Notas de Aula – Matemática Discreta
1º módulo - Análise e Desenvolvimento de Sistemas
Profª Renata N. Imada

LÓGICA FORMAL

Questão: (FATEC - 2016) Considerando que x = 9, y = 12 e z = 15, assinale a alternativa que apresenta uma expressão cujo valor lógico é verdadeiro.

a) $(4y + 2z < 8x)$ **ou** $(3z - 2y = 3x + 5)$
b) $(2z = x + y)$ **ou** $(x + y - z < 5)$
c) $(3x - y = z)$ **e** $(x - y + z \neq y)$
d) $(x + z \geq y)$ **e** $(y - z = 3)$
e) $(x + y > z)$ **e** $(xy < xz)$

Conectivos: são palavras que se usam para formar novas proposições a partir de outras.
O valor lógico de uma proposição composta depende dos valores lógicos de seus componentes e dos conectivos usados.

Operações Lógicas Básicas

Expressão	Conjunção	Disjunção	Condicional (Implicação)	Bicondicional (Equivalência)	Negação
Expressão Lógica	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$	A', $\neg A$ ou $\sim A$
Representação	A e B	A ou B	A implica B	A se, e só se B	Não A

Expressões comuns em Português associadas a diversos conectivos lógicos:

Expressões em Português	Conectivo lógico	Expressão Lógica
e; mas; também; além disso	Conjunção	$A \wedge B$
Ou	Disjunção	$A \vee B$
Se A, então B. A implica B. A, logo B A só se B; A somente se B. B segue de A. A é uma condição suficiente para B. Basta A para B. B é uma condição necessária para A.	Condicional (Implicação)	$A \rightarrow B$
A se e somente se B A é uma condição necessária e suficiente para B	Bicondicional (Equivalência)	$A \leftrightarrow B$
Não A. É falso que A. Não é verdade que A.	Negação	A', $\neg A$ ou $\sim A$

Exercícios:

1. Sejam as proposições *A*: Marcos é alto e *B*: Marcos é elegante. Traduzir para a linguagem simbólica as seguintes proposições:

a) Marcos é alto, mas não é elegante.
b) Marcos é baixo ou elegante.
c) Se Marcos é baixo, então ele não é elegante.

2. Sejam as proposições A: Jorge é rico e B: Carlos é feliz. Traduzir para a linguagem corrente as seguintes proposições:

a) $\neg A \to B$

b) $A \vee B'$

c) $\sim A \wedge \sim B$

d) $B \leftrightarrow \sim A$

Tabela-Verdade

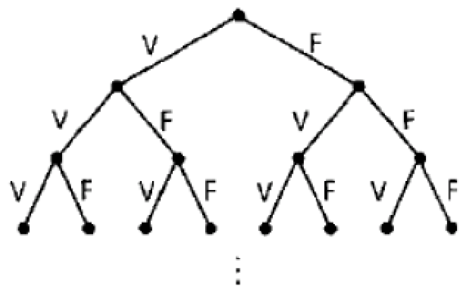
É possível explorar todos os valores lógicos possíveis de uma proposição. Para isso, usaremos um recurso chamado de tabela-verdade.

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \to B$	$A \leftrightarrow B$	$\sim A$
V	V	V	V	V	V	F
V	F	F	V	F	F	
F	V	F	V	V	F	V
F	F	F	F	V	V	

A tabela-verdade de uma proposição composta com n proposições simples contém 2^n linhas.

Tabela-verdade para 3 letras de proposição.

A	B	C
V	V	V
V	V	F
V	F	V
V	F	F
F	V	V
F	V	F
F	F	V
F	F	F



Letras de afirmações	Possibilidades
1	$2 = 2^1$ nós
2	$4 = 2^2$ nós
3	$8 = 2^3$ nós

Conjunção: $A \wedge B$

Se A e B são verdadeiras, então $A \wedge B$ é verdadeira, caso contrário, $A \wedge B$ é falsa.

Reflete uma noção de simultaneidade:

• verdadeira, apenas quando A e B são simultaneamente verdadeiras;

• falsa, em qualquer outro caso (quando pelo menos uma das preposições é falsa).

<u>Exemplo:</u>

a) Paris fica na França e 2 + 2 = 4.

b) Paris fica na França e 2 + 2 = 5.

c) Paris fica na Austrália e 2 + 2 = 4.

d) Paris fica na Austrália e 2 + 2 = 5.

Disjunção (inclusiva): $A \vee B$

Se A e B são falsas, então $A \vee B$ é falsa, caso contrário, $A \vee B$ é verdade.

Reflete uma noção de "pelo menos uma":

• verdadeira, quando pelo menos uma das proposições é verdadeira.

• falsa, somente quando A e B são simultaneamente falsas.

<u>Exemplo:</u>

a) Paris fica na França ou 2 + 2 = 4.

b) Paris fica na França ou 2 + 2 = 5.

c) Paris fica na Austrália ou 2 + 2 = 4.

d) Paris fica na Austrália ou 2 + 2 = 5.

Obs.: A palavra "ou" é normalmente usada de duas maneiras distintas, às vezes é usada com o sentido de "A ou B ou ambas", isto é, pelo menos uma das alternativas ocorre, como acima, e outras vezes tem o significado de "A ou B, mas não ambas", isto é, apenas uma das duas alternativas ocorre. Por exemplo, a sentença "Michel irá para Regente Feijó ou Osvaldo Cruz" utiliza "ou" da segunda forma, conhecida como *disjunção exclusiva*.

Condicional: $\boldsymbol{A \rightarrow B}$

A condicional $A \rightarrow B$ é falsa apenas quando a primeira parte A é verdadeira e a segunda parte B é falsa. Consequentemente, quando A é falsa, a condicional $A \rightarrow B$ é verdadeira, não importando o valor lógico de B.

Exemplo:

"Se choveu agora a pouco, então a rua está molhada".

Adotando os fatos de que A (choveu agora a pouco) é uma proposição VERDADEIRA e que B (a rua está molhada) também é VERDADEIRA e analisando os dados na tabela, temos que:

- A 1ª linha (V V → V) faz sentido, pois choveu e a rua está molhada, é uma conexão VERDADEIRA.
- A 2ª linha (V F → F) também faz sentido, já que se é verdadeiro que choveu, e a rua não está molhada, temos uma situação FALSA.
- A 3ª linha (F V → V) talvez seja a única que pode gerar dúvida em nossas intuições. No exemplo, podemos entender que não choveu, mas a rua está molhada. Isso quer dizer o seguinte: se chove, então a rua fica molhada, mas se a rua está molhada, isso não significa, necessariamente, que choveu. Uma pessoa (ou um carro de bombeiro) pode ter usado uma enorme mangueira e ter feito jorrar bastante água nessa rua. Ou seja, chover é uma **condição** que proporciona o fato da rua estar molhada, mas não é uma única condição. Na expressão **A → B,** B pode ser verdadeira mesmo se A não ocorreu, e por isso temos F V → V.
- A 4ª linha (F F → V) faz sentido, pois se não choveu e a rua não está molhada, temos uma conexão VERDADEIRA.

Bicondicional: $\boldsymbol{A \leftrightarrow B}$

A bicondicional $A \leftrightarrow B$ é verdadeira sempre que A e B tem os mesmos valores lógicos, e falsa caso contrário.

Reflete a noção de condição "nos dois sentidos":

• considera simultaneamente
  - ida: A é premissa e B é conclusão
  - volta: B é premissa e A é conclusão

Exemplo:

Dadas as seguintes proposições:

M = x e y são números pares. N = $x + y$ é um número par.

Perceba que M → N é verdadeiro, mas não vale a recíproca, ou seja, N → M é uma proposição falsa. Mas nem sempre é dessa forma que ocorre, conforme veremos no exemplo a seguir:

R = x ou y é um número par. S = $x \cdot y$ é um número par.

Perceba que, sendo o **ou** (inserido na proposição R) um conectivo inclusivo, tanto R → S quanto S → R são verdadeiras.

Negação: $\sim A$

Se A é verdade, então $\sim A$ é falso; se A é falso, então $\sim A$ é verdade.

Exemplo:

a) Paris fica na França.
b) Paris não fica na França.
c) Não ocorre que Paris fica na França.

As duas últimas declarações são a negação da primeira. Como a) é verdade, b) e c) são falsas.

Exercício:

3. Qual o valor lógico de cada uma das proposições a seguir?

a) 8 é par ou 6 é ímpar.
b) 8 é par e 6 é ímpar.
c) 8 é ímpar ou 6 é ímpar.
d) 8 é ímpar e 6 é ímpar.
e) Se 8 for ímpar, então 6 é ímpar.
f) Se 8 for par, então 6 é ímpar
g) Se 8 for ímpar, então 6 é par.

Ordem de precedência dos conectivos lógicos:

1. entre parênteses, dos mais internos para os mais externos
2. negação (~)
3. conjunção (∧) e disjunção (∨)
4. condicional (→)
5. bicondicional (↔)

Exemplo: Fazer a tabela-verdade para $A \vee B' \to (A \vee B)'$.

A	B	B'	$A \vee B'$	$A \vee B$	$(A \vee B)'$	$A \vee B' \to (A \vee B)'$
V	**V**	F	V	V	F	F
V	**F**	V	V	V	F	F
F	**V**	F	F	V	F	V
F	**F**	V	V	F	V	V

Exercícios:

4. Sabendo que as proposições "x = 0" e "x = y" são verdadeiras e que as proposições "y = z" e "y = t" são falsas, determinar o valor lógico de cada uma das seguintes proposições:

a) $x = 0 \wedge x = y \to y \neq z$
b) $x \neq y \vee y \neq z \to y = t$
c) $x \neq 0 \vee y = t \to y = z$

5. Sabendo que os valores lógicos das proposições *A*, *B*, *C* e *D* são respectivamente V, V, F e F, determinar o valor lógico de cada uma das seguintes proposições:

a) $(A \to C) \to (\sim A \to \sim C)$
b) $\sim(A \wedge B) \to \sim A \vee \sim B$
c) $\sim(A \wedge D) \to \sim A \wedge \sim D$
d) $\sim((A \vee D) \wedge (D \vee C))$

6. Sabendo que os valores lógicos das proposições A e B são respectivamente F e V, determinar o valor lógico da proposição:

$$(A \wedge (\sim B \to A)) \wedge \sim((A \leftrightarrow \sim B) \to B \vee \sim A)$$

7. Construir as tabelas-verdade das seguintes proposições.

a) $A \wedge B \to B \vee A$ **b)** $\sim(A \to \sim B)$ **c)** $(A \leftrightarrow \sim B) \leftrightarrow B \to A$ **d)** $A \wedge \sim B \to \sim C$