, é suficiente trabalharmos apenas com a parte positiva.

Como I se trata de uma função par, a $\int_{-a}^{a} = 2 \cdot \int_{0}^{a} =$

$$\int_{-a}^{a} e^{\frac{-x^2}{2}} dx = 2 \cdot \int_{0}^{a} e^{-\frac{x^2}{2}} dx, \ a > 0.$$

Iremos provar uma potência, $x^m e^{-\frac{x^2}{2}} \xrightarrow{?} 0$, quando $x \to +\infty$.

- Considerando $m < 0$:

$$\frac{1}{x^{-m} e^{-\frac{x^2}{2}}} \to 0$$

- $m > 0$:

$$\frac{x^m}{e^{\frac{x^2}{2}}} = \frac{1}{x^{-m} \cdot e^{\frac{x^2}{2}}} =$$ independente do m, tenderá a zero.

$$\begin{cases} x^m e^{-\frac{x^2}{2}} \xrightarrow{?} 0, \text{ quando } x \to +\infty. \\ m > 1 \ ? \end{cases}$$

Como existe $\lim_{x \to +\infty} x^m e^{-\frac{x^2}{2}} = 0, \ \forall m \in \mathbb{Z}$, em particular $\exists \lim_{x \to +\infty} x^2 \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} = 0.$

Assim, esta pequena análise assegura que para $m = 2$ isto acontece, então, vale o critério e a I, converge.

Logo,

$$0 < \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx < +\infty.$$

11/ítem b) $\Gamma(n) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{n-1} dx, \; n \in \mathbb{N}.$

Vamos iniciar analisando para alguns valores de n:

- Com $n = 1$, temos:

$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = e^{-x}\Big|_0^{\infty} = 1$

- Com $n=2$, temos:

$\Gamma(2) = \int_0^{\infty} e^{-x} x dx = -e^{-x} \cdot x \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-x} dx = 1$

- com $n=3$, temos:

$\Gamma(3) = \int_0^{\infty} e^{-x} \cdot x^2 dx = -e^{-x} \cdot x^2 \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-x} \, 2x \, dx = 0 + 2\Gamma(1) = 2\Gamma(1) = 2$

Uma forma de mostrar que $\Gamma(n) = (n-1)!$ é válida seria por indução, vamos iniciar supondo que $n = K$, logo temos:

$\Gamma(K) = \int_0^{\infty} e^{-x} \cdot x^{K-1} dx = (K-1)!$ OK, vale

Então, se $n = K+1$,

$\Gamma(K+1) = \int_0^{\infty} e^{-x} \cdot x^K dx = -e^{-x} \cdot x^K \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} K \cdot e^{-x} \cdot x^{K-1} dx = 0 + K \cdot \int_0^{\infty} e^{-x} x^{K-1} dx$

chegamos em: $K \cdot \Gamma(K) = K \cdot (K-1)! = K!$

então, $\Gamma(K+1) = K\Gamma(K) = K! \quad \forall \; K \geq 1$ ∎