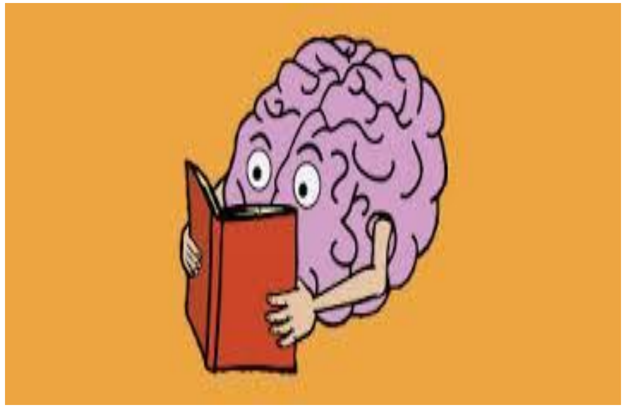
DERIVADAS

2° ROUND

Prefere assistir ou ler primeiro?

Para a teoria completa pode-se consultar os livros Cálculo em Quadrinhos ou a apostila do prof. Sacha anexada no SIGA.



Caso queira ler antes é só seguir para o próximo slide e depois assistir o link da opção abaixo. Boa leitura e bom vídeo em seguida!!!!

“Ah não, eu prefiro assistir uns vídeos antes e depois ler a teoria.”

Sem problemas só assistir os vídeos abaixo e depois seguir para o próximo slide.

- Derivadas (de tudo um pouco): https://www.youtube.com/watch?v=camsop4v4n0&list=PLE6qFDd4x9w-9ERy0SF7Uflt7I6Vnwj49
- Derivadas Parciais: https://www.youtube.com/watch?v=j9jjZHFasYE

Bom vídeo e boa leitura depois!!!

Músicaaaaaa!!!!!!!!!

Não consegue concentrar?

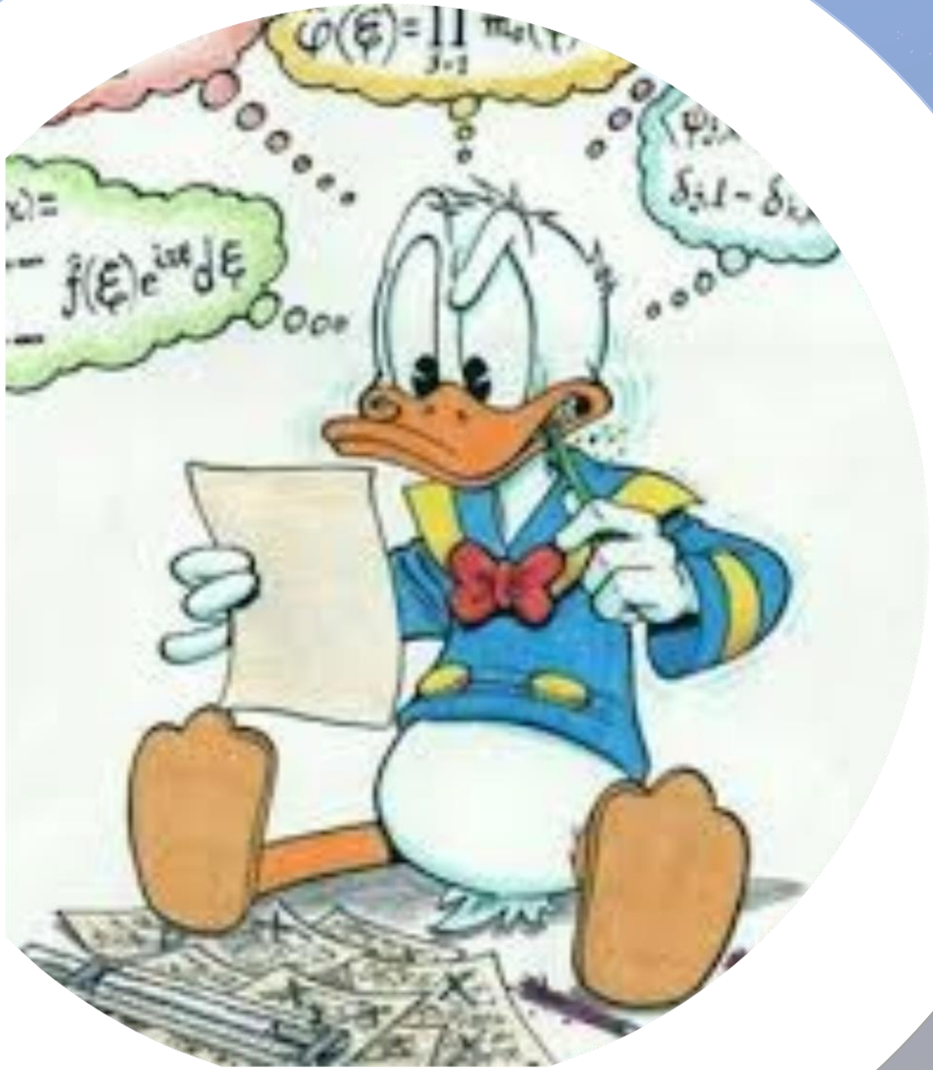
Olha essa playlist que ajuda a concentrar mais rápido

Spotify:

https://open.spotify.com/user/spotify/playlist/37i9dQZF1DWZIOAPKUdaKS?si=TAnU1xfLThKa0-oaLs_MqA

Youtube:

https://www.youtube.com/playlist?list=PLf2E9B7xP6hbHFSVjEsN7fN8bOO7VIkpr



Vamos calcular?!?!?!

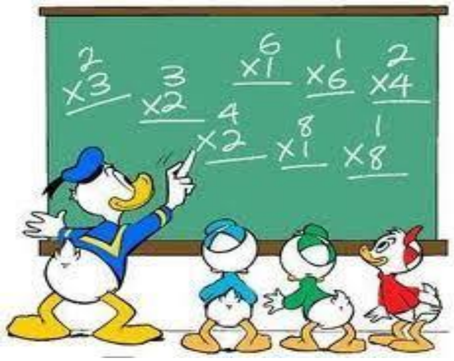
Números, por favor? Nada de letras hein?

Mas...pensando bem se estamos estudando funções... Vai ser cheio de letras então?!?!

Deve ter uma hora que vai números, não é possível???

Exemplo

Até que enfim o professor vai fazer algo com números. Agora vou entender!!!



Acho que me precipitei.... =(

Encontre a Derivada

$$f'(x) = 2x^4 + 5$$

Pela Regra da Suma, a derivada de $2x^4 + 5$ com respeito a x é $\frac{d}{dx}[2x^4] + \frac{d}{dx}[5]$.

$$\frac{d}{dx}[2x^4] + \frac{d}{dx}[5]$$

Avalie $\frac{d}{dx}[2x^4]$.

Toque para menos passos...

Dado que 2 é constante com respeito a x, a derivada de $2x^4$ com respeito a x é $2\frac{d}{dx}[x^4]$.

$$2\frac{d}{dx}[x^4] + \frac{d}{dx}[5]$$

Diferencie usando a Regra da Potência, a qual afirma que $\frac{d}{dx}[x^n]$ é nx^{n-1} onde $n = 4$.

$$2(4x^3) + \frac{d}{dx}[5]$$

Multiplique 4 por 2.

$$8x^3 + \frac{d}{dx}[5]$$

Dado que 5 é constante com respeito a x, a derivada de 5 com respeito a x é 0.

$$8x^3 + 0$$

Encontre a Derivada

$$f'(x) = 5x^3 + 7x$$

Pela Regra da Suma, a derivada de $5x^3 + 7x$ com respeito a x é $\frac{d}{dx}[5x^3] + \frac{d}{dx}[7x]$.

$$\frac{d}{dx}[5x^3] + \frac{d}{dx}[7x]$$

Avalie $\frac{d}{dx}[5x^3]$.

Toque para menos passos...

Dado que 5 é constante com respeito a x, a derivada de $5x^3$ com respeito a x é $5\frac{d}{dx}[x^3]$.

$$5\frac{d}{dx}[x^3] + \frac{d}{dx}[7x]$$

Diferencie usando a Regra da Potência, a qual afirma que $\frac{d}{dx}[x^n]$ é nx^{n-1} onde $n = 3$.

$$5\left(3x^2\right) + \frac{d}{dx}[7x]$$

Multiplique 3 por 5.

$$15x^2 + \frac{d}{dx}[7x]$$

Avalie $\frac{d}{dx}[7x]$.

Toque para mais passos...

$$15x^2 + 7$$

O que acha de mais um exercício?!

Lembrando que este exercício e o anterior foram feitos no Mathway. Só clicar abaixo que você irá para o site e pode conferir todos os passos de seu cálculo.

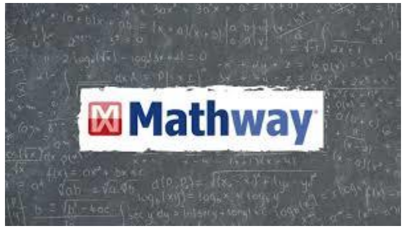


TABELA DE DERIVADAS IMPORTANTES

Notação: $f'(x) = \frac{d}{dx}f(x)$

Regras de Derivação

- $(cf(x))' = cf'(x)$
- Derivada da Soma

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

- Derivada do Produto

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

- Derivada do Quociente

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

- Regra da Cadeia

$$(f(g(x))' = (f'(g(x))g'(x)$$

Funções Simples

- $\frac{d}{dx}c = 0$
- $\frac{d}{dx}x = 1$
- $\frac{d}{dx}cx = c$
- $\frac{d}{dx}x^c = cx^{c-1}$
- $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{d}{dx}\left(x^{-1}\right) = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$
- $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^c}\right) = \frac{d}{dx}\left(x^{-c}\right) = -\frac{c}{x^{c+1}}$
- $\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{d}{dx}x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$,

Funções Exponenciais e Logarítmicas

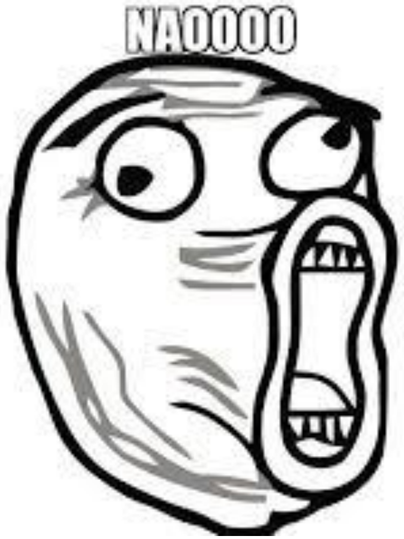
- $\frac{d}{dx}e^x = e^x$
- $\frac{d}{dx}\ln(x) = \frac{1}{x}$
- $\frac{d}{dx}a^x = a^x\ln(a)$

Funções Trigonométricas

- $\frac{d}{dx}\,\mathrm{sen}\,x = \cos\,x$
- $\frac{d}{dx}\cos x = -\mathrm{sen}\ x,$
- $\frac{d}{dx}\ \mathrm{tg}\ x = \sec^2 x$
- $\frac{d}{dx}\sec x = \ \mathrm{tg}\ x \sec x$
- $\frac{d}{dx}\ \mathrm{cotg}\ x = -\mathrm{cossec}\ ^2x$
- $\frac{d}{dx}\ \mathrm{cossec}\ x = -\mathrm{cossec}\ x\ \mathrm{cotg}\ x$

Funções Trigonométricas Inversas

- $\frac{d}{dx}\ \mathrm{arcsen}\ x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $\frac{d}{dx}\arccos x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $\frac{d}{dx}\ \mathrm{arctg}\ x = \frac{1}{1+x^2}$



Derivadas Importantes - Exercícios

Agora sim!!!!!

$$f(x) = x^3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2$$

$$f(x) = x^8 \Rightarrow f'(x) = 8x^7$$

$$f(x) = \frac{1}{x^3} = x^{-3} \Rightarrow f'(x) = -3.x^{-4} = \frac{-3}{x^4}$$

$$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

f (x) = cos x => f' (x) = - sen x

f (x) = cos 2x => f' (x) = - 2sen x

f (x) = cos x^2 => f' (x) = - 2x . sen x

$$f(x) = 5 \ln x \Rightarrow f'(x) = 5.\frac{1}{x}$$

$$f(x) = x^2 + \ln x \Rightarrow f'(x) = 2x + \frac{1}{x}$$

$$f(x) = x^2 . \ln x \Rightarrow f'(x) = x^2 . \frac{1}{x} + 2x. \ln x = x + 2x \ln x$$

$$f(x) = \frac{x^3}{\ln x} \Rightarrow f'(x) = \frac{(\ln x).3x^2 - (\frac{1}{x}).x^3}{(\ln x)^2} = \frac{3x^2 \ln x - x^2}{(\ln x)^2}$$

$$f'(x) = 3^x \Rightarrow f'(x) = 3^x . \ln 3;$$

$$f'(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x . \ln e = e^x, \text{ pois } \ln e = 1$$

Derivadas de Ordem Superior

Se f for uma função diferenciável, então sua derivada f' também é uma função, de modo que f' pode ter sua própria derivada, denotada por $(f')' = f''$. Esta nova função f'' é chamada de **segunda derivada** ou derivada de ordem dois de f. Usando a notação de Leibniz, escrevemos a segunda derivada de $y = f(x)$ como

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2}$$

E o fim disso, onde será??

Se $f(x) = x^3 - x$, encontre e interprete $f''(x)$.

SOLUÇÃO No Exemplo 2, encontramos que a primeira derivada é $f'(x) = 3x^2 - 1$. Assim, a segunda derivada é

$$\begin{aligned} f''(x) = (f')'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{[3(x+h)^2 - 1] - [3x^2 - 1]}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{3x^2 + 6xh + 3h^2 - 1 - 3x^2 + 1}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} (6x + 3h) = 6x \end{aligned}$$

Pelo menos não tem mais limite?

Quer ver a teoria inteira? Basta clicar!!!
http://ecalculo.if.usp.br/ferramentas/limites/regras_lhospital/regras_lhospital.htm

Nesses exemplos usamos algum tipo de artifício a fim de "sair da indeterminação" do tipo $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$. Entretanto, por exemplo, em $\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x}$ nenhum dos artifícios vistos no cálculo de limites resolve o problema.

Coube a Bernoulli - embora a publicação tenha sido de L'Hospital, que emprestou seu nome ao feito - descobrir uma propriedade que nos permite calcular rapidamente limites desse tipo. A engenhosa descoberta consistiu em perceber que, na vizinhança de um ponto podemos comparar o quociente de duas funções com o quociente de suas derivadas, desde que determinadas hipóteses estejam satisfeitas. De maneira precisa, temos:

teorema 1 Primeira Regra de L'Hospital.

Sejam f e g duas funções contínuas num intervalo **I**, deriváveis no interior de I, tais que $g'(x) \neq 0$ para todo **x** no interior de **I**. Seja $a \in I$ e suponhamos que $f(a) = g(a) = 0$ e que existe $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, finito ou infinito. Então existe $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ e mais ainda $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

teorema 2 Segunda Regra de L'Hospital.

Sejam f e g duas funções deriváveis em todo ponto x distinto de a, x pertencente a uma vizinhança V de a, $V =]a-r, a+r[$, r>0. Suponhamos que $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in V$ e que $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty$. Se existe $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, finito ou infinito, então existe $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ e, mais ainda, $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Com as Regras de L'Hospital muitos limites complicados são facilmente calculados. Entretanto, é preciso ter sempre o cuidado de verificar se as hipóteses estão satisfeitas.

exemplo 4 $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} = 0$.

Exemplo de Limite utilizando a Regra de L'Hospital

Vídeo
Clique aqui!

Exemplo 1

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-9x+4}{3x^2+7x+8}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{d}{dx}(x^2-9x+4)}{\frac{d}{dx}(3x^2+7x+8)}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x-9}{6x+7}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{d}{dx}2x-9}{\frac{d}{dx}6x+7}$$
$$=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

Exemplo 2

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{d}{dx}\ln x}{\frac{d}{dx}x^2}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{2x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2x^2}$$
$$=0$$

Exemplo 3

$$\lim_{x\to 2}\frac{\frac{d}{dx}[x^2-4]}{\frac{d}{dx}[x-2]}=\lim_{x\to 2}\frac{2x}{1}=4$$

Derivadas Parciais

Se calcularmos f_x e f_y em um ponto genérico (x,y), obteremos duas funções de x e y; a função $f_x(x, y)$ é chamada *função derivada parcial de f em relação a x* (ou simplesmente, derivada parcial de f em relação a x). A função $f_y(x, y)$ é chamada *função derivada parcial de f em relação a y* (ou simplesmente, derivada parcial de f em relação a y). As derivadas parciais também podem ser indicadas por

$$f_x \text{ ou } \frac{\partial f}{\partial x} \text{ e } f_y \text{ ou } \frac{\partial f}{\partial y}$$

Para o cálculo de f_x e f_y, podemos aplicar as regras de derivação estudadas em funções de uma variável (Capítulo 4), desde que:

a) no cálculo de f_x consideremos y como constante;

b) no cálculo de f_y consideremos x como constante.

EXEMPLO Suponhamos que $f(x, y) = x^3 + y^2 + 2xy$. As derivada parciais são:

$f_x = 3x^2 + 2y$ (pois y é considerada uma constante),

$f_y = 2y + 2x$ (pois x é considerada uma constante).

As derivadas parciais no ponto (1,1), por exemplo, são obtidas substituindo x e y por 1; isto é:

$$f_x(1, 1) = 3 + 2 = 5 \text{ e } f_y(1, 1) = 2 + 2 = 4.$$

Referências

- http://engenhariaexercicios.com.br/calculo-a/derivada/regra-de-lhospital/
- http://blogengenhariarodrigo.blogspot.com/2014/09/regra-de-lhopital-formas-indeterminadas.html
- https://edisciplinas.usp.br/mod/page/view.php?id=688982
- STEWART, J. Cálculo v.1, 6.ed. Pioneira Thompson Learning, 2009.
- HAZZAN, S; MORETTIN, P; BUSSAB, W. Introdução ao Cálculo para Administração, Economia. Saraiva, 2009.
- http://www.mat.ufmg.br/~sacha/textos/Calculo/Apostila_2015_02_26.pdf
- http://matemabio.blogspot.com/p/regras-de-derivacao-e-derivadas.html


DEPOIS DA PROVA DE MATEMÁTICA...
CERTEZA DE QUE DESEJA EXCLUIR MATEMÁTICA DA SUA VIDA?
ACEITAR
CANCELAR
Nãomesmo.com