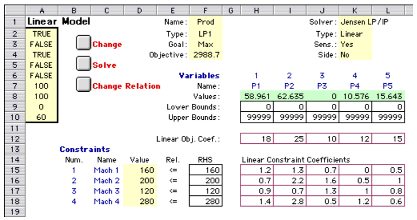


Introdução à Modelagem Matemática

Prof. Dr. Claudio Barbieri da Cunha

Escola Politécnica

Universidade de São Paulo
Brasil

cbcunha@usp.br

Sequência de passos

1. Entender o problema
2. Identificar as respostas que se busca para o problema em palavras
3. Descrever o objetivo (função objetivo) em palavras
4. Descrever cada restrição em palavras
5. Revisar as variáveis de decisão
6. Escrever a expressão que calcula função objetivo em função das variáveis de decisão
7. Expressar cada restrição em termos das variáveis de decisão

Intuitivamente

- O que se busca decidir?
- Como se pode expressar em números essa decisão?
- Qual o objetivo a ser maximizado ou minimizado?
- Quais as limitações ou requisitos que restringem os valores das variáveis de decisão

Quantidades mensuráveis

- **Todas as expressões (função objetivo e restrições) se referem a "quantidades que são mensuráveis"**
  - Isto é, podem ser medidas, quantificadas, calculadas
  - Número de unidades de alguma coisa

- **Por exemplo:**
  - Número total de horas gastas
  - Número total de empregados trabalhando por turno de trabalho
  - Número total de toneladas ou m3 consumidos

- **Em geral Número total → calculado através de soma**

Restrições

- **Comparação de duas quantidades mensuráveis**
  - Uma ou duas delas podem ser ser calculadas a partir das variáveis de decisão

- **Podem ser do tipo**
  - Menor ou igual ≤
  - Igual =
  - Maior ou igual: ≥

- **Ou restringem os valores das variáveis de decisão**
  - Números Inteiros
  - Valores Binários (0 ou 1)

Categorias de restrições

- **De limitação de quantidade de recursos que podem ser usados, de disponibilidade máxima, de tempo, etc.**
  - Não pode usar/gastar/ocupar mais do que o disponível
  - Nº de unidades consumidas ≤ Nº de unidades disponíveis
  - Horas gastas ≤ Horas disponíveis
  - Total produzido ≤ Capacidade de produção
- **De desempenho mínimo**
  - Deve atingir meta/quota/número mínimo
  - Nº de unidades produzidas ≥ Nº de unidades requeridas
  - Toneladas embarcadas ≥ Mínimo a ser embarcado
- **De conservação**
  - número de unidades entrando = número de unidades saindo

Exemplo 1

- Uma livraria recebeu 40 cópias em capa mole (papel) e 65 cópias em capa dura e de um novo livro que está sendo lançado.
- Entretanto, precisa de pelo menos 80 cópias de cada tipo para atender pedidos já feitos e, se possível, mais cópias, para atender a demanda dos interessados na abertura da loja na próxima 2ª feira cedo.
- O CD consegue expedir e enviar até 10 caixas de livros para atender a essa demanda. Cada caixa de livro do tipo “leve” possui 6 exemplares de capa mole.
- O CD também possui 7 caixas de livros mistas. Cada caixa mista é composta por 5 unidades em capa dura e 2 unidades em capa mole.
- Como o CD deve fazer para atender da melhor forma possível a demanda da loja?

Expressar o problema em português

- **Maximizar o número de livros**
- **Não pode enviar mais que 10 caixas**
- **A loja tem que dispor de pelo menos 80 livros de cada (capa dura e capa mole)**
- **O número de caixas mistas é limitado**

- **Buscar palavras na descrição do problema que identifiquem restrições**

  No máximo, pelo menos, não mais que, até, exatamente, requeridas, deve, orçamento, demanda

Formulação matemática em português

Maximizar:

nº livros na livraria

Restrições

nº caixas mistas enviadas ≤ nº máximo de caixas mistas (caixas)

nº caixas enviadas ≤ nº máximo de caixas enviadas (caixas)

nº exemplares capa dura ≥ nº min exemplares requeridos (livros)

nº exemplares capa mole ≥ nº min exemplares requeridos (livros)

Quais são as variáveis de decisão?

L = número de caixas do tipo leve (só capa mole) a serem enviadas

M = número de caixas mistas (capa dura + capa mole) a serem enviadas

- **Essas duas variáveis são suficientes para escrever a formulação matemática do problema?**
  - Em outras palavras, elas permitem fazer todos os cálculos necessários para as restrições e para a função objetivo?

Escrevendo a expressão da Função Objetivo

Maximizar nº livros na livraria

Em função do nº de caixas do tipo leve (L) e mistas (M) serem despachadas

Cada caixa contém quantos livros?

	Nº exemplares		
	Capa Dura	Capa Mole	Total
Caixa Leve	0	6	6
Caixa Mista	5	2	7

Portanto, o total de livros enviados é dado por

6L + 7M

Que deve ser maximizado!!!

Escrevendo as expressões das restrições

- nº caixas mistas enviadas ≤ nº máximo de caixas mistas

  $M \leq 7$ (caixas)

- nº caixas enviadas ≤ nº máximo de caixas enviadas

  $L + M \leq 10$ (caixas)

- nº exemplares capa dura ≥ nº min exemplares requeridos

  $5M + 65 \geq 80$ (exemplares)

- nº exemplares capa mole ≥ nº min exemplares requeridos

  $6L + 2M + 40 \geq 80$ (exemplares)

- nºs de caixas (L, M) devem ser inteiros

Construção de um hospital

- **O diretor de um hospital deve escolher um esquema de designação de leitos e quartos em uma nova ala que será construída, com área total de 1200 m2. Existem três tipos de quartos possíveis:**
  - Com um leito para paciente
  - Com dois leitos para paciente
  - Como três leitos para paciente

- **O total de quartos a construir não pode ultrapassar 70.**

- **Adicionalmente, o número de quartos com um leito não pode ultrapassar 30.**

- **Por imposições de demanda, deverão ser oferecidos pelo menos 120 novos leitos.**

Construção de um Hospital

- **A necessidade de área construída é de:**
  - 10 m2 para quarto com um leito
  - 15 m2 para quarto com dois leitos
  - 18 m2 para quarto com três leitos

- **A receita mensal estimada por tipo de quarto é:**
  - $ 7500 para quarto com um leito
  - $ 6000 para quarto com dois leitos
  - $ 4500 para quarto com três leitos

- **Determinar quantos quartos de cada tipo deverão ser construídos de modo a maximizar a receita mensal.**

Modelo Matemático

[max] receita mensal = $7500x_1 + 6000x_2 + 4500x_3$

sujeito a:

x_1	$+ x_2$	$+ x_3$	$\leq$	70	(total de quartos)
x_1			$\leq$	30	(número máximo de quartos com um leito)
$10x_1$	$+15\ x_2$	$+18\ x_3$	$\leq$	1200	(área total)
x_1	$+ 2x_2$	$+3\ x_3$	$\geq$	120	(número mínimo de leitos)

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$ e inteiros

Modelo com restrição adicional

- **Como alterar o problema de modo a considerar a seguinte restrição:**
  - a porcentagem de quartos de um leito deve ser restrita entre 15 a 30% do total de quartos.

[max] receita mensal = $7500x_1 + 6000x_2 + 4500x_3$

sujeito a:

x_1	$+ x_2$	$+ x_3$	$\leq$	70	(total de quartos)
x_1			$\leq$	30	(número máximo de quartos com um leito)
$10x_1$	$+15 x_2$	$+18 x_3$	$\leq$	1200	(área total)
x_1	$+ 2x_2$	$+3 x_3$	$\geq$	120	(número mínimo de leitos)
x_1			$\geq$	$0{,}15\ (x_1 + x_2 + x_3)$	(qtdade mínima quartos com um leito)
x_1			$\leq$	$0{,}30\ (x_1 + x_2 + x_3)$	(qtdade máxima quartos com um leito)

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$ e inteiros

Problema Produção Excedente MultiPlanta

Uma empresa possui três unidades industriais (fábricas) com capacidade de produção excedente que pode ser utilizada para a produção de um novo produto que está sendo lançado no mercado. Esse produto pode ser produzido em três tamanhos – pequeno, médio e grande, que proporcionam margens de lucro médias unitárias de $ 100, $ 120 e $ 140, respectivamente.

As fábricas l, 2 e 3 têm capacidade excedente de mão-de-obra e de equipamento para produzirem 600, 900 e 400 unidades do produto por dia, respectivamente, independentemente do tamanho ou combinação de tamanhos envolvidos. Entretanto, a quantidade de espaço disponível para estoque de produtos em processo também impõe limites às quantidades máximas produzidas. As fábricas 1, 2 e 3 têm 750, 900 e 500 metros quadrados de espaço disponível para estoque de produtos em processo, em um dia de produção, sendo que cada unidade dos tamanhos pequeno, médio e grande, requer 1.10, 1.25 e 1.50 metros quadrados, respectivamente.

As previsões indicam que podem ser vendidas, por dia, até 1200, 900 e 500 unidades dos tamanhos pequeno, médio e grande, respectivamente.

A gerência deseja determinar o plano de produção diário de cada fábrica, ou seja, a quantidade de produto, por tamanho, que deve ser produzida em cada uma das fábricas, de forma a maximizar a margem de lucro total.

Formulação matemática:

Variáveis de decisão:

Quantidade de produtos de cada tamanho produzido em cada fábrica

Tamanho	Fábrica 1	Fábrica 2	Fábrica 3
Pequeno (P)	x_{P1}	x_{P2}	x_{P3}
Médio (M)	x_{M1}	x_{M2}	x_{M3}
Grande (G)	x_{G1}	x_{G2}	x_{G3}

Função objetivo: [maximizar] margem total diária = $100(x_{P1} + x_{P2} + x_{P3}) + 120(x_{M1} + x_{M2} + x_{M3}) + 140(x_{G1} + x_{G2} + x_{G3})$

Restrições:

Capacidade de produção fábrica 1: $x_{P1} + x_{M1} + x_{G1} <= 600$

Capacidade de produção fábrica 2: $x_{P2} + x_{M2} + x_{G2} <= 900$

Capacidade de produção fábrica 3: $x_{P3} + x_{M3} + x_{G3} <= 400$

Quantidade máxima do produto tamanho P $x_{P1} + x_{P2} + x_{P3} <= 1200$

Quantidade máxima do produto tamanho M $x_{M1} + x_{M2} + x_{M3} <= 900$

Quantidade máxima do produto tamanho G $x_{G1} + x_{G2} + x_{G3} <= 500$

Capacidade de armazenagem fábrica 1: $1.1x_{P1} + 1.25\,x_{M1} + 1.5x_{G1} <= 750$

Capacidade de armazenagem fábrica 2: $1.1x_{P2} + 1.25\,x_{M2} + 1.5x_{G2} <= 900$

Capacidade de armazenagem fábrica 3: $1.1x_{P3} + 1.25\,x_{M3} + 1.5x_{G3} <= 500$

Restrições de não-negatividade:

todos os x devem ser >=0

PROGRAMAÇÃO DA PRODUÇÃO MULTI-PERÍODO

Uma empresa necessita definir o seu plano de produção de um dado produto (denominado Produto A) para os próximos 10 meses. Além da demanda, o custo unitário de produção também varia de mês para mês em decorrência de variações nos custos dos insumos. Os custos de estocagem também variam de mês. Os dados são mostrados na tabela a seguir.

Mês	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Custo Unitário Produção ($/un)	120	126	129	140	135	138	133	130	130	128
Custo Unitário Estoque ($/un)	5	5	7	8	7	6	5	4	4	4
Demanda (um/mês)	1000	1500	2000	3500	2500	3200	2800	4000	2000	2500

A capacidade de produção é 3000 unidades por mês e o estoque máximo é de 1000 unidades por mês.

Pede-se

a) Determinar o plano de produção para o período que minimize o custo total (produção e estoque). Admitir que não pode haver falta e que a produção de um mês pode atender a demanda daquele mês.

FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

Variáveis de decisão:

x1 - quantidade a ser produzida no mês 1
x2 - quantidade a ser produzida no mês 2
x3 - quantidade a ser produzida no mês 3
x4 - quantidade a ser produzida no mês 4
...
x9 - quantidade a ser produzida no mês 9
x10 - quantidade a ser produzida no mês 10

Variáveis auxiliares:

e1 - estoque ao final do mês 1
e2 - estoque ao final do mês 2
e3 - estoque ao final do mês 3
e4 - estoque ao final do mês 4
...
e9 - estoque ao final do mês 9
e10 - estoque ao final do mês 10

Formulação matemática

Minimizar 120x1 + 126x2 + 129 x3 + 140x4 + 135x5 + 138x6 + 133x7 + 130x8 + 130x9 + 128x10 +

+ 5e1 + 5e2 + 7e3 + 8e4 + 7e5 + 6e6 + 5e7 + 4e8 + 4e9 + 4e10

sujeito a

e1 = e0 + x1 - demanda mês 1

e2 = e1 + x2 - demanda mês 2

e3 = e2 + x3 - demanda mês 3

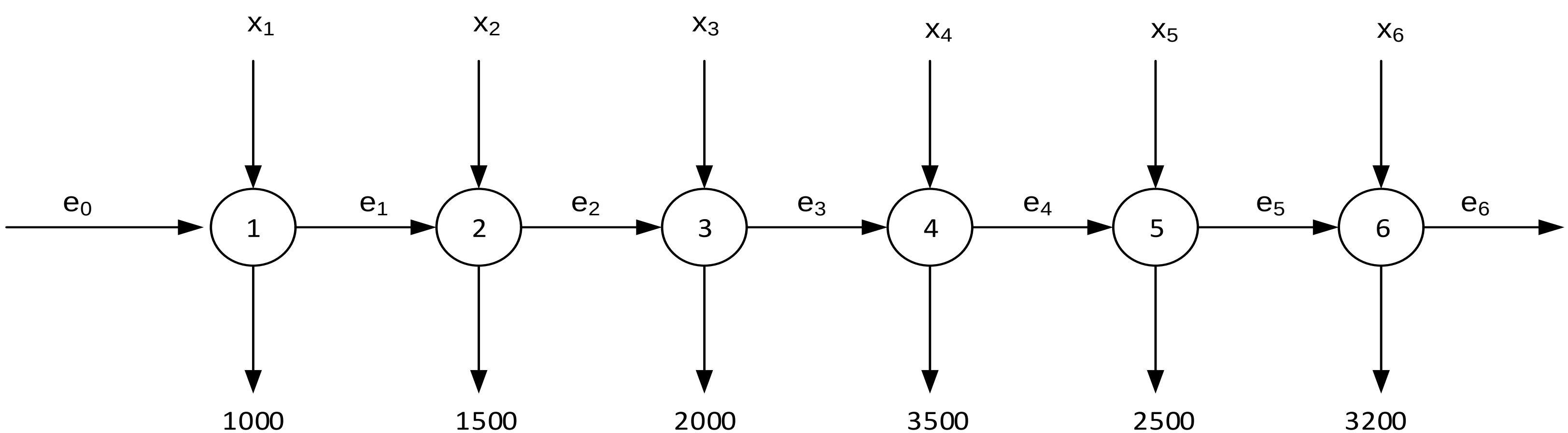
e4 = e3 + x4 - demanda mês 4

...

e9 = e8 + x9 - demanda mês 9

e10 = e9 + x10 - demanda mês 10

e1, e2, e3, e4, ..., e10 >=0 (não pode haver falta)



b) Considere agora que a empresa necessita programar a produção de um segundo produto, denominado Produto B, cujos dados são apresentados a seguir.

Mês	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Custo Unitário Produção ($/un)	82	90	92	87	85	95	91	88	85	90
Custo Unitário Estoque ($/un)	5	4	6	3	2	8	4	4	3	2
Demanda (um/mês)	600	950	900	800	1200	1000	1300	1500	1100	1000

A capacidade de produção mensal do produto B é de 1500 unidades por mês e o estoque máximo é de 1000 unidades por mês. Determinar o novo plano de produção para o período que minimize o custo total (produção e estoque) global, considerando os dois produtos. Admitir que não pode haver falta. Houve alguma mudança no plano de produção do Produto A?

c) Considere agora uma restrição de capacidade global de produção (soma dos produtos A e B) de 4000 unidades por mês e uma capacidade total de estocagem de 1800 unidades. Qual o novo plano de produção para o período?

PROBLEMA DE MIX DE PRODUÇÃO

Uma refinaria de combustíveis produz três tipos de combustível para veículos automotores: regular (R), aditivado (A) e super premium (S). A tabela abaixo indica a octanagem de cada combustível, se preço de venda e sua demanda diária (m3).

Tipo de Combustível	Octanagem	Preço venda $/m3	Demanda diária m3
Regular (R)	92	800	120
Aditivado (A)	95	850	80
Super Premium (S)	100	900	40

Para a preparação dos combustíveis, podem ser usadas três misturas puras de gasolina com etanol anidro, com as seguintes características:

Mistura	Octanagem	Custo $/m3	Disponibilidade Diária m3
A	90	380	120
B	100	420	100
C	110	450	70

Determinar como deve ser feito o mix de produção de forma a atender a demanda e maximizar a receita líquida da empresa.

Variáveis de decisão

x_R^A = quantidade da mistura A utilizada para produzir o combustível Regular (em m3)

x_R^B = quantidade da mistura B utilizada para produzir o combustível Regular (em m3)

x_R^C = quantidade da mistura C utilizada para produzir o combustível Regular (em m3)

x_{Ad}^A = quantidade da mistura A utilizada para produzir o combustível Aditivado (em m3)

x_{Ad}^B = quantidade da mistura B utilizada para produzir o combustível Aditivado (em m3)

x_{Ad}^C = quantidade da mistura C utilizada para produzir o combustível Aditivado (em m3)

x_{SP}^A = quantidade da mistura A utilizada para produzir o combustível Super Premium (em m3)

x_{SP}^B = quantidade da mistura B utilizada para produzir o combustível Super Premium (em m3)

x_{SP}^C = quantidade da mistura C utilizada para produzir o combustível Super Premium (em m3)

Mistura *i*=1, 2, 3

Combustível *j*=1, 2, 3

Variáveis x_{ij}

Dados

Mistura	Octanagem	Custo $/m3	Disponibilidade Diária m3
	OM_i	C_i	$Disp_i$
A	90	380	120
B	100	420	100
C	110	450	70

Tipo de Combustível	Octanagem	Preço venda $/m3	Demanda diária m3
	OC_j	PV_j	D_j
Regular (R)	92	800	120
Aditivado (A)	95	850	80
Super Premium (S)	100	900	40

Formulação Matemática

Maximizar $$\sum_{j=1}^{3} PV_j \sum_{i=1}^{3} x_{ij} - \sum_{i=1}^{3} C_i \sum_{j=1}^{3} x_{ij}$$

Sujeito a:

$$\sum_{i=1}^{3} x_{ij} = D_j \qquad j = 1, 2, 3$$

$$\sum_{j=1}^{3} x_{ij} \le Disp_i \qquad i = 1, 2, 3$$

$$\frac{90x_{11} + 100x_{21} + 110x_{31}}{x_{11} + x_{21} + x_{31}} \ge 92 \iff 90x_{11} + 100x_{21} + 110x_{31} \ge 92(x_{11} + x_{21} + x_{31})$$

$$\sum_{i=1}^{3} O_i x_{ij} \ge O_j \sum_{i=1}^{3} x_{ij} \qquad j = 1, 2, 3$$

PROGRAMAÇÃO DE PESSOAL

Uma agência de correios necessita, para operar, de um número de funcionários que varia de acordo com o dia da semana, conforme mostrado na tabela abaixo.

Cada funcionário trabalha cinco dias consecutivos e, em seguida, folga dois dias consecutivos.

Por exemplo, quem trabalha de segunda a sexta feira folga aos sábados e domingos.

Determinar a alocação de pessoal de forma a minimizar o número total de empregados.

	Número de empregados requeridos
Segunda-feira	17
Terça-feira	13
Quarta-feira	15
Quinta-feira	19
Sexta-feira	14
Sábado	16
Domingo	11

Dados:

i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 (Seg, Ter, Qua, Qui, Sex, Sab, Dom)

R_i = número de funcionários necessários no dia i

Variáveis de decisão:

x_i = número de funcionários que iniciam a jornada de 5 dias no dia i

Variáveis auxiliares:

W_i = número de funcionários que estão trabalhando no dia i

Variável	Inicia	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	Sab	Dom
x_1	2ª	T	T	T	T	T	-	-
x_2	3ª	-	T	T	T	T	T	-
x_3	4ª	-	-	T	T	T	T	T
x_4	5ª	T	-	-	T	T	T	T
x_5	6ª	T	T	-	-	T	T	T
x_6	Sab	T	T	T	-	-	T	T
x_7	Dom	T	T	T	T	-	-	T

Formulação Matemática

$$\min \sum_{i=1}^{7} x_i$$

$$s.a.$$

$$W_i \geq R_i \;\; i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$$

$$W_1 = x_1 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7$$

$$W_2 = x_1 + x_2 + x_5 + x_6 + x_7$$

$$W_3 = x_1 + x_2 + x_3 + x_6 + x_7$$

$$W_4 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_7$$

$$W_5 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$$

$$W_6 = x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$$

$$W_7 = x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7$$

$$x_i \in N^+$$