Universidade Federal do Ceará

LISTA

DIVISIBILIDADE

1) Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

(a) Mostre que se $c|a$ e $c|b$, então $c|ax + by$, $\forall x, y \in \mathbb{Z}$.

(b) Mostre que se $c|a$ e $c|b$, então $c|a + b$.

(c) Mostre que se $c|a$ e $c|b$, então $c|a - b$.

(d) Mostre que se $a|b$ então $a|bc$.

(e) Mostre que se $a|b$ e se $a|c$ então $a^2|bc$.

(f) Mostre que $a|b$ se e somente se $ac|bc$, $c \neq 0$.

(g) Mostre que se $a|b$, então $a|b^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

(h) Mostrar que se $a|4x - 10y$ e se $a|16x - 39y$, então $a|y$

2) (Critério de divisão por 3) Considere o seguinte número de 5 dígitos, $abcde$. Por exemplo, no número 12345, temos $a = 1, b = 2, c = 3, d = 4$ e $e = 5$.

(a) Note que o número 12345 pode ser escrito como

$$12345 = 10000 \cdot 1 + 1000 \cdot 2 + 100 \cdot 3 + 10 \cdot 4 + 1 \cdot 5.$$

Faça o mesmo com o número $abcde$.

(b) Mostre que se $3|a + b + c + d + e$, então $3|abcde$.

3) Mostrar que se a é um inteiro qualquer então um dos inteiros: $a, a + 2, a + 4$ é divisível por 3.

4) O pendrive de Jonas tem 400 músicas, todas com 4 min de duração, organizadas na sequência: samba, rock, pop, samba, rock, pop, samba, rock, pop, e assim por diante. Ele ouviu, desde do início, duas horas de música. Qual o estilo da ultima música tocada?

5) No planeta Eteria o ano tem 4 meses, cada um com 3 semanas mais 2 dias, sendo que cada semana tem 6 dias, que são, na sequência, aday, bday, cday, dday, eday e fday. Se Martin nasceu em uma aday, em que dia da semana fará 1 ano?

6) Mostrar que o cubo de um inteiro qualquer é de uma das formas $9k, 9k + 1$ ou $9k + 8$.

7) Demonstrar que se m e n são inteiros ímpares, então $8|(m^4 + n^4 - 2)$.

8) Mostre que $30|n^5 - n \ \ \forall n \in \mathbb{Z}$.

9) Achar o maior inteiro de quatro algarismos divisível por 13 e o menor inteiro de 5 algarismos divisível por 15.

MDC E MMC

10) Demonstrar que se $n = abc + 1$, então o $MDC(n, a) = MDC(n, b) = MDC(n, c) = 1$.

11) Os inteiros positivos a, b e c são tais que o $MDC(a, b) = 1$, $a|c$ e $c|b$. Demonstrar que $a = 1$.

12) Usando o algoritmo de Euclides, determine o MDC dos seguintes número:

(a) 12 e 15

(b) 60 e 72

(c) 120 e 180

13) Achar os inteiros x, y que verifiquem cada uma das seguintes igualdades

(a) $MDC(12, 15) = 12x + 15y$

(b) $MDC(60, 72) = 60x + 72y$

(c) $MDC(120, 180) = 120x + 180y$

14) Calcule o MMC dos seguintes números utilizando a relação entre MDC e MMC, isto, é, $MDC(a, b) \cdot MMC(a, b) = 1$.

(a) $6, 9$ e 15

(b) 12 e 21

(c) $45, 60$ e 75.

15) Seja k o menor número natural divisível por $2, 3, 4$ e 5. Determine a soma dos algarismos de k.

16) O MMC entre A e 78 é 156. Quantos são os possíveis valores de A?

17) Determine os valores de a e b, para que o MDC entre os numeros 360 e $2^a \cdot 3^b$ seja 12.

18) Determinar os inteiros positivos a, b sabendo que

(a) $ab = 4032$ e o $MMC(a, b) = 336$

(b) $MDC(a, b) = 8$ e o $MMC(a, b) = 560$

(c) $ab = 756 e MDC(a, b) = 6$.

19) Demonstrar que se a e b são inteiros positivos tais que o $MDC(a, b) = MMC(a, b)$ então $a = b$.

QUANTIDADE DE DIVISORES E NÚMEROS PRIMOS

20 Determine o conjunto dos divisores naturais de:
(a) 12 (b) 24 (c) 30

21 Qual a quantidade de divisores de:
(a) 60 (b) 121 (c) 120

22 A forma fatorada de um número é $2^3 3^2 11^2$.Quantos divisores tem este número?

23 Achar todos os pares de primos p e q, tais que $p - q = 3$.

24 Achar todos os primos que são iguais a um quadrado perfeito menos 1.
Sugestão: use o fato que se $a - b = 2$ então $a^2 - b^2 = 2k$ para todo a,b e k inteiros positivos.

25 Mostre que $x^3 + 7x - 17 = 0$ não possui solução inteira.

26 Mostre que para nenhum $n \in \mathbb{N}$, $2^n + 1$ é um cubo.

27 Determinar todos os inteiros positivos n tais que $n, n+2$ e $n+4$ são todos primos.

28 Determinar se são primos os números:
(a) 169 (b) 197 (c) 239.

29 Achar a decomposição canônica(ou forte) dos números:
(a) 5040 (b) 588 (c) 936

30 Achar o $MDC(a, b)$ e o $MMC(a, b)$ sabendo que $a = 2^2 \cdot 3 \cdot 72$ e $b = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 13$.

EQUAÇÕES DIOFANTINAS

31 Determinar todas as soluções inteiras das seguintes equações diofantinas lineares:

(a) $172x + 20y = 1000$

(b) $18x + 5y = 48$

(c) $39x + 26y = 105$

(d) $44x + 66y = 11$

(e) $14x + 22y = 50$

32 Determinar todas as soluções inteiras e positivas das seguintes equações diofantinas lineares:

(a) $18x + 5y = 48$

(b) $5x - 11y = 29$

(c) $32x + 55y = 771$

Bons Estudos!