

# Comparaison des méthodes de quadrature numérique : Gauss–Legendre, Gauss–Laguerre, Gauss–Tchebychev, Simpson et Spline quadratique en termes de précision et de temps d'exécution

DOUMBIA MALAYE

Année universitaire 2025-2026

## Table des matières

|          |                                      |          |
|----------|--------------------------------------|----------|
| <b>1</b> | <b>Introduction</b>                  | <b>3</b> |
| <b>2</b> | <b>Rappel théorique des méthodes</b> | <b>4</b> |
| 2.1      | Méthode de Gauss–Legendre . . . . .  | 4        |

|               |                                       |           |
|---------------|---------------------------------------|-----------|
| 2.2           | Méthode de Gauss–Laguerre . . . . .   | 4         |
| 2.3           | Méthode de Gauss–Tchebychev . . . . . | 5         |
| 2.4           | Méthode de Simpson . . . . .          | 5         |
| 2.5           | Spline quadratique . . . . .          | 5         |
| <b>3</b>      | <b>Méthodologie</b>                   | <b>6</b>  |
| 3.1           | Outils utilisés . . . . .             | 6         |
| 3.2           | Principe de la comparaison . . . . .  | 6         |
| 3.3           | Fonctions tests utilisées . . . . .   | 7         |
| <b>4</b>      | <b>Présentation des résultats</b>     | <b>7</b>  |
| <b>5</b>      | <b>Interprétation des résultats</b>   | <b>19</b> |
| <b>6</b>      | <b>Conclusion</b>                     | <b>22</b> |
| <b>Annexe</b> |                                       | <b>22</b> |

# 1 Introduction

Dans le domaine du calcul scientifique, l'évaluation numérique des intégrales est un problème fondamental lorsque l'intégrale exacte d'une fonction ne peut pas être déterminée analytiquement. Plusieurs méthodes d'intégration numérique ont été développées à cet effet, parmi lesquelles figurent les méthodes de quadrature de Gauss, la méthode de Simpson ainsi que les méthodes basées sur l'interpolation comme les splines.

L'objectif de ce travail est de comparer cinq méthodes numériques :

- Gauss–Legendre,
- Gauss–Laguerre,
- Gauss–Tchebychev,
- Simpson,
- Spline quadratique,

en termes de **précision (erreur)** et de **temps d'exécution**, sur quatre types de fonctions représentatives :

1. Une fonction de la famille de Gauss–Laguerre,
2. Une fonction de la famille de Gauss–Tchebychev,
3. Une fonction combinant plusieurs comportements,
4. Une fonction quelconque.

Les comparaisons sont effectuées à l'aide de graphes représentant l'évolution de l'erreur et du temps d'exécution en fonction du paramètre de discréétisation  $n$ .

## 2 Rappel théorique des méthodes

### 2.1 Méthode de Gauss–Legendre

La méthode de Gauss–Legendre permet d'approximer une intégrale du type :

$$\int_a^b f(x) dx$$

par la formule :

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^n w_i f(t_i)$$

où  $t_i$  sont les nœuds et  $w_i$  les poids issus des polynômes de Legendre. Cette méthode est très précise pour les fonctions régulières.

### 2.2 Méthode de Gauss–Laguerre

Elle est destinée aux intégrales sur l'intervalle  $[0, +\infty[$  de la forme :

$$\int_0^{+\infty} g(x) e^{-x} dx$$

Elle repose sur les polynômes de Laguerre. Dans ce travail, nous comparons la capacité de Gauss–Laguerre à intégrer sur  $[0, +\infty[$  face aux autres méthodes appliquées sur un intervalle tronqué  $[a, b]$ .

## 2.3 Méthode de Gauss–Tchebychev

Elle permet d'approximer les intégrales de la forme :

$$\int_{-1}^1 \frac{h(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

Les nœuds sont donnés par une formule trigonométrique simple et les poids sont constants. Comme pour Laguerre, un changement de variable permet son application à un intervalle quelconque.

## 2.4 Méthode de Simpson

La méthode de Simpson est une méthode d'intégration numérique fondée sur l'approximation de la fonction par des polynômes du second degré sur chaque sous-intervalle. La formule composite s'écrit :

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} \left[ f(a) + f(b) + 4 \sum f(x_{2k-1}) + 2 \sum f(x_{2k}) \right]$$

où  $h = \frac{b-a}{n}$  et  $n$  est pair.

## 2.5 Spline quadratique

Une spline quadratique est une fonction définie par morceaux, chaque morceau étant un polynôme de degré 2. Elle est généralement utilisée pour l'approximation et l'interpolation de fonctions.

Dans ce travail, la spline quadratique est utilisée de manière indirecte comme **méthode d'intégration numérique**, en intégrant analytiquement chaque polynôme de la spline :

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b S(x) dx$$

où  $S(x)$  est la spline interpolante de  $f(x)$ .

## 3 Méthodologie

### 3.1 Outils utilisés

- Langage : Python
- Bibliothèques : NumPy, SymPy, Matplotlib
- Environnement : Jupyter Notebook (.ipynb)

### 3.2 Principe de la comparaison

Pour chaque fonction test :

1. L'intégrale exacte est d'abord calculée avec SymPy.
2. Chaque méthode numérique est appliquée pour plusieurs valeurs de  $n$ .
3. L'erreur est calculée par :

$$E(n) = |I_{\text{exact}} - I_{\text{approx}}(n)|$$

4. Le temps d'exécution est mesuré avec la fonction `time.perf_counter()`.

5. Deux graphes sont tracés :
  - Erreur en fonction de  $n$ ,
  - Temps d'exécution en fonction de  $n$ .

### 3.3 Fonctions tests utilisées

1. Famille Gauss–Laguerre :

$$f(x) = (x^2 + 1)e^{-x}, \quad x \in [0, 8]$$

2. Famille Gauss–Tchebychev :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad x \in [-1, 1]$$

3. Fonction combinée :

$$f(x) = \frac{(x^2 + 1)e^{-x}}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad x \in [0, 3]$$

4. Fonction quelconque :

$$f(x) = \sin(x) + x^2, \quad x \in [0, 2]$$

## 4 Présentation des résultats

Pour chaque fonction test, deux graphiques ont été obtenus :

- un graphe **Erreur en fonction de  $n$**  comportant cinq courbes, une par méthode ;
- un graphe **Temps d'exécution en fonction de  $n$**  comportant également cinq courbes.

Les figures correspondantes sont présentées ci-dessous.

Les valeurs NaN observées dans certains tableaux indiquent que la méthode de Gauss–Laguerre n'est pas directement applicable aux intégrales définies sur des intervalles finis, en l'absence d'une transformation adaptée du domaine d'intégration.

### Tableau des erreurs : Laguerre

|            | n=4     | n=8     | n=12    | n=16    | n=20    | n=24    |
|------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| Legendre   | 3.3e-02 | 1.2e-07 | 2.2e-15 | 4.4e-16 | 4.4e-16 | 1.0e-16 |
| Laguerre   | 1.0e-16 | 8.4e-15 | 1.6e-14 | 1.4e-14 | 4.8e-14 | 6.6e-14 |
| Tchebychev | 1.4e-01 | 2.8e-02 | 1.2e-02 | 6.7e-03 | 4.2e-03 | 2.9e-03 |
| Simpson    | 1.7e-01 | 2.7e-02 | 6.6e-03 | 2.2e-03 | 9.4e-04 | 4.6e-04 |
| Spline     | 1.7e-01 | 2.7e-02 | 6.6e-03 | 2.2e-03 | 9.4e-04 | 4.6e-04 |

FIGURE 1 – Erreur en fonction de  $n$  – Gauss Laguerre

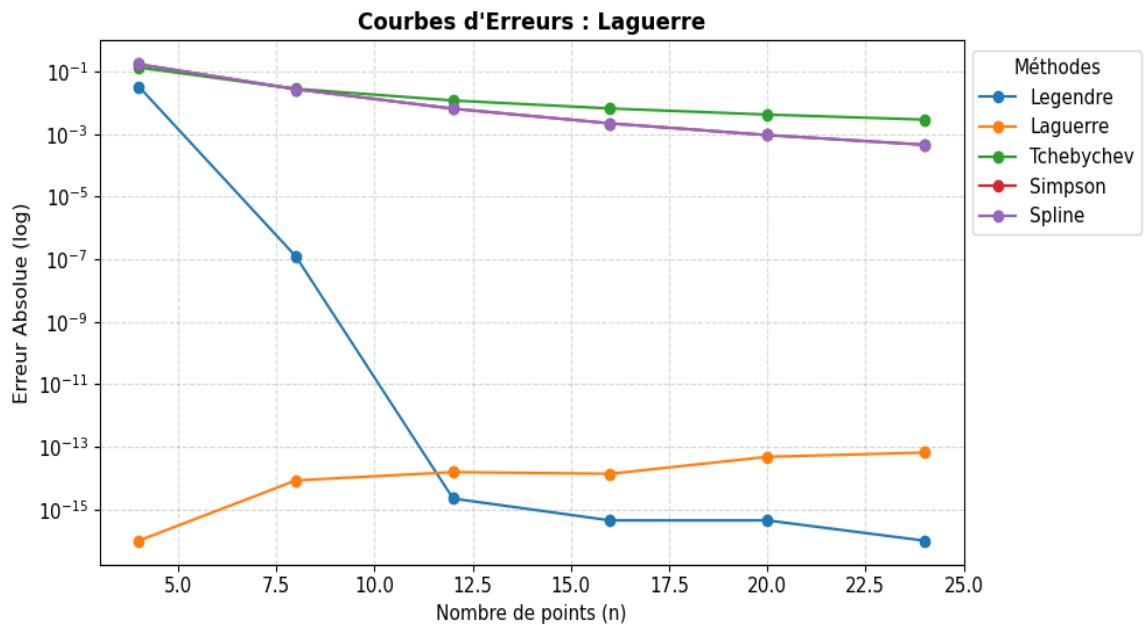


FIGURE 2 – Erreur en fonction de  $n$  – Gauss Laguerre

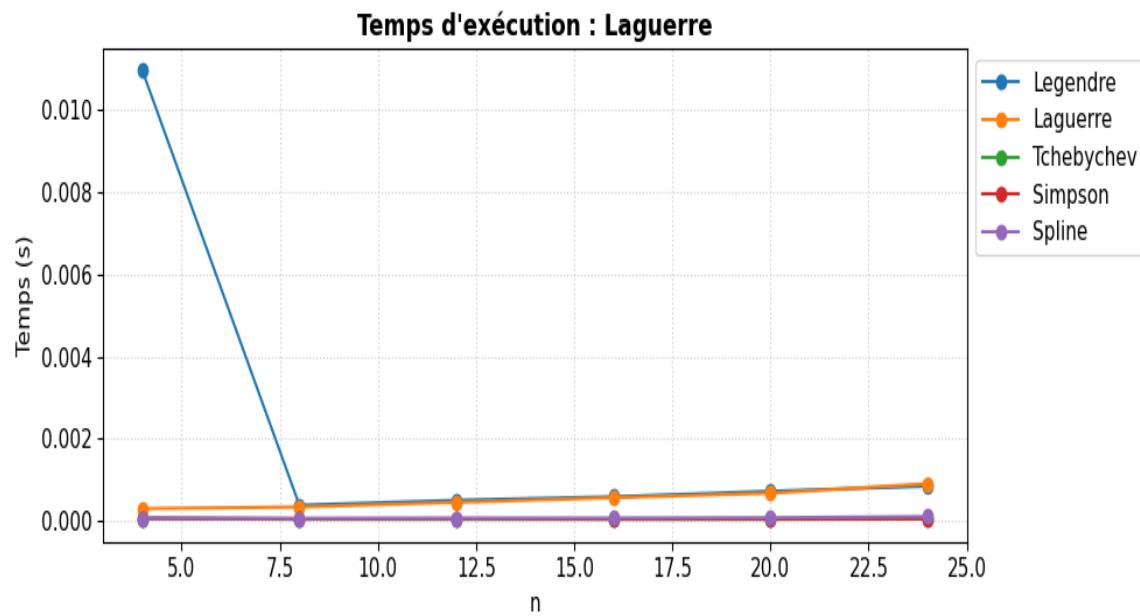


FIGURE 3 – Temps en fonction de  $n$  – Gauss Laguerre

### Tableau des erreurs : Tchebychev

|            | n=4     | n=8     | n=12    | n=16    | n=20    | n=24    |
|------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| Legendre   | 3.9e-01 | 2.0e-01 | 1.4e-01 | 1.1e-01 | 8.5e-02 | 7.1e-02 |
| Laguerre   | NaN     | NaN     | NaN     | NaN     | NaN     | NaN     |
| Tchebychev | 1.0e-16 | 1.0e-16 | 1.0e-16 | 1.0e-16 | 1.0e-16 | 1.0e-16 |
| Simpson    | 2.4e+04 | 1.2e+04 | 7.9e+03 | 5.9e+03 | 4.7e+03 | 3.9e+03 |
| Spline     | 2.4e+04 | 1.2e+04 | 7.9e+03 | 5.9e+03 | 4.7e+03 | 3.9e+03 |

FIGURE 4 – Erreur en fonction de  $n$  – Tchebytchev

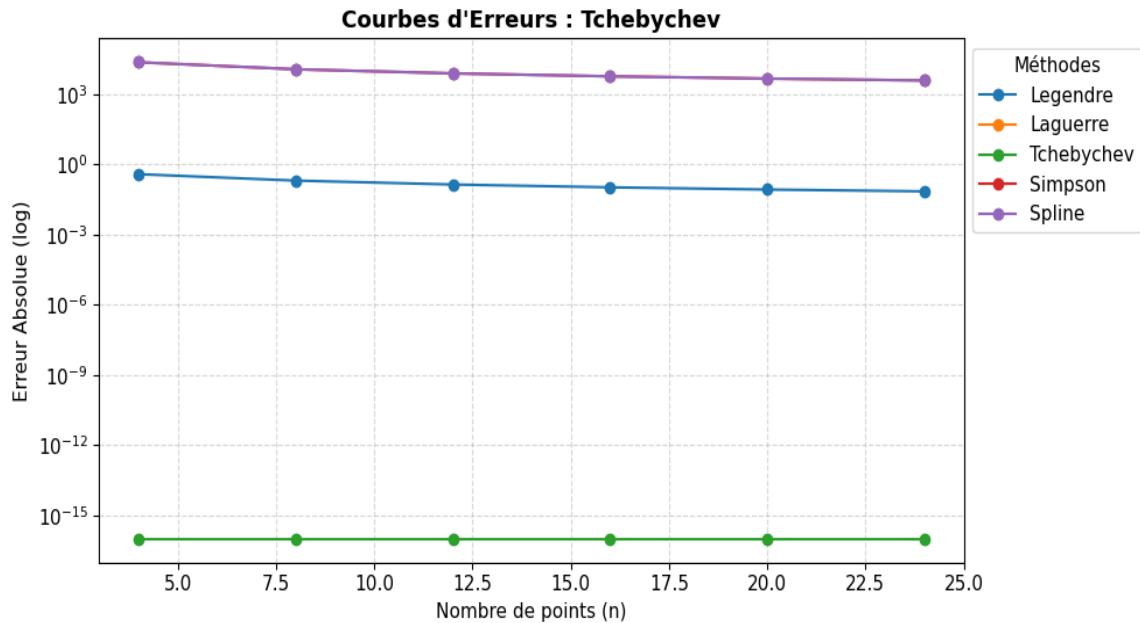


FIGURE 5 – Erreur en fonction de  $n$  – Tchebytchev

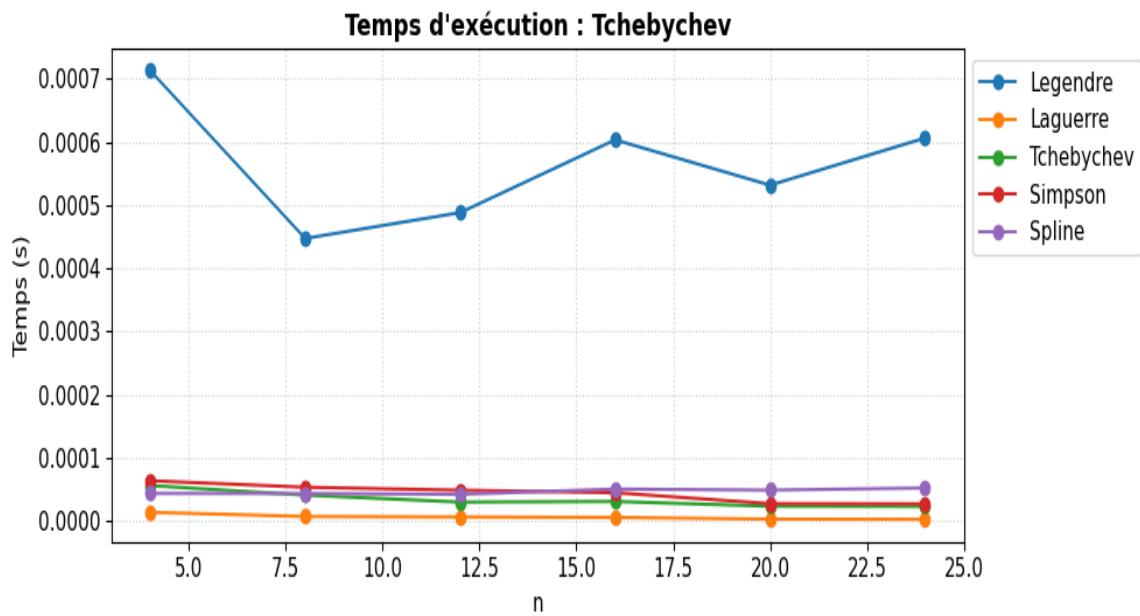


FIGURE 6 – Erreur en fonction de  $n$  – tchebytchev

### Tableau des erreurs : Combinaison

|            | n=4     | n=8     | n=12    | n=16    | n=20    | n=24    |
|------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| Legendre   | 1.1e-02 | 7.2e-07 | 5.0e-14 | 4.2e-16 | 6.4e-16 | 1.9e-16 |
| Laguerre   | NaN     | NaN     | NaN     | NaN     | NaN     | NaN     |
| Tchebychev | 5.3e-02 | 5.4e-03 | 2.4e-03 | 1.3e-03 | 8.5e-04 | 5.9e-04 |
| Simpson    | 3.0e-02 | 1.5e-03 | 3.8e-04 | 1.3e-04 | 5.3e-05 | 2.6e-05 |
| Spline     | 3.0e-02 | 1.5e-03 | 3.8e-04 | 1.3e-04 | 5.3e-05 | 2.6e-05 |

FIGURE 7 – Erreur en fonction de  $n$  – Combinaison

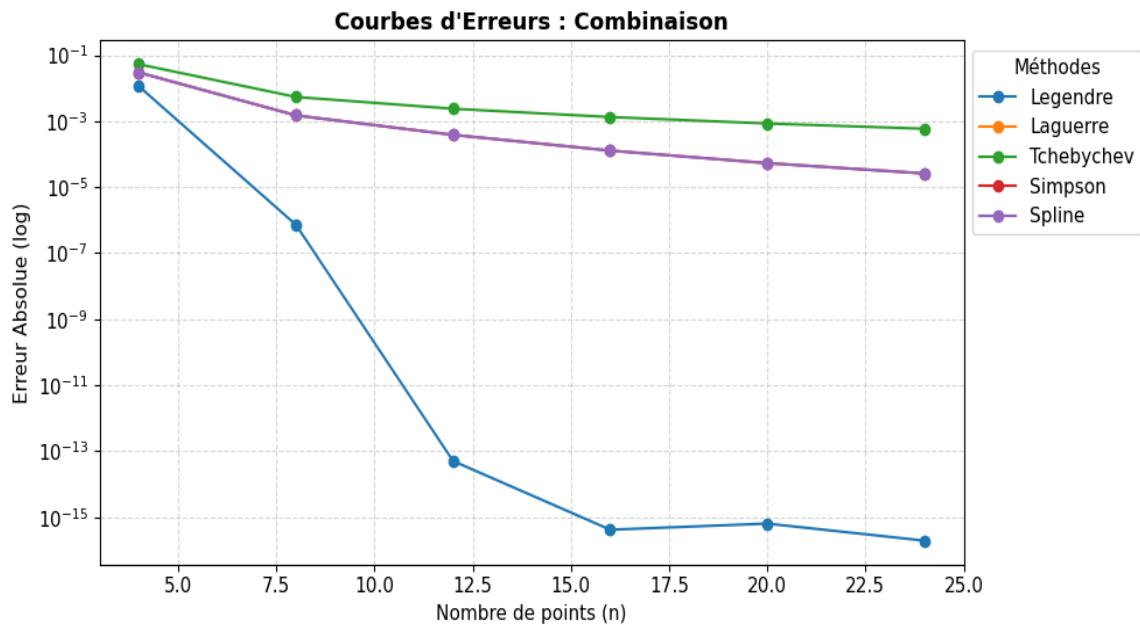


FIGURE 8 – Erreur en fonction de  $n$  – Combinaison

### Tableau des erreurs : Quelconque

|            | n=4     | n=8     | n=12    | n=16    | n=20    | n=24    |
|------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| Legendre   | 2.4e-07 | 8.9e-16 | 8.9e-16 | 1.0e-16 | 8.9e-16 | 8.9e-16 |
| Laguerre   | NaN     | NaN     | NaN     | NaN     | NaN     | NaN     |
| Tchebychev | 1.3e-01 | 3.2e-02 | 1.4e-02 | 7.9e-03 | 5.1e-03 | 3.5e-03 |
| Simpson    | 5.1e-04 | 3.1e-05 | 6.1e-06 | 1.9e-06 | 7.9e-07 | 3.8e-07 |
| Spline     | 5.1e-04 | 3.1e-05 | 6.1e-06 | 1.9e-06 | 7.9e-07 | 3.8e-07 |

FIGURE 9 – Erreur en fonction de  $n$  – Quelconque

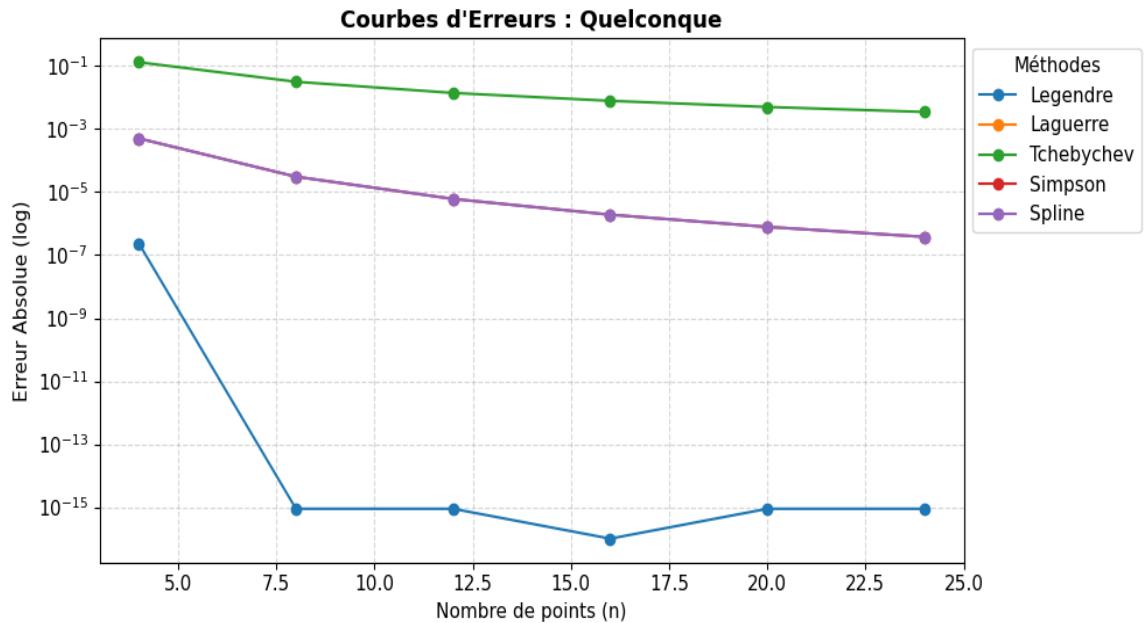


FIGURE 10 – Erreur en fonction de  $n$  – Quelconque

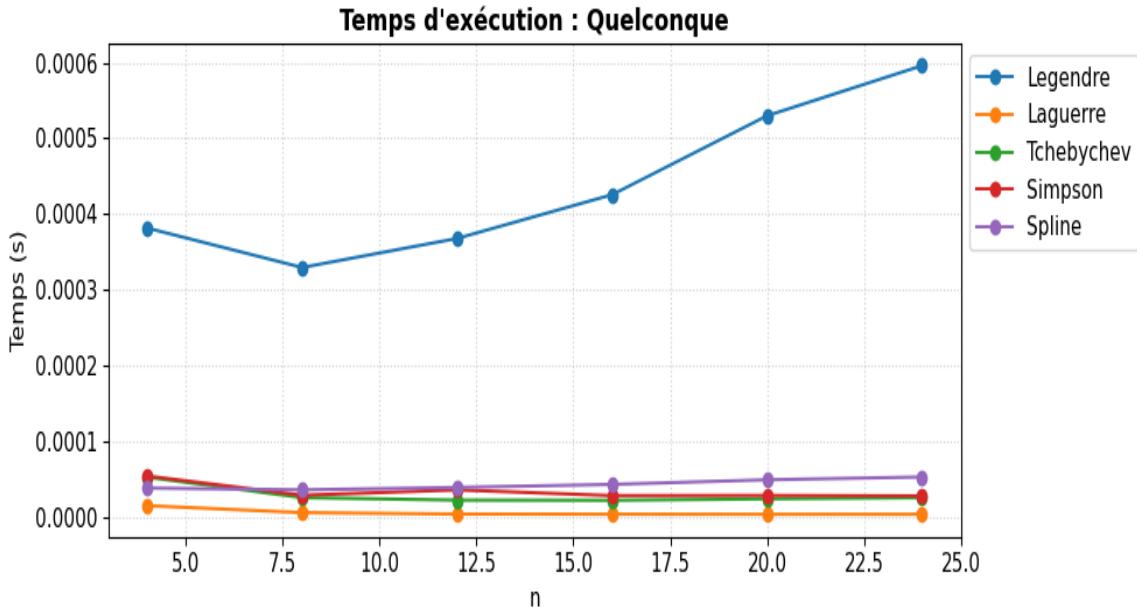


FIGURE 11 – Temps en fonction de  $n$  – Quelconque

## 5 Interprétation des résultats

L'étude des erreurs numériques et des temps d'exécution montre que l'efficacité d'une méthode dépend fortement du type de fonction traitée. Les résultats obtenus sont en accord avec les propriétés théoriques des méthodes étudiées.

## Analyse de la précision

Pour les fonctions appartenant à une famille de quadrature donnée, les méthodes associées atteignent une précision proche de la limite machine avec un nombre réduit de points. C'est notamment le cas de la méthode de Gauss–Tchebychev pour la fonction  $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ , pour laquelle l'erreur reste de l'ordre de  $10^{-16}$  quel que soit le nombre de points  $n$ . Ce comportement traduit une exactitude quasi parfaite, conforme à la théorie.

Pour la fonction de type Gauss–Laguerre, la méthode de Gauss–Laguerre fournit également une précision très élevée, proche de la précision machine. En revanche, les méthodes définies sur des intervalles finis présentent une erreur qui ne diminue pas significativement avec l'augmentation de  $n$ , en raison de la troncature de l'intégrale impropre. L'erreur observée résulte alors à la fois de l'erreur de quadrature et de l'erreur de troncature.

Dans le cas des fonctions combinées et des fonctions quelconques, définies sur des intervalles finis et réguliers, la méthode de Gauss–Legendre se distingue par une convergence très rapide. L'erreur décroît de manière spectaculaire et atteint rapidement la limite de précision machine. Ce comportement confirme le caractère spectral de la méthode de Gauss–Legendre pour les fonctions suffisamment régulières.

Les méthodes de Simpson et de la spline quadratique présentent une convergence plus progressive. Leur précision s'améliore régulièrement avec l'augmentation du nombre de points, mais elles nécessitent des discrétisations plus fines pour atteindre une précision comparable à celle des méthodes de Gauss. La méthode de Gauss–Tchebychev, lorsqu'elle est appliquée hors de son cadre théorique naturel, reste numériquement stable mais présente une précision nettement inférieure, ce qui illustre l'importance du choix du poids associé à la quadrature.

## Analyse des temps d'exécution

L'étude des temps d'exécution montre des comportements distincts selon les méthodes. Les méthodes de quadrature de Gauss, et en particulier la méthode de Gauss-Legendre, présentent un temps de calcul qui augmente avec le nombre de points, en raison du coût associé à l'évaluation des nœuds et des poids ainsi qu'aux opérations de transformation de l'intervalle. Cette augmentation est particulièrement visible pour les fonctions régulières, où la précision élevée obtenue se fait au prix d'un temps de calcul plus important.

La méthode de Gauss-Laguerre se révèle très efficace en termes de temps pour les intégrales improprest adaptées, avec un coût de calcul faible et relativement stable lorsque le nombre de points augmente. La méthode de Gauss-Tchebychev présente également un temps d'exécution réduit, ce qui s'explique par la simplicité de ses nœuds, définis explicitement par des formules trigonométriques.

Les méthodes classiques, telles que Simpson et la spline quadratique, affichent des temps d'exécution globalement plus faibles que Gauss-Legendre pour des valeurs modérées de  $n$ . Toutefois, la méthode de la spline quadratique devient légèrement plus coûteuse lorsque le nombre de points augmente, en raison du calcul préalable des coefficients de la spline.

## Synthèse

Ces résultats montrent qu'aucune méthode n'est universellement optimale. Les méthodes de quadrature de Gauss offrent une précision exceptionnelle lorsqu'elles sont appliquées dans leur cadre théorique naturel, mais peuvent devenir plus coûteuses en temps de calcul. Les méthodes classiques restent attractives pour leur simplicité et leur efficacité sur des fonctions régulières, bien qu'elles nécessitent des discrétisations plus fines

pour atteindre une précision élevée. Enfin, l'application de certaines méthodes hors de leur domaine de validité théorique permet de mieux comprendre leurs limites et souligne l'importance d'un choix judicieux de la méthode d'intégration en fonction du problème traité.

## 6 Conclusion

Dans ce travail, nous avons comparé cinq méthodes d'intégration numérique sur quatre types de fonctions représentatives.

Les résultats obtenus montrent que :

- Les méthodes de Gauss sont les plus rapides et les plus précises.
- La méthode de Simpson reste une excellente alternative pour un usage général.
- La spline quadratique, bien que n'étant pas à l'origine une méthode d'intégration, peut être utilisée efficacement pour approximer une intégrale via l'interpolation.

Ce travail met en évidence l'importance du choix de la méthode numérique en fonction de la nature de la fonction à intégrer et des contraintes de précision et de temps de calcul.

## Annexe

- Codes Python complets dans le notebook.
- Tableaux de valeurs numériques.
- Graphes Erreur / Temps.