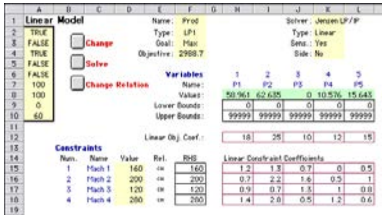


DUALIDADE

Prof. Dr. Claudio Barbieri da Cunha

Escola Politécnica

Universidade de São Paulo
Brasil

cbcunha@usp.br

Considere o seguinte problema de programação linear

Maximizar $Z = 4x_1 + x_2 + 3x_3$

sujeito a

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 \quad &\leq 1 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 &\leq 3, \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

- **Uma possível solução viável para o mesmo seria:**

$$x_1 = 0$$
$$x_2 = 0$$
$$x_3 = 3$$
$$Z = 9$$

- **Cada solução viável (vértice) representa um limitante inferior da função objetivo, ou seja:**

$$Z \leq Z_{max}$$

Examinemos agora as duas restrições do problema

Maximizar $Z = 4x_1 + x_2 + 3x_3$
sujeito a

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 \quad\quad &\leq 1 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 &\leq 3 \end{aligned}$$

- **Também pode-se obter facilmente um limitante <u>superior</u> para Z, através da combinação linear das restrições, com pesos 2 e 3:**

$$\begin{aligned} 2\,(x_1 + 4x_2 \quad\quad) &\leq 2\,(1) \\ +\,3\,(3x_1 - x_2 + x_3) &\leq 3\,(3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 8x_2 \quad\quad\quad &\leq 2 \\ +\,9x_1 - 3x_2 + 3x_3 &\leq 9 \end{aligned}$$

$$11x_1 + 5x_2 + 3x_3 \leq 11$$

Comparemos essa expressão com a função objetivo

Maximizar $Z = 4x_1 + x_2 + 3x_3$

sujeito a

$$x_1 + 4x_2 \leq 1$$
$$3x_1 - x_2 + x_3 \leq 3$$

$$11x_1 + 5x_2 + 3x_3 \leq 11$$
$$\geq \quad \geq \quad \geq$$
$$Z = 4x_1 + 1x_2 + 3x_3$$

Portanto, podemos concluir que**:**

$$Z = 4x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 11x_1 + 5x_2 + 3x_3 \leq 11$$

Logo, $Z = 4x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 11$

Portanto **Z = 11** é um limitante <u>superior</u> da função objetivo**.**

Esse procedimento de combinação linear pode ser generalizado:

Maximizar $Z = 4x_1 + x_2 + 3x_3$

sujeito a

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 \quad &\leq 1 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 &\leq 3 \end{aligned}$$

- A fim de buscar o menor limitante superior para Z, com pesos π_1 e π_2 :

$$\begin{aligned} \pi_1 (x_1 + 4x_2 \quad) &\leq \pi_1 (1) \\ + \pi_2 (3x_1 - x_2 + x_3) &\leq \pi_2 (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \pi_1 x_1 + 4\pi_1 x_2 \quad &\leq \pi_1 \\ +3\pi_2 x_1 - \pi_2 x_2 + \pi_2 x_3 &\leq 3\pi_2 \end{aligned}$$

$$(\pi_1 + 3\pi_2)x_1 + (4\pi_1 - \pi_2)x_2 + \pi_2 x_3 \leq \pi_1 + 3\pi_2$$

Analisando novamente a função objetivo e a expressão

Maximizar $Z = 4x_1 + x_2 + 3x_3$

sujeito a

$$
\begin{aligned}
x_1 + 4x_2 \quad & \leq 1 \\
3x_1 - x_2 + x_3 & \leq 3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & (\pi_1 + 3\pi_2)x_1 & + & (4\pi_1 - \pi_2)x_2 & + & \pi_2 x_3 & \leq \pi_1 + 3\pi_2 \\
 & \geq & & \geq & & \geq & \\
Z = & 4x_1 & + & 1x_2 & + & 3x_3 &
\end{array}
$$

Chegamos ao seguinte problema de programação linear:

Minimizar $\pi_1 + 3\pi_2$

sujeito a

$$
\begin{aligned}
\pi_1 + 3\pi_2 & \geq 4 \\
4\pi_1 - \pi_2 & \geq 1 \\
\pi_2 & \geq 3 \\
\pi_1 \geq 0, \ \pi_2 & \geq 0
\end{aligned}
$$

Dual

Definindo o Dual

Dual :

Minimizar $\pi_1 + 3\pi_2$

sujeito a

$$\begin{aligned} \pi_1 + 3\pi_2 &\geq 4 \\ 4\pi_1 - \pi_2 &\geq 1 \\ \pi_2 &\geq 3 \\ \pi_1 \geq 0,\ \pi_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Primal :

Maximizar $4x_1 + x_2 + 3x_3$

sujeito a

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 &\leq 1 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 &\leq 3 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Genericamente, o problema Primal e o Dual Associado

Primal Problem

Maximize $\quad Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j,$

subject to

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad \text{for } i = 1, 2, \ldots, m$$

and

$$x_j \ge 0, \quad \text{for } j = 1, 2, \ldots, n.$$

Dual Problem

Minimize $\quad W = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i,$

subject to

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j, \quad \text{for } j = 1, 2, \ldots, n$$

and

$$y_i \ge 0, \quad \text{for } i = 1, 2, \ldots, m.$$

Primal e Dual Associados

Primal Problem

Maximize $Z = \mathbf{cx}$,

subject to

$$\mathbf{Ax} \le \mathbf{b}$$

and

$$\mathbf{x} \ge \mathbf{0}.$$

Dual Problem

Minimize $W = \mathbf{yb}$,

subject to

$$\mathbf{yA} \ge \mathbf{c}$$

and

$$\mathbf{y} \ge \mathbf{0}.$$

One Problem		Other Problem
Constraint *i*	$\longleftrightarrow$	Variable *i*
Objective function	$\longleftrightarrow$	Right sides

Exemplo de dualidade (1)

Primal Problem in Algebraic Form

Maximize $Z = 3x_1 + 5x_2$,

subject to

$$\begin{aligned} x_1 \quad\quad &\leq 4 \\ 2x_2 &\leq 12 \\ 3x_1 + 2x_2 &\leq 18 \end{aligned}$$

and $x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$

Dual Problem in Algebraic Form

Minimize $W = 4y_1 + 12y_2 + 18y_3$,

subject to

$$\begin{aligned} y_1 \quad\quad + 3y_3 &\geq 3 \\ 2y_2 + 2y_3 &\geq 5 \end{aligned}$$

and

$$y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0, \quad y_3 \geq 0.$$

Primal Problem in Matrix Form

Maximize $Z = [3,\ 5]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$,

subject to

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}$$

and

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dual Problem in Matrix Form

Minimize $W = [y_1, y_2, y_3]\begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}$

subject to

$$[y_1,\ y_2,\ y_3]\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \geq [3,\ 5]$$

and

$$[y_1,\ y_2,\ y_3] \geq [0,\ 0,\ 0].$$

Exemplo de dualidade (1)

- **Primal**

$$\text{Maximize } z = 0.043x_A + 0.027x_B + 0.025x_C + 0.022x_D + 0.045x_E,$$

subject to:

$$\begin{array}{lrrrrrl}
\textit{Cash} & x_A + & x_B + & x_C + & x_D + & x_E & \leq 10, \\
\textit{Governments} & & x_B + & x_C + & x_D & & \geq 4, \\
\textit{Quality} & 0.6x_A + & 0.6x_B - & 0.4x_C - & 0.4x_D + & 3.6x_E & \leq 0, \\
\textit{Maturity} & 4x_A + & 10x_B - & x_C - & 2x_D - & 3x_E & \leq 0,
\end{array}$$

$$x_A \geq 0, \quad x_B \geq 0, \quad x_C \geq 0, \quad x_D \geq 0, \quad x_E \geq 0.$$

- **Primal Ajustado**

$$\text{Maximize } z = 0.043x_A + 0.027x_B + 0.025x_C + 0.022x_D + 0.045x_E,$$

subject to:

$$\begin{array}{rrrrrl}
x_A + & x_B + & x_C + & x_D + & x_E & \leq 10, \\
- & x_B - & x_C - & x_D & & \leq -4, \\
0.6x_A + & 0.6x_B - & 0.4x_C - & 0.4x_D + & 3.6x_E & \leq 0, \\
4x_A + & 10x_B - & x_C - & 2x_D - & 3x_E & \leq 0,
\end{array}$$

$$x_A \geq 0, \quad x_B \geq 0, \quad x_C \geq 0, \quad x_D \geq 0, \quad x_E \geq 0.$$

Exemplo de dualidade (1)

- **Primal ajustado**

$$\text{Maximize } z = 0.043x_A + 0.027x_B + 0.025x_C + 0.022x_D + 0.045x_E,$$

subject to:

$$\begin{aligned}
x_A + x_B + x_C + x_D + x_E &\le 10,\\
- x_B - x_C - x_D &\le -4,\\
0.6x_A + 0.6x_B - 0.4x_C - 0.4x_D + 3.6x_E &\le 0,\\
4x_A + 10x_B - x_C - 2x_D - 3x_E &\le 0,
\end{aligned}$$

$$x_A \ge 0, \quad x_B \ge 0, \quad x_C \ge 0, \quad x_D \ge 0, \quad x_E \ge 0.$$

- **Dual**

$$\text{Minimize } v = 10y_1 - 4y_2,$$

subject to:

$$\begin{aligned}
y_1 + 0.6y_3 + 4y_4 &\ge 0.043,\\
y_1 - y_2 + 0.6y_3 + 10y_4 &\ge 0.027,\\
y_1 - y_2 - 0.4y_3 - y_4 &\ge 0.025,\\
y_1 - y_2 - 0.4y_3 - 2y_4 &\ge 0.022,\\
y_1 + 3.6y_3 - 3y_4 &\ge 0.045,
\end{aligned}$$

O Problema Dual

O DUAL PL :

- Maximizar $\sum_{i=1,m} (-b_i)\ \pi_i$

sujeito a

$\sum_{i=1,m} (-a_{ij})\ \pi_i \leq (-c_j)$	**para todo j = 1, 2, …, n**
$\pi_j \geq 0$	**para todo i = 1, 2, … , m**

DUAL DO DUAL PL:

-Minimizar $\sum_{j=1,n} (-c_j)x_j$

sujeito a

$\sum_{j=1,n} (-a_{ij})\ x_j \geq (-b_j)$	**para todo i = 1, 2, …, m**
$x_j \geq 0$	**para todo j = 1, 2, … , n**

Que é exatamente o problema primal.

Dual do Dual

- **Resulta no primal!**

Minimize $W = \mathbf{yb}$,

subject to

$$\mathbf{yA} \geq \mathbf{c}$$

and

$$\mathbf{y} \geq \mathbf{0}.$$

Converted to Standard Form

Maximize $(-W) = -\mathbf{yb}$,

subject to

$$-\mathbf{yA} \leq -\mathbf{c}$$

and

$$\mathbf{y} \geq \mathbf{0}.$$

Its Dual Problem

Minimize $(-Z) = -\mathbf{cx}$,

subject to

$$-\mathbf{Ax} \geq -\mathbf{b}$$

and

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}.$$

Maximize $Z = \mathbf{cx}$,

subject to

$$\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$$

and

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}.$$

O Teorema Fraco da Dualidade

TEOREMA:

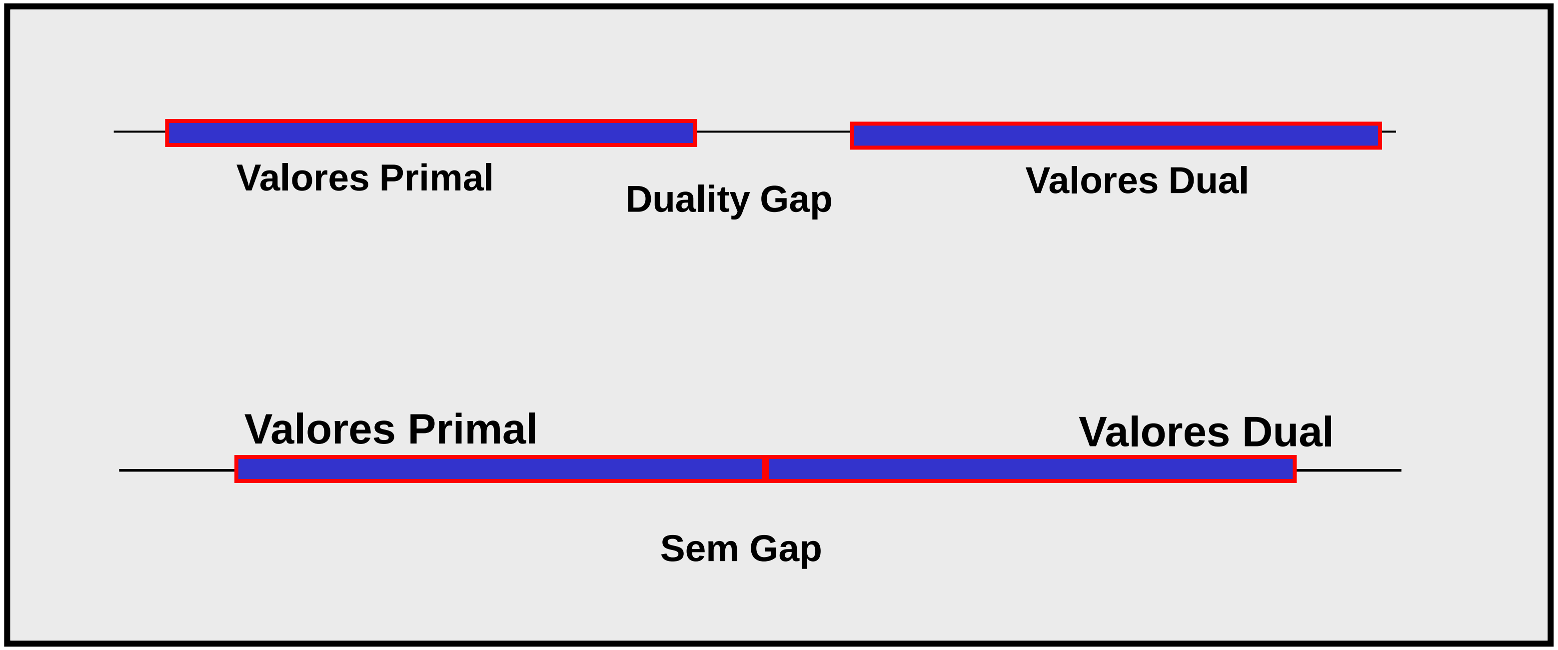
Se $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ for viável para o problema primal e $(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_m)$ for viável para o problema dual, então

$$\sum_{j=1,n} c_j x_j \quad \leq \quad \sum_{i=1,m} \pi_i \, b_i$$

PROVA:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1,n} c_j x_j &\leq \sum_{j=1,n} \left(\sum_{i=1,m} \pi_i \, a_{ij}\right) x_j \\
&= \sum_{j=1,n} \sum_{i=1,m} \pi_i \, a_{ij} \, x_j \\
&= \sum_{i=1,m} \left(\sum_{j=1,n} a_{ij} x_j\right) \pi_i \\
&\leq \sum_{i=1,m} b_i \, \pi_i
\end{aligned}$$

Implicações do Teorema Fraco da Dualidade



TEOREMA:

Se $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ for viável para o problema primal e $(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_m)$ for viável para o problema dual e

$$\sum_{j=1,n} c_j x_j = \sum_{i=1,m} b_i \pi_i$$

então x é a solução ótima para o problema primal e π a solução ótima para o problema dual.

Teorema Forte da Dualidade

<u>TEOREMA</u>: Se o problema primal tem uma solução ótima

$$\mathbf{x}^* = \left(\mathbf{x}_1^*, \mathbf{x}_2^* \ldots, \mathbf{x}_\mathbf{n}^*\right)$$

então do dual também tem uma solução ótima

$$\pi^* = \left(\pi_1^*, \pi_2^* \ldots, \pi_\mathbf{m}^*\right)$$

tal que

$$\sum_{\mathbf{j}=1}^{\mathbf{n}} \mathbf{c}_\mathbf{j} \mathbf{x}_\mathbf{j}^* = \sum_{\mathbf{i}=1}^{\mathbf{m}} \mathbf{b}_\mathbf{i} \pi_\mathbf{i}^*$$

Consequências

1	*Primal feasible* Maximize $z = 2x_1 + x_2$, subject to: $x_1 + x_2 \leq 4$, $x_1 - x_2 \leq 2$, $x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$.	*Dual feasible* Minimize $v = 4y_1 + 2y_2$, subject to: $y_1 + y_2 \geq 2$, $y_1 - y_2 \geq 1$, $y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0$.
2	*Primal feasible and unbounded* Maximize $z = 2x_1 + x_2$, subject to: $x_1 - x_2 \leq 4$, $x_1 - x_2 \leq 2$, $x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$.	*Dual infeasible* Minimize $v = 4y_1 + 2y_2$, subject to: $y_1 + y_2 \geq 2$, $-y_1 - y_2 \geq 1$, $y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0$.
3	*Primal infeasible* Maximize $z = 2x_1 + x_2$, subject to: $-x_1 - x_2 \leq -4$, $x_1 + x_2 \leq 2$, $x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$.	*Dual feasible and unbounded* Minimize $v = -4y_1 + 2y_2$, subject to: $-y_1 + y_2 \geq 2$, $-y_1 + y_2 \geq 1$, $y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0$.
4	*Primal infeasible* Maximize $z = 2x_1 + x_2$, subject to: $-x_1 + x_2 \leq -4$, $x_1 - x_2 \leq 2$, $x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$.	*Dual infeasible* Minimize $v = -4y_1 + 2y_2$, subject to: $-y_1 + y_2 \geq 2$, $y_1 - y_2 \geq 1$, $y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0$.

Regras para formar o Dual

Primal (Maximize)	*Dual (Minimize)*
ith constraint $\leq$	ith variable ≥ 0
ith constraint $\geq$	ith variable ≤ 0
ith constraint $=$	ith variable unrestricted
jth variable ≥ 0	jth constraint $\geq$
jth variable ≤ 0	jth constraint $\leq$
jth variable unrestricted	jth constraint $=$

Exemplo 2

- **Problema de tratamento de câncer**

Primal Problem		*Dual Problem*	
Maximize	$-Z = -0.4x_1 - 0.5x_2,$	Minimize	$W = 2.7y_1 + 6y_2 + 6y_3',$
subject to		subject to	
(S)	$0.3x_1 + 0.1x_2 \leq 2.7$ ⟷	$y_1 \geq 0$	(S)
(O)	$0.5x_1 + 0.5x_2 = 6$ ⟷	y_2 unconstrained in sign	(O)
(B)	$0.6x_1 + 0.4x_2 \geq 6$ ⟷	$y_3' \leq 0$	(B)
and		and	
(S)	$x_1 \geq 0$ ⟷	$0.3y_1 + 0.5y_2 + 0.6y_3' \geq -0.4$	(S)
(S)	$x_2 \geq 0$ ⟷	$0.1y_1 + 0.5y_2 + 0.4y_3' \geq -0.5$	(S)

Método Dual Simplex

- O método dual simplex é um alternativa para resolver problemas de programação linear
- Ele pode ser resolvido no lugar do primal
- Para inúmeros problemas, o método dual simplex é mais rápido que o método simplex primal.
- Por exemplo, se o número de restrições for muito maior que o de variáveis é aconselhável resolver o dual pois o tempo de processamento cresce mais rapidamente com o número de restrições do que com o número de variáveis
- Ele permite adicionar restrições sem ter que começar o problema do zero (uma restrição equivale a uma variável no dual)
- O método dual simplex é muito útil para análises de sensibilidade.