Analyse Numérique
Équations différentielles et intégration numérique

DOUMBIA MALAYE

Discipline : Analyse Numérique
Enseignant : Dr ZEZE

January 13, 2026

Introduction générale

L'analyse numérique permet de résoudre ou d'approximer des problèmes mathématiques lorsque les solutions exactes sont difficiles à exploiter.

Ce travail est structuré en deux parties :

- la résolution numérique des équations différentielles ordinaires
- la comparaison de méthodes d'intégration numérique

Comparaison des méthodes d'Euler, Heun et Runge–Kutta d'ordre 4

Problème mathématique étudié

On considère l'équation différentielle :

$$y'(t) = y(t), \quad y(0) = 1$$

La solution exacte est :

$$y(t) = e^t$$

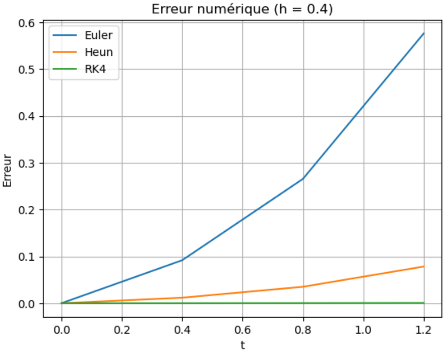
L'erreur numérique est définie par :

$$\text{Erreur}(t) = |y_{\text{exact}}(t) - y_{\text{num}}(t)|$$

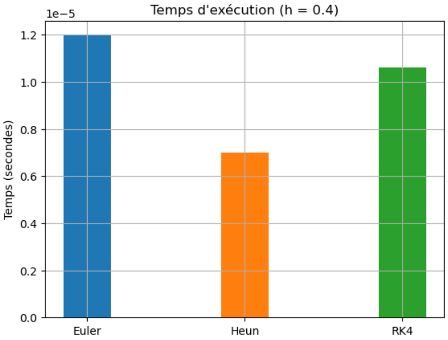
Méthodes numériques utilisées (EDO)

- **Euler** : méthode explicite d'ordre 1, rapide mais peu précise
- **Heun** : méthode d'ordre 2, amélioration d'Euler
- **RK4** : méthode d'ordre 4, très précise

Résultats numériques — Pas $h = 0.4$



Erreur numérique

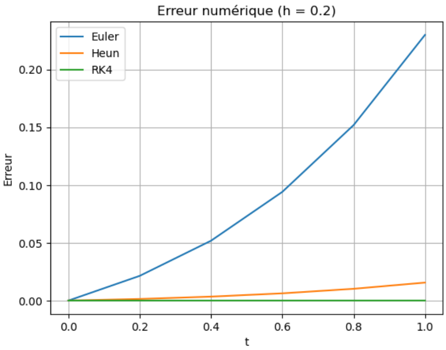


Temps d'exécution

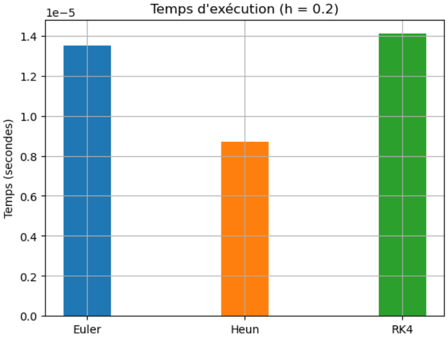
Analyse :

- Euler présente une erreur importante.
- Heun améliore légèrement la précision.
- RK4 reste très précis mais plus coûteux.

Résultats numériques — Pas $h = 0.2$



Erreur numérique

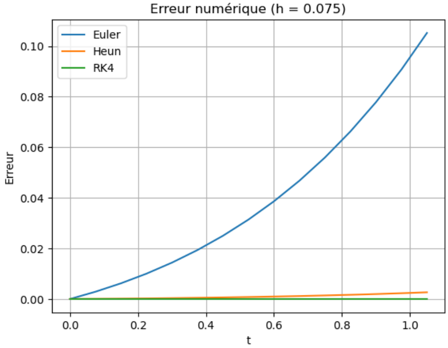


Temps d'exécution

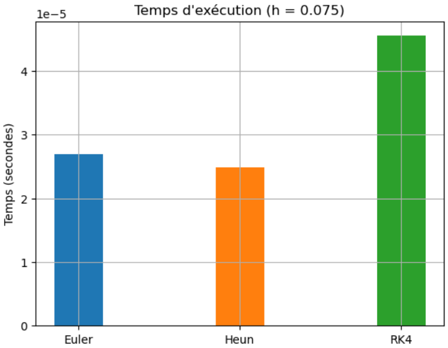
Analyse :

- La réduction du pas améliore la précision globale.
- Heun offre un bon compromis précision / temps.
- RK4 atteint une erreur très faible.

Résultats numériques — Pas $h = 0.075$



Erreur numérique



Temps d'exécution

Analyse :

- RK4 atteint une précision quasi machine.
- Euler reste peu précis malgré le petit pas.
- Le coût temporel de RK4 augmente fortement.

Conclusion partielle — EDO

- Euler est rapide mais peu précis.
- Heun représente un bon compromis.
- RK4 est la méthode la plus précise.
- Le pas de temps influence fortement l'erreur.

Comparaison des méthodes d'intégration numérique

Objectifs de l'intégration numérique

- Approcher des intégrales difficiles analytiquement
- Comparer précision et temps d'exécution
- Étudier l'adéquation méthode / fonction

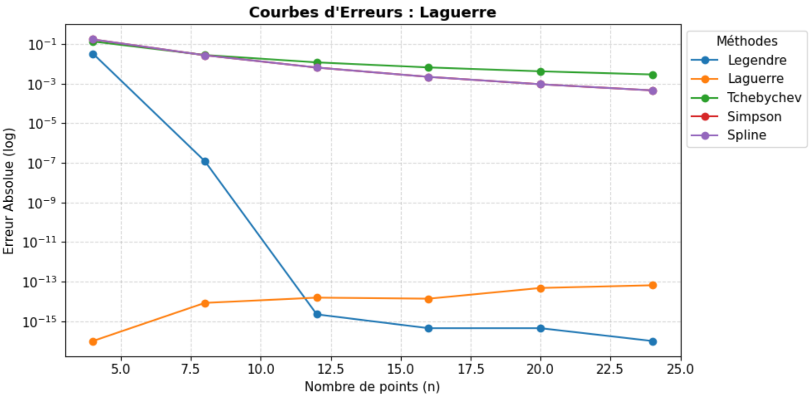
Méthodes étudiées

- Gauss–Legendre
- Gauss–Laguerre
- Gauss–Tchebychev
- Simpson
- Splines quadratiques

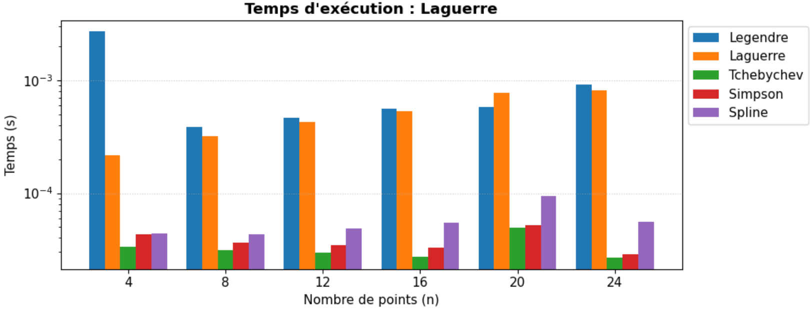
Rappels théoriques

- Les méthodes de Gauss sont très précises
- Les méthodes composites sont rapides
- Le choix dépend du domaine et de la fonction

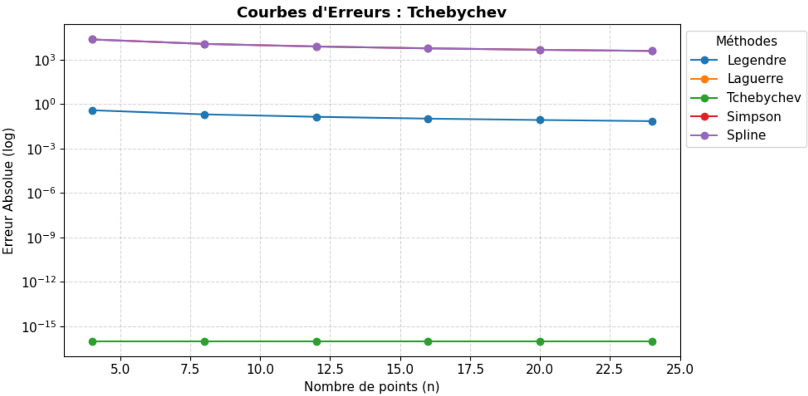
Erreur numérique : Laguerre



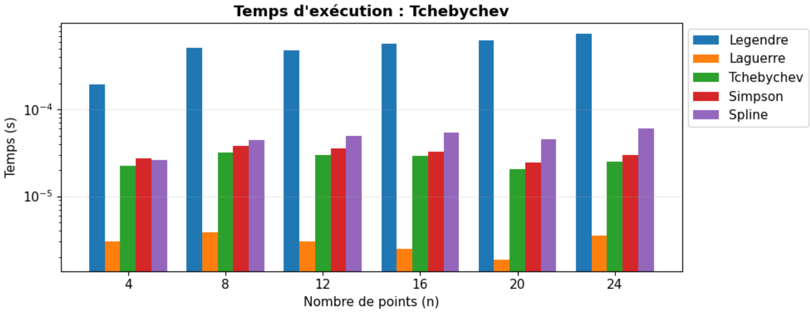
Temps d'exécution : Laguerre



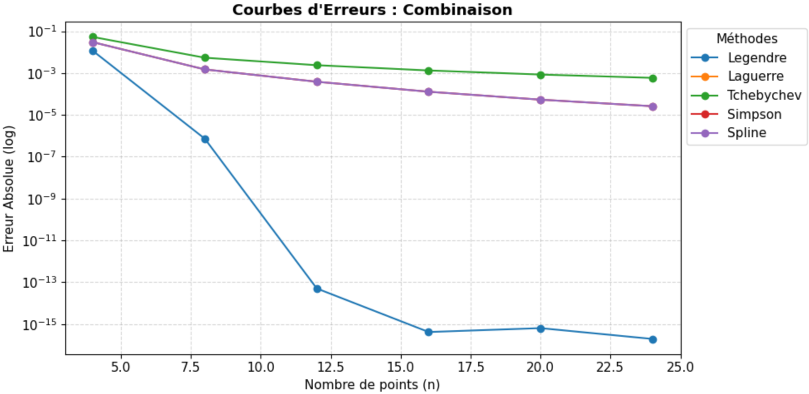
Erreur numérique : Tchebychev



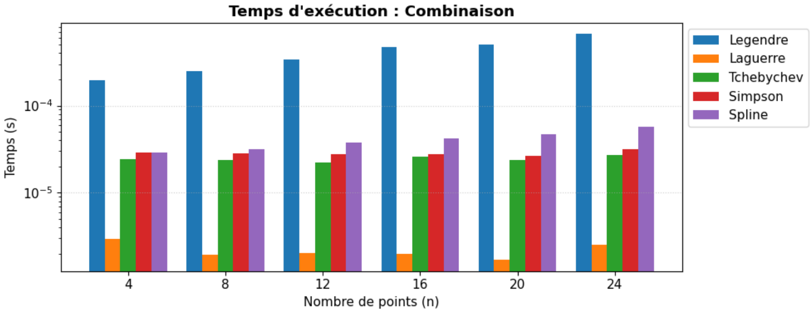
Temps d'exécution : Tchebychev



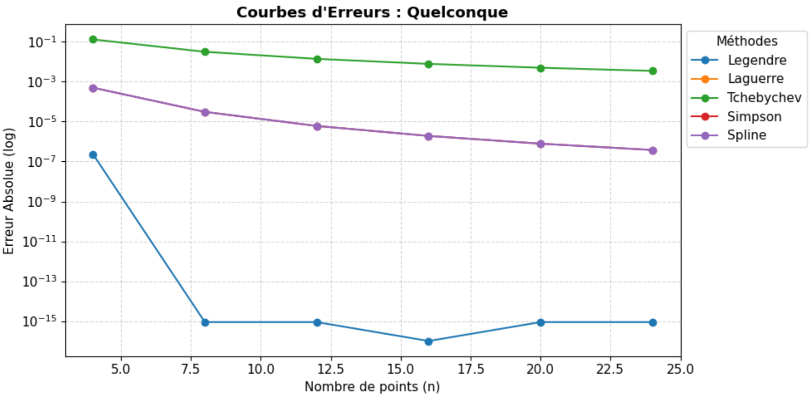
Erreur numérique : Fonction combinaison



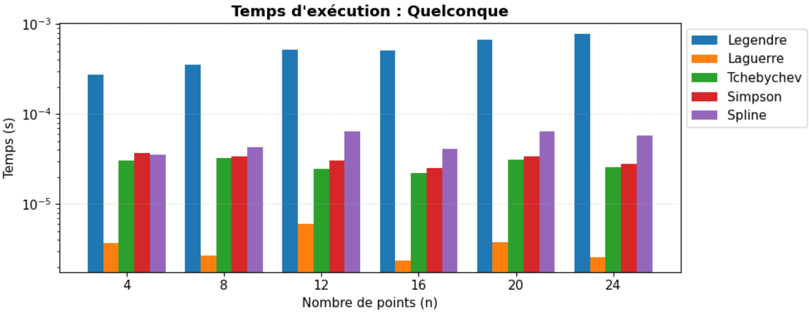
Temps d'exécution : Fonction combinaison



Erreur numérique : Fonction quelconque



Temps d'exécution : Fonction quelconque



Conclusion générale

- Les deux parties du projet mettent en évidence le compromis fondamental entre précision et coût de calcul.
- Dans la résolution des EDO, les méthodes d'ordre élevé offrent une meilleure précision au prix d'un temps d'exécution plus important.
- En intégration numérique, l'efficacité d'une méthode dépend fortement de l'adéquation entre la fonction, le domaine et la méthode choisie.
- Ainsi, aucun algorithme n'est universel : le choix de la méthode doit toujours être guidé par le problème étudié.
- L'analyse numérique constitue donc un outil essentiel pour résoudre efficacement des problèmes réels.