CONJUNTOS NUMÉRICOS

Os principais conjuntos numéricos recebem as seguintes notações:

Conjunto dos Números Naturais $\mathbb{N}$:

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$

Nota:

O * (asterisco) é usado para indicar a supressão do zero. Assim:
$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, ...\}$

Conjunto dos Números Inteiros $\mathbb{Z}$:

$\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$

$\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ (inteiros não negativos)

$\mathbb{Z}_- = \{..., -3, -2, -1, 0\}$ (inteiros não positivos)

Conjunto dos Números Racionais $\mathbb{Q}$:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z} \text{ e } b \in \mathbb{Z}^* \right\}$$

Números racionais são todos os números que podem ser representados na forma de $\frac{a}{b}$, com **a** e **b** inteiros e **b** diferente de zero.

Exemplos:

$7 = \frac{7}{1}$ $\quad$ $2{,}5 = \frac{25}{10} = \frac{5}{2}$ $\quad$ $0{,}666... = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

Nota:

Os números que não podem ser expressos na forma $\frac{a}{b}$, com **a** e **b** inteiros e **b** diferente de zero, chamam-se irracionais.

Exemplos:

$\sqrt{2} \cong 1{,}414213...$ $\quad$ $\sqrt{3} \cong 1{,}7320...$ $\quad$ $\pi \cong 3{,}1415...$

Conjunto dos Números Reais $\mathbb{R}$:

O conjunto dos números racionais reunido com o conjunto dos números irracionais forma o conjunto dos **números reais**.

Sendo:

$\mathbb{Q}$ (racionais)
$\mathbb{I}$ (irracionais)
$\Rightarrow \mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R}$ (reais)

Assim, os números reais podem ser racionais ou irracionais.

Os reais racionais, quando expressos na forma decimal, ou são decimais exatos ou têm infinitas casas, porém periódicas.

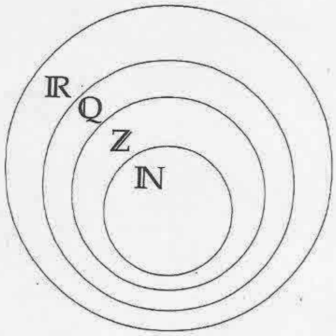
Os reais irracionais, representados aproximadamente na forma decimal, têm infinitas casas decimais e não periódicas.

Exemplos:

1. $\left.\begin{array}{l} 7 \\ 0{,}8 \\ 5{,}3232... \\ -9 \end{array}\right\} \Rightarrow$ reais racionais

2. $\left.\begin{array}{l} 2{,}71828... \\ 3{,}1415... \end{array}\right\} \Rightarrow$ reais irracionais

Através dos diagramas de Venn visualizamos melhor a relação entre os conjuntos numéricos. Observe:

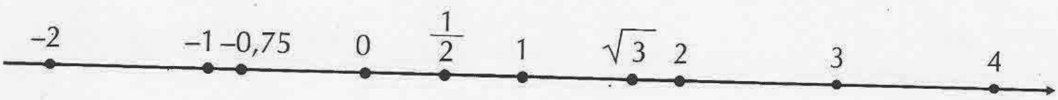


$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

A RETA REAL

Os números reais são representados graficamente considerando a correspondência biunívoca existente entre os pontos de uma reta e os números reais.

Assim, a cada ponto da reta corresponde um e um só número real e cada número real é correspondente de um único ponto. Por outro lado, assim como entre dois pontos de uma reta há infinitos pontos, também entre dois números reais quaisquer existem infinitos números reais:



INTERVALOS NUMÉRICOS

Considerando dois números reais **a** e **b**, sendo a < b, vamos definir alguns **subconjuntos de $\mathbb{R}$**, chamados **intervalos numéricos** de extremos **a** e **b**.

Por exemplo, sendo a = 5 e b = 8, o conjunto dos infinitos números reais compreendidos entre 5 e 8 é um subconjunto de $\mathbb{R}$ chamado intervalo numérico de extremos 5 e 8.

Um intervalo pode incluir ou não os extremos, daí termos a seguinte classificação:

Intervalo fechado

Quando inclui os extremos **a** e **b**.

Notação:	Na reta real:	Subconjunto de $\mathbb{R}$:
[a, b]		$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$
Exemplo:		
[5, 8]		$\{x \in \mathbb{R} \mid 5 \leq x \leq 8\}$

Intervalo aberto

Quando não inclui os extremos **a** e **b**.

Notação:	Na reta real:	Subconjunto de $\mathbb{R}$:
] a, b [		$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
Exemplo:		
] 5, 8 [		$\{x \in \mathbb{R} \mid 5 < x < 8\}$

Intervalo fechado à esquerda e aberto à direita

Quando inclui **a** e não inclui **b**.

Notação:	Na reta real:	Subconjunto de $\mathbb{R}$:
[a, b [		$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$
Exemplo:		
[5, 8 [		$\{x \in \mathbb{R} \mid 5 \leq x < 8\}$

Intervalo aberto à esquerda e fechado à direita

Quando não inclui **a** e inclui **b**.

Notação:	Na reta real:	Subconjunto de $\mathbb{R}$:
] a, b]		$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$
Exemplo:		
] 5, 8]		$\{x \in \mathbb{R} \mid 5 < x \leq 8\}$

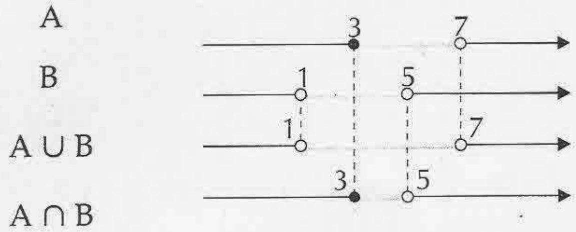
Exemplos:

1. Dados os intervalos:

A = [3, 7 [e B =] 1, 5 [

pedem-se: A ∪ B e A ∩ B.

Colocando esses intervalos na reta real, temos:



Observações:

Na união temos todos os elementos de A e todos os elementos de B.

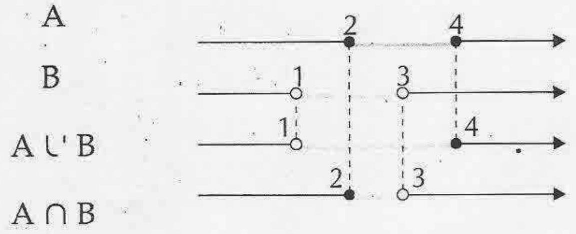
Na intersecção temos apenas os elementos comuns a A e B.

Assim: A ∪ B =] 1, 7 [e A ∩ B = [3, 5 [

2. Dados os conjuntos:

$A = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 4\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 3\}$

pedem-se: A ∪ B e A ∩ B.



Então: A ∪ B =] 1, 4] ou $A \cup B = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leq 4\}$
A ∩ B = [2, 3 [ou $A \cap B = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x < 3\}$

EXERCÍCIOS

10 Represente na reta real:

a) [3, 5]
b)] 1, 2]
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid 3 \leq x < 5\}$
d) $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 4\}$
e) $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leq 3\}$

11 Associe a coluna da direita com a da esquerda:

a) [3, 5] ( ) [3, 5 [

b) 

( ) $\{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x \leq 5\}$

c) 

( ) 

d) $\{x \in \mathbb{R} \mid 3 \leq x < 5\}$ ( )] 3, 5 [

12 Usando a notação de desigualdade escreva as seguintes relações entre números da reta real.

Modelo: **x** está à direita do 3

Escrevemos: $x > 3$ **ou** $3 < x$

a) **y** está à esquerda do 7

b) **z** está à direita do 0

c) **w** está entre 5 e 8

d) **t** está entre –1 e 1

e) **r** está à direita de –3

13 Escreva os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$ usando a notação de conjuntos:

Modelo: Subconjunto dos números reais menores que 4.

Solução: $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 4\}$

a) Subconjunto dos números reais maiores que 5.

b) Subconjunto dos números reais maiores que 7 e menores que 10.

c) Subconjunto dos números reais maiores que –8 e menores que 3.

d) Subconjunto dos números reais maiores ou igual a 3 e menores que 4.

e) Subconjunto dos números reais positivos e menores que 5.

14 Dados os intervalos abaixo, obtenha as uniões e intersecções:

a) $[1, 3]$ e $]2, 5]$

b) $]3, 5[$ e $[1, 6]$

c) $[2, 5[$ e $]1, 4[$

d) $[1, 6]$ e $]2, 7[$

e) $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 4\}$ e $\{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 5\}$

f) $\{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 5\}$ e $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 3\}$

g) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ e $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 3\}$

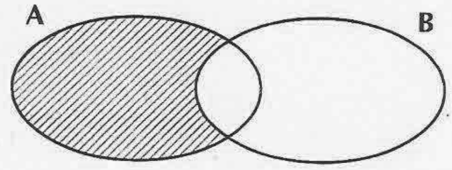
h) $[0, 3]$ e $]-4, 4[$

i) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$ e $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$

j) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 8\}$ e $\{x \in \mathbb{R} \mid 7 < x < 9\}$

ASSINALE A ALTERNATIVA CORRETA:

15 A região hachurada do diagrama abaixo corresponde ao conjunto:



a) $A \cup B$

b) $A - B$

c) $A \cap B$

d) $B - A$

16 Se $A \cap B = B$ e $A \cup B = A$, então:

a) $A \subset B$

b) $A = B$

c) $B \subset A$

d) $A - B = \varnothing$

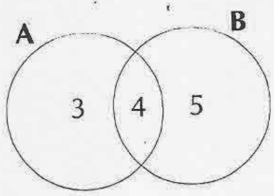
17 Dado o diagrama abaixo, então:

a) $3 \in B$

b) $3 \subset A$

c) $\{3, 4\} \subset A$

d) $\{4, 5\} \in B$



18 Se $A \cap B = \{6, 8, 10\}$, $A = \{4, x, 8, 10\}$ e $B = \{2, x, y, 10, 12\}$, então **x** e **y** são respectivamente:

a) 4 e 6

b) 2 e 6

c) 8 e 10

d) 6 e 8

19 Sendo P = {cidades brasileiras}, então podemos afirmar que:

a) Brasília $\in$ P

b) Brasília $\subset$ P

c) P $\supset$ Brasília

d) N.R.A.

20 Sendo R = {pessoas que vivem em Brasília}, T = {pessoas que vivem no Brasil}, então podemos afirmar que:

a) $R \subset T$

b) $R \in T$

c) $T \subset R$

d) a, b, c são corretas

21 Se $A = B$, então necessariamente:

a) $A \cap B = \varnothing$

b) $A \cup B = A$

c) $A \cup B = \varnothing$

d) $A \cup B \neq A$

22 Dados os conjuntos $A = \{1, 3, 4, 6\}$, $B = \{3, 5, 7, 8\}$ e $C = \{1, 5, 6, 8\}$, então $(B - A) \cap C$ é igual a:

a) $\{1, 6\}$

b) $\{5, 8\}$

c) $\{1\}$

d) $\{3, 7\}$

23 O número de elementos do conjunto $A = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}\}$ é:

a) 2

b) 3

c) 4

d) 5

24 Sendo A e B dois conjuntos tais que $A = B$, podemos afirmar que:

a) $A - B = A$

b) $A - B = B - A = \varnothing$

c) $B - A = B$

d) $A - B$ é o conjunto universo

25 Os valores reais de **x** que pertencem ao intervalo 0 a 1, aberto à direita e fechado à esquerda, são:

a) $0 \leq x \leq 1$

b) $0 < x < 1$

c) $0 \leq x < 1$

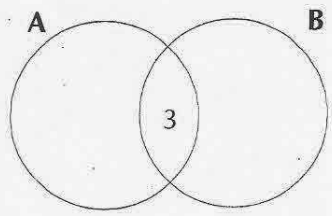
d) $x < 0$ ou $x > 1$

APLICAÇÃO DA TEORIA DOS CONJUNTOS NA RESOLUÇÃO DE ALGUNS PROBLEMAS

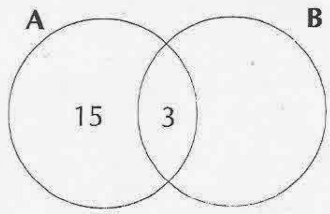
Exemplos:

1. Se dois conjuntos A e B têm juntos 25 elementos, A tem 18 elementos e há 3 elementos comuns, então quantos elementos tem o conjunto B?

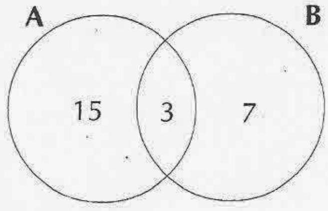
Como o número de elementos da intersecção de A e B que se indica $n(A \cap B) = 3$, temos no diagrama:



Se o número de elementos de A $n(A) = 18$, no diagrama temos $18 - 3 = 15$ elementos que pertencem somente a A.



O número total de elementos $n(A \cup B) = 25$; assim, elementos somente de B: $25 - 15 - 3 = 7$.



Assim, B tem 10 elementos.

Algebricamente podemos escrever:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$
$$25 = 18 + 10 - 3 .$$

Essa expressão algébrica pode ser generalizada.

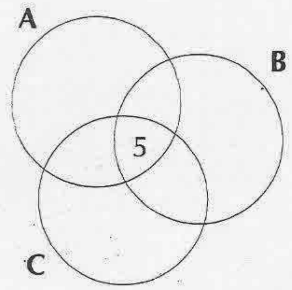
2. Numa cidade são consumidos três produtos: A, B e C. No mês passado, um levantamento sobre o consumo desses produtos apresentou os seguintes resultados:

Produtos	A	B	C	A e B	A e C	B e C	A, B e C
Número de consumidores	80	70	90	30	20	15	5

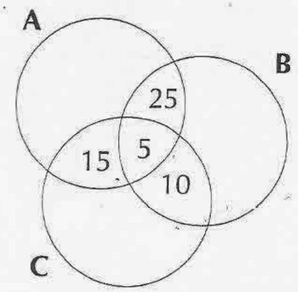
Observe que todas as pessoas deste levantamento consumiram pelo menos um dos três produtos. Então pergunta-se:

a) Quantas pessoas consumiram somente o produto A?
b) Quantas pessoas consumiram somente um produto, A, B ou C?
c) Quantas pessoas consumiram mais de um produto?

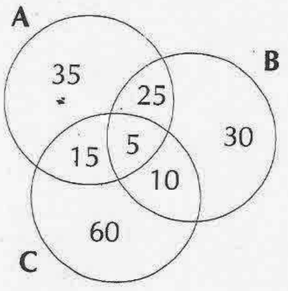
1º) Com base nos dados, fazemos o diagrama abaixo e colocamos inicialmente os elementos comuns aos três $n(A \cap B \cap C) = 5$:



2º) Em seguida, com $n(A \cap B) = 30$, $n(A \cap C) = 20$ e $n(B \cap C) = 15$ e subtraindo 5 de cada uma dessas intersecções, colocamos no diagrama:



3º) Completamos cada conjunto A, B e C levando em conta os elementos já colocados, no conjunto A por exemplo, faltam $80 - 25 - 15 - 5 = 35$ e assim por diante:



Respondendo às perguntas temos:

a) Consumiram apenas o produto A: 35 pessoas.

b) Consumiram somente um produto, A, B ou C: 35 + 30 + 60 = 125 pessoas.

c) Consumiram mais de um produto: 15 + 25 + 10 + 5 = 55 pessoas.

EXERCÍCIOS

26 Num grupo de pessoas pesquisadas todas assinavam pelo menos um dos dois jornais A e B: 50 assinavam o jornal A; 80 o jornal B e 30 assinavam A e B. Qual o total de assinantes?

27 Numa escola 150 alunos estudam Matemática, 20 estudam Português e Matemática e os 30 restantes estudam outras disciplinas. Pergunta-se: Qual o total de alunos dessa escola?

28 Num clube exatamente 30% dos sócios praticam futebol, 80% vôlei. Se todos os sócios praticam pelo menos um dos dois esportes, qual é o percentual de praticantes dos dois?

29 A tabela abaixo é o resultado de uma pesquisa feita em uma cidade sobre o consumo de três produtos:

Produtos	A	B	C	A e B	A e C	B e C	A, B e C	Nenhum dos três
Número de consumidores	30	50	70	10	5	6	1	10 000

Com base nesta tabela, pergunta-se:

a) Quantas pessoas foram pesquisadas?

b) Quantas consomem apenas um dos produtos?

c) Quantas não consomem o produto C?

d) Quantas consomem só dois produtos?

30 Em um condomínio de 600 famílias, 315 possuem carro, 240 famílias possuem TV e 182 não possuem nem carro nem TV. Pergunta-se:

a) Quantas possuem carro ou TV?

b) Quantas possuem carro e TV?

c) Quantas possuem carro e não possuem TV?