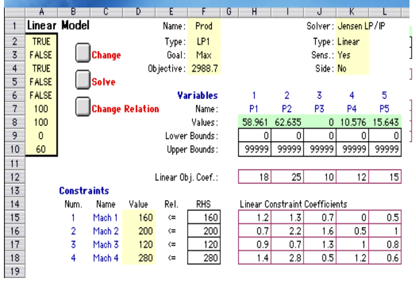
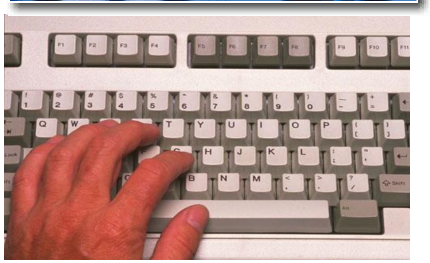




I. INTRODUÇÃO À PESQUISA OPERACIONAL

Prof. Dr. Claudio Barbieri da Cunha

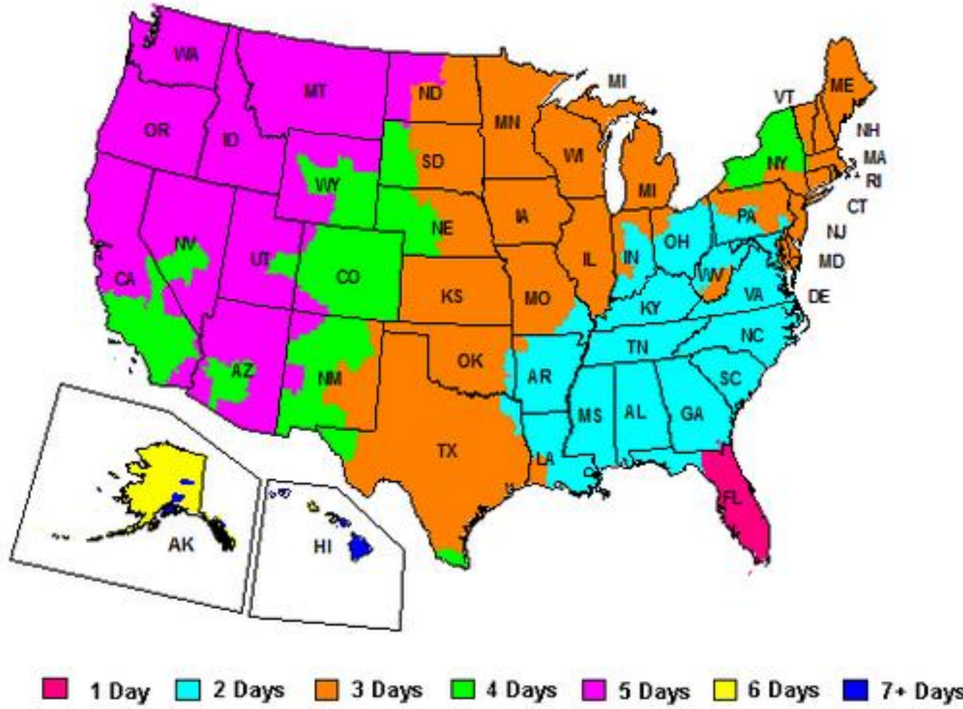
Escola Politécnica

Universidade de São Paulo
Brasil

cbcunha@usp.br

Motivação ... Sistemas complexos

- **Transferência e distribuição de cargas**



Sistemas complexos

- **Redes de Transporte**

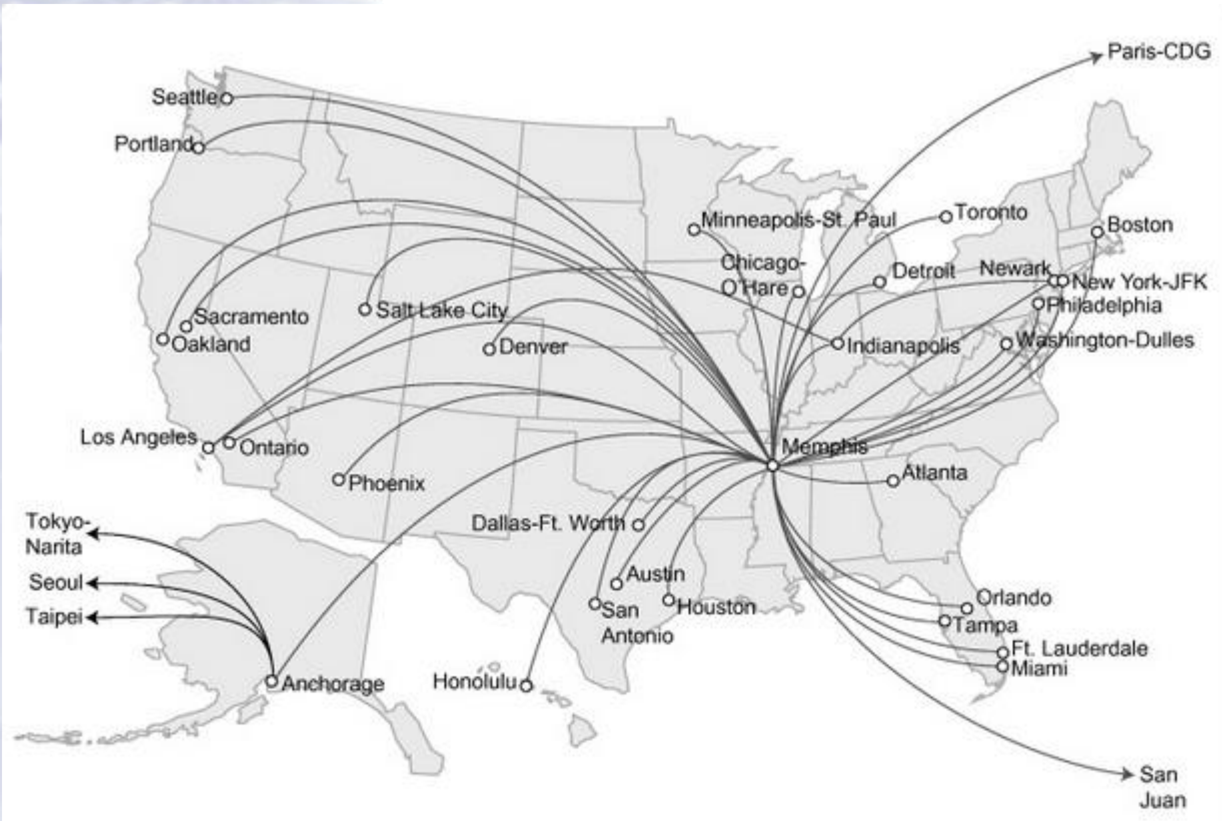


Fig. 6.

Sistemas complexos

- **Operação de Terminais**

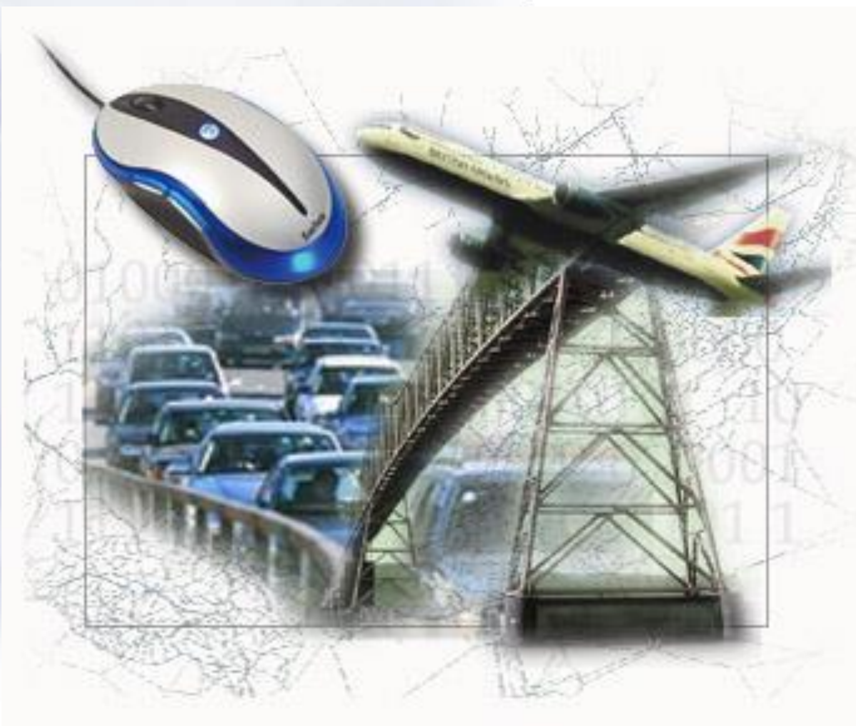
Classification Yard of Hinkle Hump Yard.

Sistemas complexos ...

- **Movimentação de veículos e equipamentos cheios e vazios**

Motivação

- Necessidade de tomar decisões
- MELHORES
- MAIS RAPIDAMENTE



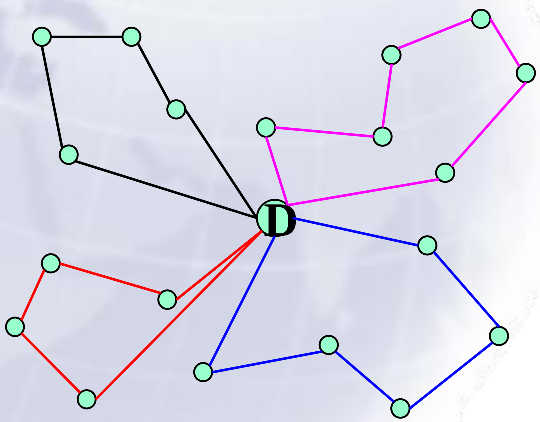
Como você toma suas decisões?

Problemas complexos

- **Problema do Caixeiro Viajante:**
  - definir a rota mais curta para visitar um conjunto de cidades, voltando para a cidade de origem ao final.
- **4 cidades:**
  - ABCDA ABDCA ACBDA
    ACDBA ADBCA ADCBA
- **7 cidades**
  - 720 rotas (6!)
- **27 cidades**
  - 403.291.461.126.606.000.000.000.000 possibilidades
  - para checar cada rota uma a uma, o computador mais rápido do mundo (546 Teraflops) precisaria rodar por <u>12 milhões de anos</u>!

Roteiros de entregas

- 500 entregas
- 25 veículos
- 2h para concluir programação!!!



- 1,0439 x 10^{42} combinações (formas de agrupamento)
  - ≈1.043.900.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000
- Sem considerar roteiros/sequências de entrega

O que é Pesquisa Operacional (PO) ?

- **Ciência da tomada de decisão utilizando modelos matemáticos**

- **Disciplina que consiste em aplicar métodos analíticos avançados para auxiliar a tomada de (melhores) decisões**

- **“an MIT approach to decision making”**
  - *Operations Research Center*”, MIT
  - http://web.mit.edu/orc/www/

OPERATIONS RESEARCH CENTER

Origens da Pesquisa Operacional (PO)

- **Muitas décadas atrás, tentativa de utilizar métodos científicos na gestão de organizações**

- **Operações militares na 2ª Guerra Mundial**
  - um número elevado de cientistas tentando aplicar métodos científicos a diversos problemas militares de natureza estratégica e tática
  - métodos quantitativos
  - alocar recursos escassos de maneira eficiente

O que é PO?

- *"Eu a chamo de ciência da tomada de decisão.*
  Isto é, todas as maneiras de abstrair um problema e colocá-lo em uma forma matemática.
  Isso engloba desde os matemáticos que estão tentando resolver esses problemas abstratos até as pessoas que têm um problema real e precisam dar uma resposta ao chefe.
  Pesquisa Operacional é tudo isso e, dependendo de com quem você conversa, você terá uma visão diferente do que é PO."

- **George B. Dantzig, em entrevista que foi r**
  in memoriam*, na edição de junho de 2005 da revista *OR/MS Today

O matemático das empresas

Petrobras, Vale e outras 30 companhias querem contratar os serviços de Aguinaldo Ricieri. Descubra por quê

Carolina Meyer , de **EXAME**

Ricieri e o castelo: profissional disputado

O professor Aguinaldo Ricieri, 49 anos, é físico de formação, mas sua cátedra predileta, sua paixão, é a matemática. Aos domingos pela manhã, Ricieri reúne uma turma de mais de 300 pessoas em um colégio de São Paulo para discorrer sobre números, equações e suas aplicações no dia-a-dia -- um divertimento que dura 5 horas e arrasta multidões de seguidores. Durante a semana, ele se divide entre duas atividades. A primeira são as aulas que ministra no Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA), em São José dos Campos, onde também fica sua casa, uma exótica construção ao estilo dos castelos medievais. A outra são as consultorias que presta a empresas do porte de Petrobras, Vale do Rio Doce e Pirelli. Viciado em números e do tipo que fala em derivadas fracionárias com a naturalidade de quem discute futebol, Ricieri tornou-se um sonho de consumo para as companhias. "Tenho recusado trabalho toda semana", diz o professor, que atualmente presta consultoria para cinco empresas, mas tem outras 30 na fila.

O matemático das empresas

| 21.09.2006

Germano Lüders

EXAME

A razão para tanta procura é que Ricieri faz parte de uma categoria de profissionais cada vez mais valiosos para o mundo dos negócios: ele usa cálculos matemáticos avançados para solucionar problemas do cotidiano. Por meio de complexas equações (alimentadas por ampla base de dados), esses especialistas são capazes de identificar com precisão a maneira mais eficiente de produzir, transportar ou desenhar um produto. A técnica é conhecida mundialmente pelo nome de "pesquisa operacional" e era até pouco tempo restrita ao departamento financeiro das companhias. O acirramento da concorrência, a busca pela eficiência e pela produtividade, no entanto, estão fazendo com que ela saia desse nicho e seja hoje aplicada em áreas distintas -- do varejo ao sistema bancário, da indústria ao agronegócio. É um tipo de trabalho que paga muito bem. Por uma consultoria recente, Ricieri recebeu 3 milhões de reais. "As empresas não querem mais softwares empacotados. Elas querem soluções personalizadas", diz.

Cláudio Barbieri da Cunha

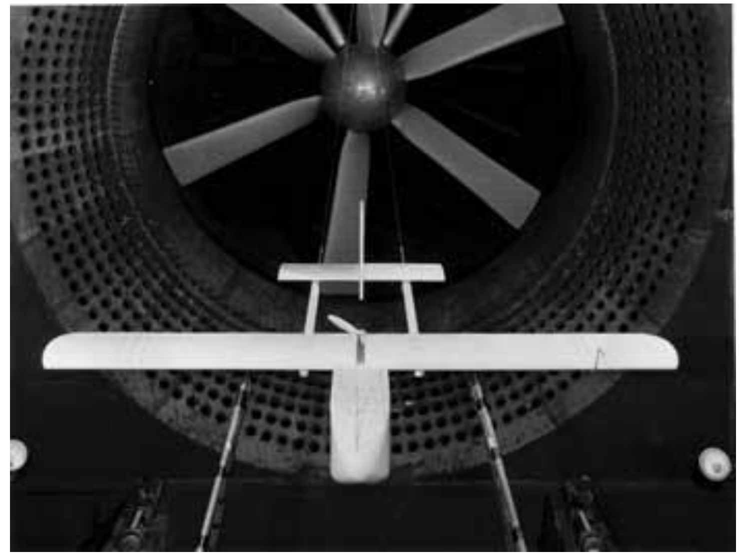
O que são modelos?

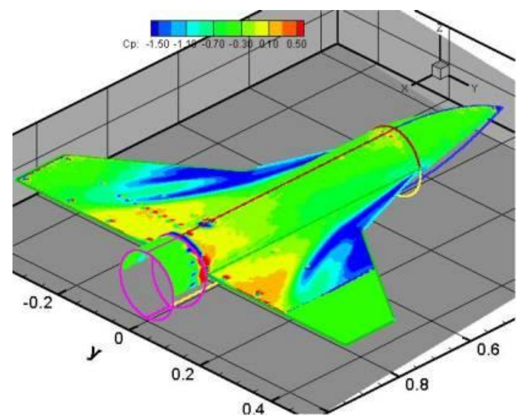
Modelos

- Representação explicita e simplificada de uma realidade, utilizada com o propósito de compreender, modificar, administrar e controlar essa realidade

- **Modelos Matemáticos**
  - Representação de uma realidade através de expressões matemáticas
  - Exemplo: dois tipos de caixas:
    A que pesa 20 kg e B que pesa 12 kg. Temos 15 de A e 10 de B. O peso máximo do elevador de carga é 400 kg
    O peso máximo do elevador está sendo assegurado?
  - $20n^oA + 12n^oB = 15x20 + 10x12$
    $= 300 + 120 = 420 > 400 \rightarrow$ NÃO

Modelos





Modelos de Otimização

- **Otimizar =**
  - obter o melhor ou o máximo
  - desenvolver ao máximo
  - melhor maneira de alcançar um objetivo
- **Expressões matemáticas**
- **Compreendem três componentes:**
  - variáveis de decisão (resposta)
  - função objetivo (meta, alvo, figura de mérito)
  - restrições

Fases de um estudo de Pesquisa Operacional

1. **Formulação do problema**
    - Identificação dos objetivos, das restrições e das alternativas
2. **Construção do modelo matemático**
    - Apenas elementos essenciais do problema
    - Compromisso qualidade *versus* facilidade
3. **Determinação de uma solução**
    - Utilizando técnicas conhecidas ou desenvolvendo um procedimento para solução
4. **Teste do modelo e da solução**
    - Avaliar e validar o modelo – resolve o problema proposto ?
5. **Implementação e utilização do modelo**

- Em um modelo de PL, as variáveis têm que ser contínuas e a função objetivo e as restrições têm que ser expressões lineares.
-
- Uma expressão é linear se ela pode ser expressa na forma:
- $c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$ para constantes $c_1, c_2, \ldots, c_n$.

- Por exemplo, $2x_1 + 7x_2$ é uma expressão linear
  idem $10x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 9x_4 + x_5 + 7x_6 + 5x_7$
- (i.e., podem ser representadas graficamente por retas)

- $3x_1x_2$ não é linear (multiplicação de variáveis)
- y_1y_2 idem.
- x^2, $\mathrm{sen}(x)$ não são expressões lineares.

Modelos em P.O.

- **Tomada de decisão**
  - avaliar consequências antes de tomar decisões
  - Exemplo: Projeto de Rede
  - Determinar a melhor localização e dimensionamento da capacidade instalada, da frota, do nível de produção em cada fábrica e do fluxo de transporte entre as instalações (de cada fábrica para cada CD, e de cada CD para cada cliente).

- **Parte de sistemas computacionais para suporte a decisões de rotina**
  - Programação de produção
  - Roteirização e Programação de entregas
  - Programação da operação de portos, de pátios de armazenamento,
  - ...

Tratamento de Incertezas

- **Modelo <u>Determinístico</u>:**
  nenhum elemento de risco (incerteza) no modelo
  - Ex: O tempo de mudança de setup é de 30 minutos

- **<u>Modelo Estocástico</u>:**
  incerteza é explicitamente incorporada ao modelo
  - Ex: O tempo de viagem entre o ponto A e o ponto B varia segundo uma distribuição normal com média 15 min e desvio padrão de 7 min

Principais tópicos em Pesquisa Operacional (PO)

- **Programação Matemática (Otimização)**
  - programação linear (método simplex)
  - problemas de fluxo em rede(problema do transporte, do transbordo, etc.)
  - programação linear inteira
  - programação não linear (fracionária, quadrática, etc.)

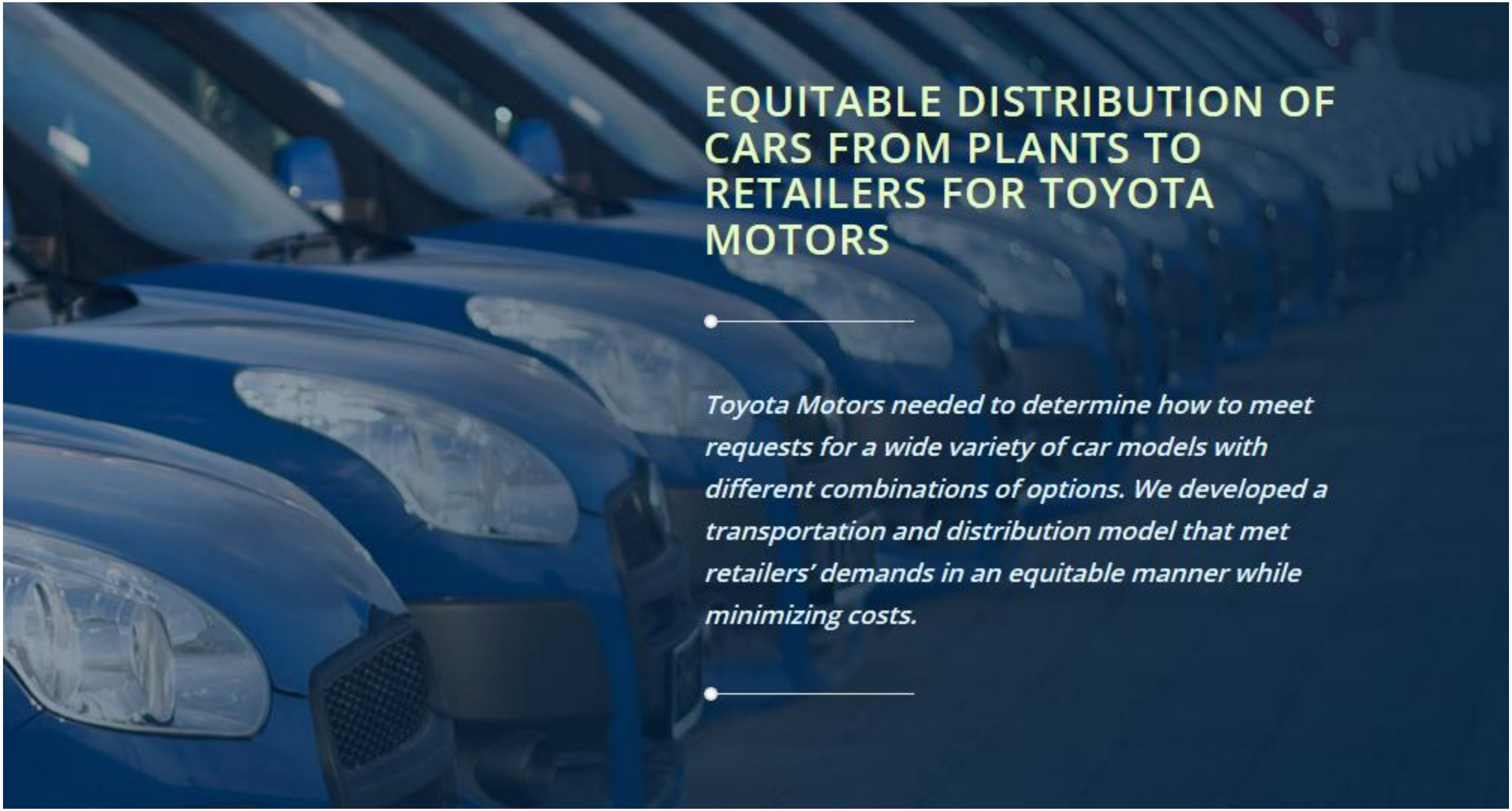
- **Teoria de Filas**
- **Simulação**
- **Árvores de decisão**

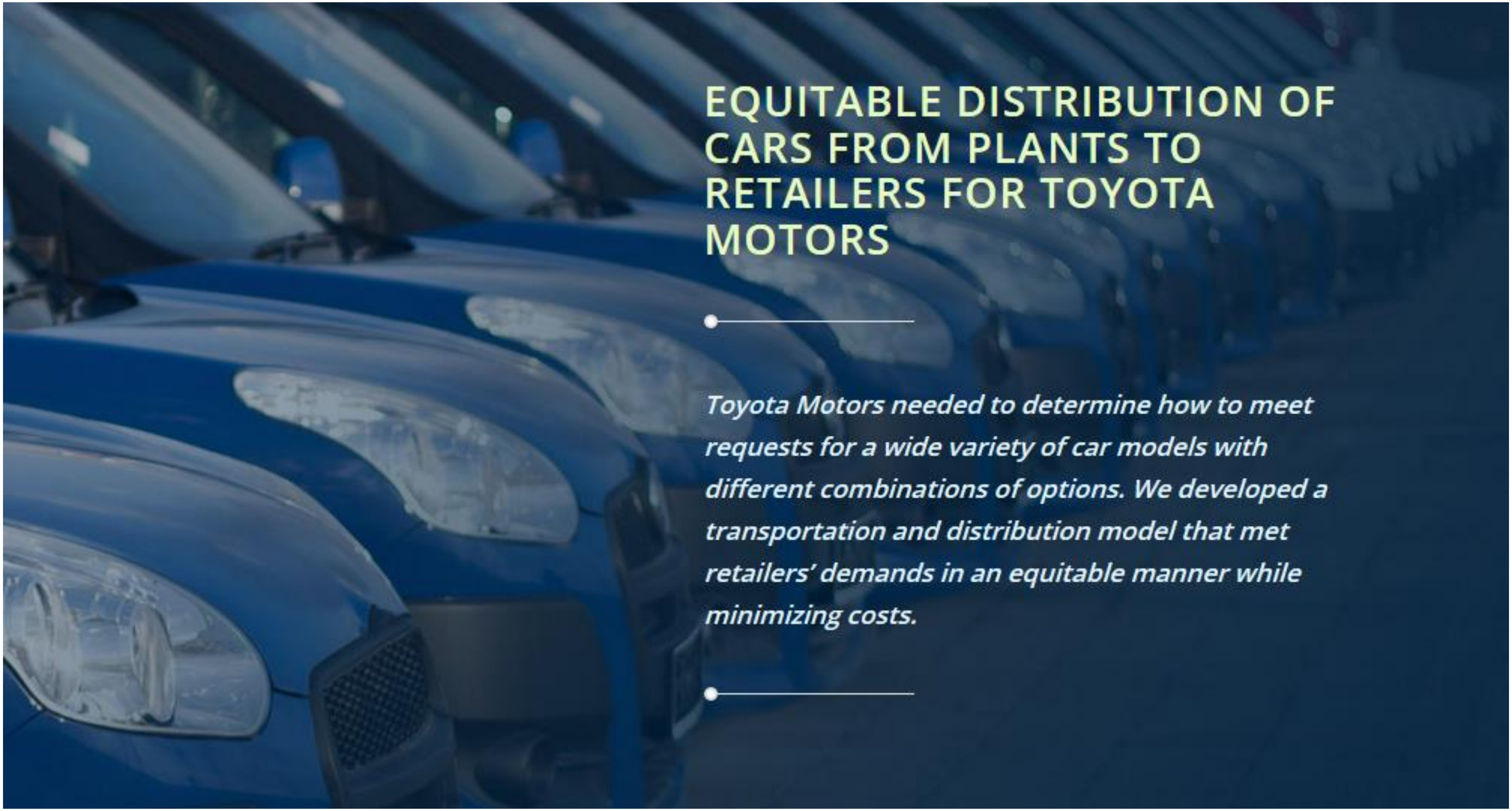

OPTYM
LIVE EFFICIENTLY
About
Railway
Trucking
Airline
Mining
WE ARE
OPTYM
Through our optimization, simulation and data analytics,
we help companies around the world improve
their efficiency and reduce their operating costs.

OPTYM
LIVE EFFICIENTLY

REOPTIMIZING CSX TRANSPORTATION'S RAILROAD OPERATING PLAN

Every few years, railroads take a clean slate look at their operating plans and look for opportunities for major improvements. We partnered with CSX to optimize its operating plan and reduced the company's annual operating costs.


EQUITABLE DISTRIBUTION OF CARS FROM PLANTS TO RETAILERS FOR TOYOTA MOTORS
Toyota Motors needed to determine how to meet requests for a wide variety of car models with different combinations of options. We developed a transportation and distribution model that met retailers' demands in an equitable manner while minimizing costs.


EQUITABLE DISTRIBUTION OF CARS FROM PLANTS TO RETAILERS FOR TOYOTA MOTORS
Toyota Motors needed to determine how to meet requests for a wide variety of car models with different combinations of options. We developed a transportation and distribution model that met retailers' demands in an equitable manner while minimizing costs.

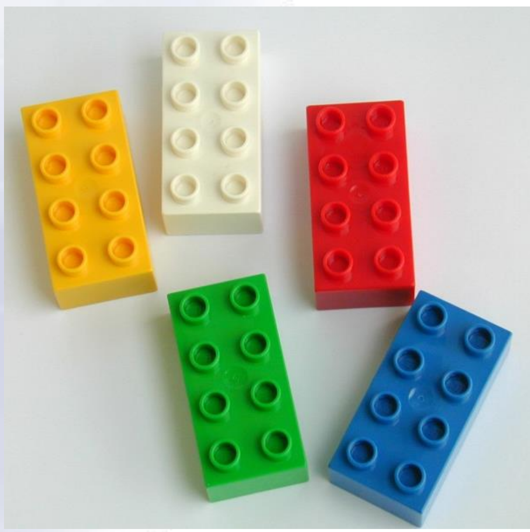
DESAFIO PARA ENTENDIMENTO CONCEITUAL

Desafio 1

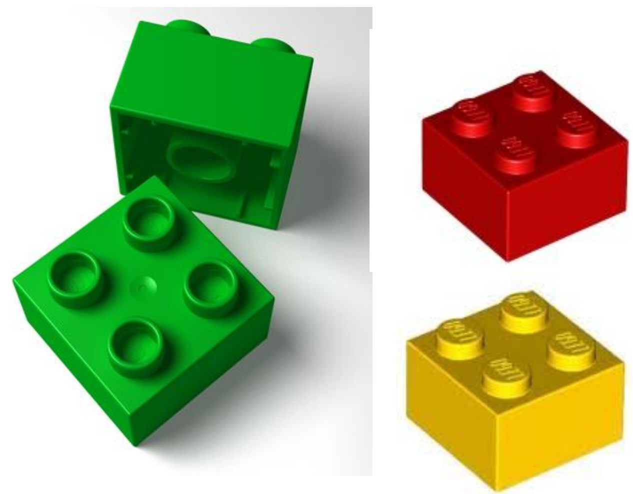
Você e seu grupo são um fabricante de móveis.

Sua fábrica possui em estoque:

6 peças grandes 4X2

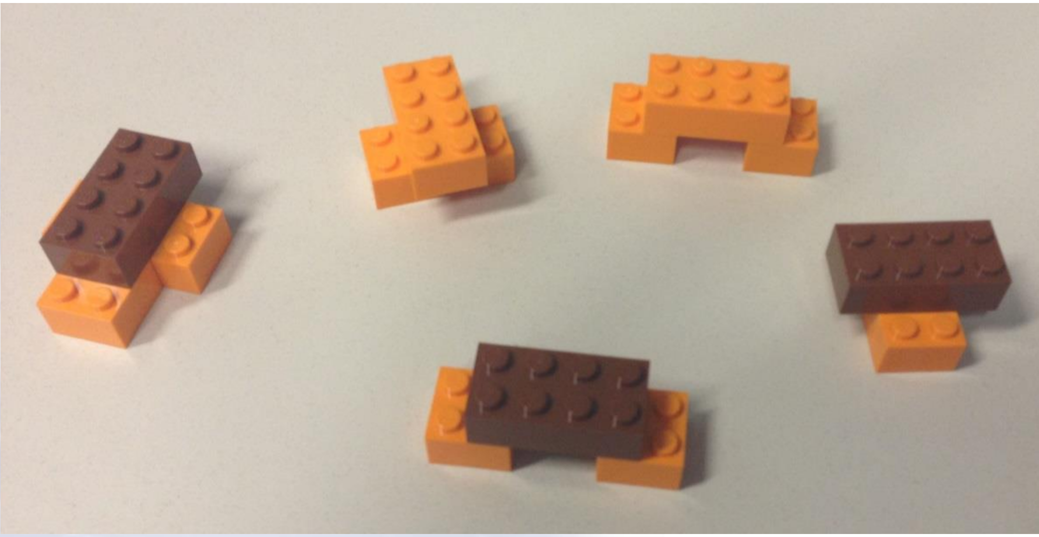


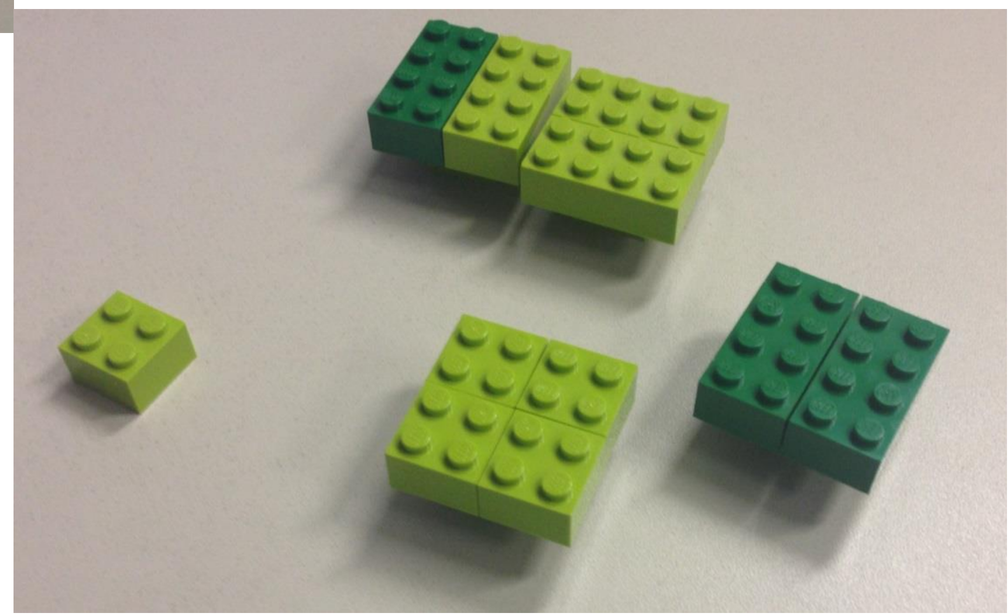
9 peças pequenas 2x2



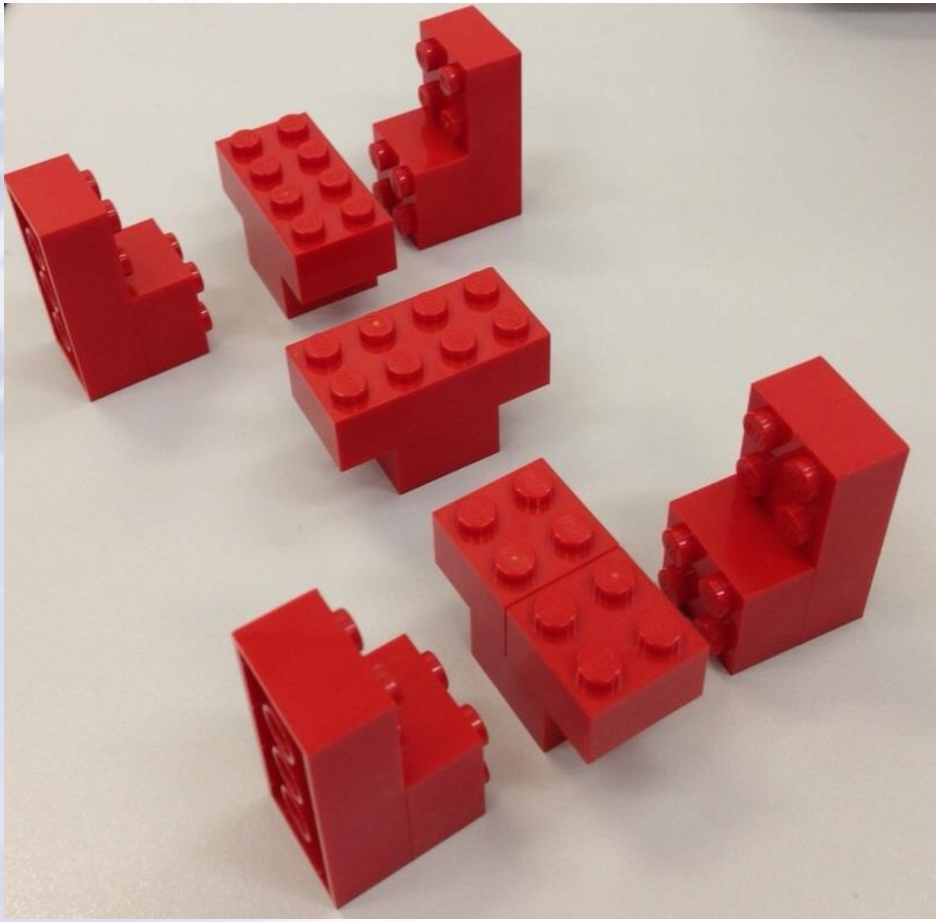
Monte o melhor conjunto de mesas e cadeiras.

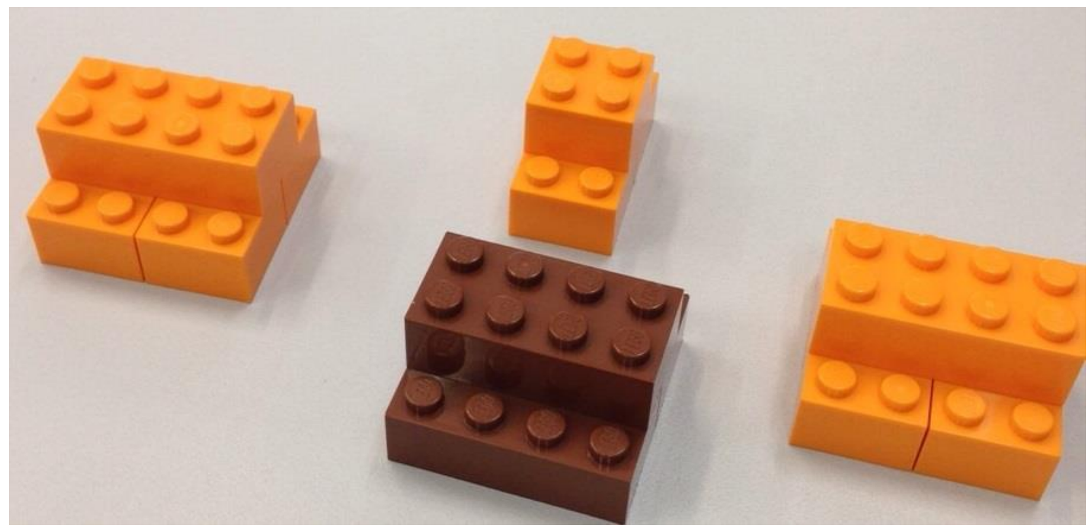
Outras soluções



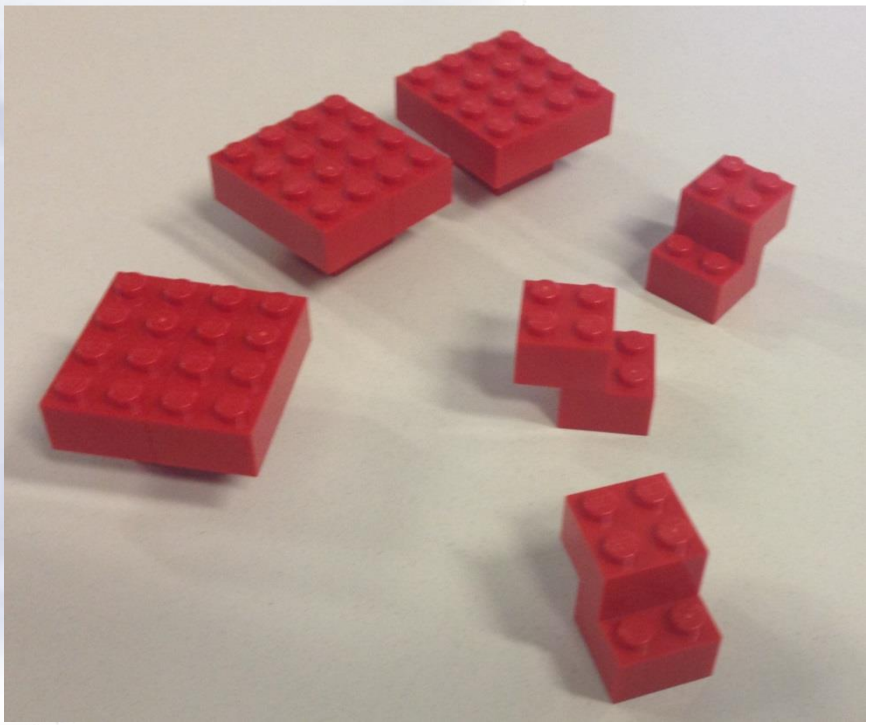


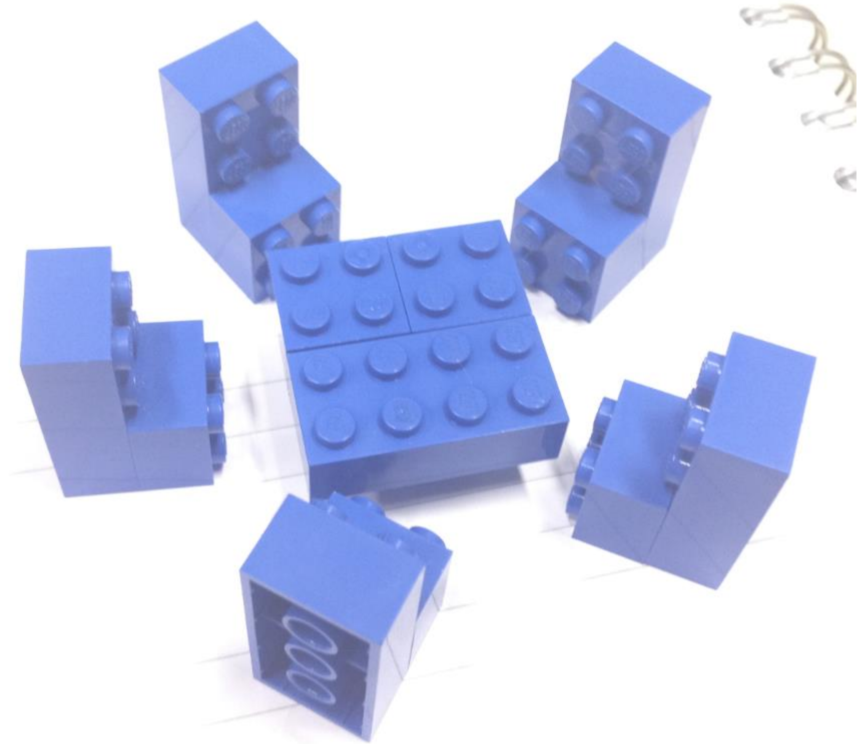
Soluções (2)



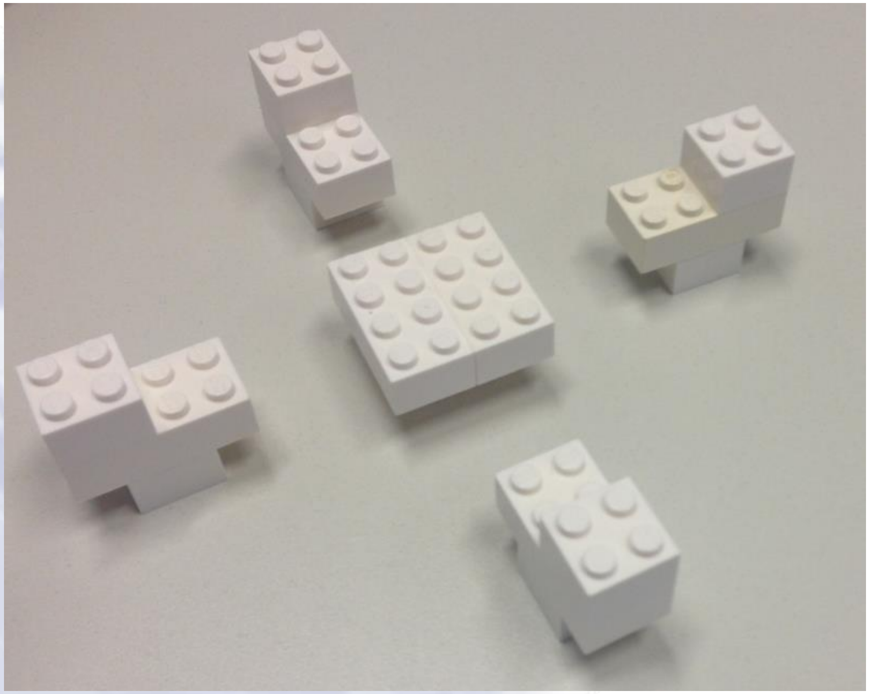


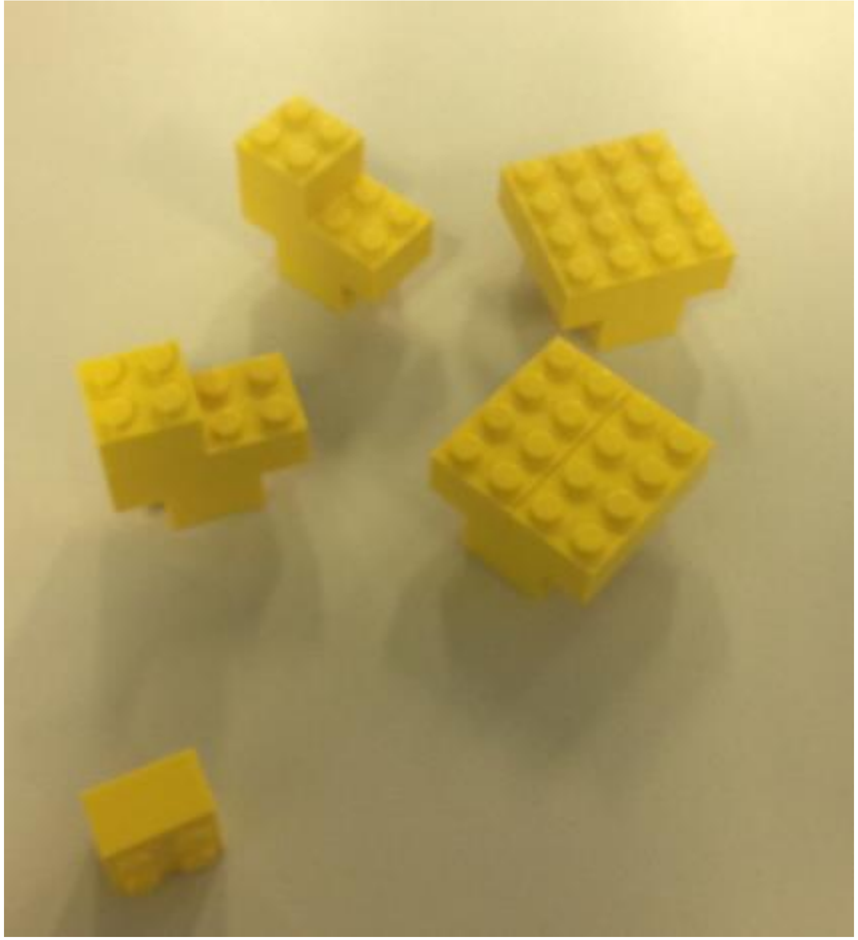
Algumas alternativas (2)



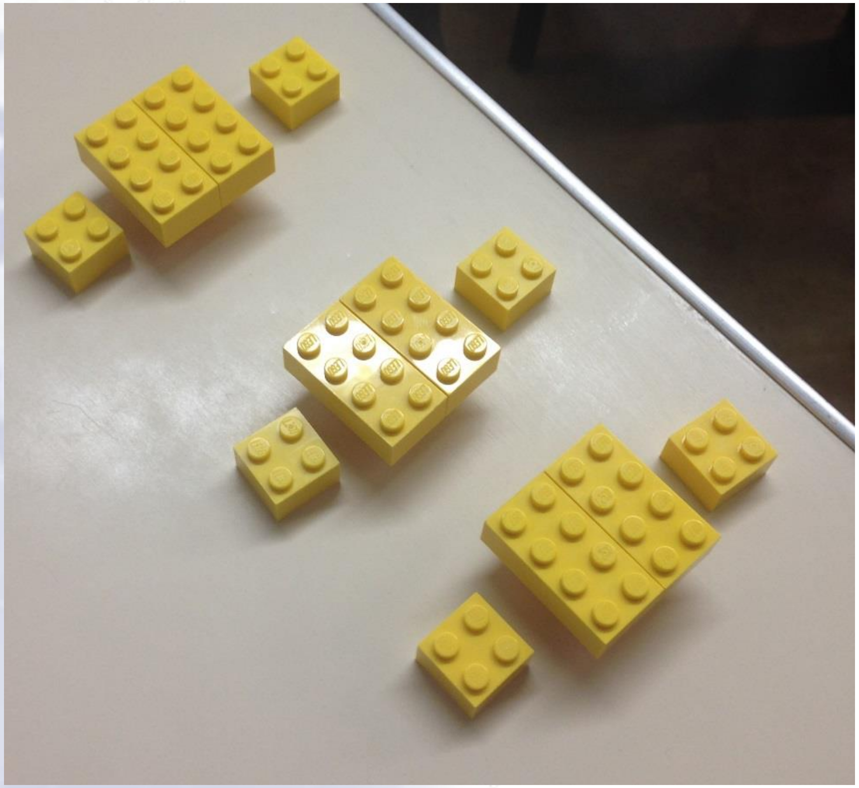


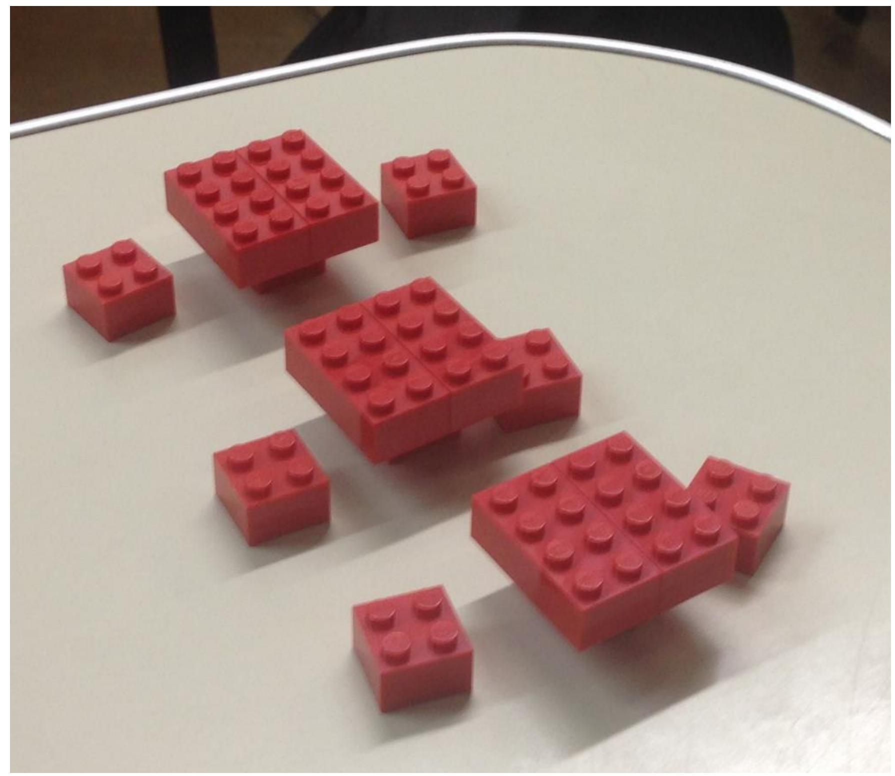
Algumas alternativas (3)





Algumas alternativas (4)





Desafio 1

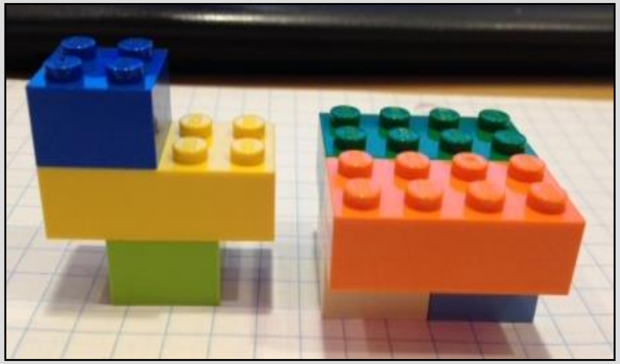
SUGESTÃO DE MONTAGEM

Cadeira:

2 peças 2x2 + 1 peça 4x2

Mesa:

2 peças 2x2 + 2 peças 4x2



Desafio 2

A peça 2x2 custa R$3 e a peça 4x2 R$5.

A cadeira é vendida por R$21 e a mesa por R$32.

Tendo em vista as restrições de matéria-prima, quantos móveis de cada tipo a sua fábrica deve produzir ?

Formule a função objetivo e as restrições para este problema.

Formulação Matemática

I. Variáveis de decisão:

M = número de mesas

C = número de cadeiras

II. Função objetivo:

max [Lucro unitário mesa * M + Lucro unitário cadeira * C]

Lucro por mesa = $32 – 2* ($3) – 2*($5) = $16

Lucro por cadeira = $21 – 2*($3) – 1*($5) = $10

max [16*M + 10*C]

Formulação Matemática

III. Restrições:

– Peças pequenas: total de peças pequenas utilizadas na fabricação de mesas e cadeiras não pode superar 9 peças

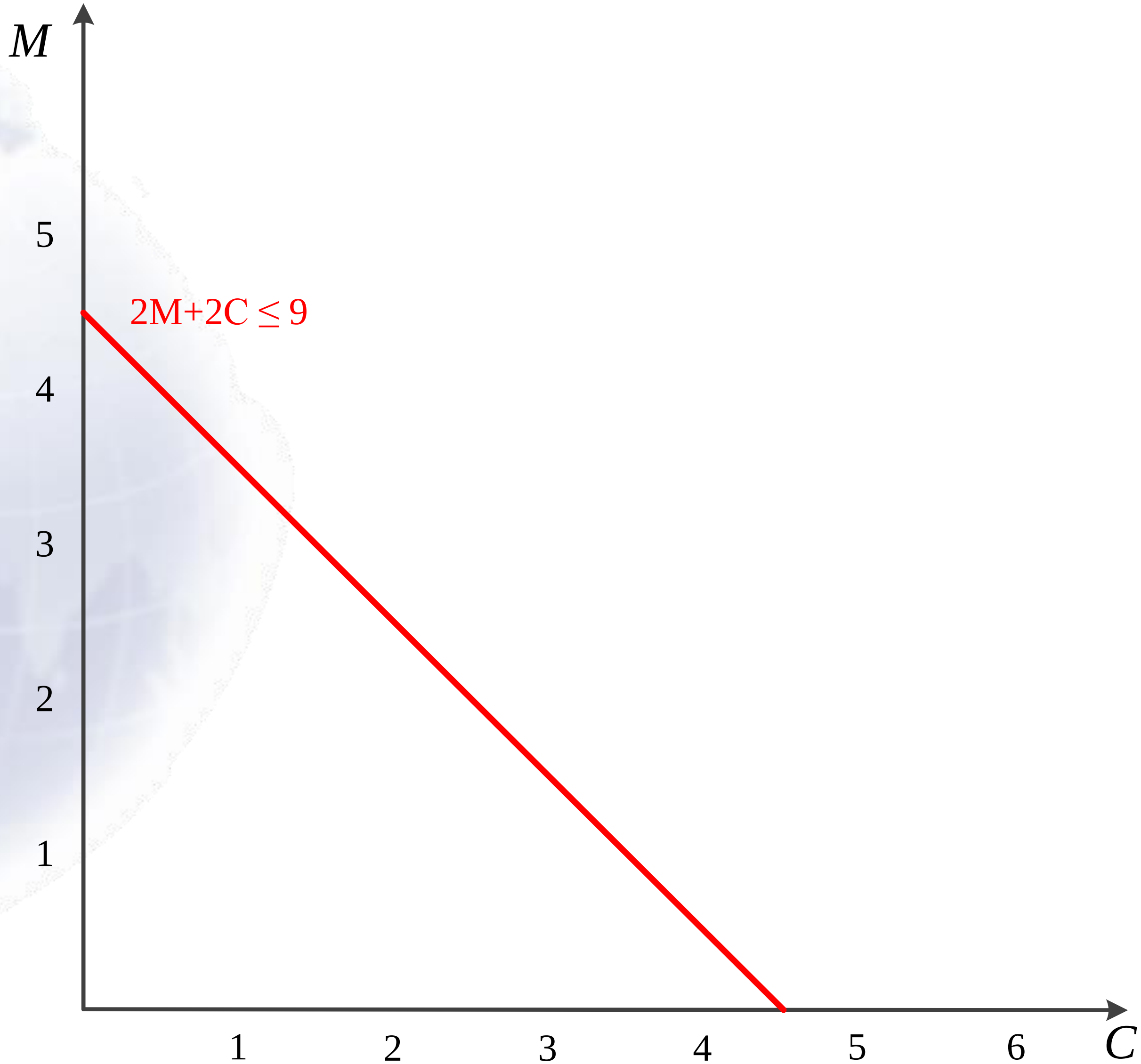
$$2*M + 2*C \leq 9$$

–Peças grandes: total de peças grandes utilizadas na fabricação de mesas e cadeiras não pode superar 6 peças

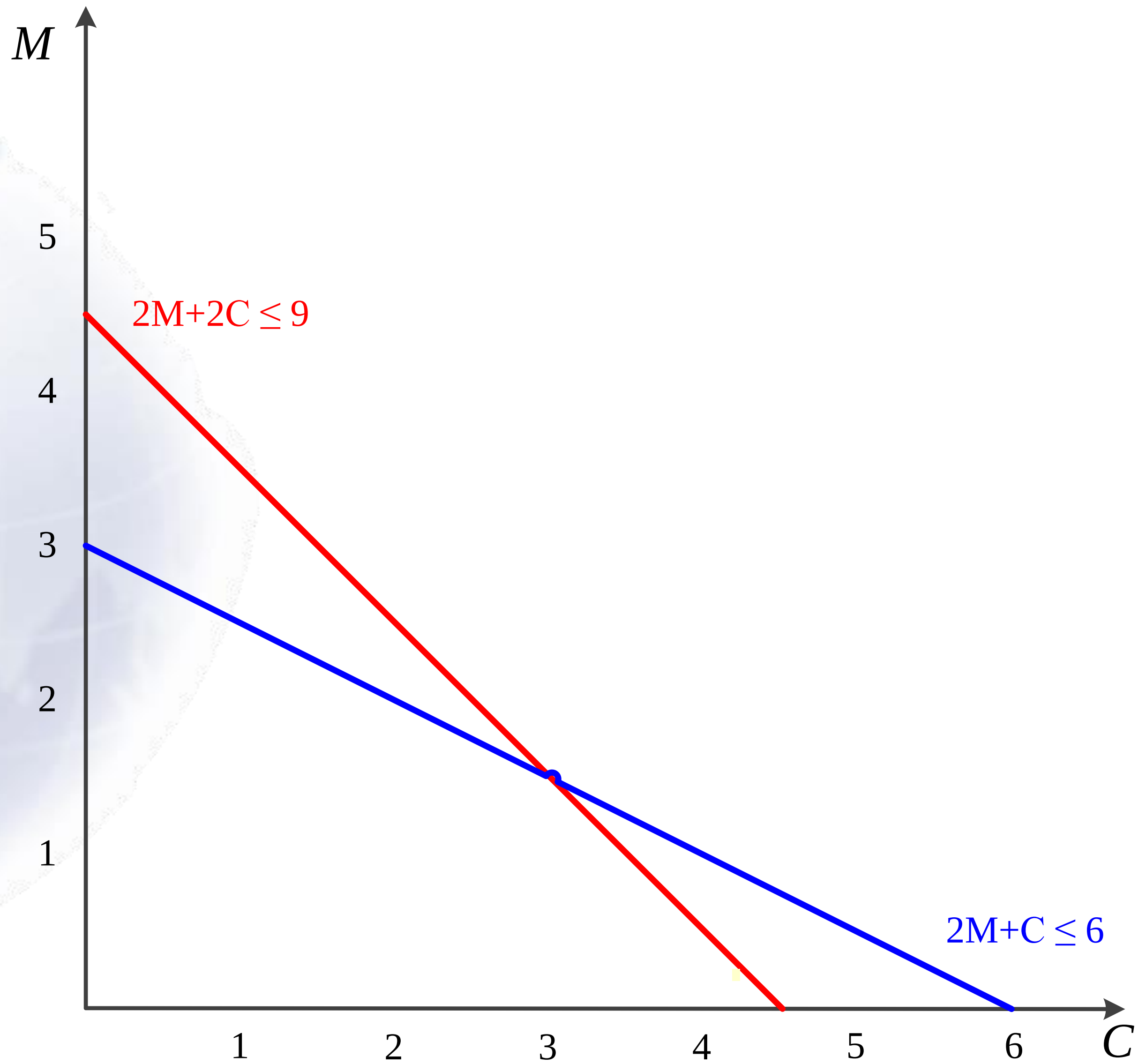
$$2*M + C \leq 6$$

–Não-negatividade: $M, C \geq 0$

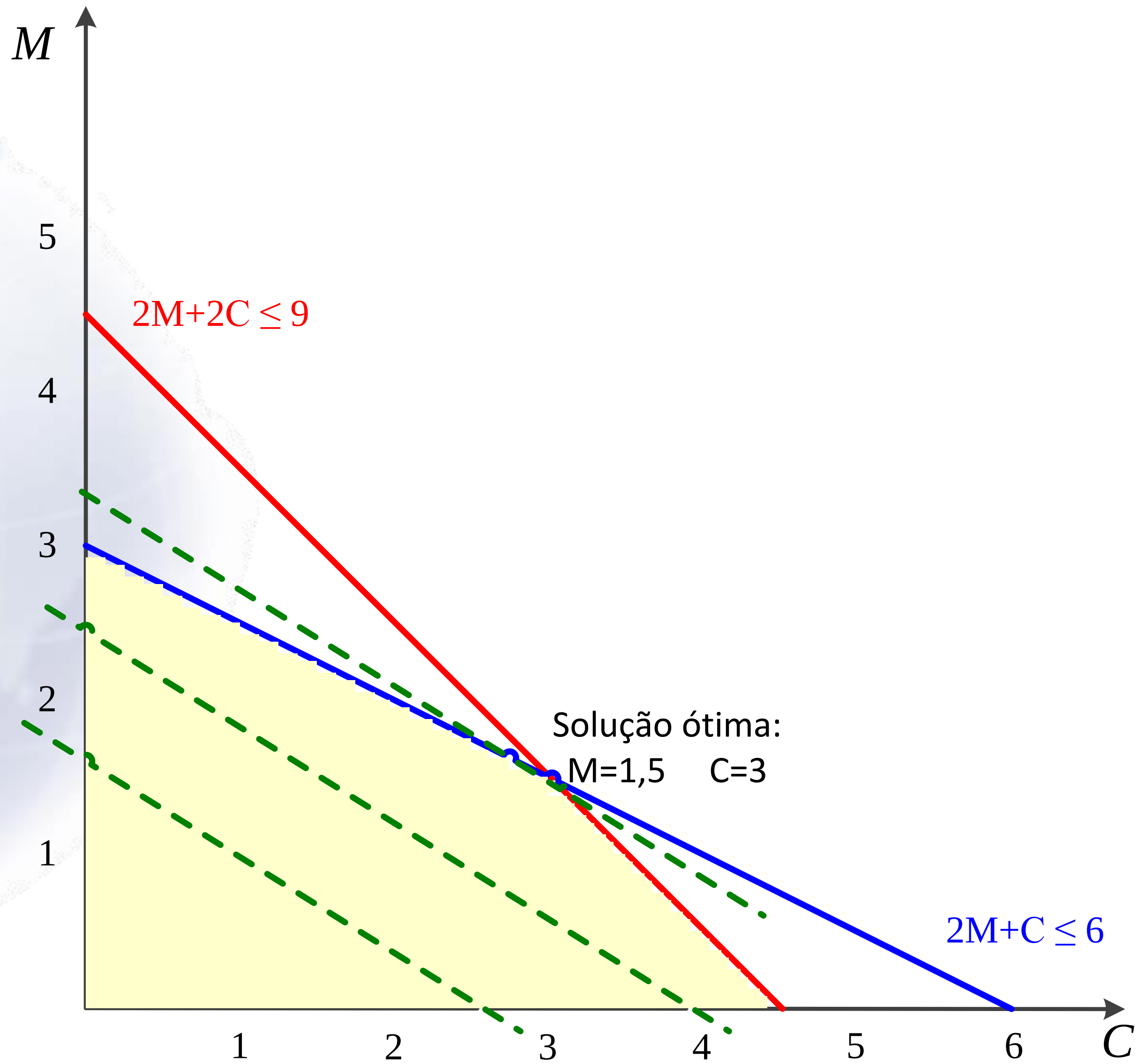
Representação Gráfica



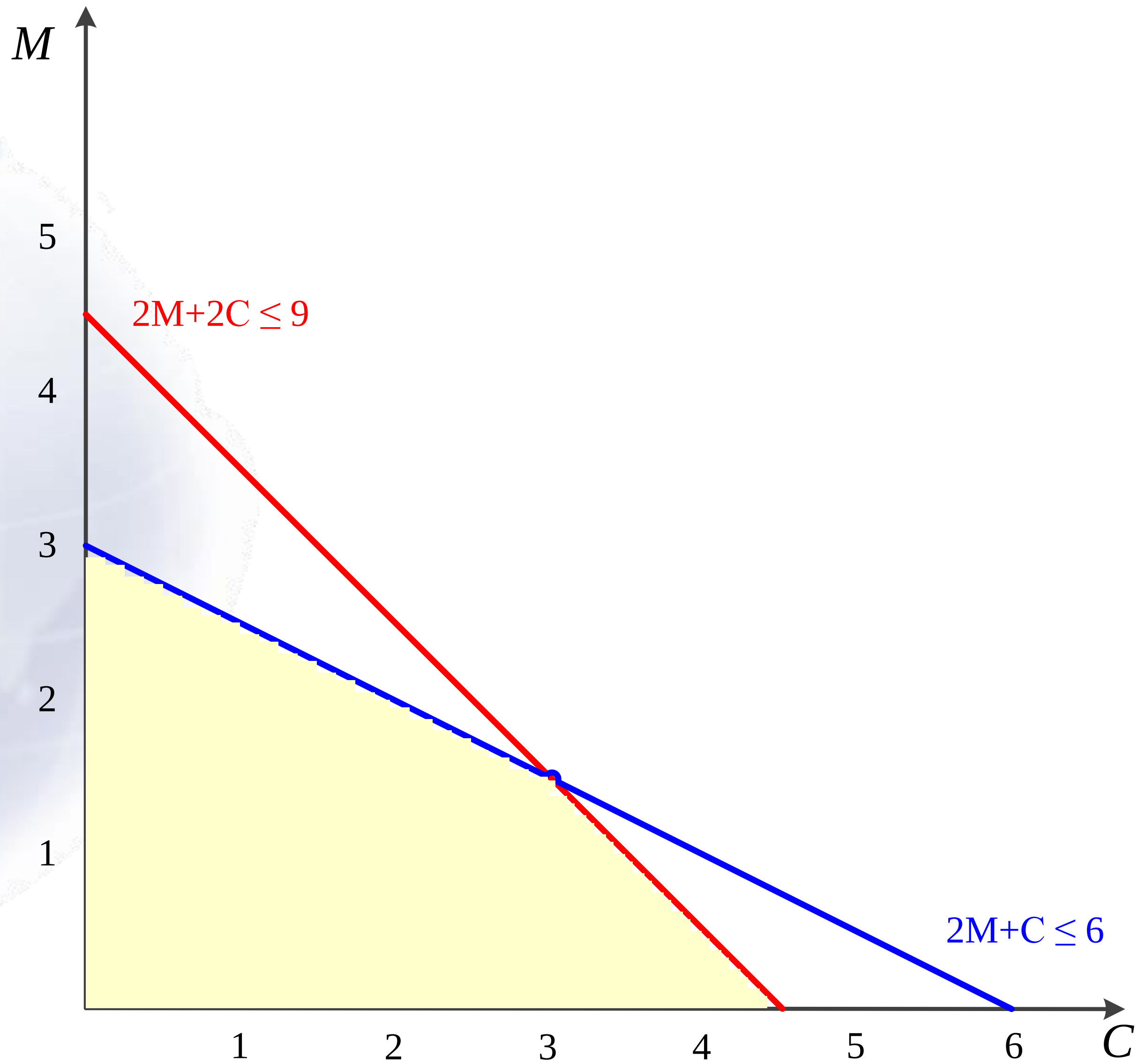
Representação Gráfica



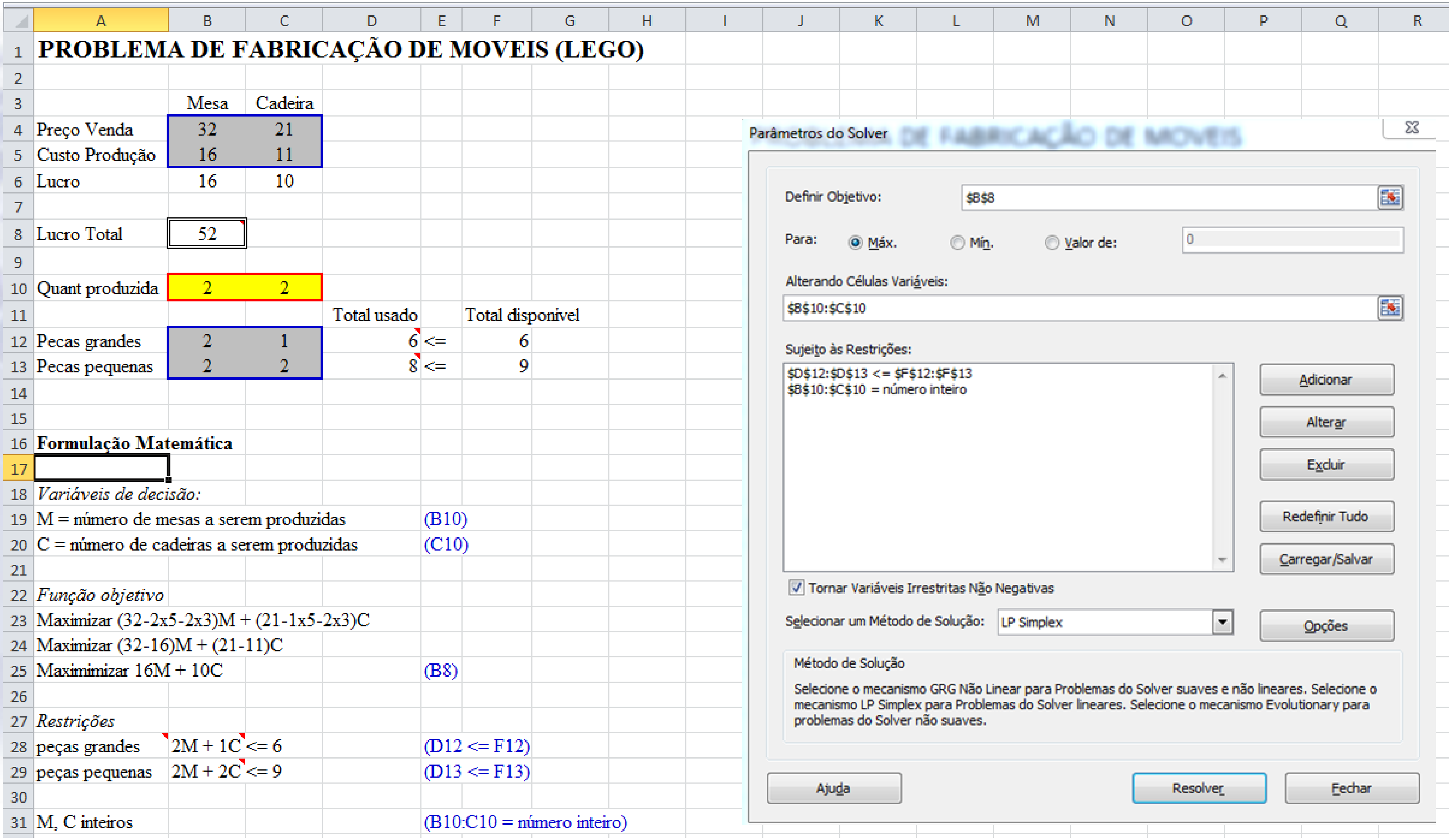
Representação Gráfica



Representação Gráfica



Estruturação no Solver



Estruturação no Solver

PROBLEMA DE FABRICAÇÃO DE MOVEIS (LE

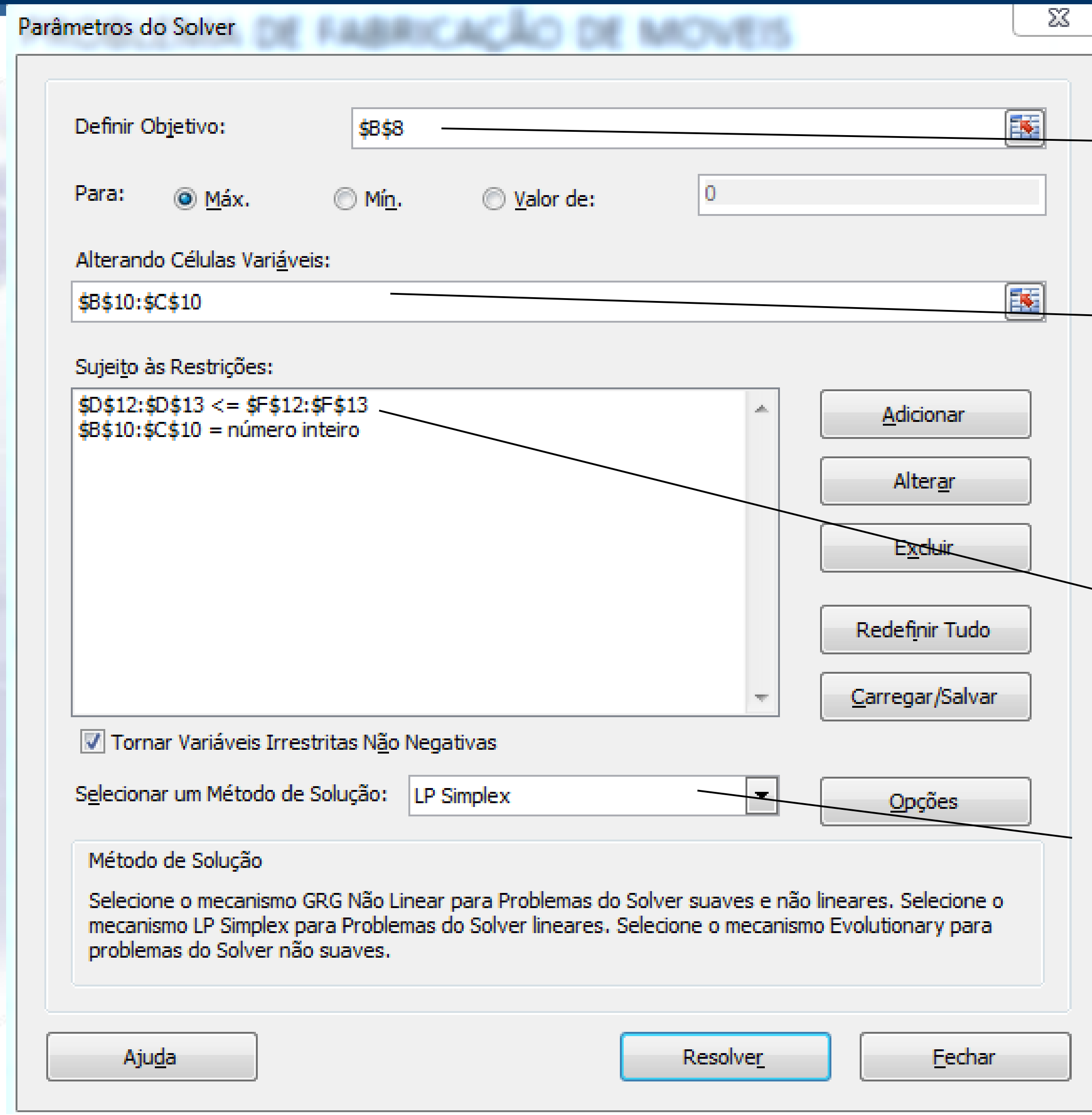
	Mesa	Cadeira	Total usado		Total disponível
Preço Venda	32	21			
Custo Produção	16	11			
Lucro	16	10			
Lucro Total	52				
Quant produzida	2	2			
Pecas grandes	2	1	6	<=	6
Pecas pequenas	2	2	8	<=	9

16M+10C

2M + 1C

2M + 2C

Estruturação no Solver



Função objetivo
max 16M+10C

Variáveis de decisão
M, C

Restrições
2M + 1C <= 6
2M + 2C <= 9

Escolher sempre LP Simplex
(equivalente a presumir modelo linear)

Desafio 1

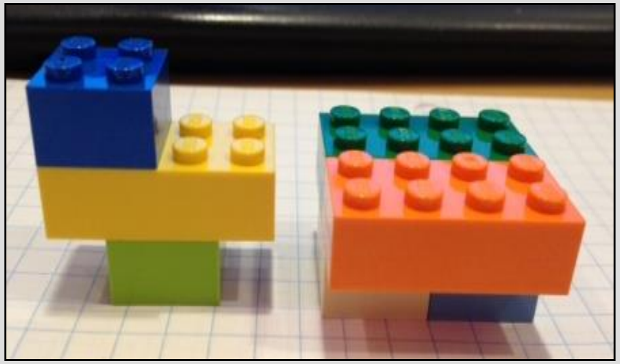
SUGESTÃO DE MONTAGEM

Cadeira:

2 peças 2x2 + 1 peça 4x2

Mesa:

2 peças 2x2 + 2 peças 4x2



Desafio 2

A peça 2x2 custa R$3 e a peça 4x2 R$5.

A cadeira é vendida por R$21 e a mesa por R$32.

Tendo em vista as restrições de matéria-prima, quantos móveis de cada tipo a sua fábrica deve produzir ?

Formule a função objetivo e as restrições para este problema.

Formulação Matemática

I. Variáveis de decisão:

M = número de mesas

C = número de cadeiras

II. Função objetivo:

max [Lucro unitário mesa * M + Lucro unitário cadeira * C]

Lucro por mesa = $32 – 2* ($3) – 2*($5) = $16

Lucro por cadeira = $21 – 2*($3) – 1*($5) = $10

max [16*M + 10*C]

Formulação Matemática

III. Restrições:

– Peças pequenas: total de peças pequenas utilizadas na fabricação de mesas e cadeiras não pode superar 9 peças

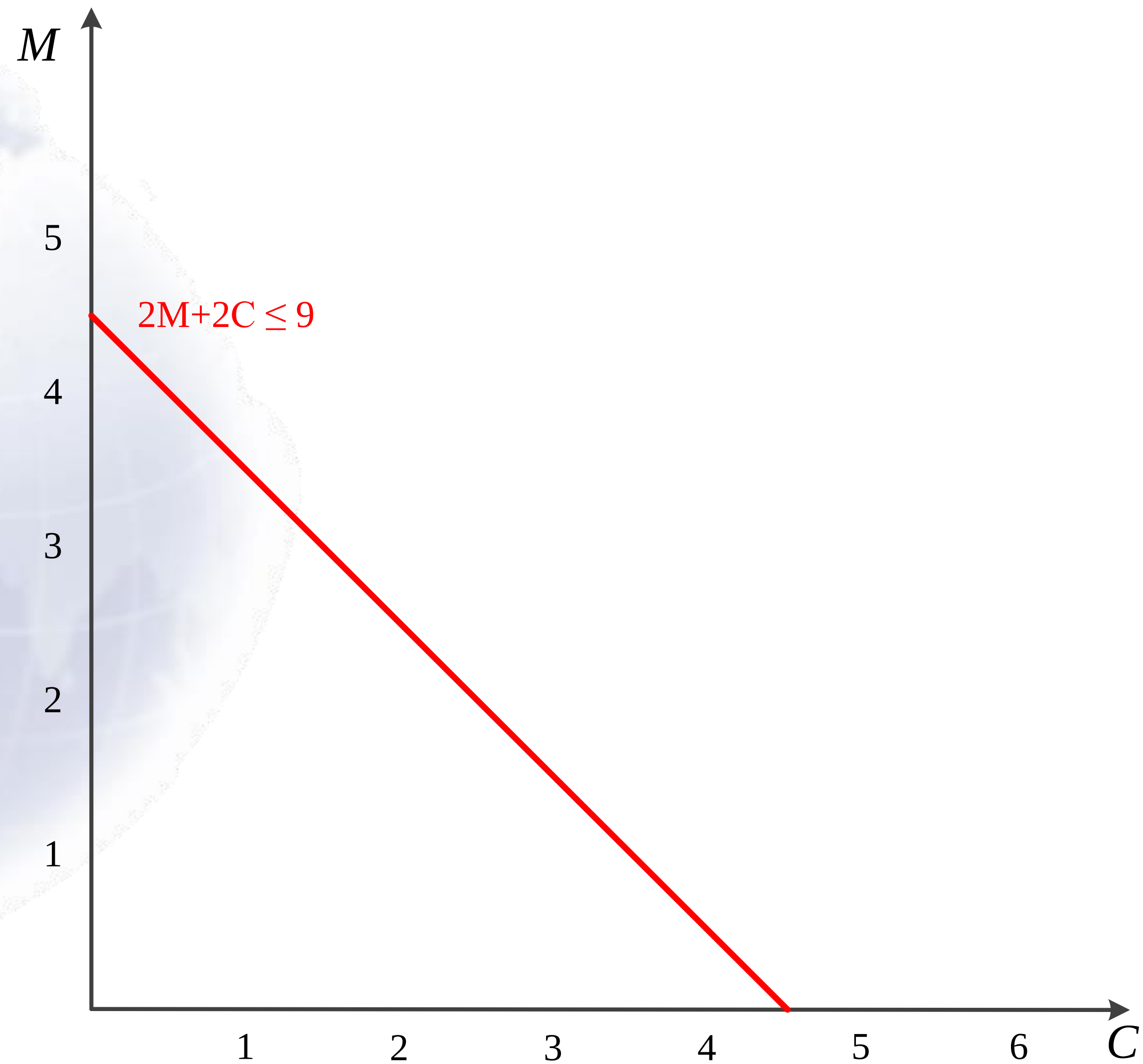
$$2*M + 2*C \leq 9$$

–Peças grandes: total de peças grandes utilizadas na fabricação de mesas e cadeiras não pode superar 6 peças

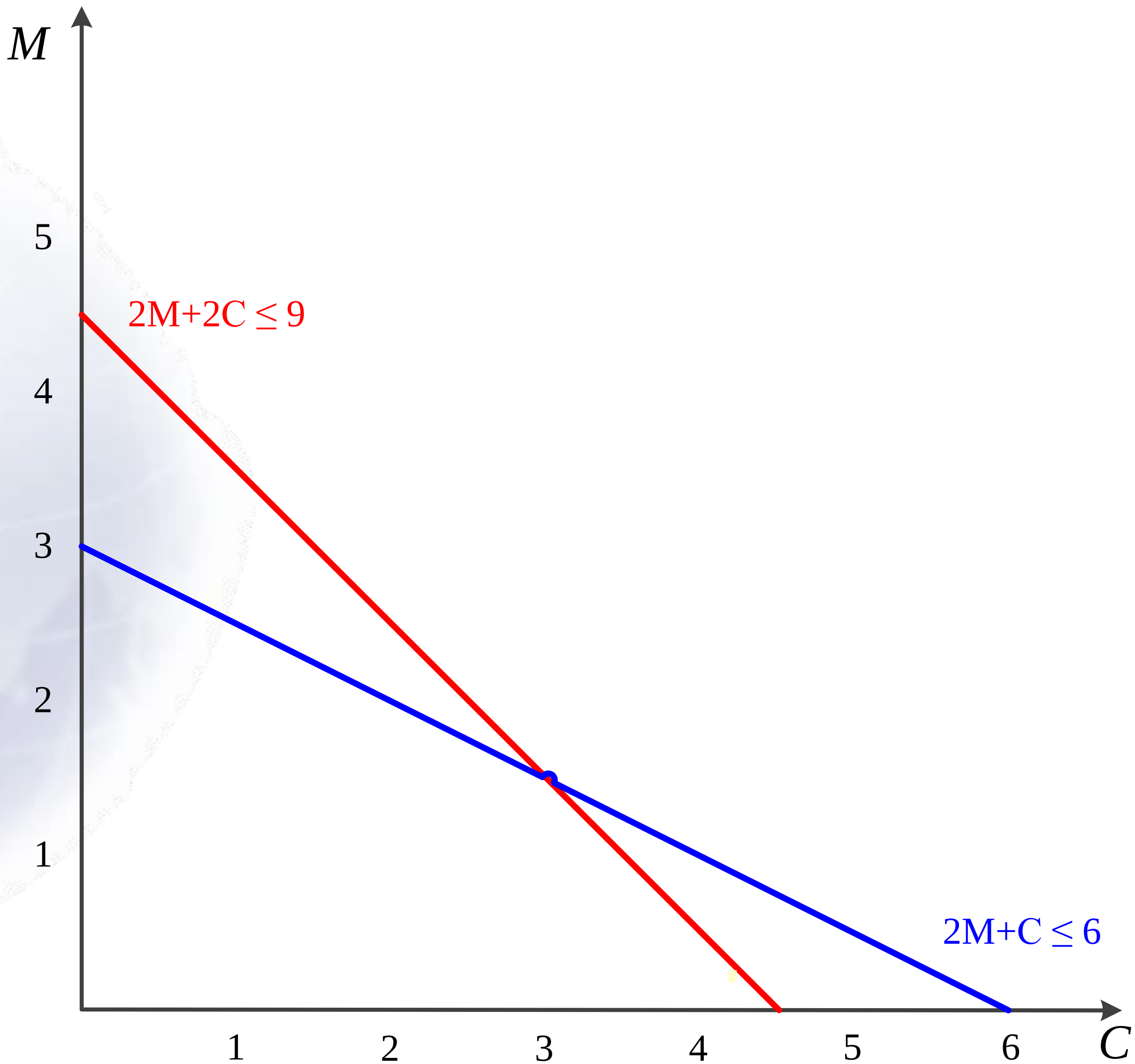
$$2*M + C \leq 6$$

–Não-negatividade: $M, C \geq 0$

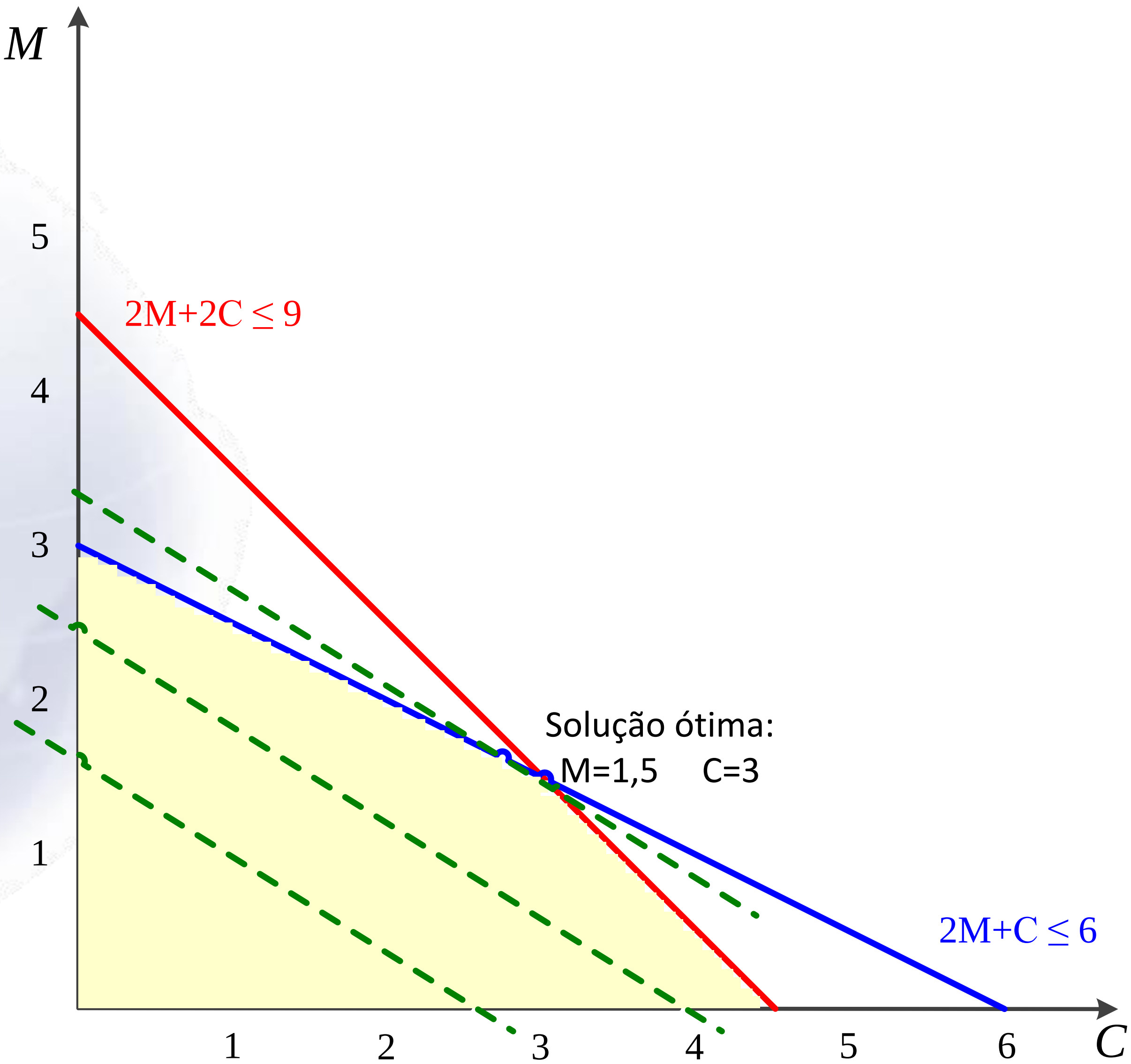
Representação Gráfica



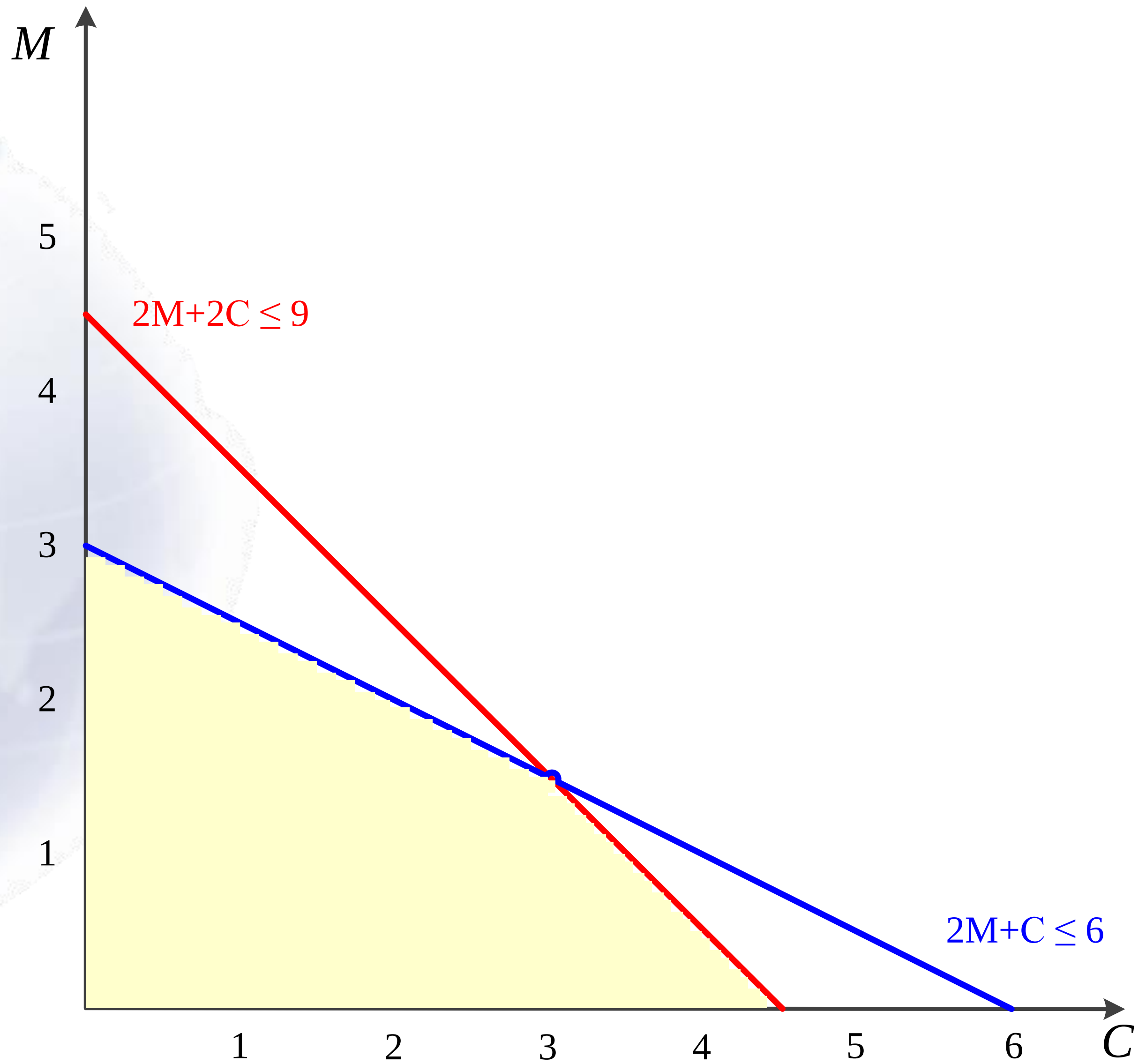
Representação Gráfica



Representação Gráfica

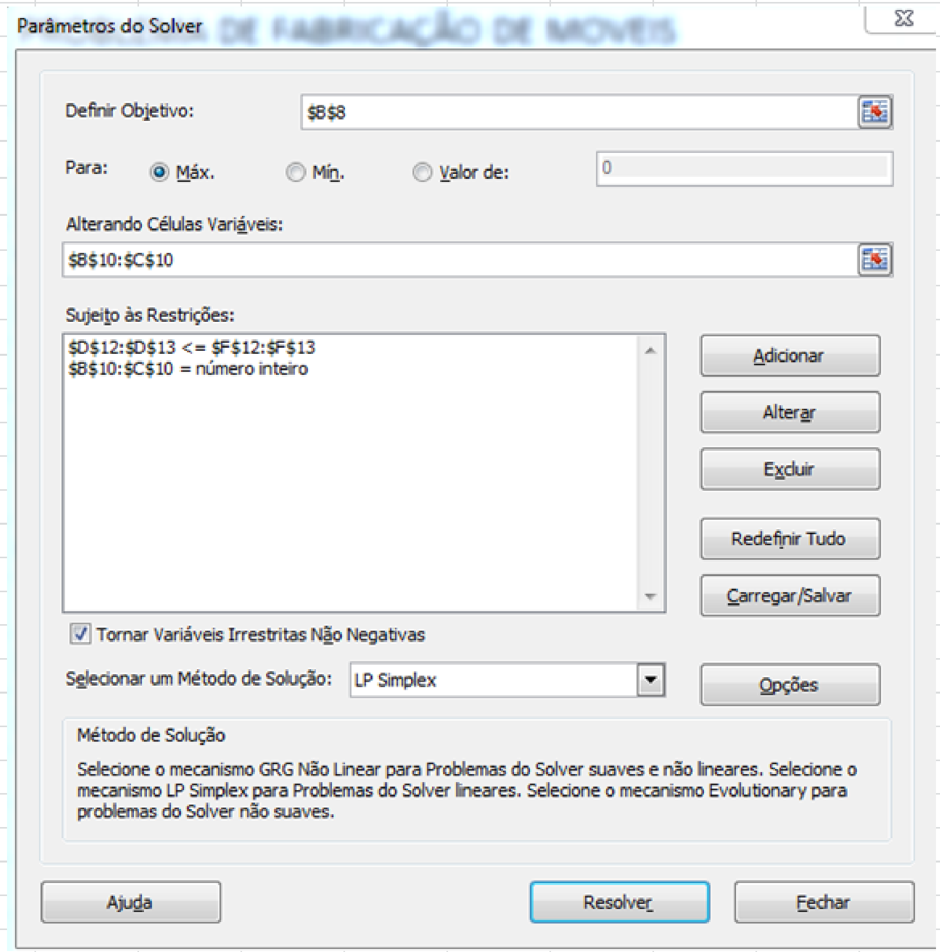


Representação Gráfica



Estruturação no Solver

	A	B	C	D	E	F
1	**PROBLEMA DE FABRICAÇÃO DE MOVEIS (LEGO)**					
2						
3		Mesa	Cadeira			
4	Preço Venda	32	21			
5	Custo Produção	16	11			
6	Lucro	16	10			
7						
8	Lucro Total	52				
9						
10	Quant produzida	2	2			
11				Total usado		Total disponível
12	Pecas grandes	2	1	6	<=	6
13	Pecas pequenas	2	2	8	<=	9
14						
15						
16	**Formulação Matemática**					
17						
18	*Variáveis de decisão:*					
19	M = número de mesas a serem produzidas				(B10)	
20	C = número de cadeiras a serem produzidas				(C10)	
21						
22	*Função objetivo*					
23	Maximizar (32-2x5-2x3)M + (21-1x5-2x3)C					
24	Maximizar (32-16)M + (21-11)C					
25	Maximimizar 16M + 10C				(B8)	
26						
27	*Restrições*					
28	peças grandes	2M + 1C <= 6			(D12 <= F12)	
29	peças pequenas	2M + 2C <= 9			(D13 <= F13)	
30						
31	M, C inteiros				(B10:C10 = número inteiro)	



Estruturação no Solver

PROBLEMA DE FABRICAÇÃO DE MOVEIS (LE(

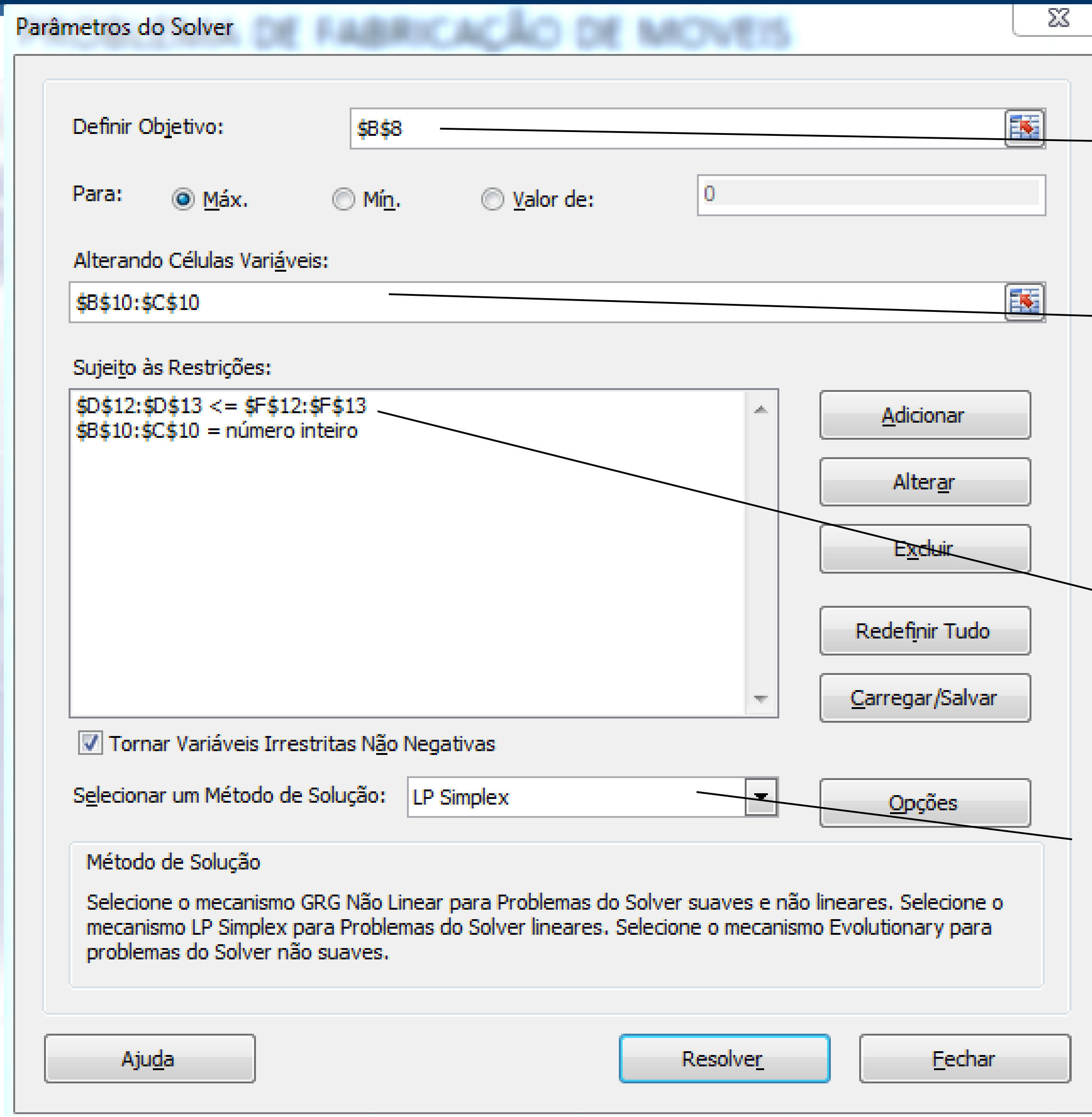
	Mesa	Cadeira			
Preço Venda	32	21			
Custo Produção	16	11			
Lucro	16	10			
Lucro Total	52				
Quant produzida	2	2			
			Total usado		Total disponível
Pecas grandes	2	1	6	<=	6
Pecas pequenas	2	2	8	<=	9

16M+10C

2M + 1C

2M + 2C

Estruturação no Solver



Função objetivo
max 16M+10C

Variáveis de decisão
M, C

Restrições
2M + 1C <= 6
2M + 2C <= 9

Escolher sempre LP Simplex
(equivalente a presumir modelo linear)

CASO WEST SHIPPING

SUMÁRIO
CASO WEST SHIPPING

- Um navio cargueiro pode ser carregado com duas cargas disponíveis para transporte entre dois portos: castanha-do-Pará (em sacos) e fios elétricos (rolos)

- O navio possui uma capacidade de 5.000 t úteis e 9.600 m^3

- Deseja-se determinar quanto transportar de cada uma das duas cargas, de modo a maximizar a receita total obtida.

CASO *WEST SHIPPING*

Dados:

	castanha-do-Pará	fios elétricos
fator de estiva (m^3/t)	2,40	0,8
receita frete unitário ($/t)	80	100
carga máxima disp (t)	6000	3500

CASO *WEST SHIPPING*
VARIAVEIS DE DECISÃO

- Quantas toneladas de cada carga transportar ?

  x_1 = quantidade da carga 1 (castanha) a transportar, em toneladas

  x_2 = quantidade da carga 2 (fios) a transportar, em toneladas

CASO *WEST SHIPPING*

FUNÇÃO OBJETIVO

maximizar $80\ x_1 + 100\ x_2$

CASO *WEST SHIPPING*
RESTRIÇÕES

- Peso máximo (t)

  $x_1 + x_2 \leq 5000$

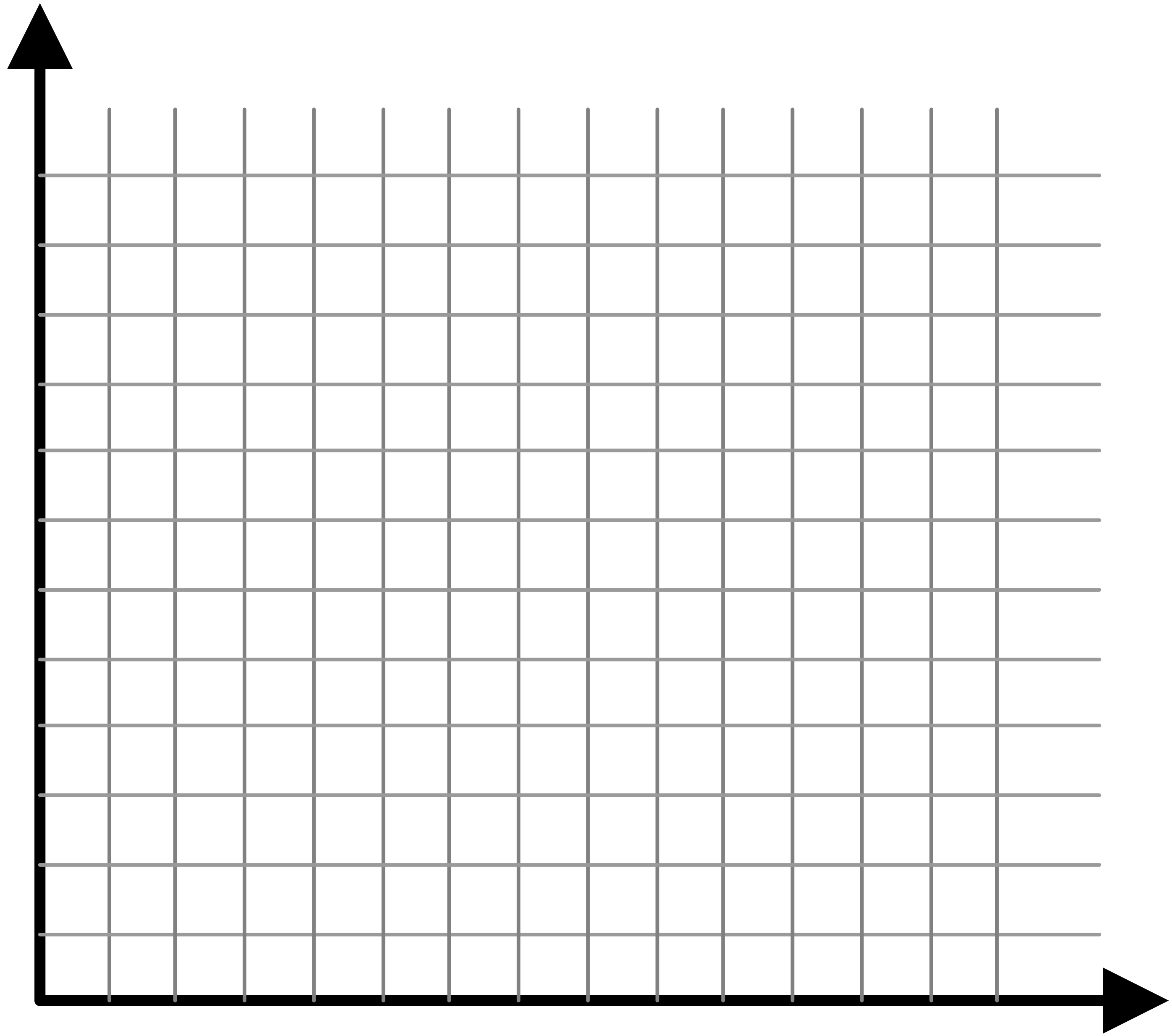
- Volume útil (m^3)

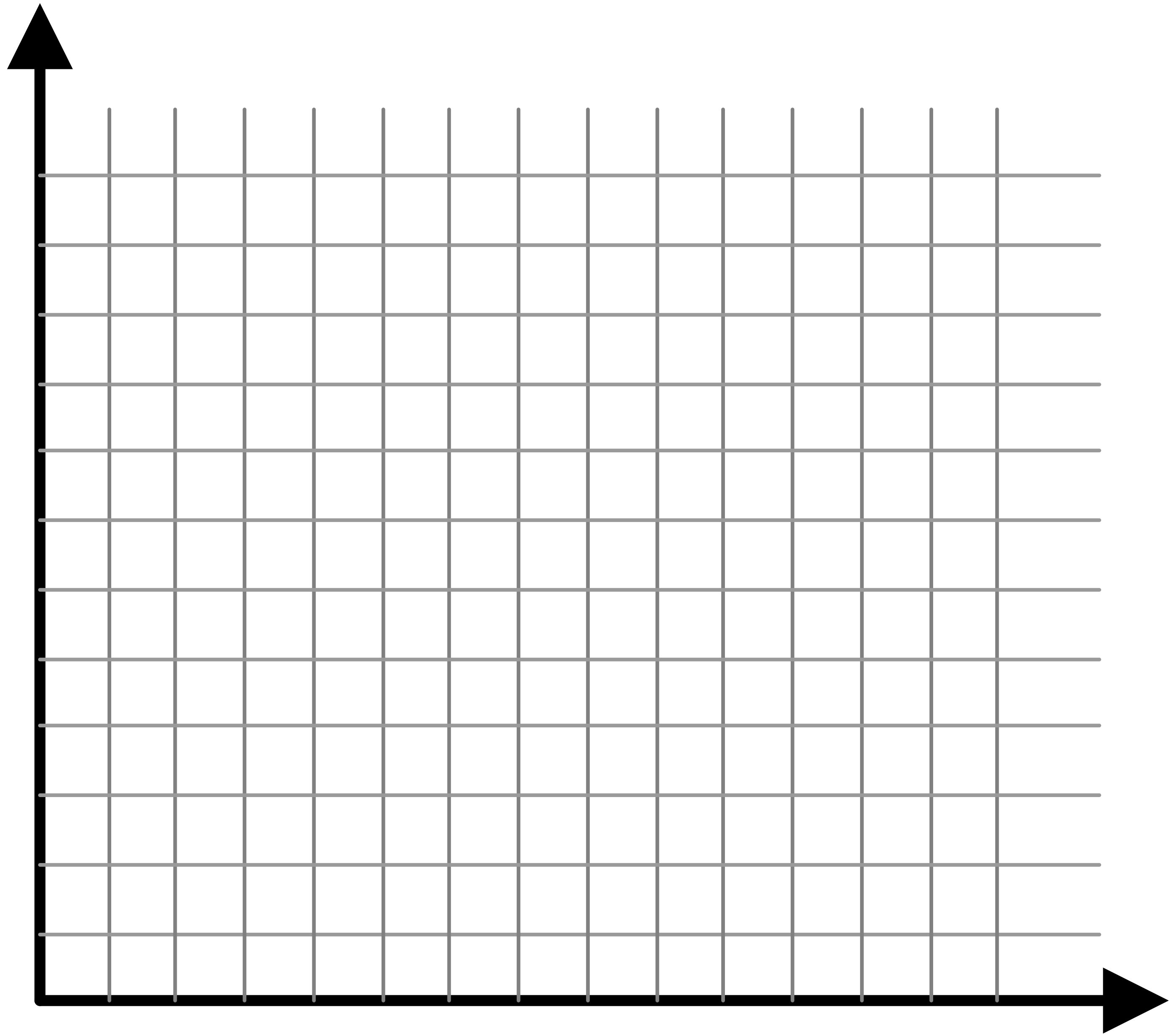
  $2{,}4x_1 + 0{,}8x_2 \leq 9600$

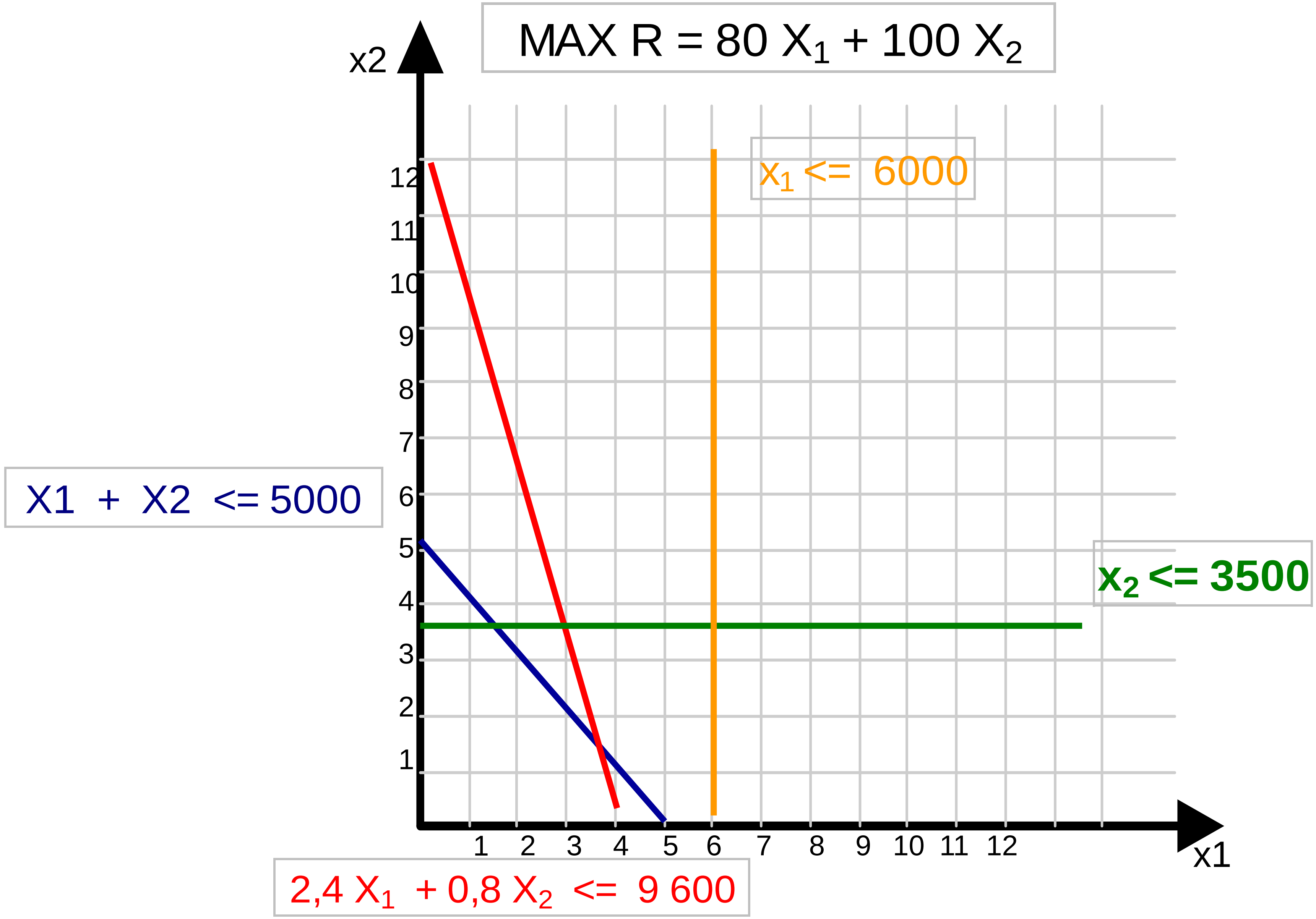
- Quantidades máximas

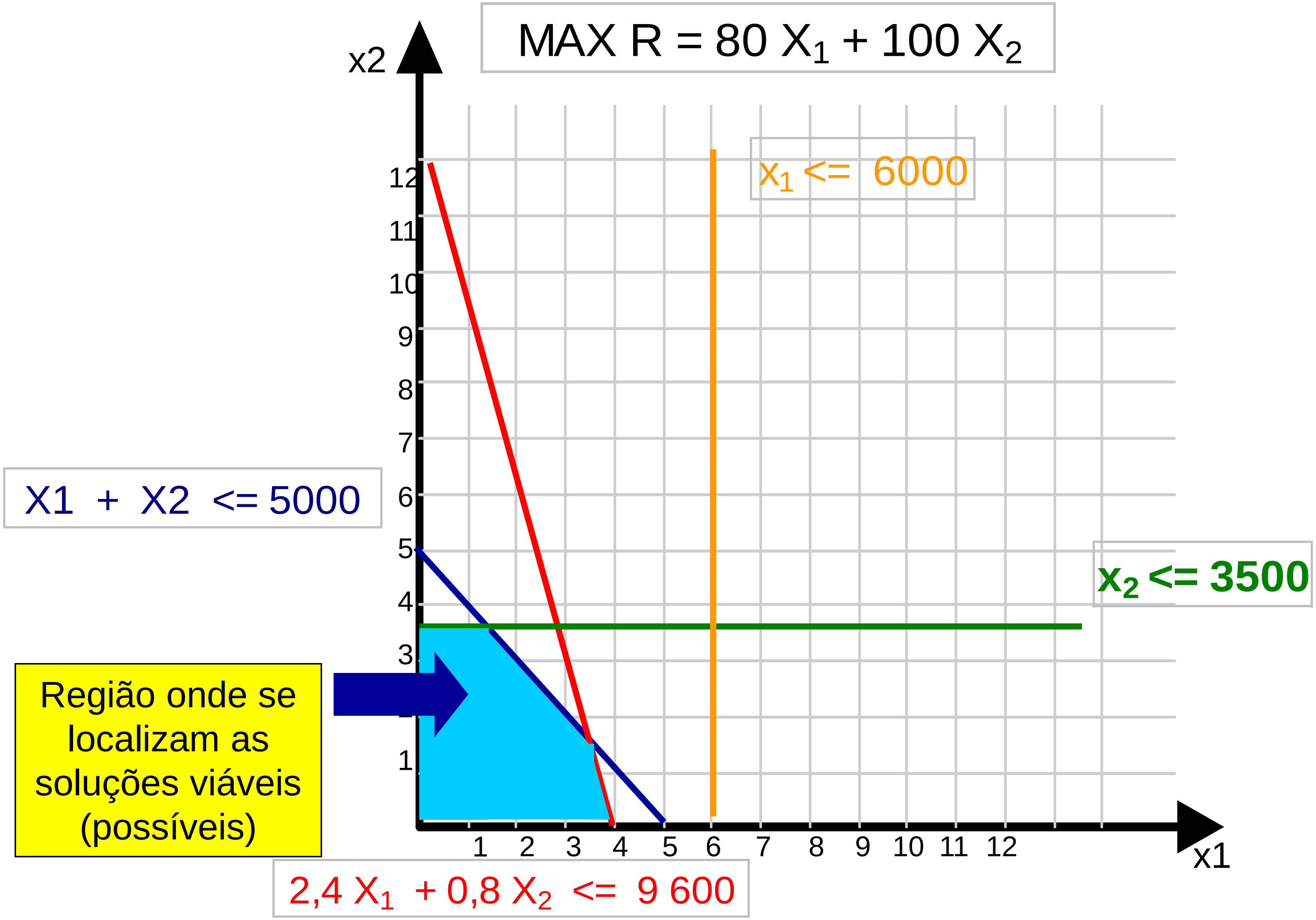
  $x_1 \leq 6000$

  $x_2 \leq 3500$

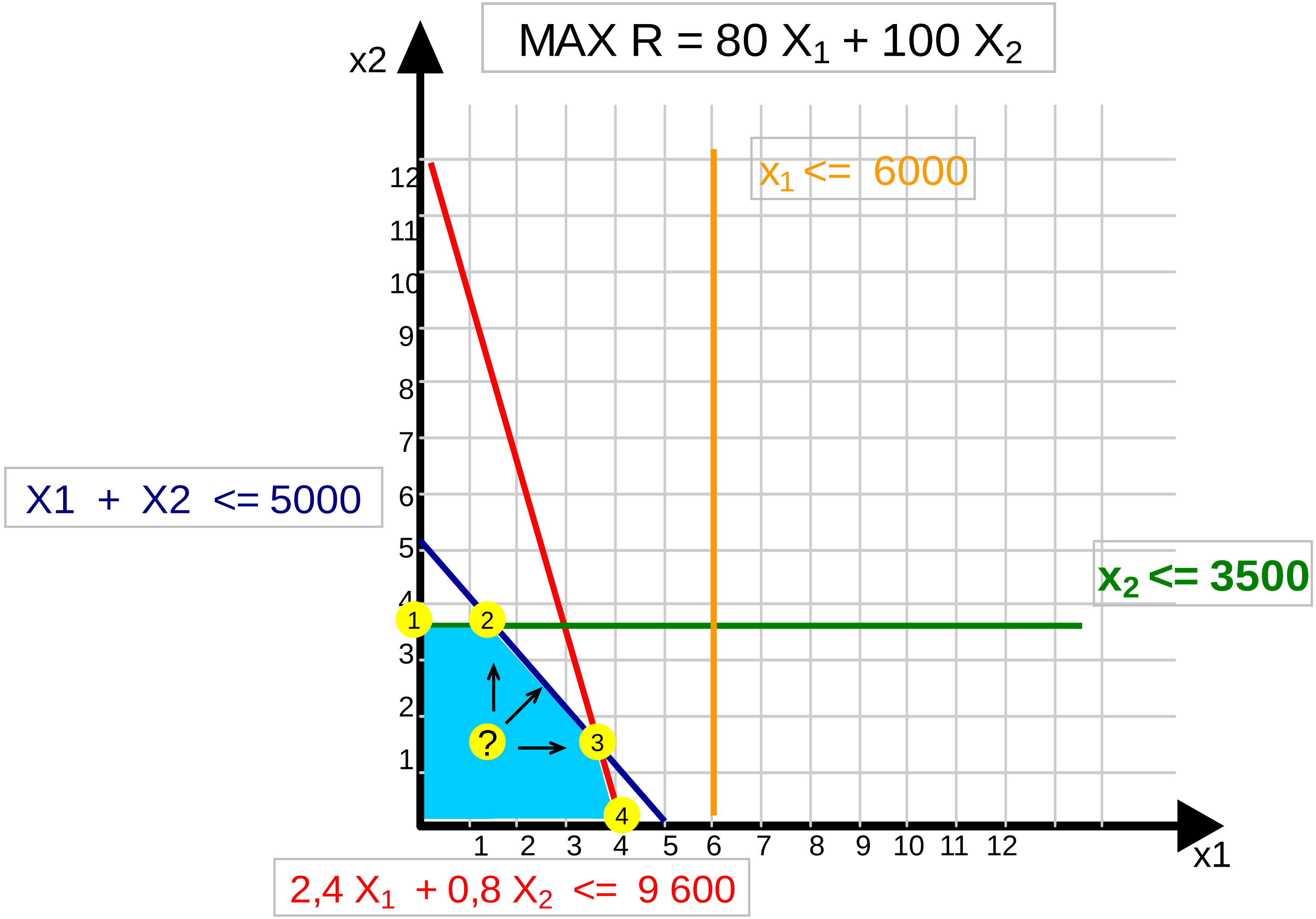




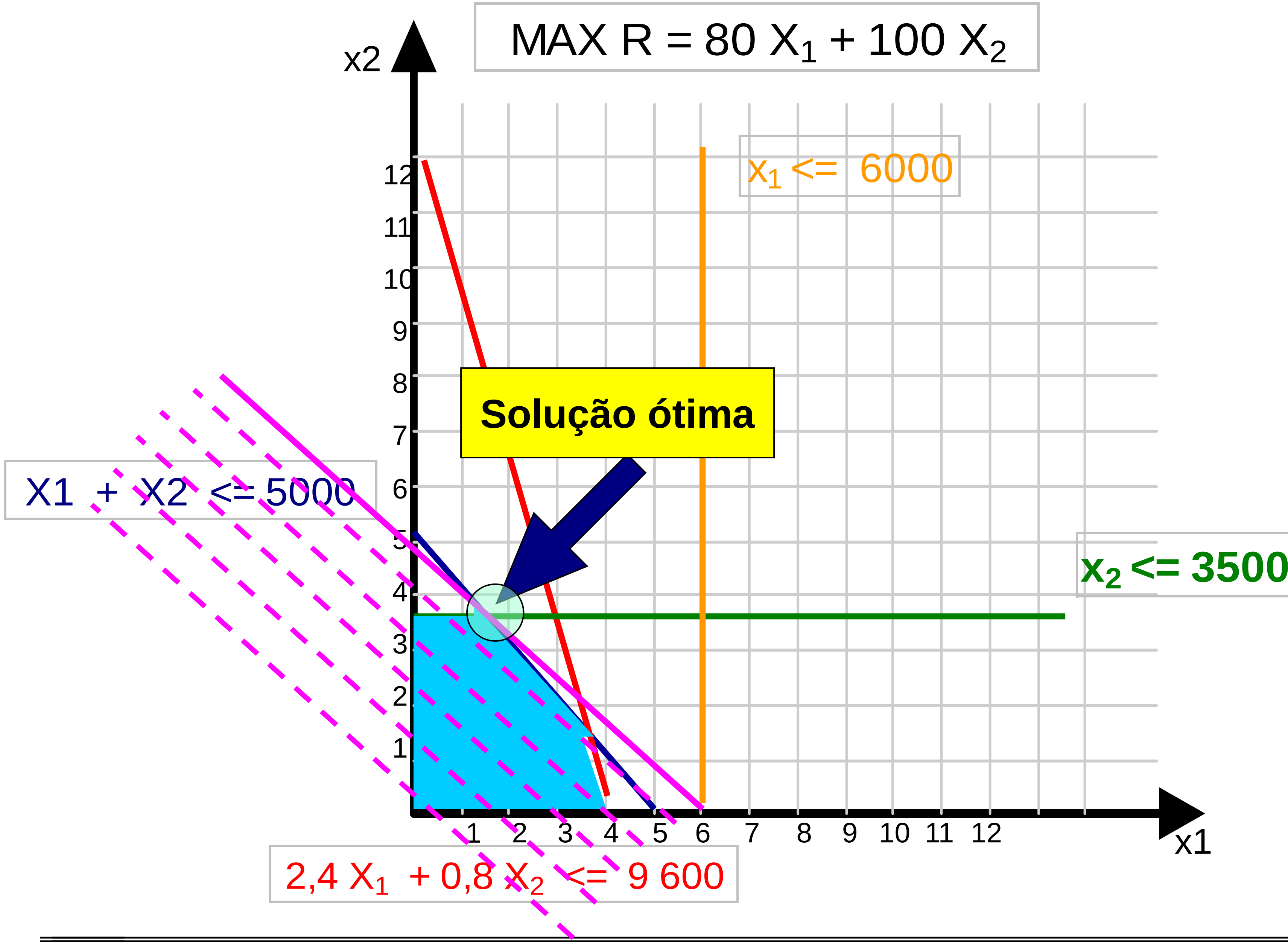

MAX R = 80 X1 + 100 X2
x2
x1
X1 + X2 <= 5000
x1 <= 6000
x2 <= 3500
2,4 X1 + 0,8 X2 <= 9 600
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12



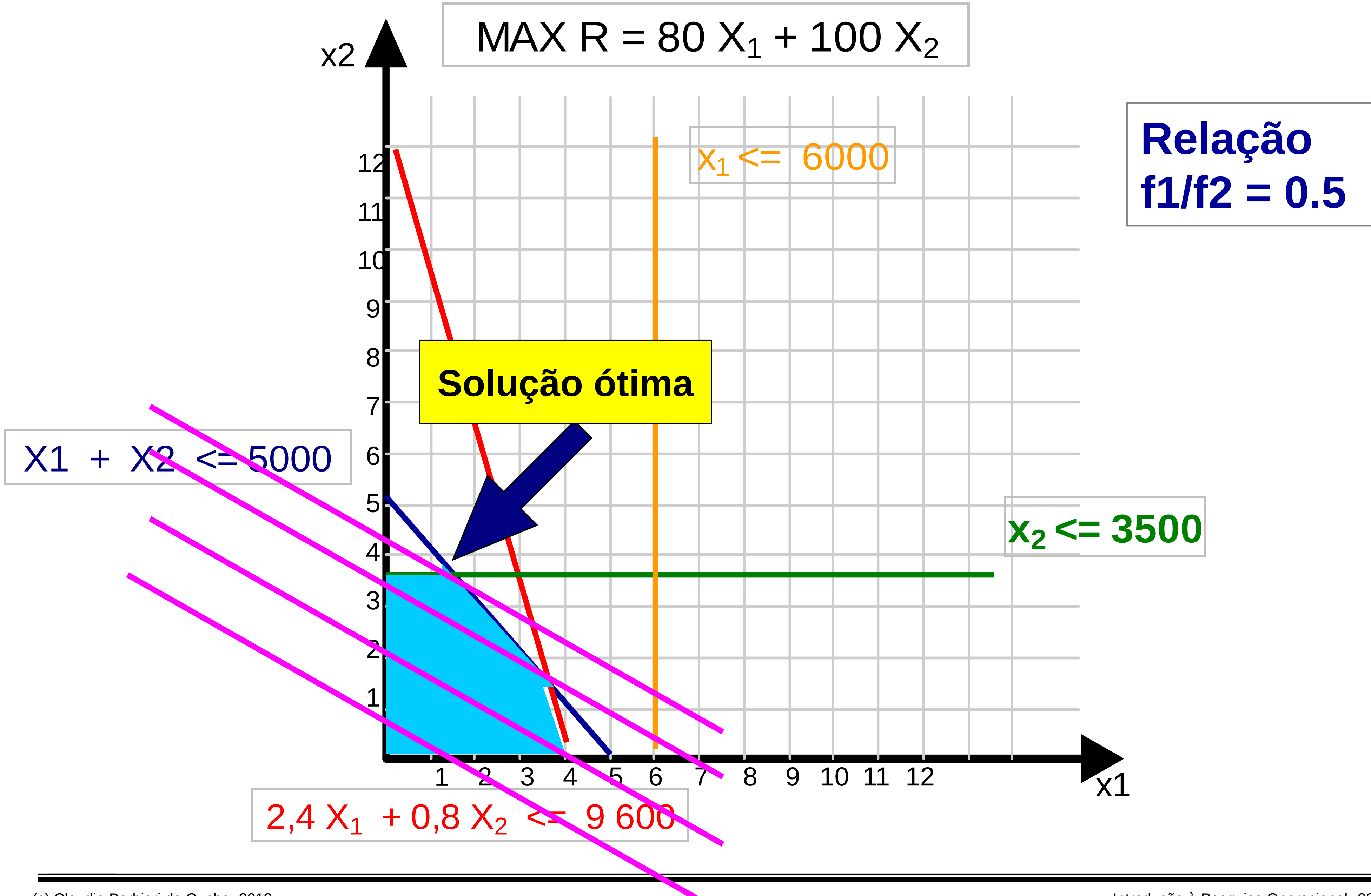
MAX R = 80 X1 + 100 X2
x2
x1
X1 + X2 <= 5000
x1 <= 6000
x2 <= 3500
2,4 X1 + 0,8 X2 <= 9 600
Região onde se localizam as soluções viáveis (possíveis)
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12



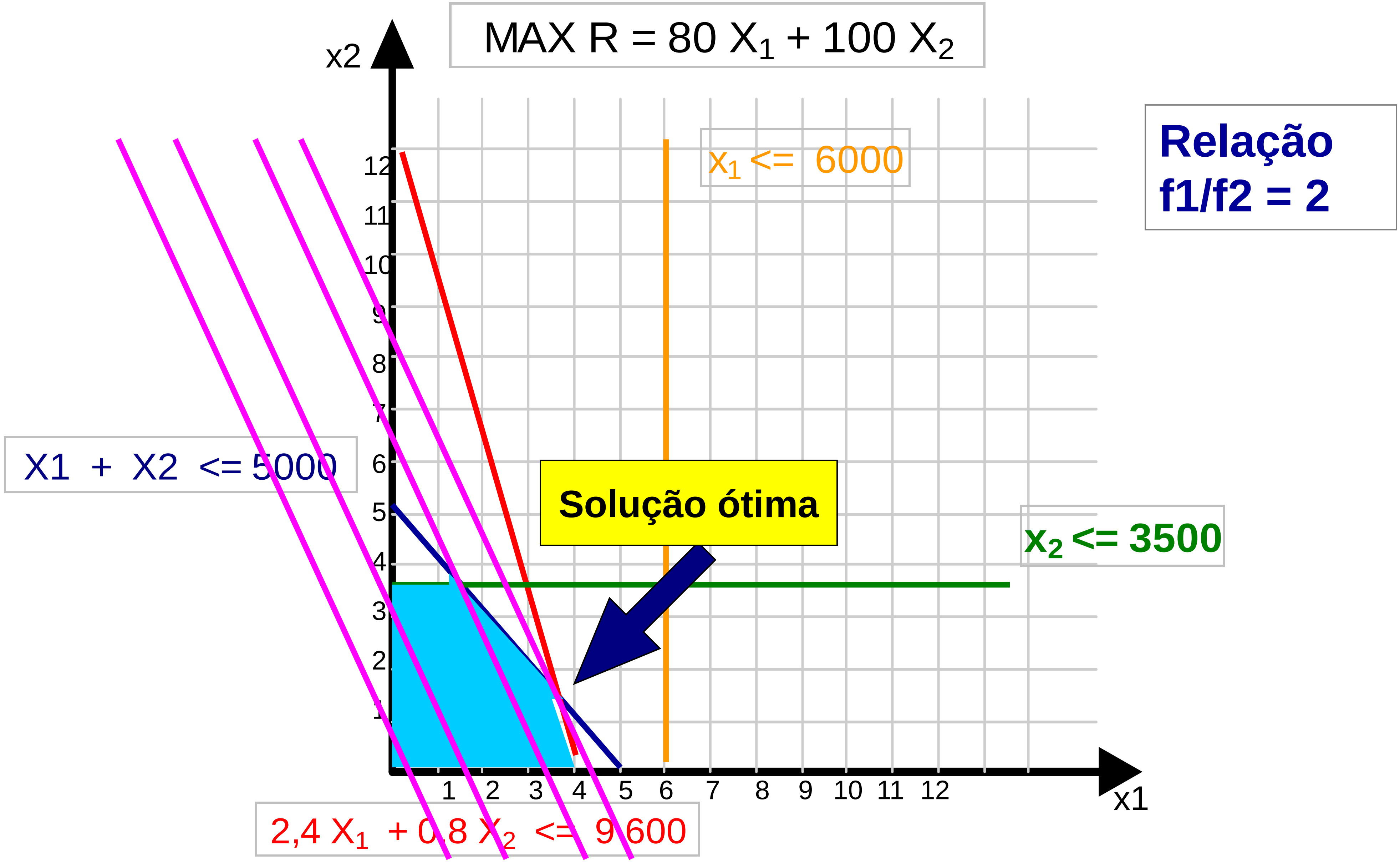
MAX R = 80 X_1 + 100 X_2
x2
x1
x_1 <= 6000
X1 + X2 <= 5000
x_2 <= 3500
2,4 X_1 + 0,8 X_2 <= 9 600
1
2
3
4
?



MAX R = 80 X_1 + 100 X_2
x2
x1
x_1 <= 6000
Solução ótima
X1 + X2 <= 5000
x_2 <= 3500
2,4 X_1 + 0,8 X_2 <= 9 600
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12



MAX R = 80 X_1 + 100 X_2
x2
x1
Relação
f1/f2 = 0.5
x_1 <= 6000
Solução ótima
X1 + X2 <= 5000
x_2 <= 3500
2,4 X_1 + 0,8 X_2 <= 9 600
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12


MAX R = 80 X1 + 100 X2
x2
x1
x1 <= 6000
Relação
f1/f2 = 2
X1 + X2 <= 5000
Solução ótima
x2 <= 3500
2,4 X1 + 0,8 X2 <= 9 600
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

Em síntese .....

- Um modelo de otimização é linear se :
todas as restrições forem lineares, e a função objetivo for linear.

Ex: $A + 2B - 5C + 7D + 174$ é uma função linear,

$AB + 7C + 8D + 32$ não é uma função linear,

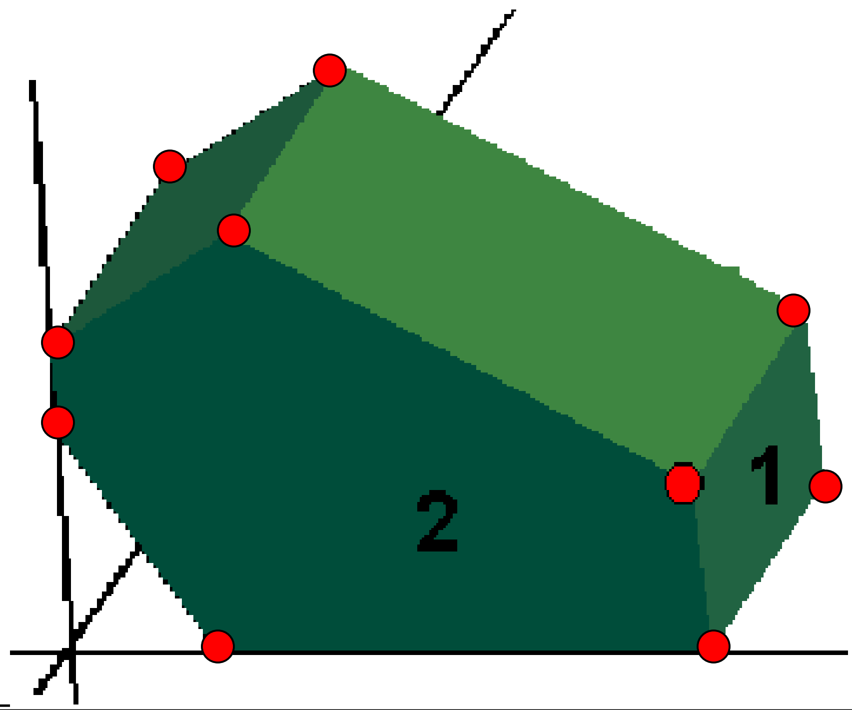
$A^2 + 4B - 2C + 5D$ não é uma função linear,

$4(A/B) + 5\,\mathrm{sen}(C)$ não é uma função linear.

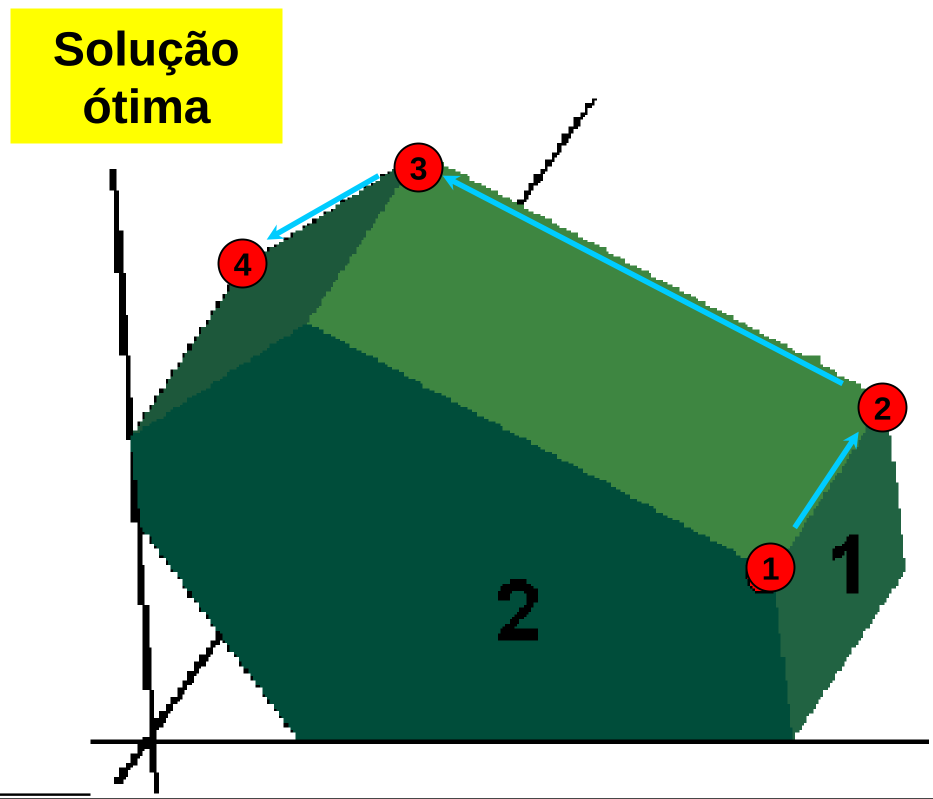
O Método Simplex

- **É utilizado para a resolução de problemas de Programação Linear**

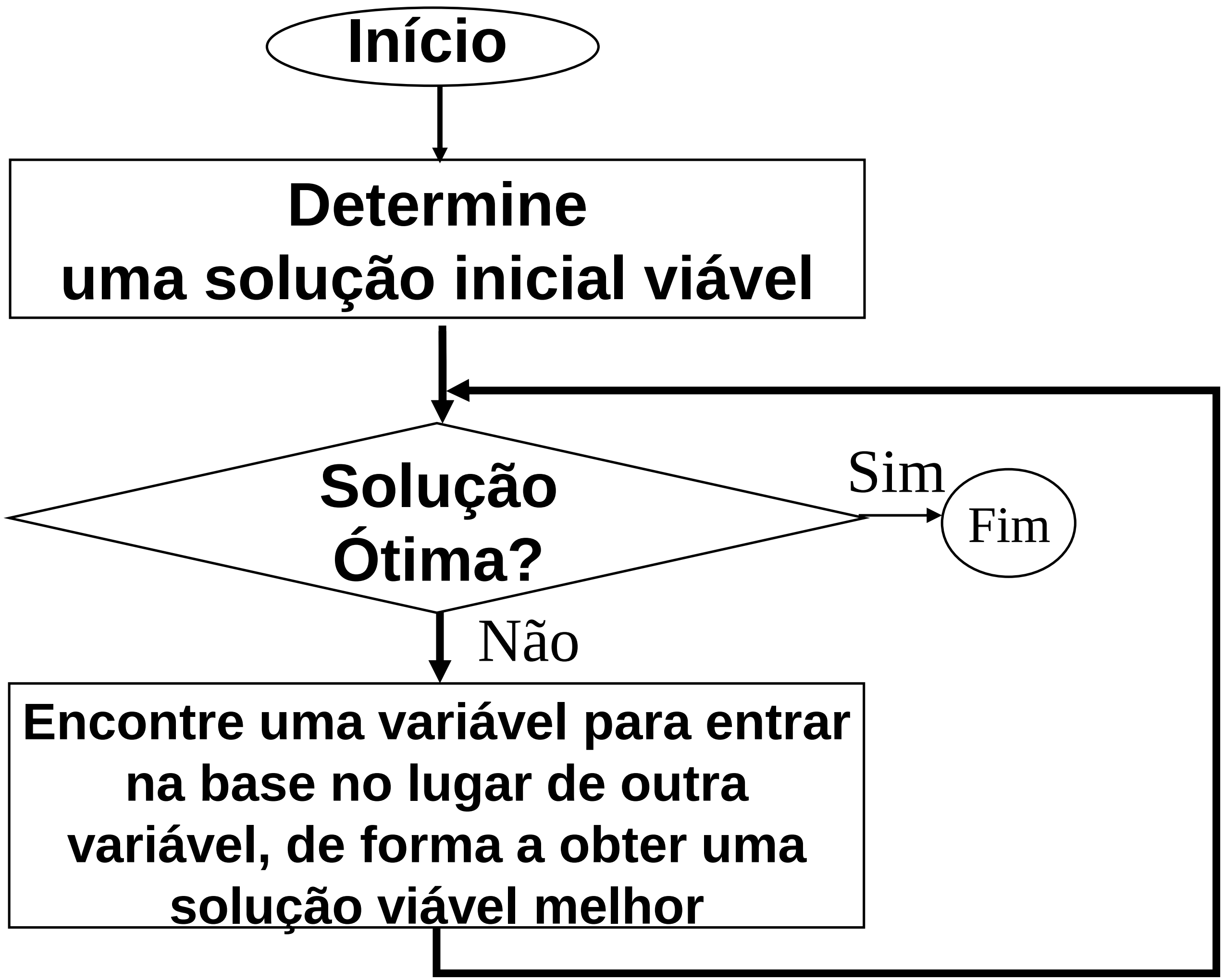
- **Explora de forma eficiente o polígono que define a região viável, sem precisar analisar todos os vértices que o compõem**



- **Parte-se de uma solução inicial viável (vértice)**
- **Decide para qual vértice se desloca (nova solução viável) até que não seja mais possível melhorar a solução**



Fluxograma do Método Simplex



O método de solução de um problema de programação linear é chamado de Simplex. Este método repete a busca de uma solução melhor até encontrar a ótima.

Isto significa que são encontradas várias soluções antes da ótima.

Resolução através do Método Simplex

1. Colocar o problema na forma padrão, isto é, transformar todas as desigualdades em igualdades,
através da adição de variáveis de folga para as restrições (<=)
e subtração de variáveis de excesso para restrições (>=):

$$[\max]\ 80x_1 + 100x_2$$

$$s.a.$$

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 \qquad &= 5000\\
2.4x_1 + 0.8x_2 + x_4 \quad &= 9600\\
x_2 + x_5 &= 3500
\end{aligned}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

x_3, x_4 e x_5 são as variáveis de folga que foram adicionadas

Analise o sistema de equações formado pelas restrições...

$$
\begin{aligned}
x_1 + \quad x_2 + x_3 \quad &= 5000 \\
2.4x_1 + 0.8x_2 + \quad x_4 \quad &= 9600 \\
x_2 + \quad x_5 &= 3500
\end{aligned}
$$

- Trata-se de um sistema indeterminado, isto é, que admite infinitas soluções.
- Pois existem n=5 variáveis e apenas m=3 restrições, gerando um grau de indeterminação (n-m) = 2
- É justamente por isso que buscamos a solução ótima otimizar, ou seja, aquela dentre infinitas solução viáveis (possíveis) que maximize uma dada expressão de receita total.

Resolução de sistemas de equações lineares

- Tome-se, por exemplo o seguinte sistema:

$$4x_1 + 8x_2 = 160$$
$$6x_1 + 4x_2 = 120$$

- A resolução desse sistema de equações significa determinar os valores de x_1 e x_2.

- Ou seja, encontrar um sistema equivalente no formato

$$x_1 + 0x_2 = a$$
$$0x_1 + x_2 = b$$

- De tal forma que sejam determinados os valores *a* e *b*

Método de Gauss Jordan

- Aplicado para a resolução de sistemas de equações lineares.
- Representação matricial de um sistema de equações

$$\begin{aligned} 4x_1 + 8x_2 &= 160 \\ 6x_1 + 4x_2 &= 120 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{cc|c} 4 & 8 & 160 \\ 6 & 4 & 120 \end{array}\right]$$

- Operações que podem ser feitas para transformar um sistema de equações em um sistema equivalente (isto é, que tem a mesma solução):
  1. Multiplicar uma linha por um valor constante não nulo. Por exemplo A’ = 3A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} ;\ A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 9 & 15 & 18 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

  2. Multiplicar uma linha *i* de A por um número c ≠ 0 e adicionar a alguma linha j ≠ i. Por exemplo, multiplicar a linha 2 de A por 4 e adicionar à linha 3.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} ;\ A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 & 6 \\ 4 & 13 & 22 & 27 \end{bmatrix}$$

são equivalentes!!

Aplicando Gauss Jordan no nosso sistema de equações

4	8	¦	160
6	4	¦	120

1) Dividir a linha 1 por 4:

1	2	¦	40
6	4	¦	120

2) Multiplicar a linha 1 por -6 e somar à linha 2

1	2	¦	40
0	-8	¦	-120

3) Multiplicar a linha 2 por -1

1	2	¦	40
0	8	¦	120

Aplicando Gauss Jordan no nosso sistema de equações

3) Multiplicar a linha 2 por -1 (repetido do slide anterior)

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 40 \\ 0 & 8 & 120 \end{array}\right]$$

4) Dividir a linha 2 por 8

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 40 \\ 0 & 1 & 15 \end{array}\right]$$

5) Multiplicar a linha 2 por -2 e somar à linha 1

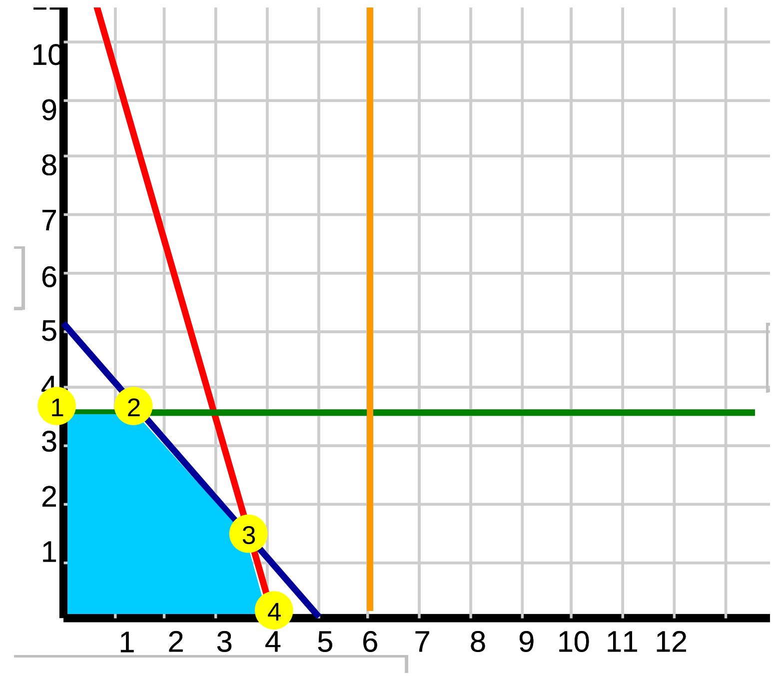
$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 15 \end{array}\right]$$

Método Simplex

- <u>As soluções candidatas à ótima estão sempre nas extremidades da região viável (vértices e arestas)</u>

- Sendo
  n = número de variáveis
  m = número de restrições

- Cada um dos vértices corresponde a uma solução onde:
  m variáveis são não nulas e
  n-m variáveis são nulas



No nosso problema ...

$$[\max]\ 80x_1 + 100x_2$$

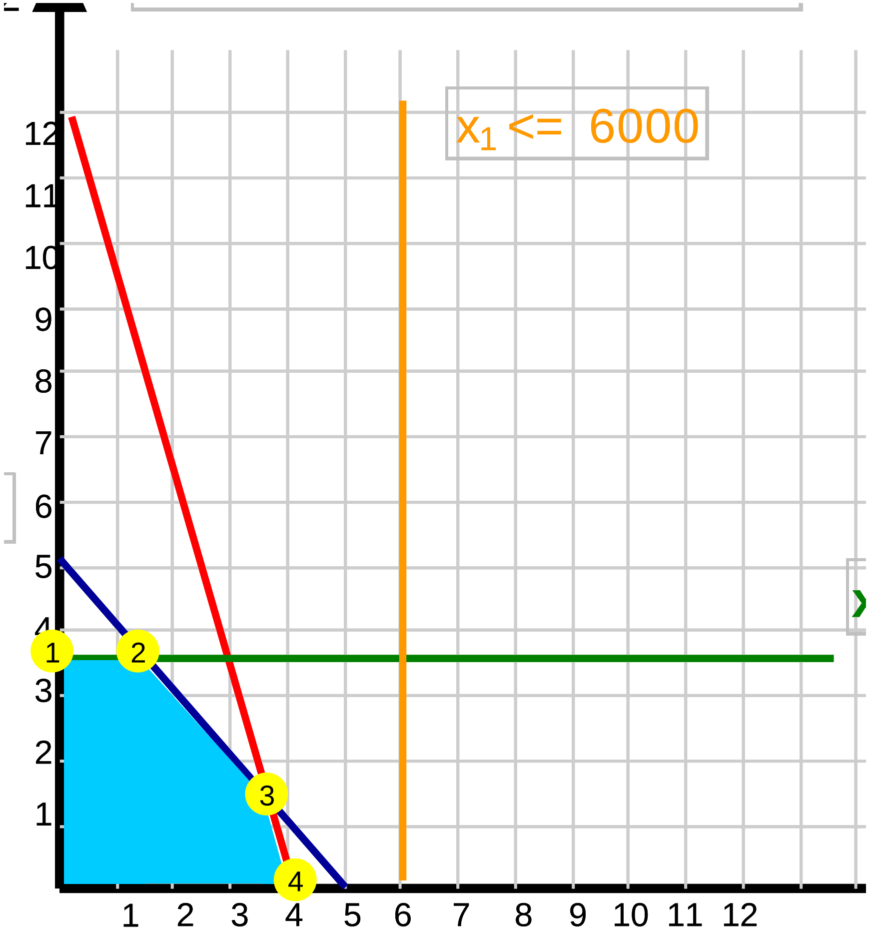
$$s.a.$$

$$\begin{aligned} x_1 + \quad x_2 + x_3 \quad &= 5000 \\ 2.4x_1 + 0.8x_2 + \quad x_4 \quad &= 9600 \\ x_2 + \quad x_5 &= 3500 \end{aligned}$$

- No problema acima, temos
  n = 5 variáveis de decisão
  m = 3 restrições

- Assim, cada solução candidata à solução ótima possui
  m = 3 variáveis não nulas e
  n = 5 – 3 = 2 variáveis nulas

Soluções candidatas à ótima



Vértice	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	0	0	5000	9600	3500
1	0	3500	1500	6800	0
2	1500	3500	0	3200	0
3	3500	1500	0	0	2000
4	4000	0	1000	0	3500

2. Colocar em forma tabular (matricial), obter uma primeira solução inicial viável e melhorar essa solução:

Variáveis básicas (três linhas, uma por restrição)

		x1	x2	x3	X4	X5	b
		80	100	0	0	0	
x3	0	1	1	1	0	0	5000
x4	0	2.4	0.8	0	1	0	9600
x5	0	0	1	0	0	1	3500
Δj		80	100	0	0	0	0

Variável que sai da base, isto é, tem seu valor reduzido

"Ganho <u>unitário</u> na Função Objetivo se aumentar o valor da variável

Variável que entra na base, isto é, tem seu valor aumentado

3. Atualizar o tableau da solução e. em seguida, verificar se a solução pode ser melhorada

		x1	x2	x3	x4	x5	b
		80	100	0	0	0	
x3	0	1	0	1	0	-1	1500
x4	0	2.4	0	0	1	-0.8	6800
x2	100	0	1	0	0	1	3500
Δj		80	0	0	0	-100	350000

Variável que sai da base, isto é, tem seu valor reduzido até zero

Variável que entra na base, isto é, tem seu valor aumentado

4. Repetir o processo até que não seja possível melhorar mais a solução

		x1	x2	x3	x4	x5	b
		80	100	0	0	0	
x1	80	1	0	1	0	-1	1500
x4	0	0	0	-2.4	1	1.6	3200
x2	100	0	1	0	0	1	3500
Δj		0	0	-80	0	-20	470000

SOLUÇÃO ÓTIMA

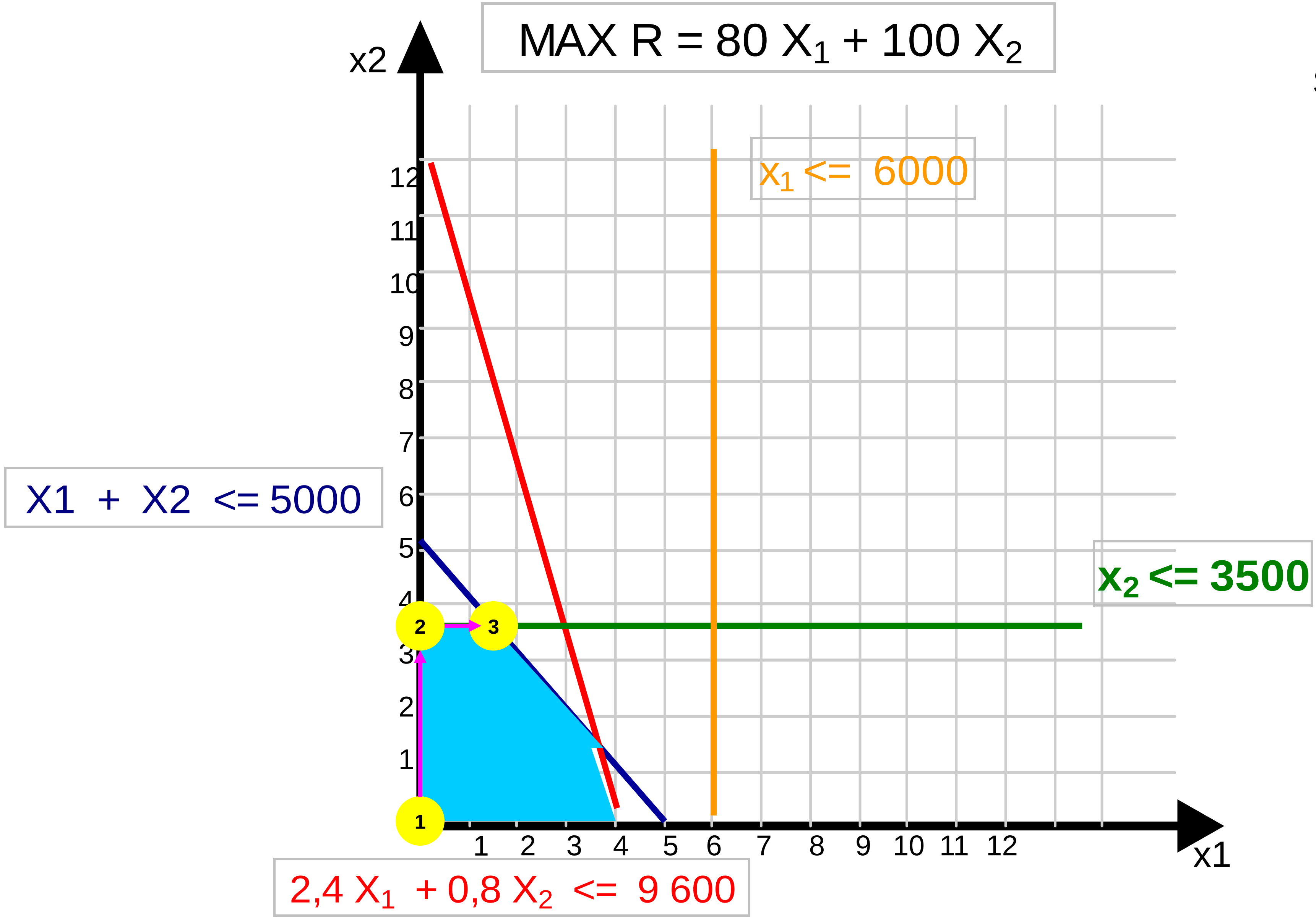
Não é mais possível melhorar a função objetivo (não há ganho) pois todos delta j são negativos ou nulos, ou seja, os ganhos são negativos se as variáveis não básicas (x3 e x5) forem aumentadas

Interpretação do resultado

- x1 = 1500 ⇒ quantidade da carga 1 a ser transportada
- x2 = 3500 ⇒ quantidade da carga 2 a ser transportada
- x4 = 3200 ⇒ folga no volume do navio (abaixo do máximo)
- Valor da função objetivo = 470000 (=1500*80 + 3500*100)

- Demais variáveis não básicas x3 e x5 (não estão nas linhas do tableau) são todas nulas
- x3 = 0 ⇒ não há folga no peso do navio
- x5 = 0 ⇒ não há folga na quantidade da carga 2 transportada, ou seja, transportando o máximo.

Sequência de iterações do método Simplex



Sequência de soluções viáveis obtidas

Sumário – Método Simplex

1) Deve-se notar que no método Simplex, o sistema de equações formado pelo conjunto de restrições é indeterminado, pois o número de variáveis (n) é maior que o de restrições (m).

2) Portanto, o número de possíveis soluções para o conjunto de variáveis, que atenda às restrições, é muito grande, muitas vezes infinito.

3) É normal que isso ocorra, pois do contrário não haveria a necessidade de se otimizar, uma vez que a solução seria determinada a partir das restrições apenas, sem a necessidade de se avaliar a função objetivo.

Sumário - Método Simplex (2)

4) **Como visto no método gráfico, as soluções candidatas a ótimo se encontram nos vértices da região viável (onde apenas no máximo *m* variáveis são não nulas).**

5) **Assim, o método Simplex pode ser visto como um procedimento matricial de percorrer um caminho entre vértices vizinhos, sem que seja necessário passar por todos os vértices que formam a região viável, até que seja encontrado o vértice que corresponde à solução ótima.**

6) **Em cada iteração, identifica-se uma variável não básica (isto é, que correntemente é nula) e cujo aumento de valor traga uma melhora no valor da função objetivo.**
   – Isso define um caminho (aresta) a ser percorrido até encontrar um novo vértice vizinho ao da solução corrente

Sumário - Método Simplex (3)

7) **Para que o valor de uma variável aumente, os valores das demais variáveis não nulas vão diminuindo, até que uma delas se torne nula, antes das demais. Essa é a variável que sai da base (pois se anula)**
   - Isso significa que um novo vértice foi atingido. Nesse novo vértice, como em todos os demais da região viável, temos *m* variáveis não nulas e (*n*-*m*) variáveis nulas
   - Portanto, encontra-se uma nova solução, com *m* variáveis não nulas e (*n*-*m*) variáveis nulas

Sumário - Método Simplex (4)

8) **É preciso então reescrever o sistema de equações em função das novas variáveis não nulas.**

9) **Assim, cada iteração do Simplex consiste em:**
   - Aplicar Gauss-Jordan para reescrever o sistema em função das novas *m* variáveis não nulas (sendo que apenas uma delas é nova)
   - Note-se que todos os sistemas são equivalentes, ou seja, fornecem os mesmos resultados; apenas estão escritos em função das *m* variáveis não nulas daquele vértice, de forma que seus valores fiquem determinados. Mas todos os tableaus proporcionam os mesmos valores das *m* variáveis uma vez definidos os valores para as demais (*n*-*m*) variáveis

Sequência – Método Simplex (1)

- **1º tableau:**

$$
\begin{aligned}
x1 + x2 + x3 &= 5000 \\
2{,}4x1 + 0{,}8x2 + x4 &= 9600 \\
x2 + x5 &= 3500
\end{aligned}
$$

		x1	x2	x3	X4	X5	b
		80	100	0	0	0	
x3	0	1	1	1	0	0	5000
x4	0	2.4	0.8	0	1	0	9600
x5	0	0	1	0	0	1	3500
Δj		80	100	0	0	0	0

Sequência - Método Simplex (2)

- **2º tableau:**

$$\begin{aligned} x_1 + \quad & + x_3 - x_5 = 1500 \\ 2{,}4x_1 \quad & + x_4 - 0{,}8x_5 = 6800 \\ x_2 \quad & + x_5 = 3500 \end{aligned}$$

		x1	x2	x3	x4	x5	b
		80	100	0	0	0	
x3	0	1	0	1	0	-1	1500
x4	0	2.4	0	0	1	-0.8	6800
x2	100	0	1	0	0	1	3500
Δj		80	0	0	0	-100	350000

Sequência – Método Simplex (6)

- **3º tableau:**

$$
\begin{aligned}
x1 + \quad & + x3 \quad & - \quad x5 &= 1500 \\
& - 2{,}4x3 + x4 & + 1{,}6x5 &= 3200 \\
x2 \quad & & + \quad x5 &= 3500
\end{aligned}
$$

		x1	x2	x3	x4	x5	b
		80	100	0	0	0	
x1	80	1	0	1	0	-1	1500
x4	0	0	0	-2.4	1	1.6	3200
x2	100	0	1	0	0	1	3500
Δj		0	0	-80	0	-20	470000

Sumário de sistemas equivalentes

- **1º tableau:**

$$x1 + x2 + x3 = 5000$$
$$2{,}4x1 + 0{,}8x2 + x4 = 9600$$
$$x2 + x5 = 3500$$

- **2º tableau:**

$$x1 + x3 - x5 = 1500$$
$$2{,}4x1 + x4 - 0{,}8x5 = 6800$$
$$x2 + x5 = 3500$$

- **3º tableau:**

$$x1 + x3 - x5 = 1500$$
$$- 2{,}4x3 + x4 + 1{,}6x5 = 3200$$
$$x2 + x5 = 3500$$

Observações importantes

- Conforme foi visto no método gráfico, as soluções candidatas a ótima encontram-se sempre nos pontos extremos da região viável.
- Sejam:
  - *n* o número de variáveis de decisão do problema
  - *m* o número de restrições

- Os pontos extremos correspondem a soluções em que *m* variáveis são não nulas, ou seja, tem valor diferente de zero (denominadas variáveis básicas) e (*n*-*m*) variáveis são nulas (variáveis não básicas).
  - No caso do problema do navio (West), todas as soluções viáveis têm *m*=3 variáveis básicas (não nulas) e (*n*-*m*) =2 variáveis não básicas (nulas)

- Uma iteração do Simplex consiste em avaliar os Δj para as variáveis não básicas e, se houver ganho, aumentar o valor da mais vantajosa

- Todas as soluções viáveis para o Simplex têm e (*n*-*m*) variáveis não básicas (isto é, nulas, ou seja x=0)

Observações importantes - II

- Uma iteração do Simplex consiste em avaliar os Δj (ganho/perda unitário) para as variáveis não básicas

- Escolhe-se para entrar na solução a variável não básica que apresentar o maior ganho Δj, considerando que:
  - Ganho $\Rightarrow$ $\Delta j > 0$ para problemas de maximização
  - $\Delta j < 0$ para problemas de minimização

- A variável que sai da base (ou seja, tem o seu valor reduzido a zero pelo aumento do valor da variável escolhida para entrar na base) é aquela que apresenta o menor quociente (b / aij) onde b corresponde à coluna mais à direita do tableau e aij o coeficiente em cada linha i na coluna j correspondente à variável que entra na base

Observações importantes - III

- Uma vez selecionada a variável que entra na base e a que sai da base, o novo tableau é construído substituindo-se a variável que sai pela que entra a aplicando-se Gauss-Jordan para se obter uma nova matriz (que corresponde a um novo sistema de equações) em que apareça a matriz identidade para as variáveis básicas, permitindo determinar a nova solução em termos dos valores das variáveis básicas
- Por exemplo, no problema West Shipping:
  - O tableau inicial tem como variáveis básicas x3, x4 e x5. Note que as colunas correspondentes a essas variáveis formam a matriz identidade
  - Na primeira iteração, entra a variável x2 (maior $\Delta j > 0$) e sai a variável x5 (menor dentre os quocientes de $5000 \div 1$, $9600 \div 0{,}8$ e $3500 \div 1$, correspondentes às três restrições da matriz
  - Em outras palavras, cada quociente define o valor máximo para o qual x2 pode ser aumentado em cada uma das restrições, considerando as disponibilidades de recursos (5000, 9600, 3500), que se encontram do lado direito do tableau, e as "taxas de consumo" desses recursos em cada uma das restrições. Por exemplo, na restrição 2, a disponibilidade é de 9600, mas o aumento de uma unidade de x2 nessa restrição consome apenas 0,8 unidades. Portanto o máximo é 9600/0,8

Observações importantes - IV

- Por exemplo, no problema West Shipping:
  - O tableau inicial tem como variáveis básicas x3, x4 e x5. Note que as colunas correspondentes a essas variáveis formam a matriz identidade
  - Na primeira iteração, entra a variável x2 (maior $\Delta j > 0$) e sai a variável x5 que corresponde à linha com o menor dentre os quocientes 5000 ÷ 1, 9600 ÷ 0,8 e 3500 ÷ 1
  - Cria-se um novo tableau com as variáveis x3, x4 e x2 (no lugar de x5)
  - Aplica-se Gauss Jordan para obter a nova matriz identidade para as colunas correspondentes às variáveis x3, x4 e x2 que formam a nova base
  - Note-se que apenas a coluna da variável x2 não estão no formato da matriz identidade, uma vez que seus coeficientes são [1 2,4 1] e que devem ser [0 0 1]
  - Usa-se sempre a linha da variável que entra (no caso x2) para ser multiplicada e somada às demais a fim de transformar os coeficiente da coluna de x2 para [0 0 1]
  - Assim, a 3ª linha (da variável x2) deve ser multiplicada por (-1) e somada à 1ª linha para que o coeficiente da variável x2 nessa linha passe de 1 para zero
  - Analogamente, a 3ª linha (da variável x2) deve ser multiplicada por (-0,8) e somada à 2ª linha para que o coeficiente dessa variável x2 na 2ª linha passe de 0,8 para zero
  - Caso o coeficiente da linha da variável que entra (3ª linha, variável x2) tenha valor diferente de 1 na coluna de x2, dividir a linha inteira pelo valor desse coeficiente para que ele fique 1

Observações importantes - V

- Uma vez obtido o 2º tableau (variáveis x3, x4 e x2)
  - Note que as colunas correspondentes a essas variáveis, nessa ordem, formam a matriz identidade
  - Na 2ª iteração, entra a variável x1 (maior $\Delta j > 0$) e sai a variável x3 que corresponde à linha com o menor dentre os quocientes $1500 \div 1$, $6800 \div 2{,}4$ e $3500 \div 0$ ($= \infty$)
  - Cria-se um novo tableau com as variáveis x1, x4 e x2 (no lugar de x3)
  - Aplica-se Gauss Jordan para obter a nova matriz identidade para as colunas correspondentes às variáveis x1, x4 e x2 que formam a nova base
  - Note-se que apenas a coluna da variável x1 não estão no formato da matriz identidade, uma vez que seus coeficientes são [1   2,4   0] e que devem ser [1 0 0]
  - Usa-se sempre a linha da variável que entra (no caso x1) para ser multiplicada e somada às demais a fim de transformar os coeficiente da coluna de x1 para [1 0 0]
  - Assim, a 1ª linha (da variável x1) deve ser multiplicada por (-2,4) e somada à 2ª linha para que o coeficiente da variável x1 nessa linha passe de 2,4 para zero
  - Não há nada a ser feito para a 3ª linha (da variável x1) uma vez que o coeficiente da variável x1 nessa linha já é 0
  - Caso o coeficiente da linha da variável que entra (1ª linha, variável x1) tivesse valor diferente de 1 na coluna de x1, dividir a linha inteira pelo valor desse coeficiente para que ele fique 1.

Sumário – Método Simplex

- Um problema de programação linear corresponde a um sistema de equações (i.e., formado pelas restrições do problema) indeterminado
  - Ou seja, existem muitas soluções possíveis, ou seja, valores para as variáveis de decisão, que atendam às restrições do problema
  - Em outras palavras, em um problema de otimização, o número de variáveis de decisão n (incluindo as variáveis de folga e excesso utilizadas para transformar as desigualdades em igualdades) é maior que o número de restrições m, ou simplesmente $n > m$, o que caracteriza a indeterminação
  - A função objetivo permite determinar qual a "melhor" solução dentre as inúmeras possíveis
- As soluções candidatas à solução ótima se encontram nos vértices (ou nas arestas) da chamada região viável, formada pela intersecção de todas as retas que compõem as restrições do problema
  - Os vértices correspondem a soluções viáveis com características peculiares: apenas m variáveis são não-nulas, isto é, têm valor diferente de zero; as demais n-m variáveis, de um total de n variáveis, são nulas

Sumário – Método Simplex

– Por exemplo, no problema de carregamento do navio, o número de variáveis é 5 (x1, x2, ..., x5) e o número de restrições é 3 (peso, volume, max carga 2), ou seja, n=5 e m=3. Toda solução viável candidata a ótima tem a característica de que 3 variáveis são não-nulas e 2 variáveis (n-m=2) são obrigatoriamente nulas

- O Método Simplex consiste em:

1. definir uma solução inicial que corresponda a um vértice (ou ponto extremo) que seja viável (isto é, com m variáveis não-nulas e as demais n-m nulas)
2. Verificar se a solução corrente é ótima. Se for, parar.
3. Se a solução corrente não for ótima, identificar uma variável dentre as n-m nulas que melhore a função objetivo, aumentando o seu valor; consequentemente, uma das m variáveis não-nulas vai se anular, de modo que o número de variáveis não nulas continue m
4. Aplicar Gauss Jordan a fim de reescrever o sistema, substituindo x_{sai} por x_{entra}
5. Voltar ao passo 2

Considerações sobre a Função Objetivo

- Ao invés de usar o , a maioria dos autores considera a função objetivo como mais uma linha do problema, à qual deve ser aplicado o Gauss Jordan:

- ***maximizar*** $80\ x_1 + 100\ x_2$
- Pode ser escrito como:
- $Z = 80\ x_1 + 100\ x_2$ ou
- $- Z + 80\ x_1 + 100\ x_2 = 0$
- Ou $+ Z - 80\ x_1 - 100\ x_2 = 0$

à qual deve ser aplicado Gauss Jordan

Sequência – Método Simplex (1)

- **1º tableau:**

$$
\begin{array}{l}
x1 + x2 + x3 = 5000 \\
2{,}4x1 + 0{,}8x2 + x4 = 9600 \\
x2 + x5 = 3500 \\
-Z + 80x1 + 100x2 = 0
\end{array}
$$

	-Z	x1	x2	x3	X4	X5	b
x3	0	1	1	1	0	0	5000
x4	0	2.4	0.8	0	1	0	9600
x5	0	0	1	0	0	1	3500
	1	80	100	0	0	0	0

Sequência - Método Simplex (2)

- **2º tableau:**

$$\begin{aligned}
x1 + \quad\quad + x3 \quad - \quad x5 &= 1500 \\
2{,}4x1 \quad\quad + x4 - 0{,}8x5 &= 6800 \\
x2 \quad\quad + \quad x5 &= 3500 \\
-Z + 80x1 \quad\quad - 100\,x5 &= -350000
\end{aligned}$$

	-Z	x1	x2	x3	x4	x5	b
x3	0	1	0	1	0	-1	1500
x4	0	2.4	0	0	1	-0.8	6800
x2	0	0	1	0	0	1	3500
	1	80	0	0	0	-100	-350000

Sequência – Método Simplex (6)

- **3º tableau:**

$$\begin{array}{rcl} x1 + x3 - x5 & = & 1500 \\ -2{,}4x3 + x4 + 1{,}6x5 & = & 3200 \\ x2 + x5 & = & 3500 \\ -Z + 80x3 - 20\,x5 & = & -470000 \end{array}$$

	-Z	x1	x2	x3	x4	x5	b
		80	100	0	0	0	
x1	0	1	0	1	0	-1	1500
x4	0	0	0	-2.4	1	1.6	3200
x2	0	0	1	0	0	1	3500
Δj	1	0	0	-80	0	-20	-470000

Problema Exemplo

PROBLEMA DE SELEÇÃO DE PRODUTOS PARA COMPRA

O proprietário de um pequeno supermercado faz compras semanalmente no entreposto hortifrutigranjeiro, para abastecimento da sua loja com frutas, legumes e verduras (FLV). Mais especificamente, ele normalmente compra alface, tomate, laranja, banana, maçã, pera e uva.

Ele possui um caminhão próprio com capacidade de carga de 720 caixas e 14 mil kg. Recentemente, ele fez uma análise de comercialização e rentabilidade dos produtos, chegando a valores de lucro unitário e quantidade máxima que pode ser comercializada para cada produto, como mostrado na tabela a seguir. Também são conhecidos os pesos de cada caixa.

	Banana	Maçã	Pera	Uva	Laranja	Alface	Tomate
Lucro por caixa ($)	65	72	70	75	55	50	40
Quantidade máxima (cx)	150	100	80	50	200	200	200
Peso por caixa (kg)	20	18	17	12	25	8	20

Determinar quantas caixas de cada produto devem ser adquiridas semanalmente, de modo a assegurar a maximização do lucro total do proprietário.

Considere agora que exista uma quantidade mínima de caixas que deva ser adquirida em cada viagem, conforme mostrado abaixo, de modo que evitar a perda de clientes que deixam de frequentar o supermercado por não encontrarem o que procuram. Qual a nova solução ótima? Compare com a solução anterior.

	Banana	Maçã	Pera	Uva	Laranja	Alface	Tomate
Quantidade mínima (cx)	50	30	20	10	100	100	100

Variáveis de decisão

- x_b = número de caixas de banana a serem compradas
- x_m = número de caixas de maçã a serem compradas
- x_p = número de caixas de pera a serem compradas
- x_u = número de caixas de uva a serem compradas
- x_l = número de caixas de laranja a serem compradas
- x_a = número de caixas de alface a serem compradas
- x_t = número de caixas de tomate a serem compradas

Função Objetivo

- Maximizar Lucro Total =

$$65x_b + 72x_m + 70x_p + 75x_u + 55x_l + 50x_a + 40x_t$$

Restrições

$$x_b + x_m + x_p + x_u + x_l + x_a + x_t \leq 600$$ (número máximo de caixas)

$$20x_b + 18x_m + 17x_p + 12x_u + 25x_l + 8x_a + 20x_t \leq 8000$$ (peso máximo)

$$x_b \leq 150$$

$$x_m \leq 100$$

$$x_p \leq 80$$

$$x_u \leq 50$$

$$x_l \leq 200$$

$$x_a \leq 200$$

$$x_t \leq 200$$

Problema na forma padrão

Maximizar $$65x_b + 72x_m + 70x_p + 75x_u + 55x_l + 50x_a + 40x_t$$

Sujeito a

$$x_b + x_m + x_p + x_u + x_l + x_a + x_t + f_1 = 600$$

$$20x_b + 18x_m + 17x_p + 12x_u + 25x_l + 8x_a + 20x_t + f_2 = 8000$$

$$x_b + f_3 = 150$$

$$x_m + f_4 = 100$$

$$x_p + f_5 = 80$$

$$x_u + f_6 = 50$$

$$x_l + f_7 = 200$$

$$x_a + f_8 = 200$$

$$x_t + f_9 = 200$$

Tableau Inicial

		Xb	Xm	Xp	Xu	Xl	Xa	Xt	f1	f2	f3	f4	f5	f6	f7	f8	f9		
		65	72	70	75	55	50	40	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
f1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	600	600
f2	0	20	18	17	12	25	8	20	0	1	0	0	0	0	0	0	0	8000	666,66667
f3	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	150	infinito
f4	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	100	infinito
f5	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	80	infinito
f6	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	50	50
f7	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	200	infinito
f8	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	200	infinito
f9	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	200	infinito
		65	72	70	75	55	50	40	0	0	0	0	0	0	0	0	0		

2º Tableau

		Xb	Xm	Xp	Xu	Xl	Xa	Xt	f1	f2	f3	f4	f5	f6	f7	f8	f9		
		65	72	70	75	55	50	40	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
f1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	-1	0	0	0	550	550
f2	0	20	18	17	0	25	8	20	0	1	0	0	0	-12	0	0	0	7400	411,11111
f3	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	150	infinito
f4	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	100	100
f5	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	80	infinito
Xu	75	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	50	infinito
f7	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	200	infinito
f8	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	200	infinito
f9	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	200	infinito
		65	72	70	0	55	50	40	0	0	0	0	0	-75	0	0	0		

Estruturação no Solver do Excel e Solução Final

PROBLEMA DE SELEÇÃO DE MIX DE PRODUTOS PARA VENDA

Determinar a quantidade de caixas a serem compradas de modo a maximizar o lucro total.

	Banana	Maçã	Pera	Uva	Laranja	Alface	Tomate			
Peso por caixa (kg)	20	18	17	12	25	8	20			
Lucro por caixa ($/cx)	65	72	70	75	55	50	40			
Caixas a serem compradas	132	100	80	50	0	200	0	562	<=	600
	<=	<=	<=	<=	<=	<=	<=			
Quantidada máxima	150	100	80	50	200	200	200	980		

Peso total do caminhão (kg)	8000	<=	8000	Capacidade Peso (kg)
Lucro Total $	35130			

Decompondo o problema na forma matricial

Variáveis de decisão x podem ser divididas em dois g

x^B = variáveis básicas (m)
x^N = variáveis não básicas (n-m)

Idem, custos c podem ser divididos em:

c^B = custos das variáveis básicas
c^N = custos das variáveis não básicas

Matriz de coeficientes A pode ser dividida em duas sub-matrizes:

B = matriz dos coeficientes das variáveis básicas
A^N = matriz dos coeficientes das variáveis não básicas

$$\max Z = cx = c^B x^B + c^N x^N$$

$$sa$$

$$Ax = b \Rightarrow Bx^B + A^N x^N = b$$

$$x \geq 0$$

$$\max \begin{bmatrix} c^B & c^N \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x^B \\ x^N \end{bmatrix}$$

$$sa$$

$$\begin{bmatrix} B & A^N \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x^B \\ x^N \end{bmatrix} = b$$

Reescrevendo as restrições

$$Ax = b$$

$$Bx^B + A^N x^N = b$$

Multiplicando por B^{-1}

$$B^{-1}Bx^B + B^{-1}A^N x^N = B^{-1}b$$

$$\underbrace{B^{-1}B}_{I}x^B + \underbrace{B^{-1}A^N}_{\bar{A}^N}x^N = \underbrace{B^{-1}b}_{\bar{b}}$$

$$x^B + \bar{A}^N x^N = \bar{b}$$

Reescrevendo a função objetivo

$$\max Z = cx = c^B x^B + c^N x^N$$

$$Z = c^B\left(\overline{b} - \overline{A}^N x^N\right) + c^N x^N$$

$$Z = c^B\overline{b} + \left(c^N - c^B\overline{A}^N\right)x^N$$

$$Z = \underbrace{c^B B^{-1} b}_{Z_0} + \underbrace{\left(c^N - c^B B^{-1} A^N\right)}_{\overline{c}^N} x^N$$

$$-Z + \overline{c}^N x^N = -Z_0$$

Condição de Otimalidade

Analisando o sinal dos coeficientes na função objetivo das variáveis não básicas $\bar{c}^N = \left(c^N - c^B B^{-1} A^N\right) = \left(c^N - c^B \overline{A}^N\right)$:

Se $\bar{c}^N = \left(c^N - c^B B^{-1} A^N\right) = \left(c^N - c^B \overline{A}^N\right) \leq 0$

então a solução é ótima para maximização

Se $\bar{c}^N = \left(c^N - c^B B^{-1} A^N\right) = \left(c^N - c^B \overline{A}^N\right) \geq 0$

então a solução é ótima para minimização

Problema de Produção

- **Uma empresa de blindagem de veículos de passeio pode produzir três tipos de blindagem: econômica, normal e reforçada. O processo de blindagem pode ser representado por dois grandes processos independentes: funilaria e vidraçaria, cujos dados de produção são apresentados na tabela abaixo:**

	econômica	leve	pesada
Funilaria (homens-dia)	1/2	2	1
Vidraçaria (homens-dia)	1	2	4
Lucro ($1000/veic)	6	14	13

Disponibilidade de recursos mensais	
Funilaria (homens-dia por mês)	24
Vidraçaria (homens-dia por mês)	60

- **Determinar o plano de produção que maximize o lucro total.**

VARIAVEIS DE DECISÃO

- Quantas blindagens de cada tipo executar por mês ?

  x_1 = número de veículos blindados com blindagem econômica no mês

  x_2 = número de veículos blindados com blindagem leve no mês

  x_3 = número de veículos blindados com blindagem pesada no mês

Formulação Matemática

$$\max\ Lucro\ Total = 6x_1 + 14x_2 + 13x_3$$

$$sujeito\ a$$

$$\frac{1}{2}x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 24$$

$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 60$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Problema na forma padrão

Adicionando uma variável de folga para cada uma das restrições (x4 e x5):

$$\max LT = 6x_1 + 14x_2 + 13x_3$$

$$sujeito\ a$$

$$\frac{1}{2}x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \qquad = 24$$

$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 + \qquad x_5 = 60$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

1º tableau

		x1	x2	x3	x4	x5	b		
		6	14	13	0	0			
x4	0	1/2	2	1	1	0	24	12	⇐
x5	0	1	2	4	0	1	60	30	
Δj		6	14	13	0	0			
			⇑						

2º tableau

		x1	x2	x3	x4	x5	b		
		6	14	13	0	0			
x2	14	1/4	1	1/2	1/2	0	12	24	
x5	0	1/2	0	3	-1	1	36	12	⇐
Δj		2.5	0	6	-7	0			
				⇑					

2º tableau

		x1	x2	x3	x4	x5	b	
		6	14	13	0	0		
x2	14	1/4	1	1/2	1/2	0	12	24
x5	0	1/2	0	3	-1	1	36	12 ⇐
Δj		2.5	0	6	-7	0		
				⇑				

3º tableau

		x1	x2	x3	x4	x5	b	
		6	14	13	0	0		
x2	14	1/6	1	0	2/3	- 1/6	6	36 ⇐
x3	13	1/6	0	1	- 1/3	1/3	12	72
Δj		1.5	0	0	-5	-2		
		⇑						

3º tableau

		x1	x2	x3	x4	x5	b	
		6	14	13	0	0		
x2	14	1/6	1	0	2/3	- 1/6	6	36 ⇐
x3	13	1/6	0	1	- 1/3	1/3	12	72
Δj		1.5	0	0	-5	-2		
		⇑						

4º tableau

		x1	x2	x3	x4	x5	b
		6	14	13	0	0	
x1	6	1	6	0	4	-1	36
x3	13	0	-1	1	-1	1/2	6
Δj		0	-9	0	-11	- 1/2	

Solução ótima, pois todos os Δj negativos ou nulos

Observações

- Deve-se notar que cada um dos *tableaus* representa sempre o mesmo sistema de equações lineares, apenas escalonado de forma a permitir obter os resultados para as respectivas variáveis que são básicas:

$$
\begin{aligned}
&\max LT = 6x_1 + 14x_2 + 13x_3 \\
&\textit{sujeito a} \\
&\frac{1}{2}x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \qquad = 24 \\
&x_1 + 2x_2 + 4x_3 + \qquad x_5 = 60 \\
&x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\max LT = 2.5x_1 + 6x_3 - 7x_4 + 168 \\
&\textit{sujeito a} \\
&\frac{1}{4}x_1 + x_2 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 \qquad = 12 \\
&\frac{1}{2}x_1 \qquad + 3x_3 - \quad x_4 + x_5 = 36 \\
&x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{aligned}
$$

$$\max LT = 1.5x_1 - 5x_4 - 2x_5 + 240$$

sujeito a

$$\frac{1}{6}x_1 + x_2 + \frac{2}{3}x_4 - \frac{1}{6}x_5 = 6$$

$$\frac{1}{6}x_1 + x_3 - \frac{1}{3}x_4 + \frac{1}{3}x_5 = 12$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

$$\max LT = -9x_2 - 11x_4 - \frac{1}{2}x_5 + 294$$

sujeito a

$$x_1 + 6x_2 + 4x_4 - x_5 = 36$$

$$-x_2 + x_3 - x_4 + \frac{1}{2}x_5 = 6$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

Análise na forma matricial da solução ótima

$$\max LT = 6x_1 + 14x_2 + 13x_3$$

sujeito a

$$\frac{1}{2}x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \qquad = 24$$

$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 + \qquad x_5 = 60$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

$$B = \begin{bmatrix} 1/2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \qquad x^B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$A^N = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad x^N = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

$$c^B = \begin{bmatrix} 6 & 13 \end{bmatrix}$$

$$c^N = \begin{bmatrix} 14 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tableau Final

		x1	x2	x3	x4	x5	b
		6	14	13	0	0	
x1	6	1	6	0	4	-1	36
x3	13	0	-1	1	-1	1/2	6
Δj		0	-9	0	-11	- 1/2	

$$b = \begin{bmatrix} 24 \\ 60 \end{bmatrix}$$

Reconstrução do Tableau Final

$$B = \begin{bmatrix} 1/2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$x^B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 24 \\ 60 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\overline{A}^N = B^{-1}A^N = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1/2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 1/2 \end{bmatrix}$$

		x1	x2	x3	x4	x5	b
		6	14	13	0	0	
x1	6	1	6	0	4	-1	36
x3	13	0	-1	1	-1	1/2	6
Δj		0	-9	0	-11	- 1/2	

Forma Matricial

$$x^B + \bar{A}^N x^N = \bar{b}$$

$$Z = \underbrace{c^B B^{-1} b}_{Z_0} + \underbrace{\left(c^N - c^B B^{-1} A^N\right)}_{\bar{c}^N} x^N$$

$$-Z + \bar{c}^N x^N = -Z_0$$

$$c^B = \begin{bmatrix} 6 & 13 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 24 \\ 60 \end{bmatrix}$$

$$c^N = \begin{bmatrix} 14 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1/2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \quad x^B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad A^N = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad x^N = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

Problemas com restrição de ≥

- **Para iniciar a resolução é necessário transformar o problema na forma padrão, isto é, eliminar as desigualdades**
- **No caso de restrições do tipo ≥, as variáveis de excesso, que são subtraídas, não servem para obter a solução inicial viável, pois seu valor seria negativo e assume-se sempre que todas as variáveis do problema sejam positivas ou nulas (≥0)**
- **Assim, para cada restrição do tipo ≥ é preciso adicionar ainda uma variável artificial (isto é, que não faz parte do problema original). Para garantir que cada uma dessas variáveis artificiais seja nula (já que não pertence ao problema), é necessário penalizá-las na função objetivo, utilizando um coeficiente muito grande (M).**
- **Maximização usa-se - M e se for minimização + M na função objetivo**
- **Esse é o chamado método do M-Grande.**

Problema de Blindagem com restrição de ≥

- **Considere agora que seja necessário produzir pelo menos 5 blindagens do tipo 2**
  - Essas blindagens não são produzidas de acordo com a solução ótima obtida anteriormente em que não há restrição de quantidade mínima

Último tableau do problema sem essa restrição

		x1	x2	x3	x4	x5	b
		6	14	13	0	0	
x1	6	1	6	0	4	-1	36
x3	13	0	-1	1	-1	1/2	6
Δj		0	-9	0	-11	- 1/2	

Lembrando: solução ótima, pois todos os Δj negativos ou nulos

Nova Formulação Matemática

$$\max \; Lucro\;Total = 6x_1 + 14x_2 + 13x_3$$

$$sujeito\;a$$

$$\frac{1}{2}x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 24$$

$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 60$$

$$x_2 \geq 5$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Novo problema na forma padrão

1) Adiciona-se uma variável de folga para cada uma das duas primeiras restrições (x4 e x5)

2) Adiciona-se uma variável de excesso (x6) para a restrição de ≥

$$\max LT = 6x_1 + 14x_2 + 13x_3$$

$$sujeito\ a$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \qquad\qquad &= 24 \\
x_1 + 2x_2 + 4x_3 + \qquad x_5 \qquad &= 60 \\
x_2 \qquad\qquad\qquad - x_6 &= 5 \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 &
\end{aligned}$$

Inserindo variável artificial na restrição de ≥

- **É preciso inserir uma variável artificial em cada restrição de maior e igua (≥) a fim de possibilitar obter uma solução inicial viável sem a necessidade de efetuar pivotações através de Gauss Jordan. No caso a variável artificial x7, devidamente penalizada na função objetivo através do M-grande (com sinal negativo pois a função objetivo é de maximizar)**

$$\max LT = 6x_1 + 14x_2 + 13x_3 - Mx_7$$

$$\textit{sujeito a}$$

$$\frac{1}{2}x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 24$$

$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_5 = 60$$

$$x_2 - x_6 + x_7 = 5$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0$$

1º tableau

		x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	b	
		6	14	13	0	0	0	-M		
x4	0	1/2	2	1	1	0	0	0	24	12
x5	0	1	2	4	0	1	0	0	60	30
x7	-M	0	1	0	0	0	-1	1	5	5 ⇐
Δj		6	+M+14	13	0	0	-M	0		
			⇑							

2º tableau

		x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	b	
		6	14	13	0	0	0	-M		
x4	0	1/2	0	1	1	0	2	-2	14	7 ⇐
x5	0	1	0	4	0	1	2	-2	50	25
x2	14	0	1	0	0	0	-1	1	5	-5
Δj		6	0	13	0	0	14	-M-14		
							⇑			

2º tableau

		x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	b		
		6	14	13	0	0	0	-M			
x4	0	1/2	0	1	1	0	2	-2	14	7	⇐
x5	0	1	0	4	0	1	2	-2	50	25	
x2	14	0	1	0	0	0	-1	1	5	-5	
Δj		6	0	13	0	0	14	-M-14			
							⇑				

3º tableau

		x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	b		
		6	14	13	0	0	0	-M			
x6	0	1/4	0	1/2	1/2	0	1	-1	7	14	
x5	0	1/2	0	3	-1	1	0	0	36	12	⇐
x2	14	1/4	1	1/2	1/2	0	0	0	12	24	
Δj		2.5	0	6	-7	0	0	-M			
				⇑							

3º tableau

		x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	b	
		6	14	13	0	0	0	-M		
x6	0	1/4	0	1/2	1/2	0	1	-1	7	14
x5	0	1/2	0	3	-1	1	0	0	36	12 ⇐
x2	14	1/4	1	1/2	1/2	0	0	0	12	24
Δj		2.5	0	6	-7	0	0	-M		
				⇑						

4º tableau

		x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	b	
		6	14	13	0	0	0	-M		
x6	0	1/6	0	0	2/3	- 1/6	1	-1	1	6 ⇐
x3	13	1/6	0	1	- 1/3	1/3	0	0	12	72
x2	14	1/6	1	0	2/3	- 1/6	0	0	6	36
Δj		1 1/2	0	0	-5	-2	0	-M		
		⇑								

4º tableau

		x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	b	
		6	14	13	0	0	0	-M		
x6	0	1/6	0	0	2/3	- 1/6	1	-1	1	6 ⇐
x3	13	1/6	0	1	- 1/3	1/3	0	0	12	72
x2	14	1/6	1	0	2/3	- 1/6	0	0	6	36
Δj		1 1/2	0	0	-5	-2	0	-M		
		⇑								

5º tableau

		x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	b
		6	14	13	0	0	0	-M	
x1	6	1	0	0	4	-1	6	-6	6
x3	13	0	0	1	-1	0.5	-1	1	11
x2	14	0	1	0	0	0	-1	1	5
Δj		0	0	0	-11	-0.5	-9	-M+9	

Portanto,solução ótima, pois todos os Δj negativos ou nulos e problema de maximização

Outro exemplo com restrição $\geq$

$$[\text{Max}] \quad Z = 80x1 + 60x2$$

$$\begin{aligned} \text{sa} \quad & 20x_1 + 32x_2 \leq 25 \\ & x_1 + x_2 \geq 1 \\ & x_1 ,\ x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Forma Padrão

[

$$[\text{Max}]\ Z = 80x_1 + 60x_2 \qquad -Mx_5$$

$$
\begin{array}{llllllll}
\text{sa} & 20x_1 & +32x_2 & +x_3 & & & = 25 \\
 & x_1 & +x_2 & & -x_4 & +x_5 & = 1
\end{array}
$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 \geq 0$$

x3 = variável de folga
x4 = variável de excesso
x5 = variável artificial
A variável artificial é penalizada na função objetivo (M-grande)

Tableau Inicial

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5			
		80	60	0	0	$-M$			
x_3	0	20	32	1	0	0	25	25/20	= 1,25
x_5	$-M$	$\boxed{1}$	1	0	-1	1	1	1/1	= 1 ←
		80+M	60+M	0	-M	0			
		↑							

Variável que entra é escolhida pelo maior ganho unitário

Variável que sai é definida pelo menor valor não negativo

2º Tableau

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
		80	60	0	0	$-M$		
x_3	0	0	12	1	20	-20	5	1/4
x_1	80	1	1	0	-1	1	1	1/-1
		0	-20	0	80	-M-80		

Variável que entra é escolhida pelo maior ganho unitário

Variável que sai é definida pelo menor valor não negativo

3º Tableau (solução ótima)

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
		80	60	0	0	-M	
x_4	0	0	3/5	1/20	1	-1	1/4
x_1	80	1	8/5	1/20	0	0	5/4
		0	-68	-4	0	-M	

Não há mais ganho (todos Δj são negativos e o problema é de maximização)

Exemplo 3 –Radiação para cura de tumor

	fração média da dose de entrada absorvida pela área		Restrições da radiação total média, em Krads
	feixe tipo 1	feixe tipo 2	
tecidos sadios	0.4	0.5	Minimizar
tecidos críticos	0.3	0.1	≤ 2.7
região do tumor	0.5	0.5	= 6
centro do tumor	0.6	0.4	≥ 6

- **Variáveis de decisão:**
  - x_1 = dose do feixe tipo 1 a ser aplicada ao paciente (Krads)
  - x_2 = dose do feixe tipo 2 a ser aplicada ao paciente (Krads)

Formulação Matemática

$$\min \; Z = 0.4x_1 + 0.5x_2$$

$$sujeito\ a$$

$$0.3x_1 + 0.1x_2 \leq 2.7$$

$$0.5x_1 + 0.5x_2 = 6$$

$$0.6x_1 + 0.4x_2 \geq 6$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Formulação Matemática – Problema na forma padrão

$$\min Z = 0.4x_1 + 0.5x_2 + Mx_4 + Mx_6$$

$$\textit{sujeito a}$$

$$0.3x_1 + 0.1x_2 + x_3 = 2.7$$

$$0.5x_1 + 0.5x_2 + x_4 = 6$$

$$0.6x_1 + 0.4x_2 - x_5 + x_6 = 6$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

- x_3 = variável de folga (restrição $\leq$)
- x_5 = variável de excesso (restrição $\geq$)
- x_4 , x_6 = variáveis artificiais, inseridas com a finalidade única de gerar uma solução inicial viável, devidamente penalizadas na função objetivo (M)

Tableau inicial

		x1	x2	x3	x4	x5	x6	b		
		0.4	0.5	0	+M	0	+M			
x3	0	0.3	0.1	1	0	0	0	2.7	9	x3 sai
x4	+M	0.5	0.5	0	1	0	0	6	12	
x6	+M	0.6	0.4	0	0	-1	1	6	10	
		-1.1M+0.4	-0.9M+0.5	0	0	+M	0	0		
		x1 entra								

Note que aqui se escolhe o Δj mais negativo para identificar a variável que entra na base, pois o problema é de minimização

Por outro lado, a escolha da variável que sai não muda, independentemente do problema ser de maximização ou minimização. É do menor quociente, pois é a mais limitante, a que zera primeiro

2º tableau

		x1	x2	x3	x4	x5	x6	b		
		0.4	0.5	0	+M	0	+M			
x1	0.4	1	1/3	10/3	0	0	0	9	27	
x4	+M	0	1/3	- 5/3	1	0	0	1.5	4.5	
x6	+M	0	0.2	-2	0.0	-1	1	0.6	3	x6 sai
		0	-16M30+11/30	11/3M-4/3	0	+M	0	3.6		
			x2 entra							

3º tableau

		x1	x2	x3	x4	x5	x6	b		
		0.4	0.5	0	+M	0	+M			
x1	0.4	1	0	20/3	0	5/3	- 5/3	8	24/5	
x4	+M	0	0	5/3	1	5/3	- 5/3	0.5	1/3	x4 sai
x2	0.5	0	1	-10	0	-5	5	3	-0.6	nunca escolho
		0	0	-5M/3+7/3	0	-5M/3+11/6	+8M/3-11/6	4.7		negativo
						x5 entra				

Lembrar que na escolha da variável que sai (no caso x4), devem ser desconsideradas as variáveis cujo quociente dá negativo (no caso x2) pois elas não impõem limite no aumento da variável que entra.

Ou seja, se depender de x2, a variável x5 pode aumentar indefinidamente, como mostrado em aula

4º tableau (final) – solução ótima

		x1	x2	x3	x4	x5	x6	b
		0.4	0.5	0	+M	0	+M	
x1	0.4	1	0	5	-1	0	0	7.5
x5	0	0	0	1	0.6	1	-1	0.3
x2	0.5	0	1	-5	3	0	0	4.5
		0	0	0.5	M-1.1	0	M	5.25

Portanto,solução ótima, pois todos os Δj positivos ou nulos e problema é de minimização

Minimizar x Maximizar

$$\textit{Minimizing} \qquad Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

is equivalent to

$$\textit{maximizing} \qquad -Z = \sum_{j=1}^{n} (-c_j) x_j;$$

$$\begin{array}{lll} & \text{Minimize} & Z = 0.4x_1 + 0.5x_2 \\ \rightarrow & \text{Maximize} & -Z = -0.4x_1 - 0.5x_2. \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} & \text{Minimize} & Z = 0.4x_1 + 0.5x_2 + M\bar{x}_4 + M\bar{x}_6 \\ \rightarrow & \text{Maximize} & -Z = -0.4x_1 - 0.5x_2 - M\bar{x}_4 - M\bar{x}_6. \end{array}$$

Método das Duas Fases

Big M method: Minimize $Z = 0.4x_1 + 0.5x_2 + M\bar{x}_4 + M\bar{x}_6.$

Two-phase method:

Phase 1: Minimize $Z = \bar{x}_4 + \bar{x}_6$ (until $\bar{x}_4 = 0, \bar{x}_6 = 0$).
Phase 2: Minimize $Z = 0.4x_1 + 0.5x_2$ (with $\bar{x}_4 = 0, \bar{x}_6 = 0$).

Phase 1 Problem (Radiation Therapy Example):

Minimize $Z = \bar{x}_4 + \bar{x}_6,$

subject to

$$
\begin{aligned}
0.3x_1 + 0.1x_2 + x_3 \phantom{+ \bar{x}_4 - x_5 + \bar{x}_6} &= 2.7 \\
0.5x_1 + 0.5x_2 + \bar{x}_4 \phantom{- x_5 + \bar{x}_6} &= 6 \\
0.6x_1 + 0.4x_2 \phantom{+ x_3 + \bar{x}_4} - x_5 + \bar{x}_6 &= 6
\end{aligned}
$$

and

$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad \bar{x}_4 \geq 0, \quad x_5 \geq 0, \quad \bar{x}_6 \geq 0.$

Fase I

TABLE 4.13 Phase 1 of the two-phase method for the radiation therapy example

Iteration	Basic Variable	Eq.	Z	x_1	x_2	x_3	$\bar{x}_4$	x_5	$\bar{x}_6$	Right Side
0	Z	(0)	−1	−1.1	−0.9	0	0	1	0	−12
	x_3	(1)	0	0.3	0.1	1	0	0	0	2.7
	$\bar{x}_4$	(2)	0	0.5	0.5	0	1	0	0	6
	$\bar{x}_6$	(3)	0	0.6	0.4	0	0	−1	1	6
1	Z	(0)	−1	0	$-\frac{16}{30}$	$\frac{11}{3}$	0	1	0	−2.1
	x_1	(1)	0	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{10}{3}$	0	0	0	9
	$\bar{x}_4$	(2)	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{5}{3}$	1	0	0	1.5
	$\bar{x}_6$	(3)	0	0	0.2	−2	0	−1	1	0.6
2	Z	(0)	−1	0	0	$-\frac{5}{3}$	0	$-\frac{5}{3}$	$\frac{8}{3}$	−0.5
	x_1	(1)	0	1	0	$\frac{20}{3}$	0	$\frac{5}{3}$	$-\frac{5}{3}$	8
	$\bar{x}_4$	(2)	0	0	0	$\frac{5}{3}$	1	$\frac{5}{3}$	$-\frac{5}{3}$	0.5
	x_2	(3)	0	0	1	−10	0	−5	5	3
3	Z	(0)	−1	0	0	0	1	0	1	0
	x_1	(1)	0	1	0	0	−4	−5	5	6
	x_3	(2)	0	0	0	1	$\frac{3}{5}$	1	−1	0.3
	x_2	(3)	0	0	1	0	6	5	−5	6

Fase II

TABLE 4.14 Preparing to begin phase 2 for the radiation therapy example

	Basic Variable	Eq.	Coefficient of: Z	x_1	x_2	x_3	$\bar{x}_4$	x_5	$\bar{x}_6$	Right Side
Final Phase 1 tableau	Z	(0)	−1	0	0	0	1	0	1	0
	x_1	(1)	0	1	0	0	−4	−5	5	6
	x_3	(2)	0	0	0	1	$\frac{3}{5}$	1	−1	0.3
	x_2	(3)	0	0	1	0	6	5	−5	6
Drop $\bar{x}_4$ and $\bar{x}_6$	Z	(0)	−1	0	0	0		0		0
	x_1	(1)	0	1	0	0		−5		6
	x_3	(2)	0	0	0	1		1		0.3
	x_2	(3)	0	0	1	0		5		6
Substitute phase 2 objective function	Z	(0)	−1	0.4	0.5	0		0		0
	x_1	(1)	0	1	0	0		−5		6
	x_3	(2)	0	0	0	1		1		0.3
	x_2	(3)	0	0	1	0		5		6
Restore proper form from Gaussian elimination	Z	(0)	−1	0	0	0		−0.5		−5.4
	x_1	(1)	0	1	0	0		−5		6
	x_3	(2)	0	0	0	1		1		0.3
	x_2	(3)	0	0	1	0		5		6

Fase II

TABLE 4.15 Phase 2 of the two-phase method for the radiation therapy example

Iteration	Basic Variable	Eq.	Coefficient of: Z	x_1	x_2	x_3	x_5	Right Side
0	Z	(0)	−1	0	0	0	−0.5	−5.4
	x_1	(1)	0	1	0	0	−5	6
	x_3	(2)	0	0	0	1	1	0.3
	x_2	(3)	0	0	1	0	5	6
1	Z	(0)	−1	0	0	0.5	0	−5.25
	x_1	(1)	0	1	0	5	0	7.5
	x_5	(2)	0	0	0	1	1	0.3
	x_2	(3)	0	0	1	−5	0	4.5

Problemas com variáveis irrestritas

Cada variável irrestrita x_j, é substituída por duas, uma para o valor positivo x_j^+ e outra para o valor negativo x_j^-

$$x_j = x_j^+ - x_j^-, \qquad \text{where } x_j^+ \geq 0,\ x_j^- \geq 0.$$

Uma delas é obrigatoriamente nula

$$\begin{array}{ll} \text{Maximize} & Z = 3x_1 + 5x_2, \\ \text{subject to} & x_1 \leq 4 \\ & 2x_2 \leq 12 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 18 \\ & x_2 \geq 0 \text{ (only)} \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{ll} \text{Maximize} & Z = 3x_1^+ - 3x_1^- + 5x_2, \\ \text{subject to} & x_1^+ - x_1^- \leq 4 \\ & 2x_2 \leq 12 \\ & 3x_1^+ - 3x_1^- + 2x_2 \leq 18 \\ & x_1^+ \geq 0, \quad x_1^- \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{array}$$