

# DOA Estimation for Different Antenna Array Structures

Dou Xin, 13010199053

1301019 班, 1161327784@qq.com, 18710890246

[http://douxin13.github.io/douxin\\_wireless.pdf](http://douxin13.github.io/douxin_wireless.pdf)

**Abstract:** Smart antenna has been widely concerned because of its unique advantages. In different applications, the structure of the array is not the same. At the same time DOA (Direction of Arrival) is also an important parameter of smart antenna, there are a variety of algorithms to make an accurate estimate of it. In this paper, we use MUSIC(Multiple Signal Classification) algorithm to estimate the DOA of different array structures, and compare the similarities and differences between them.

**Keywords:** smart antenna; array; MUSIC; DOA

## 不同天线阵列结构的到达角估计

窦欣, 13010199053

1301019 班, 1161327784@qq.com, 18710890246

[http://douxin13.github.io/douxin\\_wireless.pdf](http://douxin13.github.io/douxin_wireless.pdf)

**摘要:** 智能天线因其独特的优势而受到人们的广泛关注。在不同的应用场景下, 阵列的结构也不尽相同。同时 DOA(Direction of Arrival) 也是智能天线的一个重要参数, 目前已有多种算法对 DOA 做出了准确估计。本文中利用 MUSIC(Multiple Signal Classification)算法对不同的阵列结构进行 DOA 估计, 并比较它们之间的异同。

**关键字:** 智能天线; 阵列; MUSIC; DOA

### 1. 智能天线简介

#### 1.1 智能天线的定义

智能天线由天线阵、波束形成网络、波束形成算法三部分组成, 它指的是带有可以判定信号的空间信息(比如传播方向)和跟踪、定位信号源的智能算法, 并且可以根据此信息, 进行空域滤波的天线阵列。智能天线采用空分复用方式, 利用信号在传播路径方向上的差别, 将时延扩散、瑞利衰落、多径、信道干扰的影响降低, 将同频率、同时隙信号区别开来, 和其他复用技术相结合, 最大限度地有效利用频谱资源。

#### 1.2 智能天线的分类

根据采用的天线方向图形状, 可以将智能天线分为两类。

##### (1) 多波束智能天线

多波束天线在工作时, 利用多个并行的波束覆盖整个用户区, 每个波束的指向是固定的, 波束宽度也

随天线元数目而确定。当用户在小区中移动时, 它通过确定用户的到达方向, 从而在不同的波束中进行选择, 使接受信号最强。

##### (2) 自适应方向图智能天线

自适应阵列智能天线已经成为智能天线发展的主流, 它利用基带数字信号处理技术, 产生空间定向波束, 使天线主波束即最大增益点对准用户信号到达方向, 旁瓣或零陷对准干扰信号到达方向, 从而给有用信号带来最大增益, 同时有效地抑制了干扰信号。自适应阵列天线有诸多好处, 如扩大系统覆盖区域, 提高系统容量, 降低基站发射功率等。

自适应天线阵列一般采用 4~16 个天线阵元结构, 阵元间距约为半个波长。天线阵元分布方式有直线型、圆环形和平面型。

### 2. 不同阵列结构

#### 2.1 均匀直线阵

均匀直线阵是指  $N$  个相似天线元排列成一条直线，各天线元等间距  $d$  排列，而且各天线元上电流的幅度相等（等幅分布），相位依次等量递增  $\xi$ （线性相位分布）的直线阵，如图 1 所示。

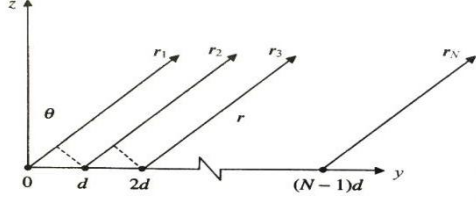


Figure 1. N element uniform linear array(ULA)  
图 1. N 元均匀直线阵

以第一个天线阵元作为参考点，则阵因子可以表示为  

$$AF = 1 + e^{j(kd \sin \theta + \xi)} + e^{j2(kd \sin \theta + \xi)} + \dots + e^{j(N-1)(kd \sin \theta + \xi)}$$
 则天线阵向量为

$$\mathbf{a}(\theta) = [1 \quad e^{j(kd \sin \theta + \xi)} \quad e^{j2(kd \sin \theta + \xi)} \quad \dots \quad e^{j(N-1)(kd \sin \theta + \xi)}]^T$$

易知：上式为 Vandermonde form(范德蒙德形式)。  

$$AF = \text{sum}(\mathbf{a}(\theta))$$

## 2.2 均匀圆阵

如图 2，x-y 平面上的  $N$  元圆阵天线。

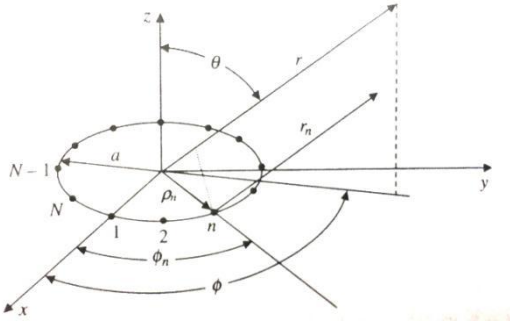


Figure 2. N element uniform circular array(UCA)  
图 2. N 元均匀圆阵

第  $n$  个阵元位于相角为  $\phi_n$ ，半径为  $a$  的圆环上。每个阵元都有相应的幅度  $\omega_n$  和相位  $\xi_n$ 。假设处于远场，且观察点所处的位置向量  $\mathbf{r}$  与  $\mathbf{r}_n$  平行。可以定义每个阵元  $n$  方向的单位向量

$$\mathbf{a}_{\rho_n} = \cos \phi_n \mathbf{a}_x + \sin \phi_n \mathbf{a}_y$$

$$\phi_n = \frac{2\pi}{N}(n-1)$$

定义场点方向的单位向量

$$\mathbf{a}_r = \sin \theta \cos \phi \mathbf{a}_x + \sin \theta \sin \phi \mathbf{a}_y + \cos \theta \mathbf{a}_z$$

当  $\mathbf{a}_{\rho_n}$  的标量投影到  $\mathbf{a}_r$  上时， $\mathbf{r}_n$  的长度小于  $\mathbf{r}$ ，因此，

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_n = a \mathbf{a}_{\rho_n} \cdot \mathbf{a}_r$$

其中，

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{\rho_n} \cdot \mathbf{a}_r &= \sin \theta \cos \phi \cos \phi_n + \sin \theta \sin \phi \sin \phi_n \\ &= \sin \theta \cos(\phi - \phi_n) \end{aligned}$$

阵因子为

$$\begin{aligned} AF &= \sum_{n=1}^N \omega_n e^{j(ka \mathbf{a}_{\rho_n} \cdot \mathbf{a}_r + \xi_n)} \\ &= \sum_{n=1}^N \omega_n e^{j(k \sin \theta \cos(\phi - \phi_n) + \xi_n)} \end{aligned}$$

天线阵向量为

$$\mathbf{a}(\theta) = [\omega_n e^{j(k \sin \theta \cos(\phi - \phi_n) + \xi_n)}]_{1 \times N}$$

## 2.3 均匀平面阵

如图 3，x-y 平面上的矩形平面阵。

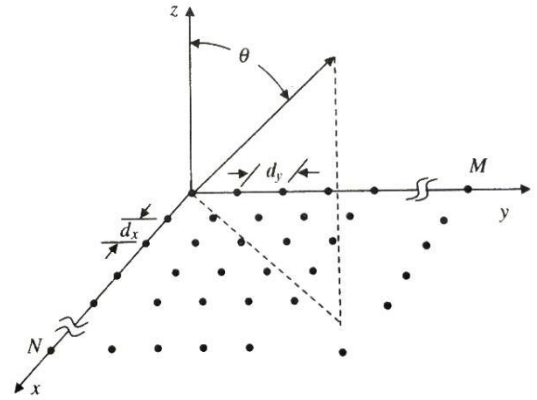


Figure 3. Uniform rectangular array(URA)  
图 3. 均匀平面阵

$x$  轴上有  $N$  个阵元， $y$  轴上有  $M$  个阵元，构成  $N \times M$  个阵元的天线阵。 $x$  轴上的阵元间隔为  $d_x$ ， $y$  轴上的阵元间隔为  $d_y$ 。该矩形平面阵可视为  $N$  个阵元的  $M$  个直线阵，或  $M$  个阵元的  $N$  个直线阵。我们已经知道  $N$  个阵元或  $M$  个阵元的天线阵单独作用的阵因子，

因此,根据方向图乘积定理,可得到  $N \times M$  个阵元的天线阵方向图如下:

$$\begin{aligned} AF &= AF_x \cdot AF_y \\ &= \sum_{n=1}^N a_n e^{j(n-1)(kd_x \sin\theta \cos\phi + \beta_x)} \sum_{m=1}^M a_m e^{j(m-1)(kd_y \sin\theta \sin\phi + \beta_y)} \\ &= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M a_n a_m e^{j[(n-1)(kd_x \sin\theta \cos\phi + \beta_x) + (m-1)(kd_y \sin\theta \sin\phi + \beta_y)]} \\ &= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \omega_{nm} e^{j[(n-1)(kd_x \sin\theta \cos\phi + \beta_x) + (m-1)(kd_y \sin\theta \sin\phi + \beta_y)]} \end{aligned}$$

式中

$$\omega_{nm} = a_n \cdot a_m$$

天线阵向量为

$$\mathbf{a}(\theta) = [\omega_{nm} e^{j[(n-1)(kd_x \sin\theta \cos\phi + \beta_x) + (m-1)(kd_y \sin\theta \sin\phi + \beta_y)]}]_{(N \times M) \times 1}$$

### 3. MUSIC 算法

DOA 估计的基本原理是: 对于一个远场信号, 信号到达不同阵元会有不同的波程差, 这个波程差会使得各接收阵元的接收信号之间存在一个相位差, 而利用这个相位差就可以求出信号的来波方向。

对于 DOA 估计, 目前已有许多算法, 如 Capon 到达角估计, ESPRIT 到达角估计, 线性预测到达角估计, 最大熵到达角估计, 最小范数到达角估计, MUSIC 到达角估计, 根值 MUSIC 到达角估计等。本文主要介绍 MUSIC 算法。

MUSIC (Multiple Signal Classification, 多重信号分类) 算法的基本思想是: 将任意阵列输出数据的协方差矩阵进行特征值分解, 从而得到与信号分量相对应的信号子空间和与信号分量相正交的噪声子空间, 然后利用这两个子空间的正交性来估计信号的参数。其具体过程如下:

假设有  $D$  个信号从  $D$  个不同的方向到达, 它们被一个含  $M$  个阵元的天线阵接收, 其中  $D < M$ 。每个接收信号  $x_m(k)$  都含有 AWGN, 且服从  $N \sim (0, \sigma_n^2)$ , 在第  $k$  个采样时刻, 接收信号可表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k) &= [\mathbf{a}(\theta_1) \mathbf{a}(\theta_2) \cdots \mathbf{a}(\theta_D)] \cdot [s_1(k) \ s_2(k) \ \cdots \ s_D(k)]^T + \mathbf{n}(k) \\ &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{s}(k) + \mathbf{n}(k) \end{aligned}$$

其中,  $\mathbf{s}(k)$  表示时刻  $k$  入射的单一频率复信号向量;  $\mathbf{n}(k)$  表示每个天线阵元  $m$  的噪声向量, 其均值为 0, 方差为  $\sigma_n^2$ ;  $\mathbf{a}(\theta_i)$  表示在到达方向  $\theta_i$  上,  $M$  阵元天线阵向量; 其中

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}(\theta_1) \mathbf{a}(\theta_2) \cdots \mathbf{a}(\theta_D)]$$

表示阵向量  $\mathbf{a}(\theta_i)$  的  $M \times D$  的矩阵。

对于接收信号, 含有  $M$  个阵元的天线阵的相关矩阵为

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{xx} &= E[\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}^H] = E[(\mathbf{A}\mathbf{s} + \mathbf{n})(\mathbf{s}^H \mathbf{A}^H + \mathbf{n}^H)] \\ &= \mathbf{A} E[\mathbf{s} \cdot \mathbf{s}^H] \mathbf{A}^H + E[\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}^H] \\ &= \mathbf{A} \mathbf{R}_{ss} \mathbf{A}^H + \mathbf{R}_{nn} \end{aligned}$$

其中  $\mathbf{R}_{ss}$  表示  $D \times D$  的信源相关矩阵;

$\mathbf{R}_{nn} = \sigma_n^2 \mathbf{I}$  表示  $M \times M$  的噪声相关矩阵;  $\mathbf{I}$  表示单位矩阵。

接着求  $\mathbf{R}_{xx}$  的特征值和特征向量。进而求与信号相关的  $D$  个特征向量和与噪声相关的  $M - D$  个特征向量。选择与最小特征值对应的特征向量。对不相关信号, 最小特征值等于噪声的方差。然后构造由噪声特征向量张开的  $M \times (M - D)$  维子空间, 于是

$$\mathbf{E} = [\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2 \ \cdots \ \mathbf{e}_{M-D}]$$

在到达角  $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_D$  处, 噪声子空间特征向量与天线阵向量正交。根据正交性, 可求得各个到达角的欧氏距离

$$d^2 = \mathbf{a}(\theta)^H \mathbf{E} \mathbf{E}^H \mathbf{a}(\theta) = 0$$

将该距离表达式放入分母中得到达角的峰值。MUSIC 的伪谱为

$$P_{MUSIC}(\theta) = \frac{1}{|\mathbf{a}(\theta)^H \mathbf{E} \mathbf{E}^H \mathbf{a}(\theta)|}$$

### 4. 仿真结果分析

#### 4.1 对 MUSIC 算法的分析

(1) 在 MATLAB 中用 MUSIC 到达角估计画出  $M=6$  阵元天线阵的伪谱, 如图 4。其中阵元间距  $d = \lambda/2$ , 不相关, 等幅度源  $(s_1, s_2)$ , 且  $\sigma_n^2 = 0.1$ , 两个到达角为  $\pm 5^\circ$ 。

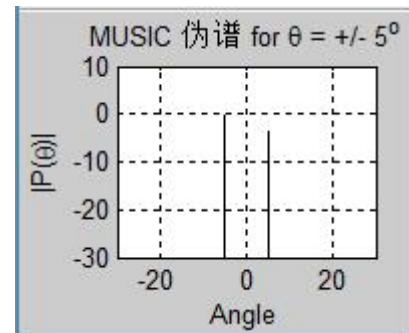


Figure 4. MUSIC pseudo spectrum  
图 4. MUSIC 伪谱

由图 4 可以看出, MUSIC 到达角估计算法较为精

确，误差较小。

(2)在实际应用中，假设各态历经性，通过时间平均估计相关矩阵。假设条件同上，不妨取采样点的个数  $K=100$ 。

case1: 其他条件不变，当取不同的  $\sigma_n^2$  时，结果如下：

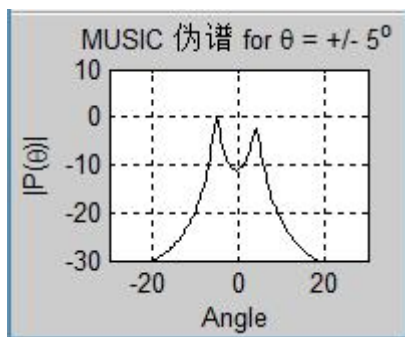


Figure 5. MUSIC pseudo spectrum for  $\sigma_n^2 = 0.1$

图 5.  $\sigma_n^2 = 0.1$  时 MUSIC 伪谱

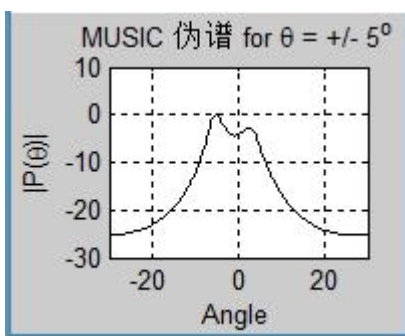


Figure 6. MUSIC pseudo spectrum for  $\sigma_n^2 = 0.5$

图 6.  $\sigma_n^2 = 0.5$  时 MUSIC 伪谱

其中，图 5 中  $\sigma_n^2 = 0.1$ ，图 6 中  $\sigma_n^2 = 0.5$ ，易知，随着噪声方差的增大，伪谱图会发生变化，分辨率下降。

case2: 其他条件不变，当取不同的  $M$  时，结果如下：

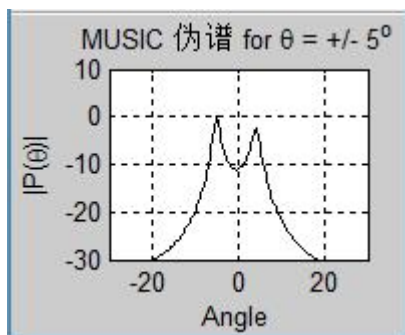


Figure 7. MUSIC pseudo spectrum for  $M=6$

图 7.  $M=6$  时 MUSIC 伪谱

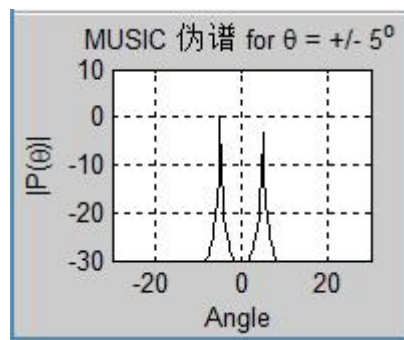


Figure 8. MUSIC pseudo spectrum for  $M=16$

图 8.  $M=16$  时 MUSIC 伪谱

其中，图 7 中  $M=6$ ，图 8 中  $M=16$ ，易知，随着阵元数目的增大，伪谱图会发生变化，分辨率有所提高。

case3: 其他条件不变，当取不同的  $K$  时，结果如下：

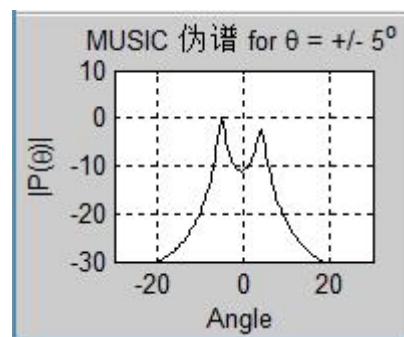


Figure 9. MUSIC pseudo spectrum for  $K=100$

图 9.  $K=100$  时 MUSIC 伪谱

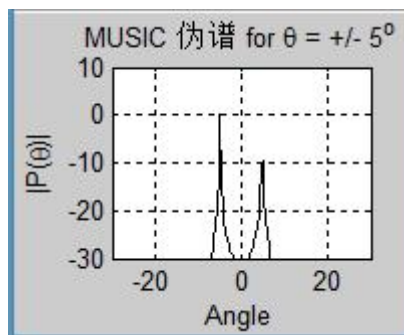


Figure 10. MUSIC pseudo spectrum for  $K=1000$

图 10.  $K=1000$  时 MUSIC 伪谱

其中, 图 9 中  $K=100$ , 图 10 中  $K=1000$ , 易知, 随着采样点数的增大, 伪谱图会发生变化, 分辨率有所提高。

## 4. 2 不同阵列结构的比较

(1) 用 MUSIC 到达角估计  $M=8$  的不同天线阵 (ULA, UCA, URA) 的伪谱。其中阵元间距  $d=\lambda/2$ , 到达角为  $0^\circ$ , 信噪比  $SNR=5\text{dB}$ 。如图所示<sup>[1]</sup>:

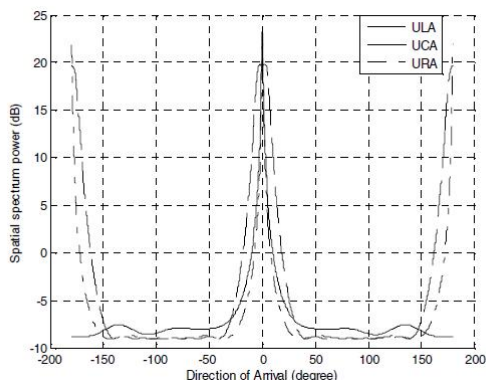


Figure 11. MUSIC pseudo spectrum for ULA, UCA, URA  
图 11. ULA, UCA 和 URA 的 MUSIC 伪谱

由图可以看出: 根据峰值在  $0^\circ$  的尖锐程度, 可以判断 URA 的分辨率最好, 其次为 UCA, ULA 相对较差。同时对于 ULA 和 URA 阵列, 在  $\pm 180^\circ$  处也出现了峰值, 然而此处并不是到达角的真实方向, 这可能是由于  $\mathbf{a}(0^\circ) = \mathbf{a}(180^\circ)$  所导致的。

(2) 当其他条件不变时, 到达角重新设为  $90^\circ$ 。结果如图所示<sup>[2]</sup>:

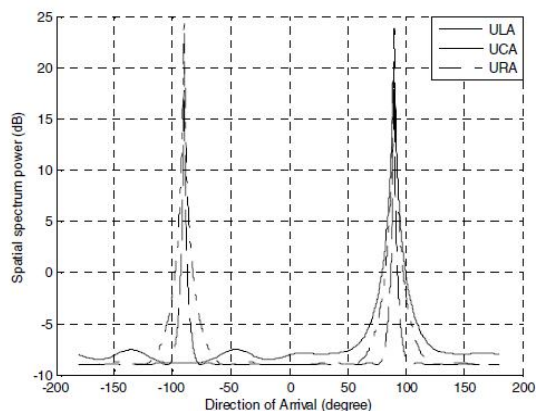


Figure 12. MUSIC pseudo spectrum for ULA, UCA, URA  
图 12. ULA, UCA 和 URA 的 MUSIC 伪谱

此时, 由图可以看出: 根据峰值在  $90^\circ$  的尖锐程度, 可以判断 ULA 的分辨率最好, 其次为 URA, UCA 相对较差。同样对于 ULA 和 URA 阵列, 在关于  $0^\circ$  镜像对称的  $-90^\circ$  处也出现了不期望的峰值。

## 5. 总结

到达角估计是智能天线的一个重要问题, 目前已有多种算法对其作出了较为准确的估计。同时不同的天线阵列, 如 ULA, UCA, URA 也在实际中得到了广泛的应用。研究表明, 相比于 ESPRIT 算法, MUSIC 算法更稳定, 更准确, 这增加了通过 SDMA 使用户分离的可能性, 可以被广泛应用于智能天线系统中<sup>[3]</sup>。同时相比于传统算法, 尤其是当有多个入射波时, MUSIC 算法具有更高的分辨力, 可以很好地对平面阵天线进行到达角估计<sup>[4]</sup>。经分析, 我们还可以看出, 随着阵元、采样点数的增多, MUSIC 算法的分辨率明显提高, 但同时也增加了算法的复杂性, 计算量显著增大。因此, 目前已出现利用均匀阵的子阵, 如非均匀子阵进行到达角估计, 虽然性能稍有下降, 但却明显简化了算法的复杂性, 节约了许多硬件和计算时间。因此, 工程设计的思想确实是在利与弊之间做一个均衡。

## 致 谢

通过一段时间的努力, 自己的论文暂告收尾。回首既往, 论文完成的过程中也充满了诸多的欢笑与痛楚。当初的选题, 自己总是摇摆不定, 甚至曾因为困难而一度想放弃, 然而, 我不断鼓励自己, 最终接受了这份挑战。同时在论文写作过程中, 也得到了许多同学的关心、支持和鼓励, 在此我表示衷心的感谢。同时, 我还要感谢田老师, 或许有压力才会有动力, 通过这一段时间的努力, 自己也收获了很多, 成长了很多, 摒弃曾经一度抱怨的心态, 而是努力将自己的事情做到极致。最后, 向所有关心我的亲人、师长和朋友们表示深深的谢意, 谢谢你们!

由于自身专业水平的不足, 整篇论文肯定存在尚未发现的缺点和错误。恳请老师予以指正, 我将不胜感激。

## References (参考文献)

- [1] L. Jin, L. Li, and H. Wang, "Investigation of Different Types of Array Structures for Smart Antennas," IEEE International conference on Microwave and Millimeter Wave Technology, vol. 3, pp. 1160 - 1163, 2008
- [2] R. Kawitkar, "Performance of Different Types of Array Structures Based on Multiple Signal Classification (MUSIC) algorithm," 2009 Fifth International Conference on MEMS, NANO, and Smart

Systems(ICMENS), Dec. 28-30, 2009, pp.159 - 161

[3]T.B. LAVATE, V.K. KOKATE, A. M. SAPKAL, "Performance Analysis of MUSIC and ESPRIT DOA Estimation algorithms for adaptive array smart antenna in mobile communication," 2010 Second International Conference on Computer and Network Technology

(ICCNT), pp. 308 - 311, 2010

[4]C. Sun, "The application of MUSIC algorithm in the planar array antenna," 2015 IEEE International Conference on Signal Processing, Communications and Computing (ICSPCC),pp. 1 - 4, 2015