Comparaison des méthodes de quadrature numérique Gauss–Legendre, Gauss–Laguerre, Gauss–Tchebychev, Simpson et Spline quadratique en termes de précision et de temps d'exécution

DOUMBIA MALAYE

Année universitaire 2025–2026

Table des matières

1 Introduction 2

2 Rappel théorique des méthodes 2
- 2.1 Méthode de Gauss–Legendre . . . 2
- 2.2 Méthode de Gauss–Laguerre . . . 2
- 2.3 Méthode de Gauss–Tchebychev . . . 2
- 2.4 Méthode de Simpson . . . 3
- 2.5 Spline quadratique . . . 3

3 Méthodologie 3
- 3.1 Outils utilisés . . . 3
- 3.2 Principe expérimental . . . 3

4 Fonctions tests 4

5 Résultats numériques 4

6 Analyse et interprétation 4

7 Conclusion 4

Annexe 5

1 Introduction

L'intégration numérique est un outil fondamental du calcul scientifique, utilisé lorsque le calcul analytique exact d'une intégrale est difficile ou impossible. De nombreuses méthodes ont été développées afin d'approximer efficacement des intégrales définies ou impropres, chacune présentant des avantages et des limites selon la nature de la fonction considérée.

L'objectif de ce travail est de comparer cinq méthodes d'intégration numérique :

— la méthode de Gauss–Legendre,
— la méthode de Gauss–Laguerre,
— la méthode de Gauss–Tchebychev,
— la méthode de Simpson,
— la méthode de la spline quadratique.

La comparaison porte sur la précision (erreur) et le temps d'exécution en fonction du nombre de points d'intégration n, pour différents types de fonctions.

2 Rappel théorique des méthodes

2.1 Méthode de Gauss–Legendre

Objectif. Approximer une intégrale définie sur un intervalle fini $[a, b]$.

Formule.

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2}\sum_{i=1}^{n} w_i\, f\left(\frac{b-a}{2}t_i + \frac{a+b}{2}\right)$$

où t_i sont les zéros du polynôme de Legendre P_n et w_i les poids associés.

Propriété. La méthode est exacte pour tout polynôme de degré inférieur ou égal à $2n-1$.

2.2 Méthode de Gauss–Laguerre

Objectif. Approximer les intégrales impropres de la forme :

$$\int_0^{+\infty} g(x)e^{-x}\,dx$$

Formule.

$$\int_0^{+\infty} g(x)e^{-x}\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} w_i\, g(x_i)$$

où x_i sont les zéros du polynôme de Laguerre L_n.

Remarque. Dans ce travail, un changement de variable est utilisé pour appliquer la méthode sur des intervalles finis.

2.3 Méthode de Gauss–Tchebychev

Objectif. Approximer les intégrales pondérées présentant une singularité aux bornes.

Formule.

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \approx \sum_{k=1}^{n} w_k f(x_k)$$

avec :

$$x_k = \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right), \quad w_k = \frac{\pi}{n}$$

2.4 Méthode de Simpson

Objectif. Fournir une approximation simple et efficace des intégrales définies pour des fonctions régulières.

Formule composite.

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\left[f(a) + f(b) + 4\sum f(x_{2k-1}) + 2\sum f(x_{2k})\right]$$

avec $h = \frac{b-a}{n}$ et n pair.

2.5 Spline quadratique

Objectif. Approximer la fonction par interpolation locale avant intégration.

Principe. Sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, la spline est un polynôme de degré 2 :

$$S_i(x) = a_i(x - x_i)^2 + b_i(x - x_i) + c_i$$

L'intégrale est obtenue par intégration analytique de chaque polynôme.

3 Méthodologie

3.1 Outils utilisés

— Langage : Python
— Bibliothèques : NumPy, SymPy, Matplotlib
— Environnement : Jupyter Notebook

3.2 Principe expérimental

Pour chaque fonction test :

1. l'intégrale exacte est calculée lorsque cela est possible,
2. chaque méthode est appliquée pour différentes valeurs de n,
3. l'erreur est définie par :
$$E(n) = |I_{\text{exact}} - I_{\text{num}}(n)|$$
4. le temps d'exécution est mesuré,
5. deux graphes sont tracés : erreur et temps d'exécution.

4 Fonctions tests

1. **Fonction de type Gauss–Laguerre**

$$f(x) = (x^4 + 1)e^{-x}, \quad x \in [0, 5]$$

2. **Fonction de type Gauss–Tchebychev**

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad x \in [-1, 1]$$

3. **Fonction combinée Laguerre–Tchebychev**

$$f(x) = (x^2 + 1)e^{-x} \cos(3x), \quad x \in [0, 3]$$

4. **Fonction quelconque**

$$f(x) = \sin(x) + x^2, \quad x \in [0, 2]$$

5 Résultats numériques

Pour chaque fonction, deux graphes sont obtenus :
— l'évolution de l'erreur en fonction de n,
— l'évolution du temps d'exécution en fonction de n.
Les figures correspondantes sont présentées ci-dessous.

6 Analyse et interprétation

Les résultats montrent que la performance des méthodes dépend fortement du type de fonction étudiée.

La méthode de Gauss–Laguerre est très efficace pour les fonctions de type exponentiel décroissant. La méthode de Gauss–Tchebychev est la seule stable pour les fonctions présentant une singularité aux bornes. Les méthodes classiques comme Simpson et la spline quadratique deviennent instables dans ce cas, ce qui se traduit par des valeurs non définies et l'absence de certaines courbes sur les graphes.

Pour les fonctions régulières, Simpson et la spline quadratique donnent de bons résultats, tandis que les méthodes de Gauss conservent une excellente précision avec un faible nombre de points.

7 Conclusion

Ce travail a permis de comparer cinq méthodes d'intégration numérique sur différents types de fonctions. Les résultats montrent que les méthodes de quadrature de Gauss sont particulièrement performantes lorsqu'elles sont utilisées dans leur cadre théorique naturel.

Les méthodes classiques, bien que simples à implémenter, peuvent devenir instables en présence de singularités ou d'oscillations importantes. Cette étude met en évidence l'importance du choix de la méthode d'intégration en fonction de la nature de la fonction et des contraintes de précision et de stabilité numérique.

Annexe

— Codes Python complets.
— Graphes d'erreur et de temps d'exécution.