GAUSS-LAGUERRE

- La fonction de poids est $w(x) = \exp(-x)$
- L'intervalle considéré est $[0, \infty]$
- Les polynômes orthogonaux sont :

$$\begin{cases} L_0(x) & = & 1 \\ L_1(x) & = & 1 - x \\ L_n(x) & = & \frac{2n-1-x}{n} L_{n-1}(x) - \frac{n-1}{n} L_{n-2}(x) \end{cases}$$

- Cette méthode est adaptée au calcul des intégrales de la forme

$$\int_0^\infty \exp(-t) f(t) dt = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(y_i) + E$$

Préambule
Introduction
Méthodes simples de quadrature
Intégration de GAUSS
Introduction
Posons le problème
Changement de variable
Choix des α_i et y_i
Méthode de GAUSS-LEGENDRE
En pratique
L'algorithme
Calcul de l'erreur sur $[-1, 1]$
Calcul de l'erreur sur $[a, b]$
Exemple - I
Exemple - II
Autres familles orthogonales
GAUSS-CHEBYSHEV
GAUSS-LAGUERRE
Accélération de la méthode
Cas des intégrales impropres
Conclusion

Accélération de la méthode

Il y a deux méthodes pour obtenir une meilleure approximation :

- Augmenter le nombre de points de GAUSS

Accélération de la méthode

Il y a deux méthodes pour obtenir une meilleure approximation :

- Augmenter le nombre de points de GAUSS

Mais cela n'est pas toujours efficace

Accélération de la méthode

Il y a deux méthodes pour obtenir une meilleure approximation :

- Augmenter le nombre de points de GAUSS

  Mais cela n'est pas toujours efficace

- Diviser l'intervalle d'intégration en petits intervalles
  - Soient $a_0 = a < a_1 < \cdots < a_n = b$ avec $a_{i+1} - a_i = \frac{b-a}{n}$
  - Alors

$$\int_a^b f(t)dt = \int_{a_0}^{a_1} f(t)dt + \int_{a_1}^{a_2} f(t)dt + \cdots + \int_{a_{n-1}}^{a_n} f(t)dt$$

  - on calcule séparément chaque petite intégrale.
  - la borne d'erreur sur le calcul est :

Accélération de la méthode

Il y a deux méthodes pour obtenir une meilleure approximation :

- Augmenter le nombre de points de GAUSS

  Mais cela n'est pas toujours efficace

- Diviser l'intervalle d'intégration en petits intervalles
  - Soient $a_0 = a < a_1 < \cdots < a_n = b$ avec $a_{i+1} - a_i = \frac{b-a}{n}$
  - Alors

$$\int_a^b f(t)dt = \int_{a_0}^{a_1} f(t)dt + \int_{a_1}^{a_2} f(t)dt + \cdots + \int_{a_{n-1}}^{a_n} f(t)dt$$

  - on calcule séparément chaque petite intégrale.
  - la borne d'erreur sur le calcul est :

$$|E| < n \times \left(\frac{b-a}{2n}\right)^{2n+1} \times \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i^{2n} - \frac{2}{2n+1}\right) \max_{a \leq t \leq b} \left|f^{(2n)}(t)\right|$$

Cas des intégrales impropres

Parfois on ne peut pas utiliser directement ces méthodes pour le calcul de l'intégrale d'une fonction :

Préambule

Introduction

Méthodes simples de quadrature

Intégration de GAUSS
Introduction
Posons le problème
Changement de variable
Choix des α_i et y_i
Méthode de GAUSS-LEGENDRE
En pratique
L'algorithme
Calcul de l'erreur sur $[-1, 1]$
Calcul de l'erreur sur $[a, b]$
Exemple - I
Exemple - II
Autres familles orthogonales
GAUSS-CHEBYSHEV
GAUSS-LAGUERRE
Accélération de la méthode
Cas des intégrales impropres
Conclusion

Cas des intégrales impropres

Parfois on ne peut pas utiliser directement ces méthodes pour le calcul de l'intégrale d'une fonction :

- Si l'une des bornes de l'intégrale est infinie $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{t^2} dt$

Préambule

Introduction

Méthodes simples de quadrature

Intégration de GAUSS
Introduction
Posons le problème
Changement de variable
Choix des α_i et y_i
Méthode de GAUSS-LEGENDRE
En pratique
L'algorithme
Calcul de l'erreur sur $[-1, 1]$
Calcul de l'erreur sur $[a, b]$
Exemple - I
Exemple - II
Autres familles orthogonales
GAUSS-CHEBYSHEV
GAUSS-LAGUERRE
Accélération de la méthode
Cas des intégrales impropres
Conclusion

Cas des intégrales impropres

Parfois on ne peut pas utiliser directement ces méthodes pour le calcul de l'intégrale d'une fonction :

- Si l'une des bornes de l'intégrale est infinie $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{t^2} dt$
- Si la fonction n'est pas définie sur l'une des bornes $\displaystyle\int_0^1 \log(t) dt$

Préambule
Introduction
Méthodes simples de quadrature
Intégration de GAUSS
Introduction
Posons le problème
Changement de variable
Choix des α_i et y_i
Méthode de GAUSS-LEGENDRE
En pratique
L'algorithme
Calcul de l'erreur sur $[-1, 1]$
Calcul de l'erreur sur $[a, b]$
Exemple - I
Exemple - II
Autres familles orthogonales
GAUSS-CHEBYSHEV
GAUSS-LAGUERRE
Accélération de la méthode
Cas des intégrales impropres
Conclusion

Cas des intégrales impropres

Parfois on ne peut pas utiliser directement ces méthodes pour le calcul de l'intégrale d'une fonction :

- Si l'une des bornes de l'intégrale est infinie $\int_1^{\infty} \frac{1}{t^2} dt$
- Si la fonction n'est pas définie sur l'une des bornes $\int_0^1 \log(t) dt$
- Si la fonction n'est pas dérivable sur l'une des bornes $\int_0^1 \sqrt{x} dt$

Préambule
Introduction
Méthodes simples de quadrature
Intégration de GAUSS
Introduction
Posons le problème
Changement de variable
Choix des α_i et y_i
Méthode de GAUSS-LEGENDRE
En pratique
L'algorithme
Calcul de l'erreur sur $[-1, 1]$
Calcul de l'erreur sur $[a, b]$
Exemple - I
Exemple - II
Autres familles orthogonales
GAUSS-CHEBYSHEV
GAUSS-LAGUERRE
Accélération de la méthode
Cas des intégrales impropres
Conclusion

Cas des intégrales impropres

Parfois on ne peut pas utiliser directement ces méthodes pour le calcul de l'intégrale d'une fonction :

- Si l'une des bornes de l'intégrale est infinie $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{t^2} dt$
- Si la fonction n'est pas définie sur l'une des bornes $\displaystyle\int_0^{1} \log(t) dt$
- Si la fonction n'est pas dérivable sur l'une des bornes $\displaystyle\int_0^{1} \sqrt{x} dt$

Alors, on sépare l'intégrale en de petites intégrales :

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{t^2} dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{1+10k}^{1+10(k+1)} \frac{1}{t^2} dt$$

ou $$\int_0^{1} \log(t) dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2^{-k-1}}^{2^{-k}} \log(t) dt$$

On calcule chaque petite intégrale séparément et on s'arrête *quand le reste est négligeable*

Préambule
Introduction
Méthodes simples de quadrature
Intégration de GAUSS
Introduction
Posons le problème
Changement de variable
Choix des α_i et y_i
Méthode de GAUSS-LEGENDRE
En pratique
L'algorithme
Calcul de l'erreur sur $[-1, 1]$
Calcul de l'erreur sur $[a, b]$
Exemple - I
Exemple - II
Autres familles orthogonales
GAUSS-CHEBYSHEV
GAUSS-LAGUERRE
Accélération de la méthode
Cas des intégrales impropres
Conclusion

Conclusion

- Pour le calcul de l'intégrale d'une fonction, on se ramène au calcul de l'intégrale d'un polynôme.
  - Car c'est un ensemble de fonctions très simple.
  - Il permet d'approcher presque toutes les fonctions intégrables.
  - Mais cela ne fonctionne bien que sur les fonctions *très régulières*.
- On peut couper l'intervalle d'intégration en petits morceaux.
  - Pour accélérer la convergence
  - Si l'intégrale est impropre
  - Si la fonction n'est pas assez régulière (non dérivable)

Préambule
Introduction
Méthodes simples de quadrature
Intégration de GAUSS
Introduction
Posons le problème
Changement de variable
Choix des α_i et y_i
Méthode de GAUSS-LEGENDRE
En pratique
L'algorithme
Calcul de l'erreur sur $[-1, 1]$
Calcul de l'erreur sur $[a, b]$
Exemple - I
Exemple - II
Autres familles orthogonales
GAUSS-CHEBYSHEV
GAUSS-LAGUERRE
Accélération de la méthode
Cas des intégrales impropres
Conclusion