3º Lista de Exercícios - Lógica para Computação

Alexandre M. Arruda

21 de novembro de 2018

1. Coloque as fórmulas a seguinte na Forma Normal Conjuntiva (FNC):
   (a) $\neg p \to q$
   (b) $p \wedge \neg q \wedge r \wedge \neg s$
   (c) $p \to (q \to (r \to (p \wedge q \wedge r)))$
   (d) $(p \wedge \neg q) \vee (r \vee s)$
   (e) $p \wedge \neg(p \to \neg q) \vee \neg q$
   (f) $p \vee \neg p$
   (g) $p \wedge \neg p$
   (h) $((p \to q) \to p) \to p$
   (i) $\neg(p \vee q) \to (\neg p \wedge \neg q)$
   (j) $(\neg p \wedge \neg q) \to \neg(p \vee q)$
   (k) $\neg(p \wedge q) \to (\neg p \vee \neg q)$
   (l) $(\neg p \vee \neg q) \to \neg(p \wedge q)$

2. Encontre predicados apropriados e suas especificações para codificar as frases a seguir na lógica de predicados:
   (a) Todas as coisas vermelhas estão na caixa.
   (b) Só as coisas vermelhas estão na caixa.
   (c) Nenhum animal é ao mesmo tempo um cão e um gato.
   (d) Todos os prêmios foram ganhos por um menino.
   (e) Um menino ganhou todos os prêmios.

3. Para cada uma das fórmulas da lógica de predicados a seguir, encontre um modelo que não a satisfaz ou prove que ela é válida:
   (a) $(\forall x \forall y (S(x, y) \to S(y, x))) \to (\forall x \neg S(x, x))$
   (b) $\exists y (\forall x P(x) \to P(y))$
   (c) $(\forall x (P(x) \to \exists y Q(y))) \to (\forall x \exists y (P(x) \to Q(y)))$
   (d) $(\forall x \exists y (P(x) \to Q(y))) \to (\forall x (P(x) \to \exists y Q(y)))$

(e) $\forall x \forall y (S(x, y) \to (\exists z (S(x, y) \wedge S(z, y))))$

(f) $\forall x \forall y ((P(x) \to P(y)) \wedge (P(y) \to P(x)))$

(g) $(\forall x \exists y (P(x) \to Q(y))) \to (\exists y \forall x (P(x) \to Q(y)))$

4. Demonstre a validade dos argumentos a seguir na lógica de predicados, onde F, G, P e Q são unários. Utilize tableaux e/ou dedução natural.

(a) $\forall x (P(x) \vee Q(x)) \vdash \forall x P(x) \vee \exists x Q(x)$

(b) $\forall x \exists y (P(x) \vee Q(y)) \vdash \exists y \forall x (P(x) \vee Q(y))$

(c) $\forall x (\neg P(x) \wedge Q(x)) \vdash \forall x (P(x) \to Q(x))$

(d) $\forall x (P(x) \wedge Q(x)) \vdash \forall x (P(x) \to Q(x))$

(e) $\exists x (\neg P(x) \wedge \neg Q(x)) \vdash \exists x (\neg (P(x) \wedge \neg Q(x)))$

(f) $\exists x (\neg P(x) \vee Q(x)) \vdash \exists x (\neg (P(x) \wedge \neg Q(x)))$

(g) $\forall x (P(x) \wedge Q(x)) \vdash \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$

(h) $\forall x P(x) \vee \forall x Q(x) \vdash \forall x (P(x) \vee Q(x))$

5. Usando dedução natural, demonstre a validade de:

(a) $\forall x P(a, x, x), \forall x \forall y \forall z (P(x, y, z) \to P(f(x), y, f(z))) \vdash P(f(a), a, f(a))$

(b) $\forall x P(a, x, x), \forall x \forall y \forall z (P(x, y, z) \to P(f(x), y, f(z))) \vdash \exists z P(f(a), z, f(f(a)))$

(c) $\forall y Q(b, y), \forall x \forall y (Q(x, y) \to Q(s(x), s(y)) \vdash \exists z (Q(b, z) \wedge Q(z, s(s(b))))$

(d) $\forall x (P(x) \to (Q(x) \vee R(x))), \neg \exists x (P(x) \wedge R(x)) \vdash \forall x (P(x) \to Q(x))$