DEFINIÇÃO

Aplicação dos conceitos de derivada de uma função real.

PROPÓSITO

Calcular a derivada de uma função real, através de uma abordagem gráfica e analítica, bem como aplicar suas regras e propriedades na derivação implícita e sua relação com a continuidade de uma função.

OBJETIVOS

MÓDULO 1

Aplicar a abordagem gráfica e analítica para a derivada de uma função real e na sua relação com a continuidade de uma função

MÓDULO 2

[illegible] o cálculo da derivada

MÓDULO 3

Empregar a derivada para funções compostas através da regra da cadeia

MÓDULO 4

Representar o conceito da derivada para derivação implícita e derivada de ordens superiores

MÓDULO 1

Aplicar a abordagem gráfica e analítica para a derivada de uma função real e na sua relação com a continuidade de uma função

INTRODUÇÃO

A operação da derivada de uma função real pode ser analisada através de uma abordagem gráfica ou analítica.

ABORDAGEM GRÁFICA

Graficamente, pode ser verificada a interpretação da derivada como uma taxa de variação instantânea ou como a inclinação da reta tangente à função em um ponto.

ABORDAGEM ANALÍTICA

Analiticamente, transforma-se esta interpretação em uma equação que permite a determinação da derivada através do cálculo de um limite.

Este módulo apresentará as duas abordagens e, por fim, analisará a relação entre continuidade e a derivação de uma função.

ABORDAGEM GRÁFICA DA DERIVADA DE UMA FUNÇÃO REAL

 re o conceito de Abordagem gráfica da derivada de uma função real.

A derivada de uma função real em um ponto **q** será a taxa de variação instantânea desta função no ponto, como também será o valor do coeficiente angular da reta tangente à função neste ponto.

Portanto, pela abordagem gráfica, podemos afirmar que:

1

A derivada vai ser positiva nos pontos onde a reta tangente for crescente ou quando a taxa instantânea for positiva.

2

A derivada vai ser negativa nos pontos onde a reta tangente for decrescente ou quando a taxa instantânea for negativa.

3

A derivada será nula se a tangente no ponto for horizontal, representando uma taxa instantânea nula.

VOCÊ SABIA

Se a derivada representa uma taxa de variação instantânea, então a derivada de uma função constante, isto é, f(x) = k, k real, será nula em todo seu domínio.

EXEMPLO

1. O crescimento da altura de uma planta pelo tempo é modelado através da equação $H(t) = 2t + 20$, com H

O modelo vale para $t \geq 0$. Marque a alternativa que apresenta um significado para a derivada da função $H(t)$ para $t = 10$ *dias*.

a) Representa a altura que a planta terá para quando t = 10 dias, como também, o valor do coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de $H(t)$ para $t = 10$ *dias*.

b) Representa a altura que a planta terá para quando t = 10 dias, como também o valor do coeficiente angular da reta secante ao gráfico de $H(t)$, entre os pontos $t = 0$ e $t = 10$.

c) Representa a taxa de crescimento que a planta terá para quando t = 10 dias, como também o valor do coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de $H(t)$, para $t = 10$.

d) Representa a taxa de crescimento que a planta terá para quando t = 10 dias, como também o valor do coeficiente angular da reta secante ao gráfico de $H(t)$, entre os pontos $t = 0$ e $t = 10$.

RESOLUÇÃO

A primeira interpretação para a derivada será de taxa instantânea de H(t), isto é, qual será a taxa de crescimento da altura da planta no décimo dia.

Uma outra possibilidade é geométrica, isto é, a derivada de H(t) representará a inclinação da reta tangente a h(t) no ponto t = 10 dias.

Desta forma, a alternativa correta é a letra C.

ABORDAGEM ANALÍTICA DA DERIVADA DE UMA FUNÇÃO REAL

No item anterior, foi vista a definição da função derivada através de uma abordagem gráfica. A derivada de uma função em um ponto foi interpretada como a inclinação da reta tangente ou como a taxa de variação instantânea da função no ponto analisado.

Agora, podemos definir a derivada analiticamente. Ressalta-se que a derivada de f(x) também é uma função real, denominada de derivada de f(x), como notação f'(x).

Sejam f(x) uma função e um ponto **q** do seu domínio. A derivada da função f(x), no ponto **q**, é definida por:

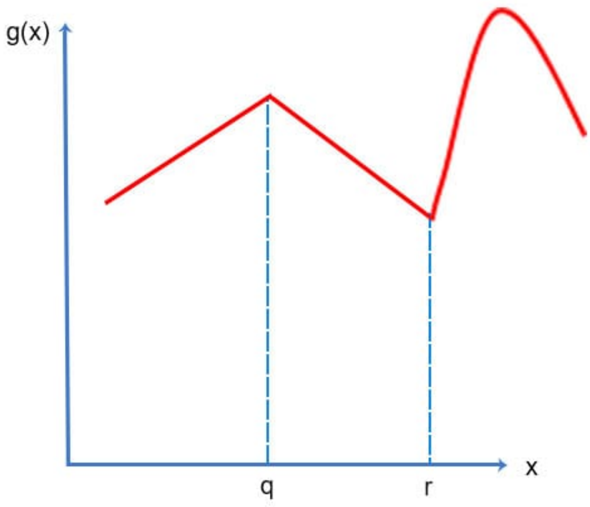
$$F'(Q) = \lim_{X \to Q} \frac{F(X) - F(Q)}{X - Q}$$

Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Se o limite acima existir e for finito, a função será derivável ou diferenciável em **q** e terá valor igual ao do limite. Recorde que o limite vai existir quando os dois limites laterais existirem e forem iguais.

Se o limite à esquerda e o limite à direita apresentarem valores diferentes, quando **x** tende a **q**, não existirá a derivada de f(x) em **q**. Isso significa que, quando **x** tende ao ponto **q**, por valores superiores ou inferiores, vai apresentar duas taxas instantâneas ou duas inclinações da reta tangente diferentes, não sendo possível portanto definir-se uma derivada.

Na prática, dizemos que a função forma *um bico*. Veja um exemplo no gráfico. A função **g(x)** não é derivável em **x = q** e **x = r**.



Fonte: Autor

Um ponto importante é que só pode ser calculada a derivada de uma função em um ponto do seu domínio, diferentemente com o que acontecia com o limite.

ATENÇÃO

Analisamos a derivada de uma função em um ponto, mas uma função será derivável em um intervalo aberto (a , b) se for derivável em todos os pontos interiores desse intervalo.

Para os pontos extremos do domínio de uma função, não há como definir a derivada, pois não podemos montar os dois limites laterais. Assim, usamos o conceito de derivada à direita ou à esquerda, utilizando apenas um dos limites laterais.

Para o caso de um intervalo fechado [a,b], a função para ser derivável deverá atender aos seguintes requisitos:

Ser derivável em todo interior de (a,b);

Existir a derivada à direita para o extremo inferior a:

$$f'(a) = \lim_{x \to a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Existir a derivada à esquerda para o extremo superior b:

$$f'(b) = \lim_{x \to b-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b}$$

OUTRAS NOTAÇÕES

Além da notação apresentada, a derivada de f(x) em relação a sua variável independente **x** pode ser representada por outras notações:

$$F'\left(X\right) = Y'\left(X\right) = DF\left(X\right) = D_X F(X) = \frac{DY}{DX}\left(X\right)$$

Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

A notação $f'\left(x\right) = \frac{dy}{dx}$ é denominada de **notação de Leibniz**.

DIFERENCIABILIDADE E CONTINUIDADE

Um teorema importantíssimo no Cálculo Diferencial é o que relaciona a diferenciabilidade de uma função com a sua continuidade.

Teorema: Se uma função f(x) é derivável para x = q, então a função é contínua para x = q.

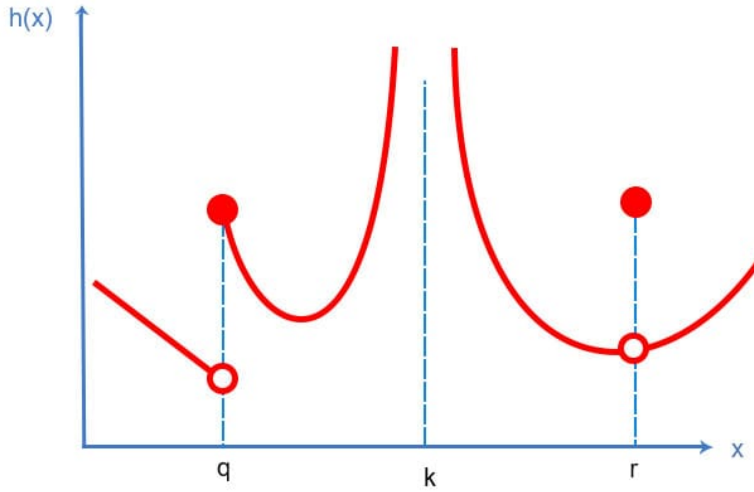
COMENTÁRIO

Um cuidado deve ser tomado: nada podemos afirmar sobre a volta deste teorema, isto é, se uma função for contínua em x = q ela pode ou não ser derivável em x = q. Por exemplo, no item anterior, as funções f(x) e g(x) são contínuas em x = q, porém, a derivada de f(x) em q existe e a derivada de g(x) em q não existe.

Uma consequência direta do teorema é que se a função não for contínua em x = q, então a função não é derivável em x = q. Dizemos que ser contínua em um ponto é uma **condição necessária, mas não suficiente** para ser derivável no ponto.

Em outras palavras, para existir a derivada para x = q, além da função ser definida em x = q, ela deve ser obrigatoriamente contínua em x = q e, mesmo assim, pode haver casos nos quais a derivada não existirá, vide item anterior

Retornando à análise gráfica, temos aqui outra possibilidade de a derivada não existir, além de formar *um bico* apresentado no item anterior. Caso apresente uma descontinuidade em um ponto, a derivada não existirá. Os gráficos abaixo apresentam exemplos da não existência da derivada em x = q, x = k e x = r, pois a função é descontínua nestes pontos.



Fonte: Autor

❓ VOCÊ SABIA

Veja a Demonstração do Teorema entre Diferenciabilidade e Continuidade.

TEORIA NA PRÁTICA

Fonte: shutterstock

1) Um determinado experimento laboratorial criou uma população de bactérias. A quantidade de bactérias, em milhões, para o instante de tempo **t**, medido em horas, foi modelada como $B(t) = -t^2 + 4t + 6, \; t \geq 0$ O experimento ocorrerá de $0 \leq t \leq 5$. Determine:

a) Para que instantes a taxa de crescimento das bactérias será positiva.

cimento das bactérias será negativa.

c) Para que instantes a taxa de crescimento das bactérias será nula.

RESOLUÇÃO

A derivada está relacionada à inclinação da reta tangente. A equação $B(t) = -t^2 + 4t + 6$ representa uma equação do segundo grau que você já sabe que possui um gráfico de uma parábola que, neste caso, terá concavidade para baixo.

Da Matemática básica sabe-se que o vértice da parábola com equação $at^2 + bt + c$ acontecerá no ponto $t = -\frac{b}{2a}$
Para o caso da parábola de concavidade para baixo, esse vértice será um ponto de máximo e, para este problema, ocorrerá em $t = -\frac{b}{2a} - \frac{4}{2.(-1)} = 2h$.

Se imaginarmos a reta tangente em todos os pontos dessa parábola de concavidade para baixo, ela será crescente entre o ponto inicial, t = 0, até o vértice, t = 2, e decrescente para t > 2h.

Assim, podemos responder à questão nos baseando no conceito que a derivada tem o valor da inclinação da reta tangente no ponto:

a) $0 \leq t < 2$: derivada positiva, pois a inclinação da reta tangente é positiva e então será o caso da taxa de crescimento positiva;

b) $< t \leq 5$: derivada negativa, pois a inclinação da reta tangente é negativa e então a taxa de crescimento será negativa.

No vértice, a tangente será horizontal, então sua inclinação é nula. Assim, respondendo a letra C, a derivada será nula, isto é, taxa de crescimento nula, para t = 2.

MÃO NA MASSA

1. EM UMA DETERMINADA CIDADE, FOI MODELADA A VARIAÇÃO DA TEMPERATURA, MEDIDA EM °C, COM O TEMPO, MEDIDO EM MINUTOS, APÓS A MEIA-NOITE. A FUNÇÃO T(T) DEFINE ESSA DEPENDÊNCIA PARA T ≥ 0. QUAL O SIGNIFICADO DA FUNÇÃO DERIVADA T'(60)?

A) T'(60) representa a taxa de variação da temperatura a 1 hora da madrugada.

B) T'(60) representa a temperatura a 1 hora da madrugada.

C) T'(60) representa a hora da madrugada quando a temperatura alcança 600C.

D) T'(60) representa a soma das temperatura de meia-noite até 1 hora da madrugada.

2. MARQUE A ALTERNATIVA VERDADEIRA QUANTO AO CONCEITO DA ABORDAGEM

VADA DA FUNÇÃO H(X) EM UM PONTO P DO SEU DOMÍNIO:

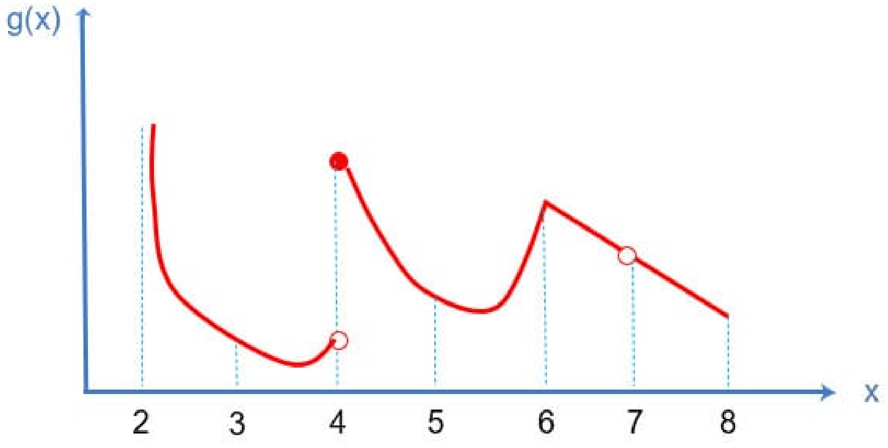
A) Representa a taxa de variação média de h(x) no ponto **q**, bem como o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de h(x) no ponto **p**.

B) Representa a taxa de variação instantânea de h(x) no ponto **q**, bem como o coeficiente angular da reta secante ao gráfico de h(x) no ponto **p**.

C) Representa a taxa de variação instantânea de h(x) no ponto **q**, bem como o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de h(x) no ponto p.

D) Representa a taxa de variação média de h(x) no ponto **q**, bem como o coeficiente angular da reta secante ao gráfico de h(x) no ponto **p**.

3. VERIFIQUE O GRÁFICO ABAIXO E MARQUE A ALTERNATIVA QUE APRESENTA APENAS OS PONTOS ONDE A FUNÇÃO G(X) NÃO É DERIVÁVEL.



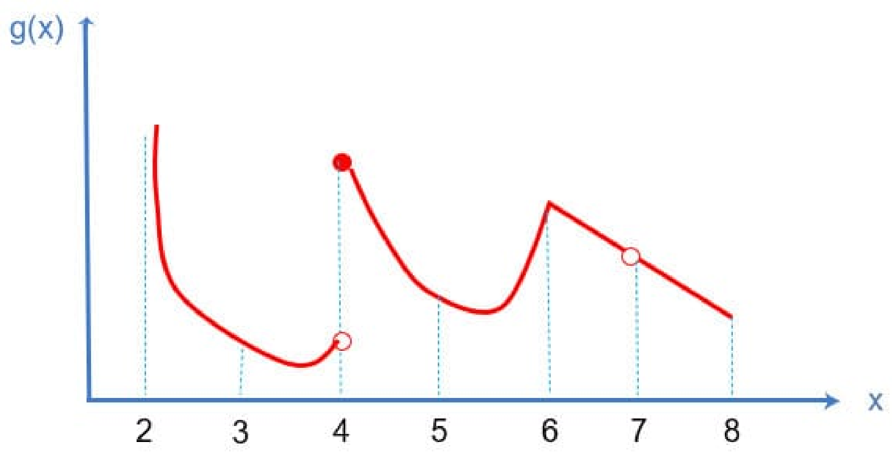
A) 3, 4 e 7

B) 4, 6 e 7

C) 4, 5 e 6

D) 4, 5 e 7

4. VERIFIQUE O GRÁFICO ABAIXO E MARQUE A ALTERNATIVA QUE APRESENTA UM INTERVALO ONDE A FUNÇÃO G(X) É DERIVÁVEL.



A) (2 , 8)

B) (4 , 6)

C) [4 , 7)

D) [3, 5]

5. MARQUE A ALTERNATIVA VERDADEIRA QUANTO À RELAÇÃO ENTRE DIFERENCIABILIDADE E CONTINUIDADE.

A) Se a função não apresenta derivada em um ponto **q**, então ela é descontínua no ponto **q**.

B) Se a função é contínua em um ponto **q**, então ela é derivável no ponto **q**.

C) Se a função apresenta derivada em um ponto **q**, então ela pode ser contínua ou não no ponto **q**.

D) Se a função não for contínua em um ponto **q**, então ela não é derivável no ponto **q**.

6. SEJA A FUNÇÃO $G(X) = \begin{cases} 4X + 4, & X < 2 \\ X^2 + 2, & X \geq 2 \end{cases}$. MARQUE A ALTERNATIVA CORRETA EM RELAÇÃO À DERIVADA DE G(X) NO PONTO X = 2.

A) Existe, pois apesar da função descontínua em x = 2, os limites laterais são iguais.

B) Não existe, pois a função não é contínua no ponto x = 2.

C) Não existe, pois a função é contínua em x = 2

D) Existe, pois a função é contínua em x = 2.

GABARITO

1. Em uma determinada cidade, foi modelada a variação da temperatura, medida em °C, com o tempo, medido em minutos, após a meia-noite. A função T(t) define essa dependência para t ≥ 0. Qual o significado da função derivada T'(60)?

Se T(t) mede a temperatura com o tempo, a função T'(t) medirá como a temperatura irá variar com a variação do tempo em um determinado horário após a meia-noite. Em outras palavras, T'(t) medirá a taxa de variação instantânea da temperatura T(°C) para um instante t(min) medido após a meia-noite.

T'(60) representa a taxa de variação da temperatura a 1 hora da madrugada, isto é, 60min após a meia-noite. Vamos supor que T'(60) tenha valor de – 0,5. Então, quando estivermos no horário de 1h da madrugada, a temperatura irá decrescer 0,5°C por minuto.

Logo, a alternativa é a letra A.

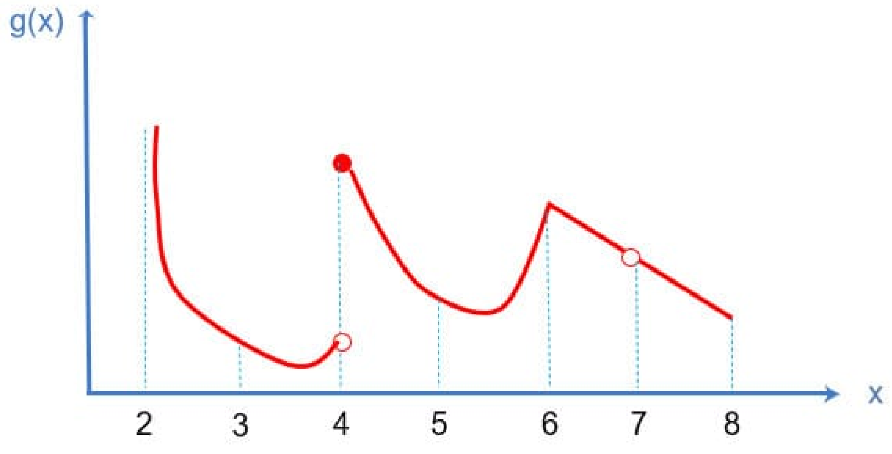
2. Marque a alternativa verdadeira quanto ao conceito da abordagem gráfica da função derivada da função h(x) em um ponto p do seu domínio:

Conforme definido na abordagem gráfica da derivada, esta representa a taxa de variação instantânea da função no ponto analisado. Além disso, ela permite o cálculo da inclinação da reta tangente no ponto, pois a derivada terá o valor do coeficiente angular da reta tangente.

Assim, a alternativa verdadeira é a letra C.

As demais associam a derivada à taxa média e coeficiente angular da reta secante, conceito não verdadeiro.

3. Verifique o gráfico abaixo e marque a alternativa que apresenta apenas os pontos onde a função g(x) não é derivável.



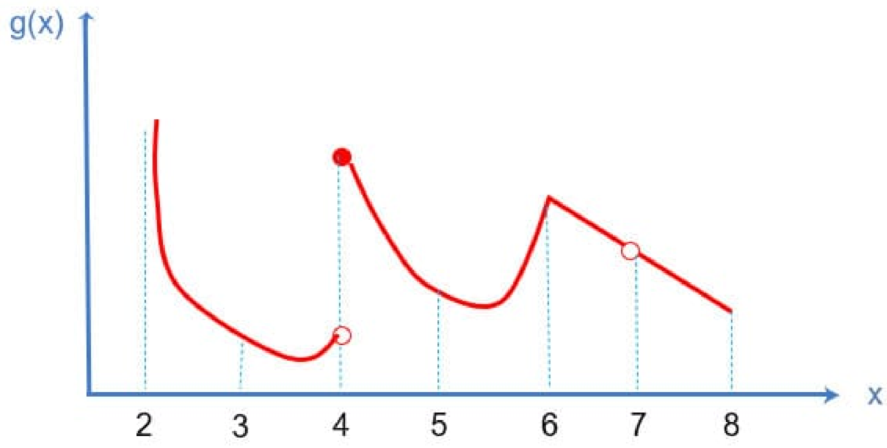
Como pode ser verificado pelo gráfico, no ponto x = 6 não existirá derivada, pois os limites laterais da taxa de variação (ou a tangente ao gráfico) quando x tende a 6 serão diferentes para aproximação por valores inferiores e superiores. Desta forma, não existirá derivada em x = 6.

Para os pontos x = 4 e x = 7 existe uma descontinuidade da função, portanto não existirá a derivada.

Nos demais pontos pertencentes ao intervalo (2 , 8), a derivada existe, sendo o caso para x = 3 e x = 5.

Assim, a única alternativa que apresenta apenas pontos onde não existe a derivada é a letra B.

4. Verifique o gráfico abaixo e marque a alternativa que apresenta um intervalo onde a função g(x) é derivável.



A alternativa **"B "** está correta.

5. Marque a alternativa verdadeira quanto à relação entre diferenciabilidade e continuidade.

O teorema que relaciona a diferenciabilidade e continuidade afirma que, se uma função for diferenciável em um ponto, a função é contínua neste ponto, ou, se a função for descontínua no ponto, ela não é derivável neste ponto.

Assim, a alternativa correta é a da letra D.

A letra A é falsa, pois existem funções que não têm derivada no ponto, mas são contínuas neste ponto. São as funções cujos limites laterais da derivada são diferentes (forma do gráfico em *bico*).

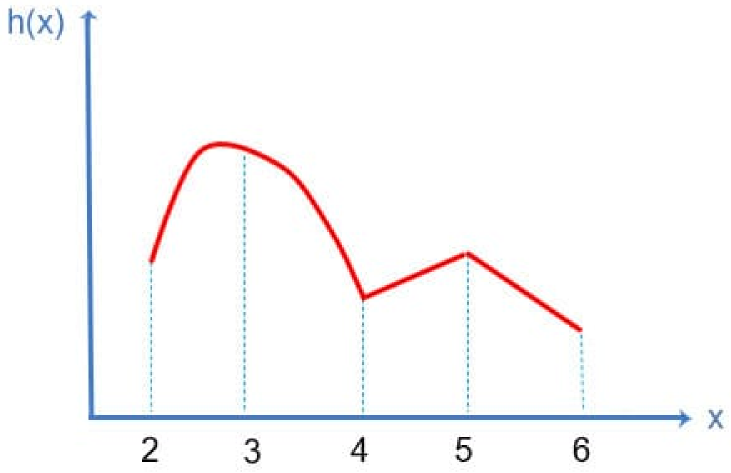
A letra B é falsa, pois existem funções que são contínuas no ponto, mas não existe derivada. São as funções cujos limites laterais da derivada são diferentes (forma do gráfico em *bico*).

A letra C é falsa, pois se a função for derivável no ponto, obrigatoriamente ela tem que ser contínua no ponto.

6. Seja a função $g(x) = \begin{cases} 4x + 4, & x < 2 \\ x^2 + 2, & x \geq 2 \end{cases}$. Marque a alternativa correta em relação à derivada de g(x) no ponto x = 2.

VERIFICANDO O APRENDIZADO

1. ANALISE O GRÁFICO E MARQUE A ALTERNATIVA QUE APRESENTA OS PONTOS ENTRE (2,6) ONDE A DERIVADA DE H(X) NÃO EXISTE.



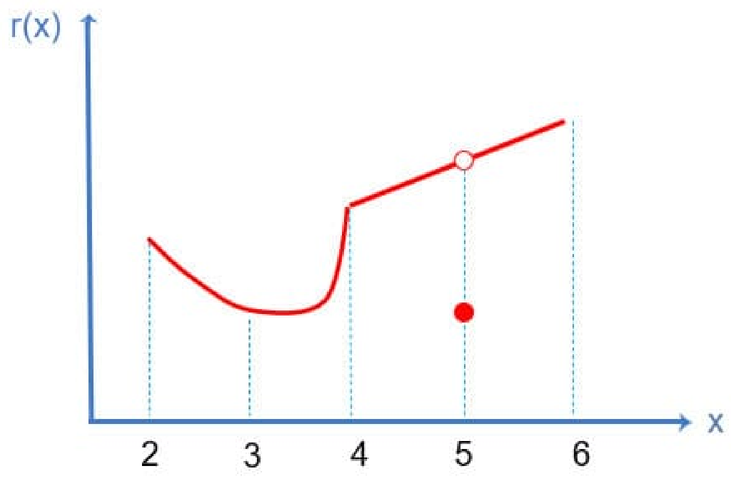
A) Apenas no x = 4.

B) x = 3, x= 4 e x = 5.

C) Apenas x = 5.

D) x = 4 e x = 5.

2. ANALISE O GRÁFICO DA FUNÇÃO R(X) E MARQUE A ALTERNATIVA QUE APRESENTA A AFIRMATIVA CORRETA:



A) Não existirá a derivada de r(x) no ponto x = 4, pois a função é descontínua neste ponto.

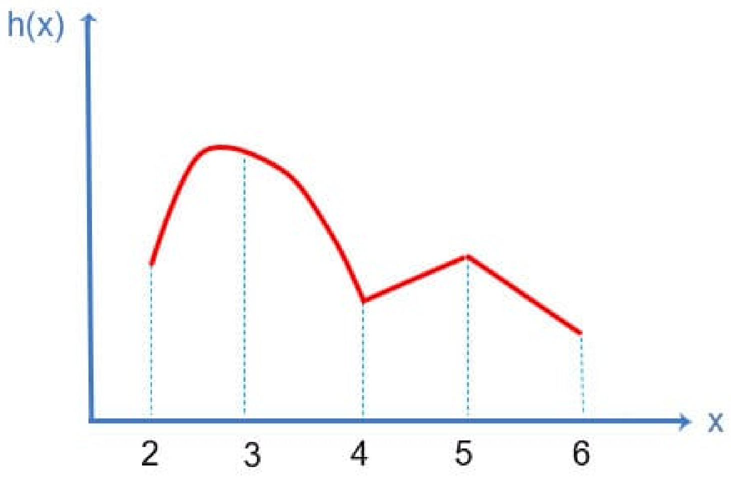
B) Não existirá a derivada de r(x) no ponto x = 5, pois a função é descontínua neste ponto.

C) Existirá a derivada de r(x) no ponto x = 4, pois a função é contínua neste ponto.

D) Existirá a derivada de r(x) no ponto x = 5, pois, apesar da função ser descontínua neste ponto, os limites laterais são iguais.

GABARITO

1. Analise o gráfico e marque a alternativa que apresenta os pontos entre (2,6) onde a derivada de h(x) não existe.



A alternativa **"D "** está correta.

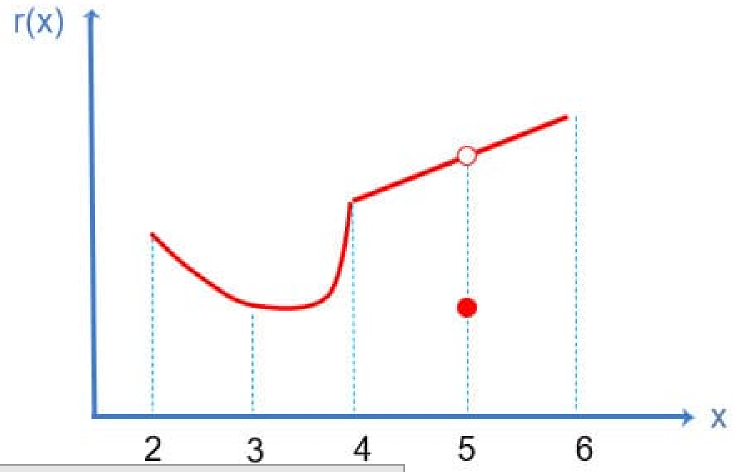
Parabéns! Você entendeu o conceito da abordagem analítica da derivada de uma função.

A derivada, nos pontos interiores do domínio, não existirá onde os limites laterais previstos na definição forem diferentes.

Isto é, a reta tangente tirada para quando se aproximar pela esquerda vai ser diferente quando se aproximar pela direita. É o que foi denominado de *formar um bico*.

Desta forma, não existirá derivada nos pontos x = 4 e x = 5.

2. Analise o gráfico da função r(x) e marque a alternativa que apresenta a afirmativa correta:



A alternativa **"B "** está correta.

Parabéns! Você entendeu o conceito da relação entre diferenciabilidade e continuidade.

A continuidade da função em um ponto é condição necessária, mas não suficiente, para a função ser derivável no ponto. Assim, para x = 5, onde a função é descontinua, não pode existir a derivada.

Nos pontos onde a função é contínua, pode não haver a derivada se os limites laterais da definição da derivada forem diferentes, que é o caso para x = 4.

MÓDULO 2

Aplicar as regras de derivação para o cálculo da derivada

INTRODUÇÃO

No módulo anterior, foi vista a definição da derivada através de uma abordagem gráfica e analítica.

Assim, podemos calcular a derivada aplicando diretamente o limite previsto em sua definição, apesar de ser uma tarefa trabalhosa, conforme a função se torna mais complexa.

Desta forma, são definidas propriedades e regras de derivação, geradas pela definição analítica da derivada, que permitem um cálculo mais simplificado para a derivada de uma função real.

Neste módulo, abordaremos estas regras de derivação.

CÁLCULO DA DERIVADA PELO LIMITE

A determinação da derivada de uma função diretamente através do limite de sua definição é uma possibilidade, apesar de ser necessária uma grande habilidade no cálculo do limite.

A definição nos apresenta

$$F'(Q) = \lim_{X \to Q} \frac{F(X) - F(Q)}{X - Q}$$

Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Seguindo a definição, para se calcular a derivada de f(x) em um ponto **q**, inicialmente deve-se montar a taxa média da função entre o ponto genérico **x** e o ponto **q** , $\frac{f(x)-f(q)}{x-q}$. Posteriormente, deve se calcular o valor que esta taxa vai tender para quando a variável **x** tender ao ponto desejado **q**. Se este limite existir e for finito, a derivada existe.

Existe outra equação equivalente à primeira para se representar esta taxa de variação. Esta nova equação é originada pela substituição de (x – q) por **h** . Assim, quando **x** tende a **q**, **h** tenderá a zero.

ATENÇÃO

Esta segunda equação é mais usada quando se deseja obter a equação genérica da derivada, isto é, uma equação que vale para todo **x**.

$$F'(Q) = \lim_{X \to Q} \frac{F(X)-F(Q)}{X-Q} = \lim_{H \to 0} \frac{F(Q+H)-F(Q)}{H}$$

$$F'(X) = \lim_{H \to 0} \frac{F(X+H)-F(X)}{H}$$

Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Os exemplos abaixo demostram a determinação da derivada através do cálculo do limite previsto na sua definição.

EXEMPLO

1. Determine a função derivada da função $f\left(x\right) = 2x^3$ em um ponto genérico e para x = 1 através da definição da derivada.

RESOLUÇÃO

REGRAS DE DERIVAÇÃO

As primeiras regras tratam de operações matemáticas em geral.

Sejam as funções f(x) e g(x) deriváveis e uma constante real **k.** Assim:

$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$: a derivada da soma é a soma da derivada;

$(kf)'(x) = k\, f'(x)$: a derivada de uma função multiplicada por uma constante é a constante que multiplica a derivada;

$(f \, . \, g)'(x) = f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x)$: regra do produto;

$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'\left(x\right)}{(g(x))^2}$, quando $g(x) \neq 0$: regra do quociente.

DERIVADA DAS PRINCIPAIS FUNÇÕES

Após as regras gerais, podemos, através da definição de derivada, obter as regras de derivação para uma lista de funções. As funções principais, usadas no cálculo diferencial e integral, já tiveram suas derivadas obtidas, gerando equações que podem ser utilizadas de forma direta.

Acesse aqui uma lista com as **Principais derivadas**.

EXEMPLO

2. Determine a derivada da função $f(x) = \sqrt[3]{x} + 2x^4 \sqrt{x}$, com $x \geq 0$, em um ponto genérico através da definição da derivada.

RESOLUÇÃO

Usaremos as regras de derivação relacionadas às operações matemáticas e as deduzidas no item anterior.

$$f\left(x\right) = g\left(x\right) + k\, h\left(x\right) r\left(x\right) = \sqrt[3]{x} + 2x^4 \sqrt{x} = x^{1/3} + 2\, x^4\, x^{1/2}$$

então $f'(x) = g'(x) + k\, (\, h'(x)\, r(x) + h(x)\, r'(x))$

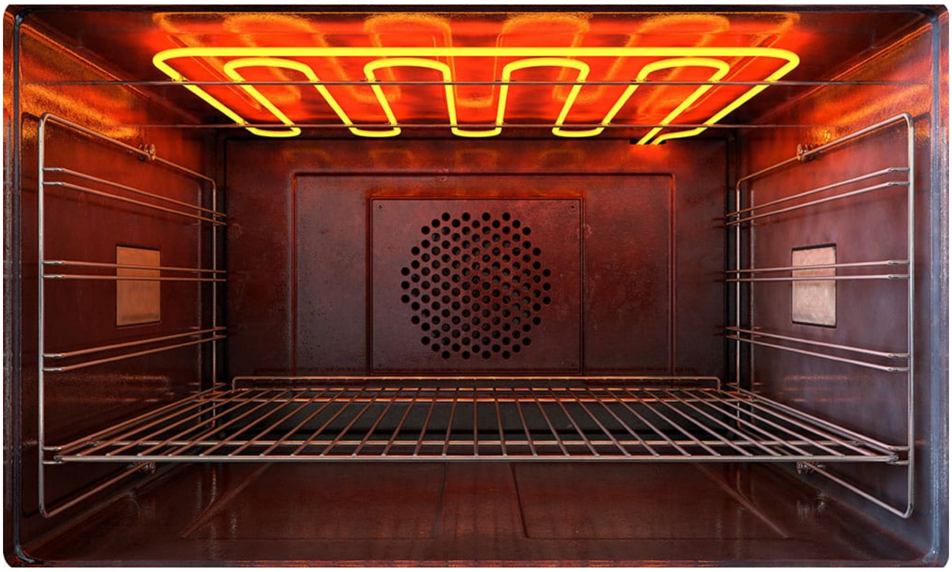
assim $f'(x) = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} + 2\left(4x^3 x^{\frac{1}{2}} + x^4 \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1}\right) = \frac{x^{-\frac{2}{3}}}{3} + 8x^{\left(3+\frac{1}{2}\right)} + x^{\left(4-\frac{1}{2}\right)}$

❓ VOCÊ SABIA

Podem ser calculadas outras funções derivadas através do uso das regras de derivação aqui apresentadas.

Determinação da derivada da função

TEORIA NA PRÁTICA



Fonte: Shutterstock

O valor da temperatura de um forno (T), medido em $°C$, depende da tensão elétrica de alimentação (V), medida em volts. A equação T(V) = 40arctg (V) + 100 representa este modelo. Determine qual a taxa de variação instantânea da variação da temperatura para quando V for igual 20V.

RESOLUÇÃO

Se a temperatura depende da tensão de entrada através da função T(V) = 40arctg V + 100, então a sua taxa de variação instantânea da temperatura pela tensão será dada pela derivada de T(V).

Usando as regras de derivação: $T'\left(V\right) = 40\frac{1}{1+V^2}$, assim, $T'\left(20\right) = 40\frac{1}{1+20^2} = \frac{40}{401}\ °C/V$

MÃO NA MASSA

1. DETERMINE A DERIVADA DA FUNÇÃO $H\left(X\right) = 3^X + 2E^X$, PARA X = 0.

A) $2 + ln3$

B) $ln3$

C) $1 + ln2$

D) $3 + ln2$

2. DETERMINE A EQUAÇÃO DA DERIVADA DA FUNÇÃO $H(X) = X^2\text{COS}X$.

A) $2x\cos x - x^2 senx$

B) $2x\cos x + x^2 senx$

C) $x^2\cos x - 2x\ senx$

D) $2\cos x - xsenx$

3. DETERMINE A DERIVADA DA FUNÇÃO $G(X) = \frac{X^2+1}{X^3}$, COM $X \neq 0$, PARA $X = 2$, ATRAVÉS DAS REGRAS DA DERIVAÇÃO.

A) $\frac{7}{16}$

B) $-\frac{7}{16}$

C) $\frac{5}{16}$

D) $-\frac{5}{16}$

4. UMA GRANDEZA FÍSICA C(T) É DEFINIDA COMO A TAXA DE VARIAÇÃO INSTANTÂNEA DA GRANDEZA A(T) PELA VARIAÇÃO DO TEMPO. SABENDO QUE $A\left(T\right) = 2E^T + 3\text{LOG}T$, T > 0,DETERMINE A EQUAÇÃO DE C(T).

A) $e^t + \frac{3}{\ln 10}$

B) $2e^t + \frac{3}{t}$

C) $2e^t + \frac{3}{t\ln 10}$

D) $e^t\ln 2 - \frac{1}{t\ln 10}$

5.DETERMINE O COEFICIENTE ANGULAR DA RETA TANGENTE À FUNÇÃO G(X) = 4 LN X + COS X SEN X NO PONTO $X = \Pi$

A) $\frac{4}{\pi}$

B) $4 + \frac{4}{\pi}$

C) $1 + \frac{1}{\pi}$

D) $1 + \frac{4}{\pi}$

6. DETERMINE A FUNÇÃO DERIVADA DA FUNÇÃO $F\left(X\right) = 3\sqrt{X}$, COM X ≥ 0, PARA X = 1, ATRAVÉS DO CÁLCULO DA DERIVADA PELO LIMITE DA SUA DEFINIÇÃO.

A) $\frac{3}{2}$

B) $\frac{1}{2}$

C) $\frac{5}{2}$

D) $\frac{7}{2}$

GABARITO

1. Determine a derivada da função $h\left(x\right) = 3^x + 2e^x$, para x = 0.

Usando as regras de derivação:

$h'\left(x\right) = \left(\ln 3\right) 3^x + 2\, e^x$

Assim, $h'\left(0\right) = 3^0 \ln 3 + 2\, e^0 = \ln 3 + 2$

Assim, a alternativa correta é a letra A.

2. Determine a equação da derivada da função $h(x) = x^2 \cos x$.

Usando a regra do produto:

$h'(x) = \left(x^2\right)' \cos x + x^2(\cos x)' = 2x\cos x + x^2(-sen\ x) = 2x\cos x - x^2 sen x$

Assim, a alternativa correta é a letra A.

3. Determine a derivada da função $g(x) = \frac{x^2+1}{x^3}$, com $x \neq 0$, para $x = 2$, através das regras da derivação.

Usando as regras de derivação relacionadas às operações matemáticas:

Se $g\left(x\right) = \frac{f(x)}{h(x)} \rightarrow g'\left(x\right) = \frac{f'\left(x\right)h\left(x\right) - f\left(x\right)h'\left(x\right)}{h^2\left(x\right)}$, onde $h\left(x\right) = x^3$ e $f\left(x\right) = x^2 + 1$

$$g'\left(x\right) = \frac{2x\ \ x^3 - \left(x^2+1\right)3x^2}{x^6} = \frac{2x^4 - 3x^4 - 3x^2}{x^6} = \frac{-x^4 - 3x^2}{x^6} = -\frac{x^2+3}{x^4}$$

$$g'(2) = -\frac{x^2+3}{x^4} = -\frac{2^2+3}{2^4} = -\frac{7}{16}$$

Assim, a alternativa correta é a letra B.

4. Uma grandeza física C(t) é definida como a taxa de variação instantânea da grandeza A(t) pela variação do tempo. Sabendo que $A\left(t\right) = 2e^t + 3\log t$, t > 0,determine a equação de C(t).

Se C(t) é a taxa de variação de A(t) pelo tempo, então C(t) = A’(t).

Usando as regras de derivação:

$$A\left(t\right) = 2e^t + 3\log t$$

$$A'\left(t\right) = 2e^t + \frac{3}{t \ln 10}$$

Assim, a alternativa correta é a letra C.

5.Determine o coeficiente angular da reta tangente à função g(x) = 4 ln x + cos x sen x no ponto $x = \pi$

6. Determine a função derivada da função $f\left(x\right) = 3\sqrt{x}$, com x ≥ 0, para x = 1, através do cálculo da derivada pelo limite da sua definição.

VERIFICANDO O APRENDIZADO

1. DETERMINE A DERIVADA DA FUNÇÃO $F\left(X\right) = \left(2X^2 + 1\right)\sqrt{X+1}$, PARA X = 0.

A) 1

3

C) $\frac{1}{2}$

D) -1

2. DETERMINE A DERIVADA DA FUNÇÃO $F\left(X\right) = \frac{X^2 \ \text{LN}\ X}{5+\ \text{COS}\ X}$, NO PONTO $X = \Pi$

A) $\frac{\pi(1+2\ ln\pi)}{4}$

B) $\frac{5+\ln\pi}{\pi^2}$

C) $\frac{\pi(1-2\ ln\pi)}{2}$

D) $\frac{5+\ln\pi}{\pi^2+5}$

GABARITO

1. Determine a derivada da função $f\left(x\right) = \left(2x^2+1\right)\sqrt{x+1}$, para x = 0.

A alternativa **"C "** está correta.

Parabéns! Você entendeu as regras de derivação.

Usando as regras de derivação:

$$f'\left(x\right) = \left(2x^2+1\right)'\sqrt{x+1} + \left(2x^2+1\right)\left(\sqrt{x+1}\right)' = 4x\sqrt{x+1} + \left(2x^2+1\right)\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x+1}}$$

$$f'\left(0\right) = 4.0\sqrt{0+1} + \left(2\ 0^2+1\right)\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{0+1}} = \frac{1}{2}$$

2. Determine a derivada da função $f\left(x\right) = \frac{x^2\ \ln x}{5+\ \cos x}$, no ponto $x = \pi$

A alternativa **"A "** está correta.

Parabéns! Você entendeu as regras de derivação das principais funções.

Usando as regras de derivação:

$$f(x) = \frac{x^2\ \ln x}{5+\ \cos x} \rightarrow f'(x) = \frac{\left(x^2\ \ln x\right)'(5+\cos x) - \left(x^2\ \ln x\right)(5+\cos x)'}{(5+\cos x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\left(2x\ln x + x^2\frac{1}{x}\right)(5+\cos x) - \left(x^2\ \ln x\right)\left(-senx\right)}{(5+\cos x)^2} = \frac{(2x\ln x + x)(5+\cos x) + \left(x^2\ \ln x\right) sen\ x}{(5+\cos x)^2}$$

Loading [MathJax]/jax/output/CommonHTML/jax.js

$$f'(\pi) = \frac{(2\pi \ln \pi + \pi)(5+\cos \pi) + \left(\pi^2 \ \ln \pi\right) sen\ \pi}{(5+\cos \pi)^2} = \frac{4(\pi + 2\pi\ ln\pi)}{16} = \frac{\pi(1+2\ ln\pi)}{4}$$

MÓDULO 3

⦿ Empregar a derivada para funções compostas através da regra da cadeia

INTRODUÇÃO

No módulo anterior, foram vistas as derivadas das principais funções. Aprendemos, por exemplo, que a derivada da função $f(x) = sen\ x$ é a função $f'(x) = \cos x$ e que a derivada da função $g\left(x\right) = x^2$ é a função $g'(x) = 2x$. Mas, se agora desejarmos a derivada da função $h\left(x\right) = sen\left(x^2\right)$, repare que a função $h(x)$ pode ser analisada como uma função composta entre $f(x)$ e $g(x)$, isto é, $h(x) = f(g(x))$.

Portanto, torna-se necessário definir uma regra de como se obtém a derivada de uma função composta.

Esta regra é denominada de regra da cadeia e tem diversas aplicações no cálculo diferencial e integral.

DERIVADA DA FUNÇÃO COMPOSTA

A regra que permite o cálculo da derivada de uma função composta de funções reais é denominada de Regra da Cadeia.

COMENTÁRIO

O nome Cadeia vem do conceito que iremos realizar a derivada em uma sequência multiplicativa de derivadas, sendo o elo de uma cadeia.

Sejam as funções f(x) e g(x) e sua composta definida por $h(x) = f(g(x)) = fog(x)$.

O teorema nos diz que se f(x) e g(x) forem diferenciáveis, então h(x) será diferenciável e sua derivada será calculada por: $h'(x) = f'(g(x))g'(x)$.

Por exemplo, seja a função $f\left(x\right) = \ln x$ e $g\left(x\right) = x^2$. Definindo a função h(x) como sendo a composta de f(x) com g(x), $h(x) = fog(x) = f(g(x))$.

Deseja-se calcular a derivada de h(x). Assim:

$h'(x) = f'(g(x))g'\left(x\right)$

$Como: \; f'\left(x\right) \; = \; \frac{1}{x} e \; g'\left(x\right) \; = \; 2x,$

$Logo, \; h'(x) = f'(g(x))g'(x) = \frac{1}{g(x)} . \, 2x = \frac{1}{x^2} . \, 2x = \frac{2}{x}, \; x \neq 0.$

Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

ATENÇÃO

Repare que, para usar essa regra, foi executado o cálculo de fora para dentro, em uma cadeia de cálculos. Em outras palavras, deriva inicialmente a função g(x) que está dentro da função f(x) e depois derivamos a função f(x).

Se analisarmos a derivada como uma taxa de variação de h(x) em relação a **x**, então a taxa dependerá da taxa de variação de f(x) em relação a g(x) e de g(x) em relação a **x**, por isso é que a derivada da composta é o produto das derivadas individuais aplicadas cada uma em sua variável de domínio.

As mesmas regras de derivação apresentadas para as principais funções, no módulo anterior, podem ser adaptadas agora para o caso de uma função composta. Por exemplo:

$f(x) = (u^n\left(x\right)), \; n \; inteiro \; \rightarrow \; f'(x) = n(u^{n-1}\left(x\right))u'\left(x\right)$

$f(x) = sen(u(x)) \; \rightarrow \; f'(x) = \cos(u(x))u'\left(x\right)$

$f(x) = ln(u(x)) \; \rightarrow \; f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$

Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Repare que esta última fórmula foi o exemplo executado $h\left(x\right) \; = \; fog\left(x\right) \; = \; ln\left(x^2\right) = \frac{\left(x^2\right)'}{x^2} = \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x}.$

Pode também ser usada a notação de Leibniz para representar a regra da cadeia. Por exemplo, para o caso da função composta h(x)= f(g(x)). Se denominarmos h(x) = y(x), então f(u) = y(u) e g(x) = u(x).

Para se calcular a derivada de h(x), teremos:

$$\frac{DY}{DX} = \frac{DY}{DU} \cdot \frac{DU}{DX}$$

Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Isto é, deriva inicialmente a função de **y** em relação à variável **u** e, posteriormente, deriva a função **u** em relação à variável **x**.

EXEMPLO

1. Determine a derivada da função $h\left(x\right) = fog\left(x\right)$, sendo $f\left(x\right) = x^5$ e $g\left(x\right) = sen\,x$.

RESOLUÇÃO

Usando a regra para derivada para função composta:

$h'(x) = f'(g(x)).\,g'(x)$

$f'\left(x\right) = 5\,x^4$ então $f'\left(g\left(x\right)\right) = f'\left(senx\right) = 5\,sen^4x\;g'(x) = \cos x$

Assim, $h'\left(x\right) = f'\left(g\left(x\right)\right).\,g'\left(x\right) = 5\,sen^4x\,\cos x$

Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Pode também ser usada a regra direta:

Se $f(x) = (u^5\left(x\right)) \rightarrow f'(x) = 5(u^4\left(x\right))u'\left(x\right)$, como $u(x) = \cos x$ e $u'(x) = -\,sen\,x$

Como, $h\left(x\right) = \cos^5 x \rightarrow h'(x) = 5\,sen^4x\cos x$

Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

REGRA DA CADEIA

A Regra da Cadeia para função composta já foi apresentada no item anterior. Agora, podemos usar esta regra para achar a derivada de uma função que é composição de várias funções.

Acompanhe no vídeo, um exemplo de Regra da Cadeia:

EXEMPLO

2. Deseja-se obter a taxa de variação da função $g\left(x\right) = \sqrt{x}$ em relação à variável independente s, para quando s = 0. Sabe-se que:

x é função de **t** e vale $x\left(t\right) = t^2 + 1$;

t é função de **y** e vale $t(y) = 1 + tg\ y$;

y depende de **s** e vale $y\left(s\right) = 2^s - 1$

RESOLUÇÃO

Usando a notação de Leibniz: $\frac{dg}{ds} = \frac{dg}{dx}.\frac{dx}{dt}.\frac{dt}{dy}.\frac{dy}{ds}$

$g'\left(x\right) = \frac{dg}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $x'(t) = \frac{dx}{dt} = 2t$, $t'(y) = \frac{dt}{dy} = sec^2 y$ e $y'(s) = \frac{dy}{ds} = 2^s \ln 2$

Assim $g'\left(s\right) = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right).(2t).\left(sec^2 y\right)\left(2^s ln2\right)$

Substituindo nas equações: Para $s = 0 \rightarrow y = 2^0 - 1 = 0 \rightarrow t = 1 + tg\,0 = 1 \rightarrow x = 1 + 1 = 2$

$g'\left(0\right) = \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right).(2.1).\left(sec^2 0\right)\left(2^0 ln2\right) = \frac{ln2}{\sqrt{2}}$

VOCÊ SABIA

A Regra da Cadeia pode ser usada para calcular a derivada de uma função inversa conhecendo-se a derivada da função.

Derivada da função inversa

TEORIA NA PRÁTICA

MÃO NA MASSA

1. DETERMINE A DERIVADA DA FUNÇÃO $H(X) = LN\left(X^2 + X + 1\right)$ PARA $X = 1$.

A) 0

B) 1

C) 2

D) 3

2. DETERMINE A DERIVADA DA FUNÇÃO $F(X) = SEN\left(\sqrt{X}\right)$ PARA $X = \Pi^2$.

A) $-\frac{1}{2\pi}$

B) $\frac{1}{2\pi}$

C) 0

D) 2π

3. DETERMINE A DERIVADA DA FUNÇÃO $F(X) = ARCCOTG\left(3X^3 + 1\right)$ PARA $X = 1$.

A) $\frac{8}{15}$

B) $-\frac{8}{15}$

C) $\frac{9}{17}$

D) $-\frac{9}{17}$

4. DETERMINE A EQUAÇÃO DA DERIVADA DA FUNÇÃO $F(X) = \sqrt[3]{COS\left(X^2\right)}$ EM RELAÇÃO À VARIÁVEL X.

A) $f'(x) = \frac{x\ sen\left(x^2\right)}{\sqrt[3]{cos^2\left(x^2\right)}}$

B) $f'(x) = \frac{1}{3}\ \frac{sen\left(x^2\right)}{\sqrt[3]{cos^2\left(x^2\right)}}$

C) $f'(x) = -\frac{2}{3}\ \frac{x\ sen\left(x^2\right)}{\sqrt[3]{cos^2\left(x^2\right)}}$

D) $f'(x) = \frac{2}{3}\ \frac{cos\left(x^2\right)}{\sqrt[3]{sen^2\left(x^2\right)}}$

5. SEJA A FUNÇÃO $G(X) = 2ARCTG\left(E^X\right)$. DETERMINE O COEFICIENTE ANGULAR DA RETA TANGENTE AO GRÁFICO DE G(X) NO PONTO X = 0

A) 2

B) 1

C) 3

D) 4

6. USE A REGRA DA CADEIA PARA DETERMINAR A DERIVADA DA FUNÇÃO $F(X) = TG\left(LN\left(\sqrt{X^2 + 1}\right)\right)$ PARA $X = 1$:

A) $\frac{1}{2}sec^2\left(\ln\left(\sqrt{2}\right)\right)$

B) $\frac{1}{2}sec^2\left(\ln\left(\sqrt{2}\right)\right)$

C) $sec\left(\left(\ln\left(\sqrt{2}\right)\right)\right)$

D) $sec^2\left(\sqrt{2}\right)$

GABARITO

1. Determine a derivada da função $h(x) = ln\left(x^2 + x + 1\right)$ para $x = 1$.

A função h(x) pode ser analisada como uma composição de funções.

Se $f\left(x\right) = \ln\left(x\right)$ e $g(x) = x^2 + x + 1$, assim $h\left(x\right) = f\left(g\left(x\right)\right) = ln\left(x^2 + x + 1\right)$.

Portanto, $h'(x) = f'(g(x)).\ g'(x)$

$f'(g(x)) = \frac{1}{g(x)}$ e $g'(x) = 2x + 1$

Loading [MathJax]/jax/output/CommonHTML/jax.js

$h'(x) = f'(g(x)).\,g'(x) = \frac{1}{g(x)}(2x + 1) = \frac{2x+1}{x^2+x+1}$

Para $x = 1 \rightarrow h'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1} = \frac{2.1+1}{1^2+1+1} = \frac{3}{3} = 1$

Assim, a alternativa correta é a letra B.

2. Determine a derivada da função $f(x) = sen\left(\sqrt{x}\right)$ para $x = \pi^2$.

A função f(x) pode ser analisada como uma composição de funções.

Se $g(x) = sen\,(x)$ e $h(x) = \sqrt{x}$, assim $f(x) = g(h(x)) = sen\left(\sqrt{x}\right)$

Portanto, $f'(x) = g'(h(x)).\,h'(x)$

$g'(h(x)) = cos\,(h(x))$ e $h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$f'(x) = g'(h(x)).\,h'(x) = cos(h(x))\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}cos\left(\sqrt{x}\right)$

Para $x = \pi^2 \rightarrow f'(2) = \frac{1}{2\sqrt{x}}cos\left(\sqrt{x}\right) = \frac{1}{2\sqrt{\pi^2}}cos\left(\sqrt{\pi^2}\right) = \frac{cos(\pi)}{2\pi} = -\frac{1}{2\pi}$

Assim, a alternativa correta é a letra A.

3. Determine a derivada da função $f(x) = arccotg\left(3x^3 + 1\right)$ para $x = 1$.

A função f(x) pode ser analisada como uma composição de funções.

Se $g(x) = arccotg\,(x)$ e $h(x) = 3x^3 + 1$, assim $f(x) = g(h(x)) = arccotg\left(3x^3 + 1\right)$.

Portanto, $f'(x) = g'(h(x)).\,h'(x)$

$g'(h(x)) = -\frac{1}{1+(h(x))^2}$ e $h'(x) = 9x^2$

$f'(x) = g'(h(x)).\,h'(x) = -\frac{1}{1+(h(x))^2}\left(9x^2\right) = -\frac{9x^2}{1+\left(3x^3+1\right)^2}$

Para $x = 1 \rightarrow f'(1) = -\frac{9.1}{1+(3.1+1)^2} = -\frac{9}{1+16} = -\frac{9}{17}$

Assim, a alternativa correta é a letra D.

4. Determine a equação da derivada da função $f(x) = \sqrt[3]{cos\left(x^2\right)}$ em relação à variável x.

Vamos aplicar a derivada de f(x) através da composição de várias funções:

$f(u) = \sqrt[3]{u} \rightarrow f'(u) = \frac{1}{3\sqrt[3]{u^2}}$

$u(v) = \cos(v) \rightarrow u'(v) = -sen(v)$

$v(x) = x^2 \rightarrow v'(x) = 2x$

Logo, $f(u(v(x)))$

Assim fica mais fácil através da representação de Leibniz:

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \frac{df}{du}.\frac{du}{dv}.\frac{dv}{dx} = \frac{1}{3\sqrt[3]{u^2}}(-sen(v)).\,2x$$

Substituindo os valores das funções até ficarmos dependendo apenas de 2x

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{u^2}}(-sen(v)).\,2x \rightarrow f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{cos^2 v}}\left(-sen\left(x^2\right)\right).\,2x$$

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{cos^2 v}}\left(-sen\left(x^2\right)\right).\,2x = \frac{1}{3\sqrt[3]{cos^2\left(x^2\right)}}\left(-sen\left(x^2\right)\right).\,2x$$

$$f'(x) = -\frac{2}{3}\,\frac{x\,sen\left(x^2\right)}{\sqrt[3]{cos^2\left(x^2\right)}}$$

A alternativa correta é a letra C.

5. Seja a função $g(x) = 2arctg\left(e^x\right)$. Determine o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de g(x) no ponto x = 0

O coeficiente angular da reta tangente é igual à derivada da função no ponto.

A função g(x) pode ser analisada como uma composição de funções.

Se f(x) = ex e h(x) = 2 arctg(x) , então g(x)= h(f(x))

$$h'(f(x)) = \frac{2}{1+(f(x))^2} = \frac{2}{1+e^{2x}}$$

$$f'\left(x\right) = e^x$$

Assim, $g'\left(x\right) = h'\left(f\left(x\right)\right).f'\left(x\right) = \frac{2e^x}{1+e^{2x}}$, $g'\left(0\right) = \frac{2.1}{1+1} = 1$

Pode também ser usada a regra direta:

Se $f(x) = arctg\left(u(x)\right) \rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+u^2}u'\left(x\right)$, com $u\left(x\right) = e^x$ e $u'\left(x\right) = e^x$

Como $g\left(x\right) = g\left(x\right) = 2\ arctg\left(e^x\right) \rightarrow g'(x) = \frac{2e^x}{1+e^{2x}}$

Assim, a alternativa correta é a letra B.

6. Use a regra da cadeia para determinar a derivada da função $f(x) = tg\left(ln\left(\sqrt{x^2+1}\right)\right)$ para $x = 1$:

VERIFICANDO O APRENDIZADO

1. SEJAM AS FUNÇÕES $F\left(X\right) = E^{X}$ E $G\left(X\right) = \sqrt{X^4 + 9}$. DEFINE-SE A FUNÇÃO H(T) = FOG(T). A FUNÇÃO H(T) REPRESENTA A VARIAÇÃO DE POSIÇÃO DE UM FOGUETE, MEDIDA EM KM, EM RELAÇÃO À VARIÁVEL TEMPO (T), MEDIDA EM MINUTOS. DETERMINE A VELOCIDADE INSTANTÂNEA DO FOGUETE PARA T = 2.

A) $\frac{18}{5}e^5 km/min$

B) $\frac{1}{5}e^2\mathrm{km/min}$

C) $\frac{1}{15}e^{15}\mathrm{km/min}$

D) $\frac{16}{5}\boldsymbol{e^5 km/min}$

2. USE A REGRA DA CADEIA PARA DERIVAR A FUNÇÃO Y EM RELAÇÃO À VARIÁVEL T, SABENDO QUE $Y(X) = CTG\ X$ E QUE $X\left(S\right) = S^3$ E $S\left(T\right) = T^2$:

A) $\frac{dy}{dt} = -4t^3 \sec^2\left(t^4\right)$

B) $\frac{dy}{dt} = \csc^2\left(t^6\right)$

C) $\frac{dy}{dt} = -6t^5 \csc^2\left(t^6\right)$

D) $\frac{dy}{dt} = t^5 \csc^2\left(t^6\right)$

GABARITO

1. Sejam as funções $f\left(x\right) = e^x$ e $g\left(x\right) = \sqrt{x^4 + 9}$. Define-se a função h(t) = fog(t). A função h(t) representa a variação de posição de um foguete, medida em km, em relação à variável tempo (t), medida em minutos. Determine a velocidade instantânea do foguete para t = 2.

A alternativa **"D "** está correta.

Parabéns! Você entendeu o conceito da derivada da função composta.

$h'(t) = f'(g(t))\ g'(t)$

Loading [MathJax]/jax/output/CommonHTML/jax.js

mas $f\left(u\right) = e^u \rightarrow f'(g(t)) = e^{\sqrt{x^4+9}}$

$$g'\left(t\right) = \frac{4x^3}{2\sqrt{x^4+9}} = \frac{2x^3}{\sqrt{x^4+9}}$$

$$h'\left(t\right) = \frac{2x^3}{\sqrt{x^4+9}}e^{\sqrt{x^4+9}} \text{ então, } h'\left(2\right) = \frac{2.8}{\sqrt{16+9}}e^{\sqrt{16+9}} = \frac{16}{5}e^5$$

2. Use a regra da cadeia para derivar a função y em relação à variável t, sabendo que $y(x) = ctg\ x$ e que $x\left(s\right) = s^3$ e $s\left(t\right) = t^2$:

A alternativa **"C "** está correta.

Parabéns! Você entendeu o conceito da regra da cadeia.

$$\frac{dy}{dx} = -csc^2x \quad , \quad \frac{dx}{ds} = 3s^2 \text{ e } \frac{ds}{dt} = 2t$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}.\frac{dx}{ds}.\frac{ds}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = -csc^2x.\ 3s^2.\ 2t$$

Substituindo para ficar apenas a variável t:

$$\frac{dy}{dt} = -csc^2\left(s^3\right).\ 3\left(t^2\right)^2.\ 2t$$

$$\frac{dy}{dt} = -6t^5\ csc^2\left(t^6\right)$$

MÓDULO 4

⦿ Representar o conceito da derivada para derivação implícita e derivada de ordens superiores

INTRODUÇÃO

Nos módulos anteriores, foi definida a derivada de uma função real que também é uma função real. Desta forma, pode-se aplicar o operador da derivada a uma função que é a derivada de outra função. Este tipo de derivada vai ser apresentada neste módulo é denominada de derivada de ordem superior.

Por fim, existem funções que não são possíveis de serem explicitadas, necessitando se ter uma forma de obtermos a sua derivada. Esse modo de derivação, aplicando os conceitos de derivada visto anteriormente, é denominado de derivação implícita e será o último assunto do nosso tema.

DERIVAÇÃO DE ORDEM SUPERIOR

Como já foi visto, a derivada de uma função real também é uma função real. Desta forma, a função derivada pode possuir, por sua vez, também uma derivada.

A DERIVAÇÃO DE UMA FUNÇÃO DERIVADA É DENOMINADA DE DERIVAÇÃO DE ORDEM SUPERIOR.

A DERIVADA DE UMA FUNÇÃO, ESTUDADA ATÉ ESTE PONTO, É DENOMINADA DE DERIVADA DE PRIMEIRA ORDEM.

A DERIVADA DA DERIVADA É DENOMINADA DE DERIVADA DE SEGUNDA ORDEM, E ASSIM, SUCESSIVAMENTE.

Representamos a derivada de ordem superior **n**, **n** inteiro positivo, por $f^{(n)}\left(x\right)$ ou $D^{(n)}f\left(x\right)$.

Utilizando a notação de Leibniz, a derivada de segunda ordem é representada por:

$$\frac{D^2Y}{DX^2} = \frac{D}{DX}\left(\frac{DY}{DX}\right)$$

Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

A de terceira ordem é dada por:

$$\frac{D^3Y}{DX^3} = \frac{D}{DX}\left(\frac{D^2Y}{DX^2}\right) = \frac{D}{DX}\left(\frac{D}{DX}\left(\frac{DY}{DX}\right)\right)$$

Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

E a derivada de ordem **n**

$$\frac{D^NY}{DX^N} = \frac{D}{D}\left(\frac{D^{N-1}Y}{DX^{N-1}}\right) = \frac{D}{DX}\left(\frac{D}{DX}\left(\frac{D^{N-2}Y}{DX^{N-2}}\right)\right)$$

Atenção! Para visualização completa da equação utilize a rolagem horizontal

Assista ao vídeo e veja exemplos sobre Derivação de ordem superior.

DERIVAÇÃO IMPLÍCITA

Até este ponto, você trabalhou com a derivada de uma função real que apresenta uma função explícita, isto é, a função representada através de uma equação que depende da sua variável independente. Por exemplo: $f\left(x\right) = 3\cos x + 5$ ou $\mathrm{g}\left(\mathrm{x}\right) = \ln\left(\mathrm{x}^2 + 1\right)$.

Em todas elas, a dependência com a variável **x** é expressa claramente.

Em certos problemas matemáticos, porém, não temos como obter essa equação explicita para uma função. Nesses casos, a função será representada de uma forma implícita. Por exemplo, $x^2 + y\cos x + y^2 = 3$, verifica-se que, apesar de **y = f(x)** estar representada implicitamente pela equação, não é possível obter uma equação explícita de **y** em função de **x**.

Em outras palavras, a equação **F(x,y) = k**, k real, representará a função **y = f(x)**.

COMENTÁRIO

Como, então, obter a derivada de uma função implícita?

Na verdade, para se obter a derivada de uma função, não é necessário obter a equação explícita.

A operação matemática da derivada pode ser aplicada diretamente na equação implícita que relaciona a função com a sua variável independente. Este tipo de operação é denominada de derivação implícita.

Pois, se $F\left(x, y\right) = k \rightarrow \frac{d(F(x,y))}{dx} = 0$

O método é derivar a equação implícita termo a termo, usando a Regra da Cadeia.

Deve ser lembrado que y é função de x, assim $\frac{dy}{dx}$ não é zero, e sim y'.

Por exemplo, se tivermos um termo y^6, a derivação deste termo será 6 $y\,y'$ $= 6y\frac{dy}{dx}$.

As vezes teremos que usar as regras de derivação.

Por exemplo, o termo x^2y^2, a derivação vai ter que usar a regra do produto, isto é, $2x\,y^2 + x^2\,2yy'$.

ATENÇÃO

É importante ressaltar que na equação da função derivada podem aparecer termos relacionados a **y**, além dos relacionados à variável independente **x**.

O exemplo abaixo mostra a aplicação do método de derivação implícita.

TEORIA NA PRÁTICA

Fonte: Shutterstock

Sabe-se que a velocidade é a taxa de variação da posição pelo tempo e a aceleração é a taxa de variação da velocidade pelo tempo. A posição de um carro, medida em metros, depende do instante de tempo **t**, medido em **s**, através da equação $S\left(t\right) = t^3 + 4t - 32$, com $\boldsymbol{t} \geq \mathbf{0}$. Determine a velocidade e a aceleração para **t = 2s**.

RESOLUÇÃO

Assim, a velocidade será a derivada de primeira ordem da posição, em relação ao tempo.

$v\left(t\right) = s'\left(t\right) = 2t^2 + 4 \rightarrow v\left(2\right) = 2.\,2^2 + 4 = 12m/s$

A aceleração será a derivada da velocidade em relação ao tempo e, por sua vez, a derivada de segunda ordem da posição em relação ao tempo.

$a\left(t\right) = v'\left(t\right) = s''\left(t\right) = 4t \rightarrow a(2) = 4.2 = 8m/s^2$

MÃO NA MASSA

1. SEJA $F(X) = 4X^5 + 2X^4 - X + 4$, DETERMINE A DERIVADA DE TERCEIRA ORDEM PARA X = 1

A) 198

B) 202

C) 288

D) 312

2. UM MOVIMENTO CIRCULAR ACELERADO TEM EQUAÇÃO DA POSIÇÃO ANGULAR, MEDIDA EM RAD, EM RELAÇÃO AO TEMPO DADA POR $\Theta\left(T\right) = \Pi + 2T + 10T^2$. SABENDO QUE A ACELERAÇÃO ANGULAR É DERIVADA DE SEGUNDA ORDEM DA POSIÇÃO ANGULAR, EM RELAÇÃO AO TEMPO, MARQUE A ALTERNATIVA QUE APRESENTA O VALOR DA ACELERAÇÃO ANGULAR DESTE MOVIMENTO, MEDIDA EM RAD/S^2:

A) $-\ 20 rad/s^2$

B) $10 rad/s^2$

C) $20 rad/s^2$

D) $-5 rad/s^2$

3. SEJA $F(X) = E^X \text{COS} X$, DETERMINE A EQUAÇÃO DA DERIVADA DE SEGUNDA ORDEM DE F(X).

A) $2e^x \cos x$

B) $-e^x \text{ sen } x$

C) $-e^x \cos x$

D) $-2e^x \text{ sen } x$

4. SEJA A EQUAÇÃO Y SEN X+ X^2 + 2 SEN Y = 0 , PARA $0 \leq X \leq \Pi$ E $0 \leq Y \leq \Pi$, QUE RELACIONA IMPLICITAMENTE A VARIÁVEL Y EM FUNÇÃO DE X, DETERMINE O VALOR DA DERIVADA DE Y EM RELAÇÃO A X, PARA O PONTO X = 0

A) $-\frac{\pi}{2}$

B) $\frac{\pi}{2}$

C) 0

D) π

5. DETERMINE O COEFICIENTE DA RETA TANGENTE AO GRÁFICO DA FUNÇÃO Y = G(X) NO PONTO X = 1 E Y = 1, SABENDO QUE $2X^3 + 2(Y+1)^3 - 9X\left(Y+1\right) = 0$.

A) $\frac{1}{5}$

B) 4

Loading [MathJax]/jax/output/CommonHTML/jax.js

C) $\frac{3}{5}$

D) $\frac{7}{5}$

6. DETERMINE A DERIVADA DE SEGUNDA ORDEM DE Y EM RELAÇÃO A X, SABENDO QUE $E^{Y}- \ 3XY \ = \ 2$, PARA QUANDO X = 0.

A) $\frac{9}{2} ln2 + 4$

B) $\frac{9}{2}\left(\ln 2 - ln^{2}2\right)$

C) $\left(\ln 2 - ln^{2}2\right)$

D) $\frac{9}{2}\left(\ln 8 - 4\right)$

GABARITO

1. Seja $f(x) = 4x^{5} + 2x^{4} - x + 4$, determine a derivada de terceira ordem para x = 1

Como se deseja a derivada de terceira ordem, teremos que derivar três vezes a função.

$f(x) = 4x^{5} + 2x^{4} - x + 4 \ \rightarrow f^{'}(x) = 20x^{4}$

$f^{'}(x) = 20x^{4} + x^{3} - 1 \rightarrow f^{''}(x) = 80\ x^{3} + 24x^{2}$

$f''(x) = 80\ x^{3} + 24x^{2} \ \rightarrow \ f^{(3)}\left(x\right) = 240x^{2} + 48x$

Assim:

$f^{(3)}\left(x\right) = 240x^{2} + 48x \rightarrow f^{(3)}\left(1\right) = \ 240\ .\ 1 \ + \ 48\ .\ 1 \ = \ 288$

Logo, a resposta correta é a letra C.

2. Um movimento circular acelerado tem equação da posição angular, medida em rad, em relação ao tempo dada por $\theta\left(t\right) = \ \pi + 2t \ + \ 10t^{2}$. Sabendo que a aceleração angular é derivada de segunda ordem da posição angular, em relação ao tempo, marque a alternativa que apresenta o valor da aceleração angular deste movimento, medida em rad/s^{2}:

Como se deseja a derivada de segunda ordem, teremos que derivar duas vezes a função.

$\theta\left(t\right) = \ \pi + 2t \ + \ 10t^{2} \rightarrow w(t) = \theta^{'}(t) = 2 + 20t$

$w(t) = 2 + 20t \ \rightarrow \ \alpha(t) = w^{'}(t) = \theta^{''}(t) = 20\ rad/s^{2}$

Assim, a resposta correta é a letra C.

3. Seja $f(x) = e^{x}\cos x$, determine a equação da derivada de segunda ordem de f(x).

Loading [MathJax]/jax/output/CommonHTML/jax.js nda ordem, teremos que derivar duas vezes a função.

Usando a regra do produto e as derivadas das funções e^x e **cos x**:

$$f(x) = e^x\cos x \ \rightarrow \ f'(x) = e^x\cos x + e^x\left(-\,sen x\right) \ = \ e^x\left(\cos x - sen\, x\right)$$

Usando novamente a regra do produto e as derivadas das funções e^x, **cos x** e **sen x**:

$$f'(x) = e^x(\cos x - \ sen x) \ \rightarrow \ f''(x) = e^x\left(\cos x - sen x\right) + e^x\left(-\,sen x - cos x\right) = \ -2e^x \text{ sen x}$$

Assim, a alternativa correta é a letra D.

4. Seja a equação y sen x+ x^2 + 2 sen y = 0 , para 0 ≤ x ≤ π e 0 ≤ y ≤ π, que relaciona implicitamente a variável y em função de x, determine o valor da derivada de y em relação a x, para o ponto x = 0

Derivando termo a termo, lembrando que **y** é função de **x**:

$$(y\,sen x)' + \left(x^2\right)' + (2sen\,y)' = (0)'$$

$$y(cos\,x) + y' sen x + 2x + 2\cos y\, y' = 0$$

$$\left(2x + y\,cos\,x\right) + y'\left(sen x + 2\cos y\right) = 0$$

Assim, achando o valor de y’ em função de **x** e **y**:

$$y'\left(sen x + 2\cos y\right) = \ -y\,cos\,x - 2x$$

$$y' = \ -\frac{y\text{ sen }x + 2x}{\text{sen }x + 2\cos y}$$

Na equação original: $x = 0 \ \rightarrow \ y\text{sen}0 + \ 0^2 + 2\,sen\,y = 0 \ \rightarrow \ sen\,y = 0 \ \rightarrow \ y = 0$

Substituindo para $x \ = \ 0$ e $y = 0 \ \rightarrow \ y' = \ -\frac{0\,sen\,0 \ + \ 2.0}{\text{sen } \ 0 \ + 2\cos\,0} \ = \ -\frac{0}{1} = 0$

A alternativa correta é a letra C.

5. Determine o coeficiente da reta tangente ao gráfico da função y = g(x) no ponto x = 1 e y = 1, sabendo que $2x^3 \ + \ 2(y+1)^3 \ - \ 9x\left(y+1\right) \ = \ 0$.

Lembre-se de que o coeficiente angular da reta tangente é a derivada da função **y** no ponto.

Derivando a equação implícita termo a termo:

$$\left(2x^3\right)' \rightarrow 6x^2 \ , \ \left(2(y+1)^3\right)' \rightarrow 6(y+1)^2y' \text{ e } (\ 9x(y+1))' \rightarrow 9\left(y+1\right) + 9\,xy'$$

Assim $\left(2x^3 \ + \ 2\left(y+1\right)^3 \ - \ 9x\left(y+1\right)\right)' = 0 \rightarrow 6x^2 + 6\left(y+1\right)^2y' - 9\left(y+1\right) - 9xy' = 0$

Manipulando matematicamente:

$$y'\left(6\left(y+1\right)^2 - 9x\right) = \ -6x^2 + 9\left(y+1\right) = 3\left(3\left(y+1\right) - 2x^2\right)$$

$$y' = 3\frac{3y - 2x^2 + 3}{3\left(2\left(y+1\right)^2 - 3x\right)} \ = \ \frac{3y - 2x^2 + 3}{2(y+1)^2 - 3x}$$

Assim, para **x = 1** e **y = 1**, $y' = \frac{3-2+3}{2.4-3} \ = \ \frac{4}{5}$, sendo a alternativa B a verdadeira.

6. Determine a derivada de segunda ordem de y em relação a x, sabendo que e^y– 3 xy = 2, para quando x = 0.

A alternativa B está correta.

VERIFICANDO O APRENDIZADO

1. SEJA M O VALOR DA DERIVADA DE SEGUNDA ORDEM DA FUNÇÃO $H(X) = \frac{3X}{X + \frac{1}{X}}$ PARA X = 1. CALCULE M + 2:

A) $\frac{2}{3}$

B) $\frac{1}{2}$

C) $\frac{3}{4}$

D) $\frac{2}{5}$

2. A RELAÇÃO ENTRE Y E X É DADA PELA EQUAÇÃO $YX^2 + \cos Y = 1$. DETERMINE A EQUAÇÃO QUE REPRESENTA A DERIVADA DE Y EM RELAÇÃO A X:

A) $\frac{2xy}{\operatorname{sen} y - x^2}$

B) $\frac{xy}{\operatorname{sen} y + x^2}$

C) $\frac{4xy}{\cos y - x^2}$

D) $\frac{xy}{\operatorname{sen} y - 2x^2}$

GABARITO

1. Seja m o valor da derivada de segunda ordem da função $h(x) = \frac{3x}{x + \frac{1}{x}}$ para x = 1. Calcule m + 2:

A alternativa **"B "** está correta.

Parabéns! Você entendeu o conceito da derivação em ordem superior.

$$h(x) = \frac{3x}{x + \frac{1}{x}} = \frac{3x^2}{x^2+1} \rightarrow h'(x) = \frac{6x\left(x^2+1\right) - 3x^2 . 2x}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{6x}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$h''(x) = \left(\frac{6x}{\left(x^2+1\right)^2}\right)' = \frac{6\left(x^2+1\right)^2 - 6x . 2 . \left(x^2+1\right) . 2x}{\left(x^2+1\right)^4}$$

$$h''(x) = \frac{6\left(x^2+1\right)\left(\left(x^2+1\right) - 4x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^4} = \frac{6\left(1 - 3x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^3}$$

Assim:

$$h''(1) = \frac{6(1-3.1)}{(1+1)^3} = -\frac{3}{2} = m$$

Portanto, $2 + h''(1) = \frac{1}{2}$

2. A relação entre y e x é dada pela equação $yx^2 + \cos y = 1$. Determine a equação que representa a derivada de y em relação a x:

A alternativa **"A "** está correta.

Parabéns! Você entendeu o conceito da derivação implícita.

Derivando termo a termo:

$$\left(yx^2\right)' = y' x^2 + 2x y$$

$$(\cos y)' = - sen y'$$

Assim, $y' x^2 + 2x y - sen\, y\, y' = 0 \rightarrow y'\left(x^2 - seny\right) + 2xy = 0 \rightarrow y' = \frac{-2xy}{x^2 - seny} = \frac{2xy}{seny - x^2}$

CONCLUSÃO

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao longo dos quatro módulos foi possível definir e aplicar o conceito da derivada de uma função real.

Definimos a derivação através de uma abordagem gráfica e de uma abordagem analítica, associando o conceito ao de taxa de variação instantânea e ao coeficiente angular da reta tangente à função.

A definição da derivada foi utilizada para se obter diversas regras de derivação que facilitam o cálculo da derivada. Uma lista de derivadas das principais funções foi disponibilizada.

Posteriormente, o conceito da derivada foi aplicado na Regra da Cadeia, na derivação de funções compostas, na

mente, na derivação implícita.

AVALIAÇÃO DO TEMA:

REFERÊNCIAS

GUIDORIZZI, H. L. **Cálculo**. v. 1. 5. ed. São Paulo: LTC, 2013. cap. 7, p. 136-191.

HALLET H. *et al*. **Cálculo**, a uma e a várias variáveis. 5. ed. São Paulo: LTC, 2011. cap. 3, p.105-156.

LARSON, R.; EDWARDS, B. H. **Cálculo**, com aplicações. 6. ed. São Paulo: LTC, 2003. cap. 2, p.107-171.

STEWART, J. **Cálculo**. v. 1. 5. ed. São Paulo: Thomson Learning, 2008. cap. 2 e 3, p.158-247.

THOMAS, G. B. **Cálculo**. v. 1. 12. ed. São Paulo: Pearson, 2012. cap. 3, p. 117-183.

EXPLORE+

Para saber mais sobre os assuntos tratados neste tema, pesquise na internet.

O curso de unidade: Derivadas – Definições e Regras Básicas e Regra da Cadeia, no site da Khan Academy.

CONTEUDISTA

Jorge Luís Rodrigues Pedreira de Cerqueira

CURRÍCULO LATTES