DEFINIÇÃO

Aplicação do conceito de integração na obtenção de comprimentos de arcos, áreas e volumes.

PROPÓSITO

Aplicar os conceitos da integração para determinar comprimentos de curvas, áreas de função e entre funções, como também área de superfície de revolução, além de empregar os conceitos de integração no cálculo de volumes de um sólido qualquer e de sólidos obtidos por revolução.

PREPARAÇÃO

Antes de iniciar o conteúdo deste tema, tenha em mãos papel, caneta e uma calculadora científica ou use a calculadora de seu smartphone/computador.

OBJETIVOS

MÓDULO 1

Aplicar o conceito da integração no cálculo do comprimento de arcos de curva

MÓDULO 2

Empregar o conceito da integral na obtenção do cálculo de áreas

MÓDULO 3

Aplicar o conceito da integral na obtenção do cálculo de volumes

MÓDULO 1

⦿ Aplicar o conceito da integração no cálculo do comprimento de arcos de curva

INTRODUÇÃO

Uma aplicação da operação da integral definida é a obtenção do comprimento do arco da curva traçada por uma função real.

A Geometria Analítica nos ensina a traçar distância, considerando uma reta, entre dois pontos.

Acontece que o gráfico de uma função não é formado apenas por retas.

Assim, torna-se necessário usar a ferramenta da integral para obter o comprimento desta curva. Esta ferramenta será estudada neste módulo.

COMPRIMENTO DO ARCO DE UMA CURVA

Em algumas aplicações, precisamos calcular **o comprimento de uma curva**, isto é, o comprimento do gráfico de uma função entre dois pontos do gráfico.

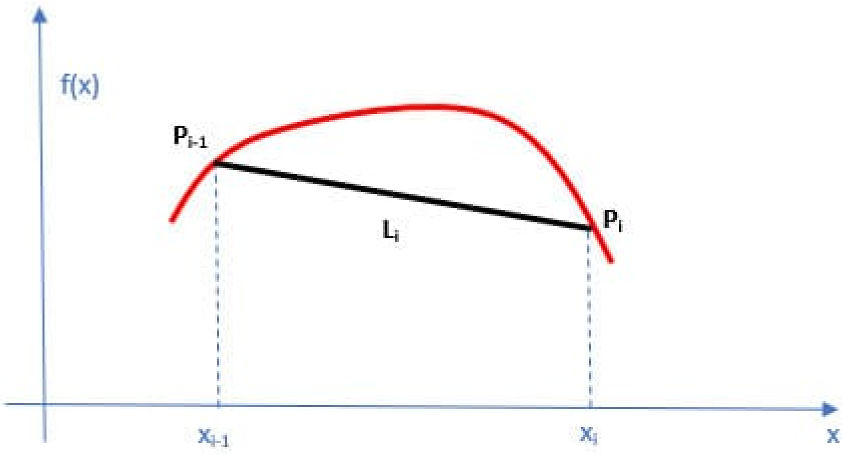
Se o gráfico for uma reta, é fácil obter as distâncias entre os dois pontos, mas o caso geral é quando o gráfico da função é definido pela equação f(x).

A estratégia é dividir o gráfico em pontos com uma distância bem pequena entre eles, de forma a transformar essa distância numa reta.

Dizemos que vamos aproximar o comprimento do arco do gráfico por uma poligonal, isto é, um gráfico montado apenas por retas.

Vamos utilizar a fórmula que nos permitirá obter esse comprimento, considerando, inicialmente, o comprimento da distância entre dois pontos do gráfico através de uma aproximação por uma reta.

Seja a função f(x) e deseja-se obter a distância do gráfico entre os pontos P_{i-1} e P_i



Fonte: Autor

Seja Li a distância entre Pi-1Pi.

Como as coordenadas de Pi são (xi-1, yi-1)=(xi-1, f(xi-1)) e Pi(x1, y1)=(x1, f(x1))

Li=Pi-1P1¯= yi-yi-12+xi-xi-12

Mas, yi-yi-12=fxi-fxi-12..

Com xi – xi-1 = Δxi

Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Existe um teorema conhecido como **Teorema do Valor Médio** que nos diz que em um intervalo x1 e x2 sempre existirá um ponto ci que:

f'ci=fxi-fxi-1xi-xi-1→Δfxi=f'(ci)Δxi

Assim, fxi-fxi-12=Δf(xi)2=f'ci Δxi2 , com xi-1≤ ci ≤ xi.

Li= fxi-fxi-12+Δxi2=f'(ci)2Δxi2+Δxi2=Δxi1+f'(ci)2

Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Estamos interessados em calcular o comprimento do gráfico de f(x) entre os pontos do domínio [**a,b**]. Dividiremos os pontos [**a,b**] em uma partição P: a < x0 < x1 < x2 < ... < xn-1< xn = b.

Assim, o comprimento da poligonal que liga os pontos deste gráfico será dado por:

LP=∑i=1nfxi-fxi-12+xi-xi-12

LP=∑i=1nΔxi1+f'ci2

Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

A poligonal aproximará melhor a curva do gráfico quando a distância entre os pontos, Δx, tender a zero, assim:

$L=\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i\sqrt{1+f'(c_i)^2}$

Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Fazer $\Delta x \to 0$ é semelhante a ter uma partição com um número infinito de intervalos, isto é, $i \to \infty$.

Usando a mesma analogia da definição da integral definida:

$L=\lim_{\Delta x \to 0}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i\sqrt{1+f'(c_i)^2}=\int_a^b\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$

Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

★ EXEMPLO

Determine o comprimento do arco do gráfico da função $y = 3x^2 + 2$ entre os pontos (0,2) e (1,5).

Solução

A resolução é dada com aplicação direta da fórmula:

$L=\int_a^b\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$

Como $f(x) = 3x^2 + 2 \to f'(x) = 6x$, Assim:

$L=\int_{x=0}^{x=1}\sqrt{1+(6x)^2}\,dx=\int_0^1\sqrt{1+36x^2}\,dx$

Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Agora, necessitamos usar as técnicas de integração para calcular esta integral.

Para resolver integrais do tipo $\sqrt{1+a^2x^2}$ usamos uma substituição de variável do tipo $tg\alpha=ax \to \sec^2\alpha\, d\alpha=a\, dx$.

Assim: $\sqrt{1+a^2x^2}=\sqrt{1+tg^2\alpha}=\sqrt{\sec^2\alpha}=\sec\alpha$

Portanto, no exemplo $tg\alpha=6x \to \sec^2\alpha\, d\alpha=6\, dx$

Para $x = 0 \to tg\alpha=0 \to \alpha=0$. Para $x = 1 \to tg\alpha=6 \to \alpha=arctg\ 6$.

$L=\int_{x=0}^{x=1}\sqrt{1+(6x)^2}\,dx=\int_0^{arctg\ 6}\sec\alpha\,\frac{1}{6}\sec^2\alpha\, d\alpha$

$L=\frac{1}{6}\int_0^{arctg\ 6}\sec^3\alpha\, d\alpha$

Ainda não temos uma integral imediata.

Clique aqui e verifique o cálculo da integral $\int\sec^3\alpha\, d\alpha$

MODAL

Voluptate consequat amet nostrud ullamco. Ut consectetur deserunt ea Lorem deserunt in aliqua nulla. Ullamco ut sint aliqua id eiusmod ipsum ex pariatur amet nulla. Do sit excepteur fugiat deserunt do occaecat ullamco.

Fonte:fonte.com.br

Assim, L=16∫0arctg 6sec3α dα=1612secα tgα+12lnsec α +tg α0arctg6

Lembrando que tgarctg 6=6→sec arctg 6 =1+tg2(arctg6)=1+36=37, e que sec 0=1 e tg 0=0

L=11237.6+ln37+6-1.0+ln1+0=1237+112ln6+37

Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

FUNÇÃO COMPRIMENTO DE ARCO

Baseado na fórmula obtida no item anterior, pode-se definir uma função, denominada de função comprimento de arco, a que tem o objetivo de medir o comprimento de um arco de gráfico de uma função a partir de um ponto particular até outro ponto qualquer.

Assim, se a curva **C** tem seu gráfico definido pela função f(x), define s(x) como a função comprimento de arco dada por

sx=∫ax1+f'(t)2 dt

Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

★ EXEMPLO

Obtenha a função comprimento de arco, definida pela função gx=16-18ln x+x2 , para medir o arco a partir do ponto inicial (**1,17**). Determine o comprimento do arco do gráfico entre o ponto inicial e o ponto com x = 3.

Solução

Como gx=16-18ln x+x2 →g'x=-18x+2x

1+2x-18x2=1+4x2-12+164x2=2x+18x2=2x+18x

Portanto, x=∫1x1+2t-18t2dt=∫1x2t+18tdt=t2+18lnt1x

sx=x2+18ln x -1 , com x≥1

Assim, para x = 3 se terá

s3=32+18ln 3 -1=8+18ln 3

Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

TEORIA NA PRÁTICA

Um arquiteto pretende construir um arco parabólico, virado para baixo, em um monumento. Ele deseja saber quantos metros de metal serão necessários para a obra. Sabe-se que o arco terá uma distância entre as duas pontas que tocam ao chão de 4 m e a altura do ponto médio será de 8 m.

RESOLUÇÃO

Assista ao vídeo sobre comprimento do arco.

MÃO NA MASSA

1. MARQUE A ALTERNATIVA QUE APRESENTA A INTEGRAL QUE DEVE SER CALCULADA PARA DETERMINAR O COMPRIMENTO DO ARCO GERADO PELA FUNÇÃO G(X) = 3 LN X, PARA 1≤ X ≤ 3

A) L=∫131+9ln2xdx

B) L=∫139+x2xdx

C) L=∫13(1+3ln x) dx

D) L=∫121+1x2dx

2. MARQUE A ALTERNATIVA QUE APRESENTA A INTEGRAL QUE REPRESENTA A FUNÇÃO COMPRIMENTO DE ARCO QUE MEDE O COMPRIMENTO DO ARCO DA FUNÇÃO FX=4EX, A PARTIR DO PONTO X = 4.

A) ∫0x1-16e2xdx

B) ∫4x1+e2xdx

C) ∫4x1+16e2xdx

D) ∫0x1+16exdx

3. DETERMINE O VALOR DE SΠ4, EM QUE S(X) É A FUNÇÃO COMPRIMENTO DE ARCO QUE DETERMINA O COMPRIMENTO DO ARCO DA FUNÇÃO GX=LN(COS X) , A PARTIR DO PONTO COM X = 0.

A) ln2

B) ln(3+1)

C) ln5

D) ln(2+1)

4. DETERMINE O COMPRIMENTO DE ARCO QUE EXISTE ENTRE OS PONTOS A E B QUE PERTENCEM À CURVA DE GRÁFICO HX=23(X2+1)32. SABE-SE QUE O PONTO A TEM ABSCISSA 0 E O PONTO B ABSCISSA 1.

A) 53

B) 15

C) 35

D) 13

5. DETERMINE O COMPRIMENTO DE ARCO FORMADO PELA FUNÇÃO GX=18X4+14X2, ENTRE X = 1 E X = 2.

A) 3316

B) 1633

C) 334

D) 433

6. DETERMINE A FUNÇÃO COMPRIMENTO DE ARCO QUE CALCULA O COMPRIMENTO DO ARCO TRAÇADO PELA FUNÇÃO GX=X2+8, A PARTIR DO PONTO X = 0, PARA X<Π2.

A) s(x)=121+4x2+ln1+4x2

B) s(x)=142x1+4x2+ln1+4x2+2x

C) s(x)=141+4x2-ln1+4x2

D) s(x)=12x1+x2+ln1+x2+x

GABARITO

1. Marque a alternativa que apresenta a integral que deve ser calculada para determinar o comprimento do arco gerado pela função g(x) = 3 ln x, para 1≤ x ≤ 3

Usando a fórmula para calcular o comprimento do arco:

L=∫ab1+f'(x)2dx Como fx=3ln x→f'x=3x

Assim, L=∫131+3x2dx=∫139+x2xdx

Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

2. Marque a alternativa que apresenta a integral que representa a função comprimento de arco que mede o comprimento do arco da função fx=4ex, a partir do ponto x = 4.

Usando a fórmula para calcular a função comprimento do arco:

s(x)=∫4x1+f'(x)2dx

Assim, s(x)=∫4x1+4ex2dx=∫4x1+16e2xdx

Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

3. Determine o valor de sπ4, em que s(x) é a função comprimento de arco que determina o comprimento do arco da função gx=ln(cos x) , a partir do ponto com x = 0.

Usando a fórmula para calcular a função de comprimento do arco:

sx=∫0x1+f'x2dx Como fx=ln(cosx) →f'x=-senxcosx=-tgx

Assim, sx=∫0x1+-tg x2dx=∫0x1+tg2xdx=∫0xsec x dx=lnsecx+tg x

Logo, sπ4=lnsecπ4+tgπ4=ln2+1

Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

4. Determine o comprimento de arco que existe entre os pontos A e B que pertencem à curva de gráfico hx=23(x2+1)32. Sabe-se que o ponto A tem abscissa 0 e o ponto B abscissa 1.

Usando a fórmula para calcular o comprimento do arco:

L=∫ab1+h'(x)2dx Como hx=23(x2+1)32→h'x=2332x2+11/22x=2xx2+11/2

Assim, L=∫011+2xx2+11/22dx=∫011+4x2(x2+1)dx

Logo, L=∫011+4x4+4x2dx=∫01(2x2+1)2dx=∫012x2+1dx

L=23x3+x01=23+1=53

Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

5. Determine o comprimento de arco formado pela função gx=18x4+14x2, entre x = 1 e x = 2.

Assista ao vídeo com a resolução da questão sobre **comprimento do arco**

6. Determine a função comprimento de arco que calcula o comprimento do arco traçado pela função gx=x2+8, a partir do ponto x = 0, para x<π2.

Assista ao vídeo com a resolução da questão sobre **Função comprimento do arco**

GABARITO

VERIFICANDO O APRENDIZADO

1. DETERMINE O COMPRIMENTO DO ARCO DA CURVA HX=X3/2, ENTRE X = 0 E X = 1

A) 1271313-8

B) 12713-4

C) 1333-2

D) 198-13

2. MARQUE A ALTERNATIVA QUE APRESENTA A FUNÇÃO COMPRIMENTO DE ARCO QUE DETERMINA O COMPRIMENTO DO ARCO DA FUNÇÃO FX=LNSEC X DESDE O PONTO X = 0, PARA UM X≤Π2.

A) sx=lnsecx-tg x, 0≤x≤π2

B) sx=lnsecx+tg x, 0≤x≤π2

C) sx=lnsecx+ln(tg x+1), 0≤x≤π2

D) sx=2-lntgx+1, 0≤x≤π2

GABARITO

1. Determine o comprimento do arco da curva hx=x3/2, entre x = 0 e x = 1

A alternativa **"A "** está correta.

Usando a fórmula para calcular o comprimento do arco:

L=∫ab1+f'(x)2dx Como fx=x3/2→f'x=32x

Assim, L =∫011+32x2dx=∫01124+9xdx

Fazendo uma substituição de variável u=4+9x→du=9dx

Para x=0→u=4 e para x=1→u=13

L =∫41312u 19du=11823u32413=1271313-8

Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

2. Marque a alternativa que apresenta a função comprimento de arco que determina o comprimento do arco da função fx=lnsec x desde o ponto x = 0, para um x≤π2.

A alternativa **"B "** está correta.

Usando a fórmula para calcular o comprimento do arco:

$s(x)=\int 0x1+f'(x)2dx$

Assim, $s(x)=\int 0x1+tg2dx= \int 0xsecx\ dx=lnsecx+tg\ x0x=lnsecx+tg\ x$

$sx=lnsecx+tg\ x,\ 0\leq x\leq \pi 2$

Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

MÓDULO 2

⦿ Empregar o conceito da integral na obtenção do cálculo de áreas

INTRODUÇÃO

Outra aplicação para a operação da integração é o cálculo de áreas.

Neste módulo, veremos três tipos de áreas que podem ser calculadas pela integral:

- **área entre a função e o eixo x;**
- **área entre duas funções;**
- **área de uma superfície de revolução.**

CÁLCULO DE ÁREA DE UMA FUNÇÃO

A definição da integração definida se baseia no cálculo do limite de um somatório, denominado de **Soma de Riemann**.

SOMA DE RIEMANN

Na matemática, a soma de Riemann é uma aproximação obtida pela expressão. É nomeada em homenagem ao matemático alemão Bernhard Riemann. Uma aplicação muito comum é a aproximação da área de funções ou linhas em um gráfico, mas também o comprimento das curvas e outras aproximações

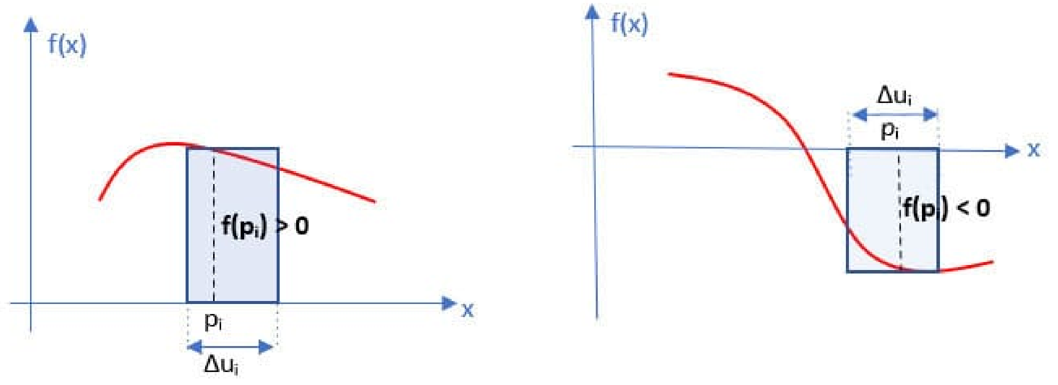
Fonte:Wikipédia

Assim, a integral definida de f(x) de **a** para **b** será dada por:

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\Delta u_{max}\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(p_i)\Delta u_i$$

Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

As parcelas do somatório são as áreas dos retângulos, formados abaixo da curva f(x), quando a função está em cima do eixo, ou serão as áreas dos retângulos multiplicados por (– 1), para quando a função estiver abaixo dos eixos.



Fonte: Autor

Como área é sempre uma medida positiva, torna-se necessário trabalhar apenas com termos positivos. Assim, pode-se calcular a área A, entre a função f(x) e o eixo x, para a ≤ x ≤ b, pela integral:

A=∫ABF(X)DX

Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Para resolver esta integral, teremos que dividir em intervalos de integração em que o sinal de f(x) é sempre positivo ou sempre negativo.

EXEMPLO

Determine a área entre o gráfico da função g(x)=2 cos x e o eixo x, para x entre π4 e 3π4

Solução

A área A será obtida pela integral

A=∫abf(x)dx=∫π43π42cosx dx

A função cos x é positivo para π4≤x≤π2→2cosx=2cosx

A função cos x é negativa para π2≤x≤3π4→2cosx=-2cosx

Assim:

A=∫π43π42cosx dx=∫π4π22cosx dx +∫π23π4(-2cosx) dx=2 sen xπ4π2+-2 sen xπ23π4

A=2senπ2-2senπ4+-2sen3π4+2senπ2=2-2.22-2.22+2=4-22

Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Repare que, se fosse feita a integral sem o módulo, o valor seria diferente, pois as parcelas abaixo do eixo diminuiriam das parcelas acima do eixo, ao invés de se somarem.

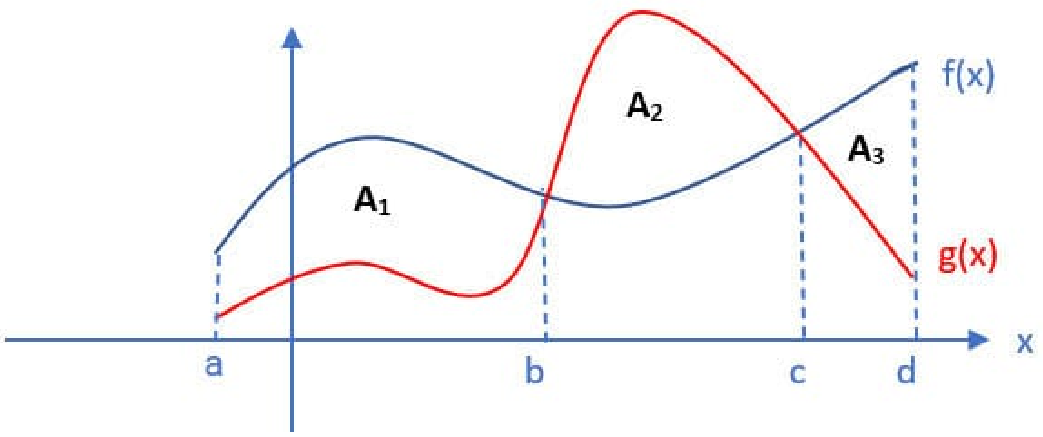
∫Π43Π42COSX DX= 2 SEN XΠ43Π4=2 SEN 3Π4-2 SEN Π4=0

Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

CÁLCULO DE ÁREA ENTRE FUNÇÕES

Deseja-se agora obter a área que se encontra entre dois gráficos **f(x)** e **g(x)**.

Neste caso, também precisamos ter a noção em que intervalos f(x) é maior que g(x), estando acima no desenho dos gráficos, e onde f(x) é menor que g(x), estando abaixo no desenho dos gráficos.



Fonte: Autor

Se observarmos, no gráfico, a área entre as funções f(x) e g(x) para a ≤ x ≤ d é dada por

A = A1+A2+A3

Repare que, em A1 e A3, a função f(x) está acima de g(x), assim, estas áreas podem ser obtidas como se fossem área entre f(x) e o eixo **x** menos a área entre g(x) e o eixo **x**. Portanto:

A1=∫abfx-gxdx=∫abfxdx-∫abgxdx

A3=∫cdfx-gxdx=∫cdfxdx-∫cdgxdx

Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Para o caso de A2, a função f(x) está abaixo de g(x), logo, esta área pode ser obtida como a diferença entre a área de g(x) e o eixo **x** e a área entre f(x) e o eixo **x.**

Assim:

A2=∫BCGX-FXDX=∫BCGXDX-∫BCFXDX

Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Podemos, então, juntar todas essas integrais utilizando o módulo, pois, assim, o integrando será calculado sempre pelo maior valor, menos o menor valor.

Desta forma, a área entre f(x) e g(x) para a ≤ x ≤ d é dada por:

A=∫ADFX-G(X)DX

Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Esta integral deve ser separada em intervalos nos quais a posição relativa entre as funções no gráfico não se altera. Assim, no exemplo do gráfico:

A=∫ADFX-G(X)DX=∫ABFX-GXDX+∫BCGX-FXDX+∫CDFX-GXDX

Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

★ EXEMPLO

Calcule a área da região compreendida entre os gráficos da função f(x) = 27x e g(x) = 3 x3 com 0 ≤ x ≤ 5.

Solução

Precisamos, inicialmente, verificar a posição relativa entre f(x) e g(x).

Os pontos onde estes gráficos se interceptam, com 0 ≤ x ≤ 5, serão:

27 X=3X3→X=0 E X=3

Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Analisando os gráficos, para 0 ≤ x ≤ 3, f(x) está acima de g(x) e para 3 ≤ x ≤ 5,g(x) está acima de f(x).

Desta forma,

A=∫0527x -3x3dx=∫0327x -3x3dx+∫353x3-27xdx

A=272x2-34x403+34x4-272x235=2729-3481+34625-27225-3481+2729

A=2434+408-216=10114

Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

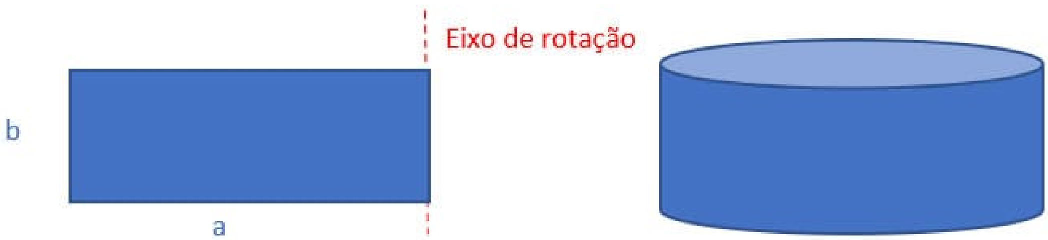
CÁLCULO DE ÁREA DE UMA SUPERFÍCIE DE REVOLUÇÃO

Inicialmente, precisamos definir o que é uma superfície de revolução.

Uma **superfície de revolução** é uma área formada ao girar uma curva em torno de uma reta.

Assim, tal superfície é a fronteira lateral de um sólido, denominado de sólido de revolução.

Por exemplo, imagine um retângulo de lados **a** e **b**. Vamos rotacionar este retângulo ao redor de um eixo de rotação colocado em um dos lados. Será formado um cilindro de revolução, **com altura b** e **raio da base a**.



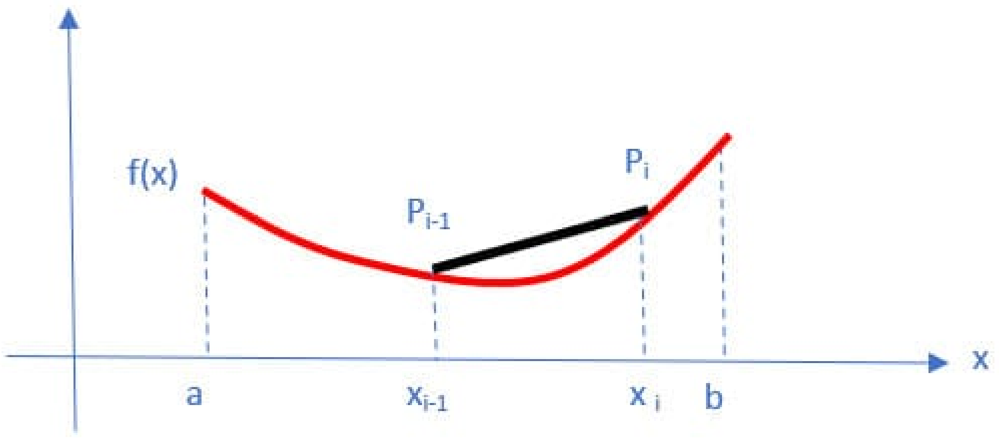
Fonte: Autor

A área da superfície de revolução será a área lateral do cilindro, que valerá $A=2\pi rh=2\pi ab$.

Poderíamos imaginar de forma contrária, isto é, desenrolando a superfície de um cilindro, assim se geraria um retângulo. Outros exemplos podem ser encontrados na literatura de referência.

Vamos agora realizar um caso geral. Imagine a curva definida pela função f(x) para $a \leq x \leq b$.

A função f(x) deve ser positiva e ter derivada contínua. Considere a superfície gerada ao rotacionar esta função ao redor do eixo x.

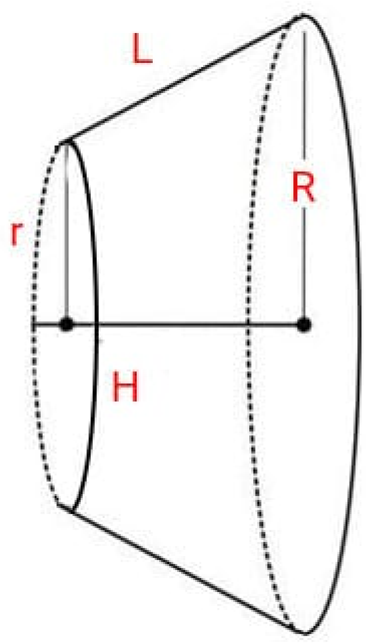


Fonte: Autor

Considere uma faixa de valores de x_{i-1} até x_i.

Os valores foram escolhidos bem afastados na figura para facilitar o entendimento da fórmula.

Ao girar em torno do eixo **x**, esta faixa vai gerar, aproximadamente, a lateral de um tronco de cone circular.



Fonte: Autor

Da geometria aprendemos que a área da lateral do tronco de cone circular vale $A=\pi(r+R)L$. Quando aproximamos os dois pontos r e R tendem a ter o mesmo valor, assim $A = 2\pi rL$. Comparando com o gráfico da função f(x). O valor de $r = f(x_{i-1})$ e o valor de $L = P_iP_{i-1}$.

Mas já aprendemos no módulo de comprimento de arco que:

LI= FXI-FXI-12+ΔXI2=F'(CI)2ΔXI2+ΔXI2=ΔXI1+F'(CI)2-

Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Em que c_i está entre x_{i-1} e x_i.

Se fizemos Δx_i tender a zero, melhor será a aproximação da superfície de revolução com o tronco de cone gerado. Além disso, x_{i-1} é praticamente igual a x_i que será praticamente igual a c_i.

Portanto, a área gerada por uma faixa tendendo a zero em torno do ponto x_i será:

ΔA=LIMΔX→02ΠF(XI)ΔXI1+F'(XI)2

Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

A área total será a soma das áreas desde x = a até x = b. Usando o mesmo princípio utilizado na definição da integração definida, obtém-se a fórmula da área da superfície de revolução gerada ao girar o gráfico de f(x) ao redor do eixo x:

A=∫AB2ΠF(X)1+F'(X)2 DX

Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

De forma análoga, demonstra-se que a área da superfície de revolução gerada ao girar o gráfico da função f(x) ao redor do eixo y será:

A=∫AB2ΠX1+F'(X)2 DX

> **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Observe neste caso que o raio do tronco não será mais f(x), e sim o valor da abscissa x.

★ EXEMPLO

Determine a área da superfície de revolução gerada ao girar a função y = 2x2, para 0 ≤ x ≤ 1, ao redor do eixo y.

Solução

fx=2x2→f'x=4x

Assim, A=∫012πx1+f'(x)2 dx =∫012πx1+4x2 dx

Para resolver a integral, faz-se u=1+16x2→du=32x dx

Para x = 0 → u = 1 e para x = 1 → u = 17. Portanto:

A=∫1172π132udu=π1623u32117=π24(1717-1)

> **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

TEORIA NA PRÁTICA

Determine a fórmula da área de uma elipse de **eixo maior 2a** e **eixo menor 2b**. Com **a** e **b** reais positivos.

Assista ao vídeo sobre Área abaixo de uma função.

RESOLUÇÃO

MÃO NA MASSA

1. DETERMINE A ÁREA DA REGIÃO FORMADA ENTRE A FUNÇÃO F(X) = 4 – 2X E O EIXO X PARA 1 ≤ X ≤ 3

A) 1

B) 2

C) 3

D) 4

2. DETERMINE A ÁREA DA SUPERFÍCIE DE REVOLUÇÃO GERADA AO GIRAR A FUNÇÃO HX=3X3, PARA 0 ≤ X ≤ 2, AO REDOR DO EIXO Y.

A) A=∫026πx31+81x4 dx

B) A=∫022πx1+9x2 dx

C) A=∫022πx1+81x4 dx

D) A=∫023πx31+9x2 dx

3. DETERMINE A ÁREA LIMITADA SUPERIORMENTE POR F(X) = 16 E INFERIORMENTE POR G(X) = 2X2, PARA OS VALORES DE X NO INTERVALO [0,2].

A) 803

B) 703

C) 503

D) 103

4. DETERMINE A ÁREA DA REGIÃO FORMADA ENTRE A FUNÇÃO F(X) = 2X2 – 6X – 8, O EIXO X E AS RETAS X = – 2 E X = 6.

A) 173

B) 763

C) 2183

D) 5113

5. DETERMINE A ÁREA DA REGIÃO LIMITADA PELA FUNÇÃO F(X) = X, G(X) = X3 E PELAS RETAS X = – 2 E X = 3.

A) 554

B) 754

C) 854

D) 954

6. DETERMINE A ÁREA DA SUPERFÍCIE DE REVOLUÇÃO GERADA AO GIRAR A FUNÇÃO HX=EX, PARA 1 ≤ X ≤ 2, AO REDOR DO EIXO X.

A) A=πe21+e4+lne2+1+e4

B) A=2πe21-e4+lne2+1-e4-e1-e2+lne+1-e2

C) A=2πe21+e4-lne2+1+e4+e1+e2-lne+1+e2

D) A=πe21+e4+lne2+1+e4-e1+e2+lne+1+e2

GABARITO

1. Determine a área da região formada entre a função f(x) = 4 – 2x e o eixo x para 1 ≤ x ≤ 3

A área será a área entre f(x) e o eixo **x**, para 1 ≤ x ≤ 3. Assim:

A=∫13f(x)dx=∫134-2xdx

Temos que analisar os intervalos em que f(x) são positivos ou negativos:

f(x) ≥ 0 → 4-2x≥0→2x≤4→x≤2

f(x) ≥ 0 → 4-2x≤0→2x≥4→x≥2

Assim, A=∫134-2xdx=∫12(4-2x)dx+∫232x-4dx

A=4x-x212+x2-4x23=8-4-4-1+9-12-4-8=4-3-3-4=2

Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

2. Determine a área da superfície de revolução gerada ao girar a função hx=3x3, para 0 ≤ x ≤ 2, ao redor do eixo y.

fx=3x3→f'x=9x2

Assim, A=∫022πx1+f'(x)2 dx =∫022πx1+9x22 dx

A=∫022πx1+81x4 dx

Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

3. Determine a área limitada superiormente por f(x) = 16 e inferiormente por g(x) = 2x2, para os valores de x no intervalo [0,2].

A=∫02fx-gxdx=∫02fx-gxdx=∫0216-2x2dx=16x-23x302

A=32-23.8=803

Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

4. Determine a área da região formada entre a função f(x) = 2x2 – 6x – 8, o eixo x e as retas x = – 2 e x = 6.

A área será a área entre f(x) e o eixo x, para – 2 ≤ x ≤ 6. Assim:

A=∫-26f(x)dx=∫-262x2-6x-8dx=2∫-26x2-3x-4dx

Temos que analisar os intervalos em que f(x) são positivos ou negativos.

Determinando a raiz de f(x) = x2 – 3x –4

x=3±9+4.4.12=3±52=4-1

Por ser uma equação do segundo grau de concavidade para cima:

f(x) ≥ 0 → x ≤ – 1 ou x ≥ 4

f(x) ≤ 0 → – 1 ≤ x ≤ 4

Assim, A=2∫-26x2-3x-4dx=2∫-2-1(x2-3x-4) dx+2∫-14(-x2+3x+4) dx

+2∫46(x2-3x-4) dx=2x33-32x2-4x-2-1+2-x33+32x2+4x-14 +

2x33-32x2-4x46=2-13-32+4-2-83-122+8+2-643+482+16+

-213+32-4+22163-1082-24-2643-482+16=173+763+1253=2183

Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

5. Determine a área da região limitada pela função f(x) = x, g(x) = x3 e pelas retas x = – 2 e x = 3.

Assista ao vídeo com a resolução da questão sobre **Área entre funções**.

6. Determine a área da superfície de revolução gerada ao girar a função hx=ex, para 1 ≤ x ≤ 2, ao redor do eixo x.

Assista ao vídeo com a resolução da questão sobre Área de superfície de revolução.

GABARITO

VERIFICANDO O APRENDIZADO

1. DETERMINE A ÁREA DA REGIÃO FORMADA ENTRE A FUNÇÃO F(X) = 3 LNX E O EIXO X, PARA X ENTRE 0,5 E 2.

A) 3ln2-32

B) ln2+32

C) 92ln2-32

D) 72ln2+32

2. DETERMINE A ÁREA DA SUPERFÍCIE DE REVOLUÇÃO GERADA AO GIRAR A FUNÇÃO GX=9-X2, PARA 0 ≤ X ≤ 3, AO REDOR DO EIXO X.

A) 8π

B) 18π

C) 32π

D) 45π

GABARITO

1. Determine a área da região formada entre a função f(x) = 3 lnx e o eixo x, para x entre 0,5 e 2.

A alternativa **"C "** está correta.

A área será aquela entre f(x) e o eixo **x**, para 0,5 ≤ x ≤ 2. Assim:

A=∫0,52f(x)dx=∫0,523 ln(x)dx=3∫0,52ln(x)dx

Temos que analisar os intervalos em que f(x) são positivos ou negativos.

lnln x ≥0→x≥1

lnln x ≤0→x≤1

A=3∫0,52ln(x)dx=3∫0,51lnxdx+3∫12(-lnx)dx

Deve ser resolvido ∫lnxdx. Utilizaremos a integral por partes.

u=ln(x)→du=1xdx e dv=dx→v=x

∫lnxdx=x lnx-∫x1xdx=xlnx-x+k , k real

A=3∫0,51(-lnx)dx+3∫12ln(x)dx=-3xlnx-x0,51+3xlnx-x12=

=-31 ln1-1-12ln12-12+32 ln2-2-1ln1-1=

=3-32ln2-32+6ln2-6+3=92ln2-32

Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

2. Determine a área da superfície de revolução gerada ao girar a função gx=9-x2, para 0 ≤ x ≤ 3, ao redor do eixo x.

A alternativa **"B "** está correta.

Aplicação direta da fórmula: A=∫ab2πf(x)1+f'(x)2 dx

fx=9-x2→f'x=-x9-x2

Assim, A=∫032π9-x21+f'(x)2 dx=∫032π9-x21+-x9-x22 dx

Mas 1+-x9-x22=1+x29-x2=99-x2

Portanto, A=∫032π9-x21+-x9-x22 dx=∫032π9-x299-x2 dx=∫036πdx=18π

Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

MÓDULO 3

Aplicar o conceito da integral na obtenção do cálculo de volumes

INTRODUÇÃO

Outra aplicação importante para integral é o cálculo de volumes.

Uma função contínua e positiva gera uma área entre seu gráfico e o eixo **x**.

Da mesma forma, esta função também gera uma área entre seu gráfico e o eixo **y**.

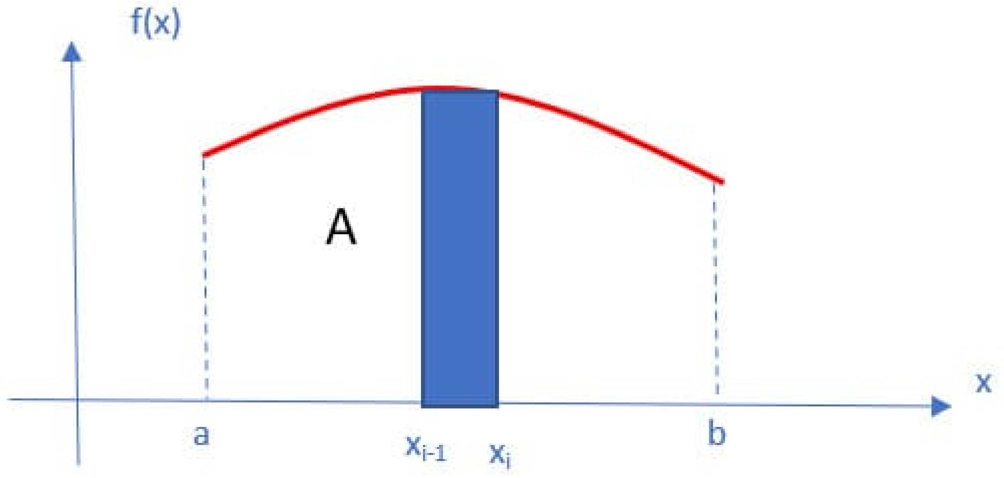
Cada uma destas duas áreas descritas podem ser rotacionadas em torno do eixo **x** ou do eixo **y**, gerando quatro sólidos de revolução diferentes. A integral definida pode ser usada para se calcular o volume destes sólidos.

CÁLCULO DE VOLUME DE SÓLIDO DE ROTAÇÃO

Seja uma função f(x) contínua e com f(x) ≥ 0 para [a,b].

Seja **C** o conjunto de pontos obtidos pela rotação, em torno do eixo **x**, da área **A** da região limitada por f(x) e o **eixo x** com **a ≤ x ≤ b**.

Estamos interessados em obter o volume da região gerada pelo conjunto C.



Fonte: Autor

Vamos analisar uma faixa de valores entre xi-1 e xi

Ao rotacionar esta faixa de valores, a região do espaço formada por ela pode ser aproximada por um cilindro de altura Δxi = xi – xi-1 e raio dado por **$f(x_{i-1})$** ou **$f(x_i)$**.

Quanto menor o valor do **Δx_i** melhor é a aproximação. Assim, podemos considerar que o volume da região **C** será composto pela soma de cilindros, com **alturas Δx_i** tendendo para **zero**.

Observe que quando **Δx_i** → **0**, o valor de **$f(x_i)$** fica praticamente igual ao valor de **$f(x_{i-1})$**.

O volume do cilindro infinitesimal é dado por ΔV=πr2h=πfxi2Δxi

V=LIMΔX→0∑I=1NΠFXI2ΔXI

Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Com o mesmo raciocínio da **Soma de Riemann** utilizado na definição da integral definida, define-se o volume formado pela rotação de f(x) em torno do **eixo x**, para **a ≤ x ≤ b** como:

V=∫ABΠFX2DX

Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

EXEMPLO

Determine o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo x, do conjunto de pontos formados pela função fx=1-x2 e o **eixo x**, para **– 1 ≤ x ≤ 1**.

Solução

A função f(x) é contínua e positiva neste intervalo. Usando a fórmula do volume:

V=∫abπfx2dx=∫-11π1-x22dx=∫-11π(1-x2)dx

V=πx-x33-11=π1-13-π-1--13=43π

Observe que este resultado já era conhecido.

A área formada por **f(x) entre – 1 ≤ x ≤ 1** é de uma semicircunferência de raio **1**.

Ao rodar em torno do **eixo x**, gera uma esfera de raio **1**.

O volume da esfera de raio **r** é conhecido da Geometria como V=43πr3, confirmando a resposta obtida.

Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Além do sólido de rotação apresentado inicialmente, pode-se gerar mais três sólidos de rotação, ao rotacionar as áreas relacionadas à função f(x) contínua e positiva em torno dos eixos **x** ou **y**.

A demonstração destas fórmulas segue o raciocínio análogo ao anterior, ou ao **Teorema de Pappus**, e pode ser encontrada em qualquer uma de nossas referências.

Seja f(x) uma função contínua e positiva em [a,b].

Seja a área **A** formada pelo conjunto de pontos entre f(x) e o eixo **x** para **a ≤ x ≤ b**.

Seja a área **B** formada pelo conjunto de pontos entre f(x) e o eixo **y** para **a ≤ x ≤ b**.

Serão gerados quatro sólidos de rotação:

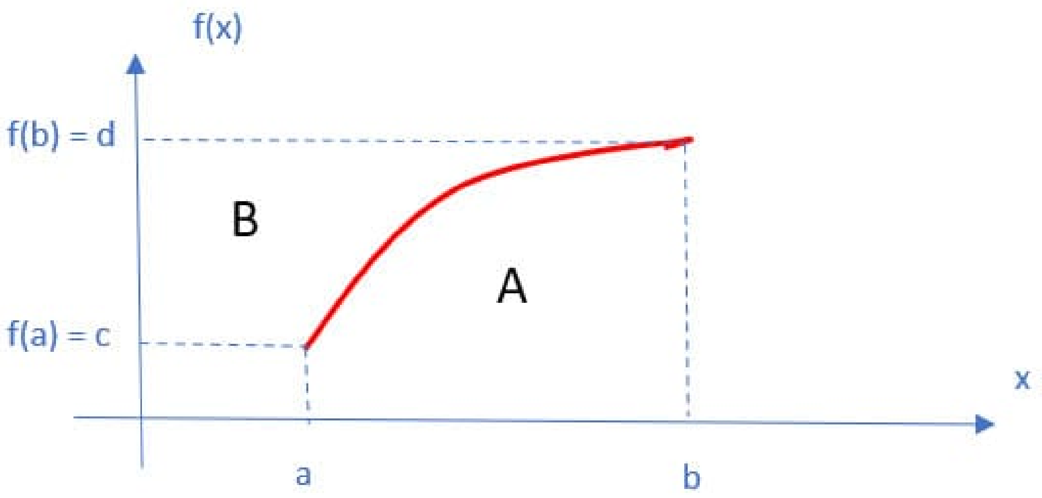
Rotação da área A em torno do eixo x;

Rotação da área A em torno do eixo y;

Rotação da área B em torno do eixo x;

Rotação da área B em torno do eixo y.

As fórmulas para calcular o volume de cada um destes sólidos são apresentadas a seguir.



Fonte: Autor

Para rotação da área B, necessita-se definir a função $g(y)$, que é a inversa de $f(x)$. Lembre-se de que só existe função inversa de funções em um intervalo em que $f(x)$ será estritamente crescente ou estritamente decrescente.

Desta forma, tem-se:

Volume gerado pela rotação da área A em torno do eixo x, para a ≤ x ≤ b: $V=\int_a^b \pi f(x)^2 dx$

Volume gerado pela rotação da área B em torno do eixo y, para c ≤ y ≤ d: $V=\int_c^d \pi g(y)^2 dy$

Volume gerado pela rotação da área A em torno do eixo y, para a ≤ x ≤ b: $V=\int_a^b 2\pi x\, f(x)\, dx$

Volume gerado pela rotação da área B em torno do eixo x, para c ≤ y ≤ d:

$V=\int_c^d 2\pi y\, g(y) dy$

Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Um ponto importante. Nas integrais do item 2 e item 4, o limite inferior deve ser sempre o menor número, assim, se **d > c**, os limites serão $\int_c^d l y \, dy$ mas se d < c, os limites serão $\int_d^c l y \, dy$.

EXEMPLO

Determine o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo x, do conjunto de pontos formados pela função $f(x)=x^2$ e o eixo x, para $0 \leq x \leq 2$.

Solução

Desejamos, aqui, o volume do sólido gerado por uma área do tipo A em torno do eixo x.

Assim, $V_1=\int_a^b \pi f(x)^2 dx=\int_0^2 \pi (x^2)^2 dx=\pi \frac{x^5}{5}\Big|_0^2=\frac{32\pi}{5}$

Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

EXEMPLO

Determine o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo y, do conjunto de pontos formados pela função $f(x)=x^2$ e o eixo x, para $0 \leq x \leq 2$.

Solução

Observe que desejamos o volume do sólido gerado por uma área do tipo A em torno do eixo y

Assim:

$$V_2=\int_a^b 2\pi x\, f(x)\, dx=\int_0^2 2\pi x\, x^2 dx=\int_0^2 2\pi x^3 dx=2\pi \frac{x^4}{4}\Big|_0^2=8\pi$$

Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

EXEMPLO

Determine o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo y, do conjunto de pontos formados pela função $fx=x2$ e o eixo y, para $0 \leq x \leq 2$

Solução

Nesta questão, desejamos o volume do sólido gerado por uma área do tipo B em torno do eixo y.

Necessitamos da função $g(y) = f\text{-}1(x)$. Se $fx=x2 \rightarrow gy=y$.

Para $x=0 \rightarrow f0=c=0$ e $x=2 \rightarrow f2=d=4$

Assim: $V3=\int cd\pi g(y)2dy=\int 04\pi y2dy=\int 04\pi\ y\ dy=\pi y2204=8\pi$

> **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

★ EXEMPLO

Determine o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo x, do conjunto de pontos formados pela função $fx=x2$ e o eixo y, para $0 \leq x \leq 2$.

Solução

Nesta questão, queremos o volume do sólido gerado por uma área do tipo B em torno do eixo x.

Necessitamos da função $g(y) = f\text{-}1(x)$. Se $fx=x2 \rightarrow gy=y$.

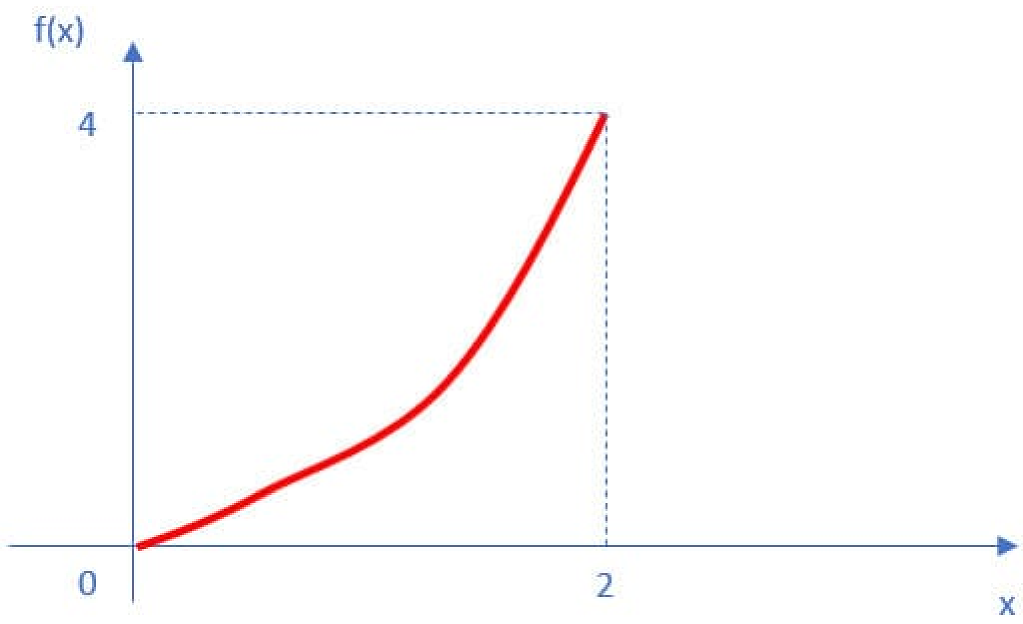
Para $x=0 \rightarrow f0=c=0$ e $x=1 \rightarrow f2=d=4$

Assim: $V4=\int cd2\pi y\ g(y)dy=\int 042\pi y\ ydy=\int 042\pi\ y3/2\ dy=2\pi 25y5/204=128\pi 5$

> **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Repare que existe uma relação entre os volumes obtidos.

Se você desenhar o gráfico de f(x) e observar, os volumes $V1$ e $V4$ se completam formando um cilindro que foi obtido por uma rotação de um retângulo de lados 2 e 4 em torno do eixo x. Isto é, o cilindro terá raio da base **4** e altura **2**, portanto, volume 32π. Veja que $V1+V4 = 32\pi$.



Fonte: Autor

Igualmente, os volumes V_2 e V_3 se completam formando um cilindro que foi obtido por uma rotação de um retângulo de lados 4 e 2 em torno do eixo y. Isto é, o cilindro terá raio da base 2 e altura 4, portanto, volume 16π. Veja que $V_2+V_3 = 16\pi$.

Foi visto o volume gerado por uma área definida por uma função, mas caso se deseje volume gerado por áreas entre funções, pode-se usar o conceito de um volume menos o outro, aplicando-se as fórmulas aqui apresentadas para calcular o volume individual para cada função.

★ EXEMPLO

Determine o volume gerado pela rotação, em torno do eixo x, da área entre as funções $f(x) = x$ e $g(x) = x^2$ para $0 \leq x \leq 1$.

Solução

Para este intervalo, a função f(x) sempre estará acima da função g(x). Portanto, podemos enxergar este volume gerado como a diferença entre o volume gerado pela rotação da área de f(x), com o eixo x, e o volume gerado pela rotação da área gerada por g(x) com o eixo x.

Assim, $V_f=\int_a^b \pi f(x)^2 dx=\int_0^1 \pi x^2 dx=\pi \frac{x^3}{3}\Big|_0^1=\frac{\pi}{3}$

e $V_g=\int_a^b \pi g(x)^2 dx=\int_0^1 \pi (x^2)^2 dx=\pi \frac{x^5}{5}\Big|_0^1=\frac{\pi}{5}$

Portanto, $V=V_f-V_g=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{5}=\frac{5\pi-3\pi}{15}=\frac{2\pi}{15}$

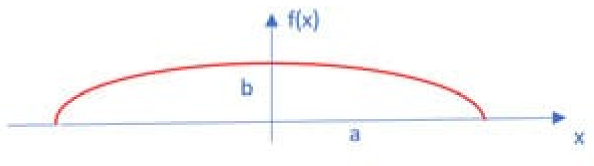
> **Atenção!** Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

TEORIA NA PRÁTICA

Determine a fórmula do volume de um elipsoide gerado pela rotação de uma semielipse de **eixo maior 2a** e **eixo menor 2b**. Com **a** e **b** reais positivos.

RESOLUÇÃO

Seja a semi-elipse de eixos maiores e menores 2a e 2b, respectivamente.



Fonte: Autor

Assim a elipsoide será gerada pela rotação de uma área do tipo A em trono do eixo x. A função f(x) será dada pela equação da elipse, assim, $f(x)=\sqrt{b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2}$, com $-a \le x \le a$.

Assim, $V=\int_{-a}^{a}\pi f(x)^2dx=\int_{-a}^{a}\pi\left(\sqrt{b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2}\right)^2dx=\int_{-a}^{a}\pi\left(b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2\right)dx$

$V=\pi b^2\left[x-\frac{1}{3a^2}x^3\right]_{-a}^{a}=\pi b^2\left(a-\frac{1}{3a^2}a^3\right)-\pi b^2\left(-a-\frac{1}{3a^2}(-a^3)\right)$

$V=\frac{2}{3}\pi b^2a+\frac{2}{3}\pi b^2a=\frac{4}{3}\pi b^2a$

Para você comparar com os volumes obtidos na geometria, um elipsoide tem três eixos 2a, 2b e 2c. O volume é dado por $V=\frac{4}{3}\pi abc$. Para o caso desta figura o eixo 2b será igual ao 2c, por isso o volume foi $V=\frac{4}{3}\pi b^2a$. Se considerarmos a esfera com um caso particular do elipsoide com a = b = c, seu volume será dado por $V=\frac{4}{3}\pi a^3$.

MÃO NA MASSA

1. DETERMINE O VOLUME DO SÓLIDO GERADO PELA ROTAÇÃO, EM TORNO DO EIXO X, DO CONJUNTO DE PONTOS FORMADOS PELA FUNÇÃO FX=2X E O EIXO X, PARA 0 ≤ X ≤ 1.

A) 1

B) 2π

C) 3π

D) 4π

2. DETERMINE O VOLUME DO SÓLIDO GERADO PELA ROTAÇÃO, EM TORNO DO EIXO Y, DO CONJUNTO DE PONTOS FORMADOS PELA FUNÇÃO FX=25 X3 E O EIXO X, PARA 0 ≤ X ≤ 3.

A) 200π

B) 243π

C) 2000π

D) 2430π

3. DETERMINE O VOLUME DO SÓLIDO GERADO PELA ROTAÇÃO, EM TORNO DO EIXO X, DO CONJUNTO DE PONTOS FORMADOS PELA FUNÇÃO FX=X5 E O EIXO Y, PARA 0 ≤ X ≤ 1.

A) π6

B) π7

C) 2π7

D) π2

4. DETERMINE O VOLUME DO SÓLIDO GERADO PELA ROTAÇÃO, EM TORNO DO EIXO X, DA ÁREA EXISTENTE ENTRE AS FUNÇÕES GX=8X E

HX=X2 , PARA 0 ≤ X ≤ 2.

A) 16π5

B) 62π5

C) 128π5

D) 608π5

5. DETERMINE O VOLUME DO SÓLIDO GERADO PELA ROTAÇÃO, EM TORNO DO EIXO Y, DO CONJUNTO DE PONTOS FORMADOS PELA FUNÇÃO FX=2 ARCCOS(X) E O EIXO Y, PARA 0 ≤ X ≤ 1.

A) π22

B) π24

C) 2π2

D) π2

6. O VOLUME DO SÓLIDO GERADO PELA ROTAÇÃO, EM TORNO DO EIXO X, DO CONJUNTO DE PONTOS FORMADOS PELA FUNÇÃO FX=X E O EIXO Y, PARA 1 ≤ X ≤ E, VALE 8Π. DETERMINE O VALOR DE K REAL POSITIVO.

A) 1

B) 2

C) 12

D) 14

GABARITO

1. Determine o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo x, do conjunto de pontos formados pela função fx=2x e o eixo x, para 0 ≤ x ≤ 1.

Desejamos, aqui, o volume do sólido gerado por uma área do tipo A em torno do eixo x.

Assim, V=∫abπfx2dx=∫01π2x2dx=∫014πx dx=4πx2201=2π

Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

2. Determine o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo y, do conjunto de pontos formados pela função fx=25 x3 e o eixo x, para 0 ≤ x ≤ 3.

Assista ao vídeo com a resolução da questão sobre **Cálculo de volume de sólido de revolução.**

3. Determine o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo x, do conjunto de pontos formados pela função fx=x5 e o eixo y, para 0 ≤ x ≤ 1.

Nessa questão, queremos o volume do sólido gerado por uma área do tipo **B** em torno do eixo **x**.

Necessitamos da função g(y) = f-1(x). Se fx=x5→gy=y5.

Para x=0→f0=c=0 e x=1→f1=d=1

Assim: V=∫012πy g(y)dy=∫012πy y5dy=∫012π y6 dy=2π17y701=2π7

Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

4. Determine o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo x, da área existente entre as funções gx=8x e hx=x2 , para 0 ≤ x ≤ 2.

Assista ao vídeo com a resolução da questão sobre **Cálculo de volume de sólido de revolução**.

5. Determine o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo y, do conjunto de pontos formados pela função fx=2 arccos(x) e o eixo y, para 0 ≤ x ≤ 1.

Desejamos, aqui, o volume do sólido gerado por uma área do tipo **B** em torno do **eixo y**.

Necessitamos da função g(y) = f-1(x). Se fx=2arccosarccos x →gy=cosy2.

Para x=0→f0=c=π e x=1→f1=d=0

Observe que a função fx=2 arccos(x) é decrescente, assim gerou um d < c.

Assim: V=∫dcπg(y)2dy=∫0ππcosy22dy=∫0π πcos2y2 dy

Usando a relação cos2y2=12cos y +12

Assim: V=∫0ππ cos2y2 dy=∫0ππ2cosy dy+∫0ππ2 dy=π2sen y0π+π2y0π=π22

Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

6. O volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo x, do conjunto de pontos formados pela função fx=x e o eixo y, para 1 ≤ x ≤ e, vale 8π. Determine o valor de k real positivo.

Assista ao vídeo com a resolução da questão sobre Cálculo de volume de sólido de revolução.

GABARITO

VERIFICANDO O APRENDIZADO

1. DETERMINE O VOLUME DO SÓLIDO GERADO PELA ROTAÇÃO, EM TORNO DO EIXO X, DO CONJUNTO DE PONTOS FORMADOS PELA FUNÇÃO FX=2EX E O EIXO X, PARA 0 ≤ X ≤ 2.

A) 2π(e2-1)

B) 2π(e4-1)

C) 2πe2

D) 2π(e4+1)

2. DETERMINE O VOLUME DO SÓLIDO GERADO PELA ROTAÇÃO, EM TORNO DO EIXO X, DO CONJUNTO DE PONTOS FORMADOS PELA FUNÇÃO FX=X2+1 E O EIXO Y, PARA 0 ≤ X ≤ 1.

A) 30π16

B) 16π15

C) 32π15

D) π15

GABARITO

1. Determine o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo x, do conjunto de pontos formados pela função fx=2ex e o eixo x, para 0 ≤ x ≤ 2.

A alternativa **"B "** está correta.

Desejamos, aqui, o volume do sólido gerado por uma área do tipo A em torno do eixo x.

Assim, V=∫abπfx2dx=∫02π2ex2dx=∫024πe2x dx=4π12e2x02=4π(12e4-12)

V=2π(e4-1)

Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

2. Determine o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo x, do conjunto de pontos formados pela função fx=x2+1 e o eixo y, para 0 ≤ x ≤ 1.

A alternativa **"C "** está correta.

Desejamos, aqui, o volume do sólido gerado por uma área do tipo **B** em torno do eixo **x.**

Necessitamos da função g(y) = f-1(x). Se fx=x2+1→gy=y-1.

Para x=0→f0=c=1 e x=1→f1=d=2

Assim: V=∫122πy gydy=∫122πy y-1dy

Resolver a integral por substituição u=y-1→du=dy

Para y=1→u=0 e y=2→u=1

V=∫122πy y-1dy=∫012πu+1u du=2π∫01(u32+u12) du

V=2π25u5201+2π23u3201=2π25+23=32π15

Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

CONCLUSÃO

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao longo deste tema, foi utilizado a integração definida de uma função real na aplicação de cálculos de comprimentos, áreas e volumes.

No primeiro módulo, empregamos a integral na determinação do comprimento do arco de um gráfico de uma função. No segundo, a integral foi usada para calcular áreas entre uma função e o eixo x, entre funções e até mesmo de superfícies de revolução. Por fim, no último módulo, a integração foi aplicada no cálculo de quatro superfícies diferentes de revolução.

AVALIAÇÃO DO TEMA:

REFERÊNCIAS

GUIDORIZZI, H. L. **Cálculo**, Volume 1. 5. ed. São Paulo: LTC, 2013. cap. 13, p. 400-416.

HALLET, H. *et al*. **Cálculo**, a uma e a várias variáveis. 5. ed. São Paulo: LTC, 2011. cap. 8, p.353-374.

LARSON, R.; EDWARDS, B. H. **Cálculo**, com aplicações. 6. ed. São Paulo: LTC, 2003. cap. 5, p.359-378.

STEWART, J. **Cálculo**, Volume 1. 5. ed. São Paulo: Thomson Learning, 2008. cap. 6, p. 434-457, cap. 8, p. 542-556.

THOMAS, G. B. **Cálculo**, Volume 1. 12. ed. São Paulo: Pearson, 2012. cap. 6, p. 351-380.

EXPLORE+

Para saber mais sobre os assuntos tratados neste tema, pesquise na internet:

- Sobre aplicação de integração.

CONTEUDISTA

Jorge Luís Rodrigues Pedreira de Cerqueira

CURRÍCULO LATTES