Lista de exercícios 3 (Algoritmos gulosos)
Cana - 2021.1

Questão 1. No problema da pilha de caixas são dadas n caixas $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Cada caixa C_i possui peso p_i e quantidade de objetos k_i. O problema consiste em construir uma pilha P com todas as caixas, de modo a minimizar o esforço, calculado como $esforo(P) = \sum_{j=1}^{n}(k_j \times (\sum_{i=1}^{j} p_i))$. Proponha um algoritmo guloso para resolver este problema e mostre que ele encontra uma solução ótima.

Questão 2. Em um torneio de duplas mistas de tênis, participam n mulheres com índices $m_1, m_2, \ldots, m_n$ (ordenados) e n homens com índices $h_1, h_2, \ldots, h_n$ (ordenados). O índice do time $t_k = (m_i, h_j)$ é definido por $I(t_k) = \frac{m_i + h_j}{2}$. Proponha um algoritmo para formar times equilibrados, de forma a minimizar a função $\max_k I(t_k) - \min_k I(t_k)$. Prove que o seu algoritmo encontra uma solução ótima para o problema.

Questão 3. Suponha que você pegou n livros emprestados na biblioteca para estudar para as provas finais, mas ainda não leu nenhum deles. Os livros deveriam ter sido devolvidos ontem, e a biblioteca cobra taxa de R\$ $1,00$ por dia de atraso de cada livro. Para cada livro j, você planeja que precisará de t_j dias para estudar o seu conteúdo. Assuma que apenas um livro é utilizado de cada vez, e que ele é imediatamente devolvido quando não é mais necessário. Descreva um algoritmo guloso para determinar a ordem em que os livros devem ser estudados, de modo a minimizar o total de taxas pago à biblioteca. Aplique o seu algoritmo a um exemplo interessante. Argumente porque o seu algoritmo funciona corretamente.

Questão 4. O problema de encontrar a árvore geradora mínima de um grafo pode ser resolvido pelo algoritmo de Kruskal, que utiliza uma estratégia gulosa.

Algoritmo 1: Kruskal simplificado

Entrada: Grafo $G = (V, E)$ e função w de peso nas arestas de G
Saída: Árvore geradora mínima T de G

$T \leftarrow V(G)$ e conjunto vazio de arestas;
Ordenar $E(G)$ tal que $w(e_1) \leq w(e_2) \leq \ldots \leq w(e_m)$;
para $i \leftarrow 1 \ldots m$ **faça**
    se $T + e_i$ *não contém ciclo* **então**
        $T \leftarrow T + e_i$;
retorna T;

Seja T^* uma árvore geradora de peso mínimo de um grafo G, e T a árvore que o algoritmo de Kruskal retorna. Prove que T é uma árvore de peso mínimo.