Échantillonnage Préférentiel
Options exotiques

Louis Douge & Nidham Gazagnadou

ENSTA ParisTech

28 Avril 2016

Plan de la présentation

Le modèle de Black-Scholes

Vecteur des prix des actifs risqués $S(t) = (S_1(t), S_2(t), S_3(t))$
Mouvement brownien $W(t) = (W_1(t), W_2(t), W_3(t))$ de matrice de corrélation :

$$\begin{pmatrix} 1 & \rho_{1,2} & \rho_{1,3} \\ \rho_{1,2} & 1 & \rho_{2,3} \\ \rho_{1,3} & \rho_{2,3} & 1 \end{pmatrix}$$

La dynamique des cours est donnée par :

$$\frac{dS_i(t)}{S_i(t)} = rdt + \sigma_i dW_i(t), \forall i \in \{1, 2, 3\}$$

Détermination du prix S(t)

Pour i $\in$ {1,2,3}, S_i est un processus d'Itô, on applique donc la formule d'Itô au processus suivant :

$$\begin{aligned} log(S_i(t)) &= log(S_i(0)) + \int_0^t \frac{dS_i u}{S_i(u)} + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\sigma_i^2 S_i(u)^2 du}{-S_i(u)^2} \\ &= log(S_i(0)) + \int_0^t rdu + \int_0^t \sigma_i dW_i u - \frac{1}{2}\sigma_i^2 t \\ &= log(S_i(0)) + (r - \frac{\sigma_i^2}{2})t + \sigma_i W_i(t) \end{aligned}$$

En conclusion,

$$S_i(t) = S(0)exp((r - \frac{\sigma_i^2}{2})t + \sigma_i W_i(t)), \forall i \in \{1, 2, 3\}$$

Égalité des espérances

Pour g :$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, intégrable

$$\forall \theta \in \mathbb{R}_n, \mathbb{E}[g(X)] = \mathbb{E}[g(X+\theta)e^{-\theta.X-\frac{1}{2}|\theta|^2}]$$

Intervalle de confiance (de niveau 90%) :

$$\left[\mathbb{E}[g(X)] \pm 1,6449\sqrt{\frac{\mathbb{V}ar(g(X))}{N}}\right]$$

$$\mathbb{E}[g(X)] = \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\frac{e^{\frac{-x^t\Sigma^{-1}x}{2}}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}|\Sigma|^{\frac{1}{2}}}dx \text{ (par définition)}$$

Égalité des espérances

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[g(X)] = \; &= \int_{\mathbb{R}^n} g(x) \frac{e^{\frac{-x^t \Sigma^{-1} x}{2}}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |\Sigma|^{\frac{1}{2}}} dx \text{ (par définition)} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} g(x) \frac{e^{\frac{-x^t x}{2}}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} dx \text{ (car ici } \Sigma = I_n) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} g(x+\theta) \frac{e^{\frac{-x^t x}{2}}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\theta x - \frac{1}{2}|\theta|^2} dx\end{aligned}$$

avec le changement de variable $x := x + \theta$, et après simplification.
On a bien finalement :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}^n \mathbb{E}[g(X)] = \mathbb{E}[\underbrace{g(X+\theta) e^{-\theta X - \frac{1}{2}|\theta|^2}}_{f(\theta, X)}]$$

Quel θ choisir ?

Il s'agit s'annuler le gradient de la variance

$$\nabla_\theta \mathbb{V}ar(f(\theta, X)) = \mathbb{E}[(\theta - X)g(X)^2 e^{-\theta X + \frac{1}{2}|\theta|^2}]$$

$$\nabla_\theta \mathbb{V}ar(f(\theta, X)) = \nabla_\theta \mathbb{E}[f^2(\theta, X)]$$

- Retour à la définition : $\nabla_\theta \int_{\mathbb{R}^n} g^2(x+\theta) e^{-2\theta x - |\theta|^2} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx$
- changement de variable $y := x + \theta$
- Théorème de dérivation sous l'intégrale $\nabla_\theta \int_{\mathbb{R}^n} = \int_{\mathbb{R}^n} \nabla_\theta$

Prix analytique dans le cas d'un call européen

Modèle unidimensionnel de call européen

$$g : x \in \mathbb{R} \to (S_0.e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})t+\sigma W(t))} - K)_+ = (S_T - K)_+$$

$$\begin{aligned} P &= e^{-rT}\mathbb{E}[g(X)] \\ &= \dots \\ &= S_0\phi(d_1) - Ke^{-rT}\phi(d_2) \end{aligned}$$

Avec ϕ la fonction de répartition d'une loi normale et d_1 et d_2 définis par : $\begin{cases} d_2 := \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}[\log\frac{S_0}{K} + (r - \frac{\sigma^2}{2})T] \\ d_1 := \sigma\sqrt{T} + d_2 \end{cases}$

Estimation de $\theta_\star^N$, limite de $(\theta_n^N)_{n\in\mathbb{N}}$

Algorithme de Newton

$$\forall n \in \mathbb{N} \left\{ \begin{array}{rcl} \theta_0^N & = & 0 \\ u_N(\theta_n^N) + \nabla u_N(\theta_n^N).(\theta_{n+1}^N - \theta_n^N) & = & 0 \end{array} \right.$$

Dans notre cas on a :

$$u_N(\theta) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\theta - X_i)g(X_i)^2 e^{-\theta.X_i + \frac{1}{2}|\theta|^2}$$

On calcule également le gradient $\nabla_\theta A$:

$$\nabla u_N(\theta) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} g(X_i)^2 \nabla_\theta \underbrace{\left[(\theta - X_i)e^{-\theta.X_i + \frac{1}{2}|\theta|^2}\right]}_{A}$$

Estimation de $\theta_\star^N$, limite de $(\theta_n^N)_{n\in\mathbb{N}}$

On calcule également le gradient $\nabla_\theta A$:

$$\nabla u_N(\theta) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} g(X_i)^2 \nabla_\theta \underbrace{\left[(\theta - X_i)e^{-\theta.X_i + \frac{1}{2}|\theta|^2}\right]}_{A}$$

Le calcul de $\nabla_\theta A = (\frac{\partial A_i}{\partial \theta_j})_{1\leq i,j\leq 3}$ donne alors :

$$\begin{pmatrix} 1+(\theta_1 - X_i^{(1)})^2 & (\theta_1 - X_i^{(1)})(\theta_2 - X_i^{(2)}) & (\theta_1 - X_i^{(1)})(\theta_3 - X_i^{(3)}) \\ (\theta_2 - X_i^{(2)})(\theta_1 - X_i^{(1)}) & 1+(\theta_2 - X_i^{(2)})^2 & (\theta_2 - X_i^{(2)})(\theta_3 - X_i^{(3)}) \\ (\theta_3 - X_i^{(3)})(\theta_1 - X_i^{(1)}) & (\theta_3 - X_i^{(3)})(\theta_2 - X_i^{(2)}) & 1+(\theta_3 - X_i^{(3)})^2 \end{pmatrix}$$

Où l'on adopte les notations suivantes :

$$X_i = (X_i^{(1)}, X_i^{(2)}, X_i^{(3)}) \text{ avec } 1 \leq i \leq \text{N, N nombre de simulation.}$$

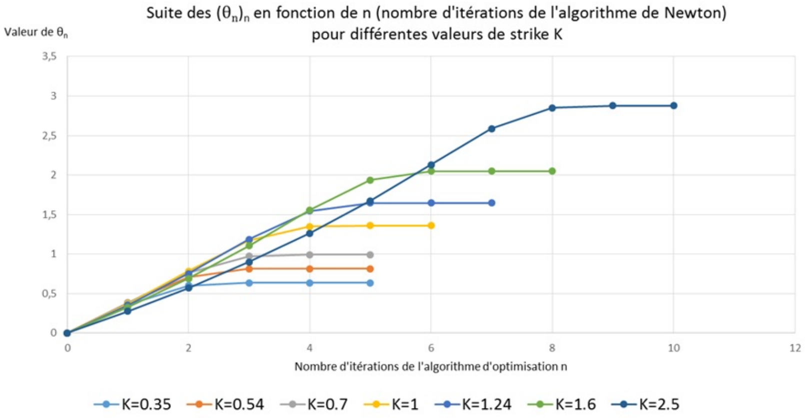
Premiers résultats numériques

Paramètres : $\sigma = 0.3$; $S_{1,0} = 1$; $r = 0.01$; $T = 2$; $K = 1$
Pour $N = 10^6$

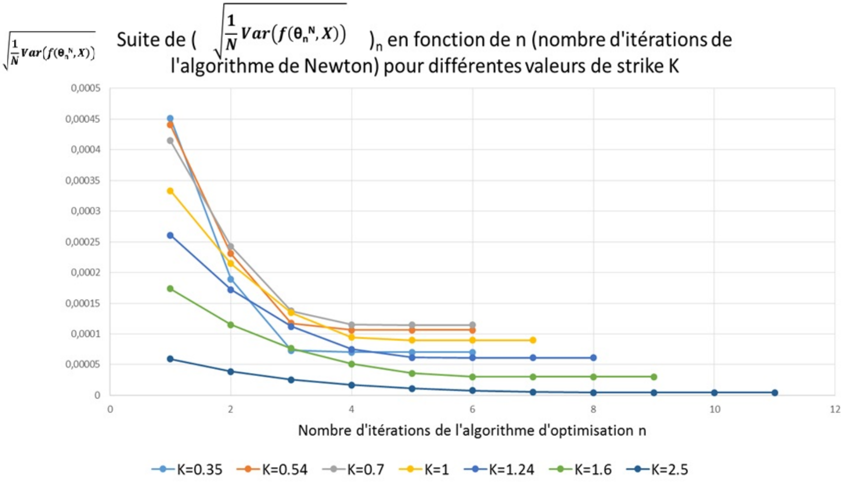
$$P_{analytique} = P_{simu} = 0.176006$$

$$\sqrt{\frac{\mathbb{V}ar(f(\theta_*, X))}{N}} = 3.12209 \times 10^{-4}$$

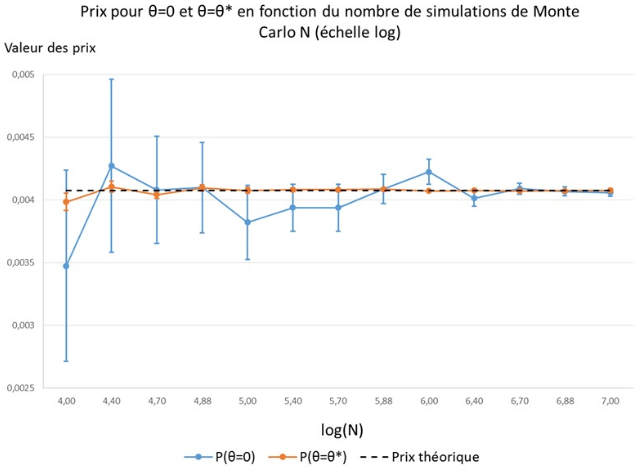
Choix du nombre d'itérations de Monte-Carlo



Réduction de la variance grâce à θ^*



Comparaison de $P(\theta = 0)$ et $P(\theta = \theta^*)$ - K=2,5



Prix d'un call sur panier

Call sur panier

$h(x_1, x_2, x_3) = (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 - K)_+$

La fonction g à appliquer aux échantillons $X = (X_1, X_2, X_3)$ suivants une $N(0, I_3)$ est la suivante :
h(S($\phi(X)$)) avec :

- ϕ génère les browniens arrêtés en T par la matrice A, racine carrée de Γ (Cholesky) : $W_T \sim \sqrt{T}AG$ où $G \sim N(0, I_3)$ et $AA^* = \Gamma$.
- S est le vecteur de prix arrêté au temps T, fonction du brownien généré par ϕ
- h est la fonction call sur panier.

Prix d'un call sur panier (Conditions de la question 12)

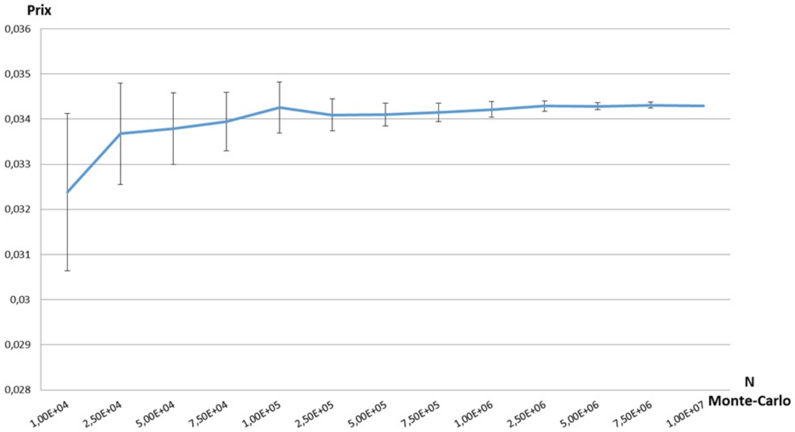


Figure: Prix du call sur panier sans échantillonnage préférentiel

Prix d'un call sur panier (Conditions de la question 12)

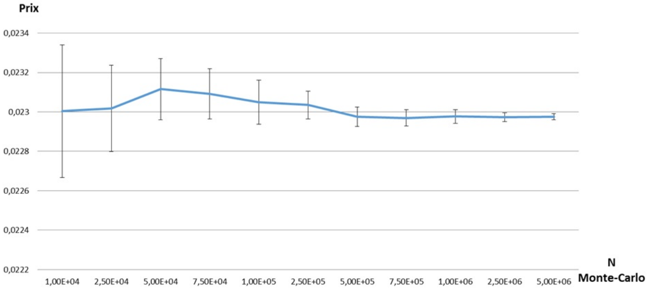


Figure: Prix du call sur panier avec échantillonnage préférentiel

Pour N=1e6, $\theta^* = (1.4628, 0.910423, 0.691786)$

Amplitude de l'intervalle de confiance d'un call sur panier (Conditions de la question 12)

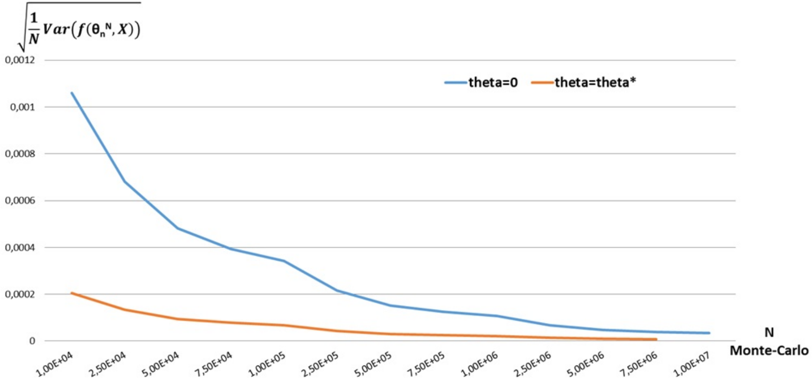


Figure: Amplitude de l'intervalle de confiance en fonction de N de Monte-Carlo

Prix call altiplano

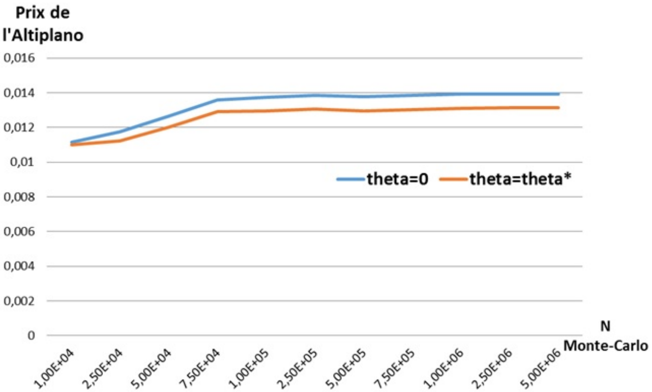


Figure: Prix du call altiplano avec et sans échantillonnage préférentiel

Amplitude de l'intervalle de confiance - Altiplano

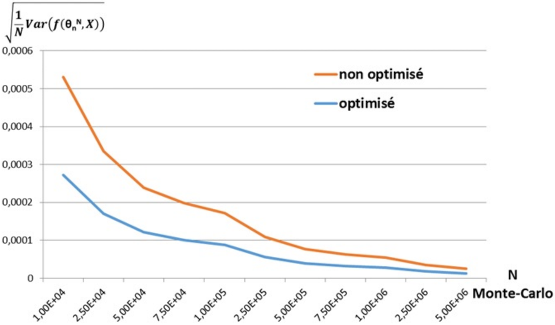


Figure: Amplitude de l'intervalle de confiance en fonction de N de Monte-Carlo

Pour N=1e6, $\theta^* = (0.171176, 0.11596, 0.0991768)$.

Réduction de variance par variables de contrôle

On pose

$$\begin{cases} X & = & (\lambda_1 S_1(T) + \lambda_2 S_2(T) + \lambda_3 S_3(T) - K)_+ \\ Y & = & X - (K - \lambda_1 S_1(T) - \lambda_2 S_2(T) - \lambda_3 S_3(T))_+ \end{cases}$$

On remarque que $\mathbb{E}[Y] = e^{rT} - K$ (en se plaçant sous la probabilité risque neutre où $\tilde{S}_t$ est une martingale). Alors :

$$\mathbb{E}[X - Y] + e^{rT} - K = \mathbb{E}[X]$$

On calculera donc l'intervalle de confiance en se basant sur $\mathbb{V}ar(X - Y)$ et non plus $\mathbb{V}ar(X)$ si :

$$\mathbb{V}ar(X - Y) \ll \mathbb{V}ar(X)$$

<u>Application numérique</u> (estimateur empirique) :
$\mathbb{V}ar(X - Y) = 0.0312655$ et $\mathbb{V}ar(X) = 0.068763$.

Conclusion

- Quelques incohérences à corriger, malgré des ordres de grandeurs qui semblent satisfaisants
- Complexité du code : nécessité d'exploiter les possibilités de la programmation objet (redondance des mêmes structures).