ANÁLISE COMBINATÓRIA

Análise combinatória: é usada para a resolução de problemas de contagens. Ela permite a construção, sob certas circunstâncias, de grupos diferentes formados por um número finito de elementos de um conjunto.

Dois conceitos são fundamentais para a análise combinatória: o fatorial de um número e o Princípio Fundamental da Contagem (árvore de possibilidades).

Princípio fundamental da contagem (PFC): deve-se multiplicar os números de opções entre as escolhas que podemos fazer e que o total de possibilidades de realizar-se o evento E é dado por:

$$P1 \cdot P2 \cdot \ldots \cdot Pn$$

Exemplo 1: para montar um computador, temos 3 diferentes tipos de monitores, 4 tipos de teclados e 3 tipos de "CPU". Para saber o numero de diferentes possibilidades de computadores que podem ser montados com essas peças, somente multiplicamos as opções:

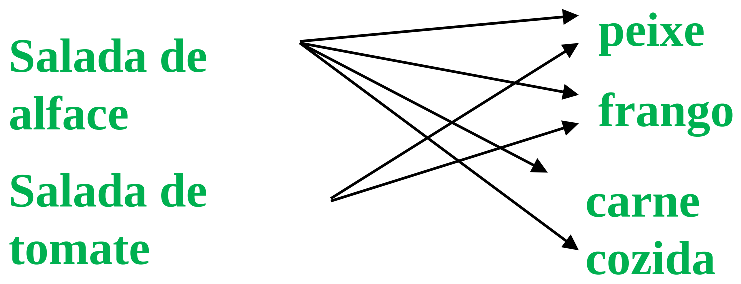
monitores teclados CPU
3 x 4 x 3 = 36 Têm-se 36 possibilidades de configurações diferentes.

O fatorial é uma forma de decompor-se um número natural. Para calcular-se o fatorial de um número, basta multiplicá-lo por todos os seus antecessores até o número 1. O fatorial é representado pelo sinal de exclamação — "!".

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

Árvore das possibilidades: digrama que serve para visualizar as diversas opções da contagem de um acontecimento, é um método direto de contagem.

Exemplo: Um restaurante oferece no cardápio 2 saladas distintas, 4 tipos de pratos de carne. Uma pessoa deseja uma salada, um prato de carne,. De quantas maneiras a pessoa poderá fazer seu pedido ?



8 possibilidades diferentes

Para problema simples pode-se contar o número de resultados diretamente sem o uso das fórmulas da análise combinatória.

Tipos de agrupamentos: os três tipos principais de agrupamentos são as Permutações, os Arranjos e as Combinações. Estes agrupamentos podem ser simples, com repetição ou circulares.

Permutação Simples: é um caso particular de arranjo simples. É o tipo de agrupamento ordenado onde entram todos os elementos. É o numero de maneiras de ordenar n elementos dentro de um conjunto, alterando apenas a posição dos elementos no grupo.

$$\boxed{P_n = n!}$$

Exemplo 2: Calcule o número de formas distintas de 4 pessoas ocuparem os lugares de um banco retangular quatro lugares.

P4 = 4! = 4.3.2.1 = 24

Exemplo 3: ANAGRAMA é o agrupamento formado pelas letras de uma palavra, que podem ter ou não significado na inguagem comum. Os possíveis anagramas da palavra PAI são: PAI, PIA, AIP, API, IAP e IPA. Calcule o número de anagramas da palavra CAPÍTULO.

A palavra CAPÍTULO tem 8 letras então o seu anagrama é: $P_8 = 8! = 8.7.6.5.4.3.2.1 = 40320$

Permutação com elementos repetidos:

$$\boxed{P_n^{(a,b,c\ldots)} = \frac{n!}{a!\,b!\,c!\ldots}}$$

a, b, c,... : quantidade de repetição de cada letra.

Exemplo 4: Quantos anagramas podem ser formados com as letras da palavra MARIA? Neste problema temos n = 5 (cinco letras) e A = 2 (a letra A se repete duas vezes)

$$P_5^{(2)} = \frac{5!}{2!} = 5.4.3.2.1 = 60$$

Combinações simples: temos uma combinação quando os agrupamentos permanecem iguais ao se inverter a posição dos seus elementos, ou seja, a ordem em que os elementos ocupam no grupo não importa.

$$\boxed{C_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!\,p!}}$$

Exemplo 5: Considere um grupo de cinco pessoas, João, Pedro, Luís, Gilberto e Ana , deseja-se escolher e 3 pessoas desse grupo para formar comissões. Quantos comissões de 3 pessoas podemos formar?

Note que, o grupo formado por João, Pedro e Luís é o mesmo grupo formado por Luís, Pedro e João. Neste caso temos uma combinação de cinco elementos tomados de três em três.

$$C_{5,3} = \frac{5!}{(5-3)!\,3!} = \frac{5!}{2!\,3!} = \frac{5.4.3!}{2!\,3!} = \frac{20}{2} = 10\ comissões$$

Arranjos simples: um agrupamentos é um arranjo quando ao inverter a posição dos seus elementos e a ordem que os elementos ocupam dentro do grupo importar, ou seja, se representarem agrupamentos diferentes.

$$\boxed{A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}}$$

Exemplo 6: Como podemos formar centenas com algarismos distintos, utilizando apenas os 5 primeiros números ímpares (1, 3, 5, 7, 9).

Notem que a ordem dos algarismos no agrupamento importa: 135; 137;139; 153, 157.

Se invertermos a posição dos elementos nas centenas teremos centena diferentes, ´por exemplo, 135 ≠ 351. Portanto, trata-se de arranjo.

$$A_{5,3} = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{5.4.3.2!}{2!} = 60\ centenas$$

Atividade 1

1. Na competição de intercalasse da escola, há 5 turmas competindo entre si pela medalha de ouro, prata e bronze. Calcule o número de maneiras distintas que o pódio pode ser formado.

2. As senhas bancárias são construídas com 4 dígitos. Durante a criação da senha, a gerente da Pedro recomendou que ele criasse uma senha com 4 dígitos, todos distintos entre si. Suponha que Pedro seguiu a recomendação de sua gerente. Qual o número de senhas distintas que ele pode criar?

3. Um técnico de um time de voleibol possui a sua disposição 15 jogadores que podem jogar em qualquer posição. De quantas maneira ele poderá escalar seu time?

4. Quantas comissões de 4 elementos podemos formar com 20 alunos de uma turma?

5. Se uma pessoa gasta exatamente um minuto para escrever cada anagrama da palavra Estatística, quanto tempo levará para escrever todos os anagramas?

6. Um grupo de 10 viajantes para dormir num hotel. Só havia 2 quartos com 5 lugares cada. De quantas formas eles puderam se distribuir para dormir naquela noite?

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!} \qquad C_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!\,p!} \qquad P_n^{a,b,c\ldots} = \frac{n!}{a!\,b!\,c!}$$

1. Na competição de intercalasse da escola, há 5 turmas competindo entre si pela medalha de ouro, prata e bronze. Calcule o número de maneiras distintas que o pódio pode ser formado.

$$A_{5,3} = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{5.4.3.2!}{2!} = 60$$

2. As senhas bancárias são construídas com 4 dígitos. Durante a criação da senha, a gerente da Pedro recomendou que ele criasse uma senha com 4 dígitos, todos distintos entre si. Suponha que Pedro seguiu a recomendação de sua gerente. Qual o número de senhas distintas que ele pode criar?

$$A_{10,4} = \frac{10!}{(10-4)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{10.9.8.7.6!}{6!\,2!} = 5040$$

3. Um técnico de um time de voleibol possui a sua disposição 15 jogadores que podem jogar em qualquer posição. De quantas maneira ele poderá escalar seu time?

$$C_{15,6} = \frac{15!}{(15-6)!\,6!} = \frac{15.14.13.12.11.10.9!}{9!\,6!} = 5005$$

4. Quantas comissões de 4 elementos podemos formar com 20 alunos de uma turma?

$$C_{20,4} = \frac{20!}{(20-4)!\,4!} = \frac{20.19.18.17.16!}{16!\,4!} = 4845$$

5. Se uma pessoa gasta exatamente um minuto para escrever cada anagrama da palavra Estatística, quanto tempo levará para escrever todos os anagramas?

$$P_n^{a,b,c\ldots} = \frac{11!}{3!\,2!\,2!\,2!} = \frac{11.10.9.8.7.6.5.4.3!}{3!\,2!\,2!\,2!} = 831600$$

6. Um grupo de 10 viajantes para dormir num hotel. Só havia 2 quartos com 5 lugares cada. De quantas formas eles puderam se distribuir para dormir naquela noite?

$$C_{10,5}.\,C_{5,5} = \frac{10!}{(10-5)!\,5!}.\frac{5!}{(5-5)!\,5!} = \frac{10.9.8.7.6.5!}{5!\,5!}.\,1 = 252$$

Atividade 2

1. Existem 10 jogadores de futebol de salão, João é o único que joga como goleiro. Assim, quantos times de 5 jogadores podem ser escalados?

2. Um grupo de 20 professores, 5 são matemáticos. De quantas maneiras podemos formar comissões de 10 pessoas tal que: Nenhum membro seja matemático? b) haja exatamente um matemático na comissão.

3. Para formar placas de automóveis de 2 letras e 3 números, de quantas maneiras podemos montas as placas com as letras A, B, C, D e E e os números 0, 1 e 2?

4. Uma empresa possui 16 funcionários entre os quais serão escolhidos 3 que disputarão cargos importantes. Coordenador, assistente e tesoureiro. De quantas maneiras podemos fazer a escolha?

5. Um químico possui 10 substancias, de quantos modo pode associar 6 dessas substancias, se dentre essas 10 substancias existem 2 que não podem misturar por serem explosivas.

1. Existem 10 jogadores de futebol de salão, João é o único que joga como goleiro. Assim, quantos times de 5 jogadores podem ser escalados?

$$1.\ C_{9,4} = \frac{9!}{(9-4)!\,4!} = 126$$

2. Um grupo de 20 professores, 5 são matemáticos. De quantas maneiras podemos formar comissões de 10 pessoas tal que:

a) Nenhum membro seja matemático?

$$C_{15,10} = \frac{15!}{(15-10)!\,10!} = 3003$$

b) haja exatamente um matemático na comissão

$$5.\ C_{15,9} = \frac{15!}{(15-9)!\,9!} = 25025$$

3. Para formar placas de automóveis de 2 letras e 3 números, de quantas maneiras podemos montas as placas com as letras A, B, C, D e E e os números 0, 1 e 2?

$$5\,.\,5\,.\,3\,.\,3\,.\,3 = 675$$

4. Uma empresa possui 16 funcionários entre os quais serão escolhidos 3 que disputarão cargos importantes. Coordenador, assistente e tesoureiro. De quantas maneiras podemos fazer a escolha?

$$A_{16,3} = \frac{16!}{(16-3)!} = 3360$$

5. Um químico possui 10 substancias, de quantos modo pode associar 6 dessas substancias, se dentre essas 10 substancias existem 2 que não podem misturar por serem explosivas?