



Vilniaus Universitetas

Paprastosios diferencialinės lygties pradinio uždavinio skaitinis sprendimas

4 laboratorinis darbas

Skaitiniai metodai

Darbą atliko:

Dovydas Martinkus

Duomenų Mokslas 4 kursas 1 gr.

Vilnius, 2022

Turiny

1. Užduoties ataskaita3

Priedas7

1. Užduoties ataskaita

Reikalinga išspręsti Koši uždavinį:

$$\begin{cases} \frac{du}{dx} = f(x, u), \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

intervale $0 \leq x \leq 1$, taikant 4-pakopį Rungės-Kuto ir tripakopį ($m=3$, $p=3$) metodus.

Paklaidos vertinimui naudojamas Rungės metodas:

$$|u(T) - y_T| \approx \frac{|y_{2\tau} - y_\tau|}{2^p - 1}.$$

Šiuo atveju $f(x, u) = x \sin(2u) + x^2$. Taip pat pasirinkta $u(0) = 0$.

4-pakopiui Rungės-Kuto metodui naudota RK lentelė:

$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$			
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$		
1	0	0	1	
	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$

3-pakopiui Rungės-Kuto metodui naudota RK lentelė:

$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$		
1	-1	2	
	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$

Žemiau lentelėje pateikta gauta paklaida (5 skaičių po kablelio tikslumu) naudojant skirtingus metodus ir žingsnio dydžius (1 lentelė):

1 lentelė Rungės metodu įvertinta paklaida naudojant skirtingus metodus ir žingsnio dydžius

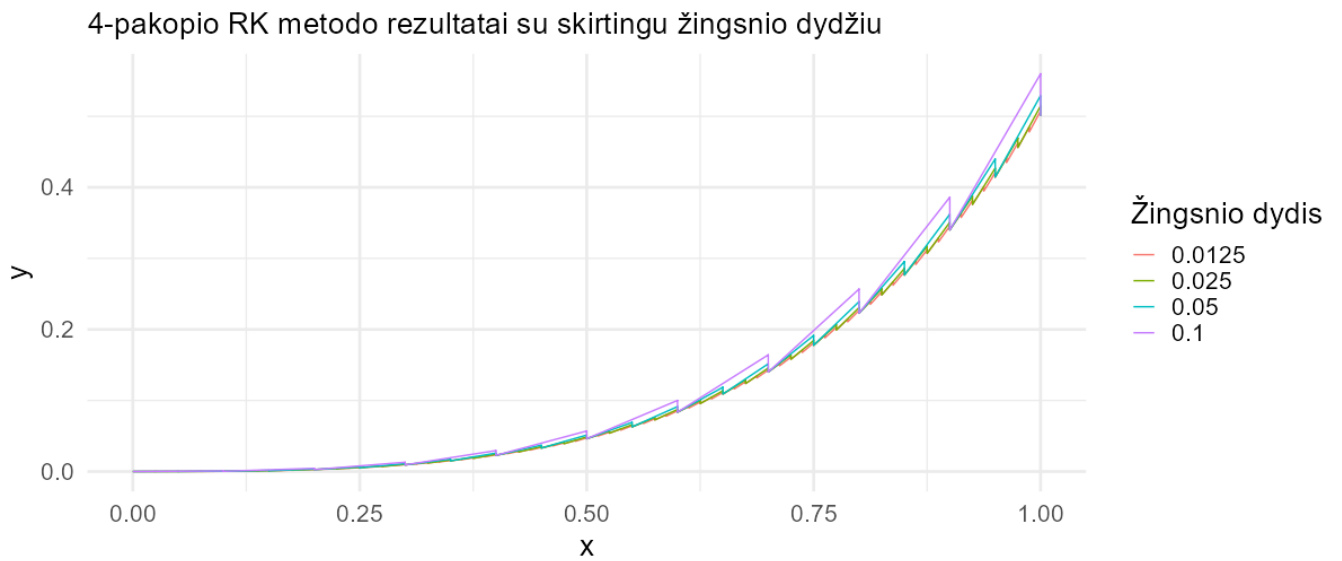
Metodas	Žingsnio dydis	Paklaida
3-pakopis	0,1	0,00952
4-pakopis	0,1	0,00446
3-pakopis	0,05	0,00438
4-pakopis	0,05	0,00205
3-pakopis	0,025	0,00208
4-pakopis	0,025	0,00097
3-pakopis	0,0125	0,00101
4-pakopis	0,0125	0,00047

Matome, kad gauta paklaida mažėja mažinant žingsnio dydį. Taip pat naudojant 4-pakopį metodą gaunamos mažesnės paklaidos, negu naudojant 3-pakopį.

Žemiau (1 ir 2 pav.) grafiškai pateikti gauti rezultatai naudojant skirtingus metodus ir žingsnio dydžius:



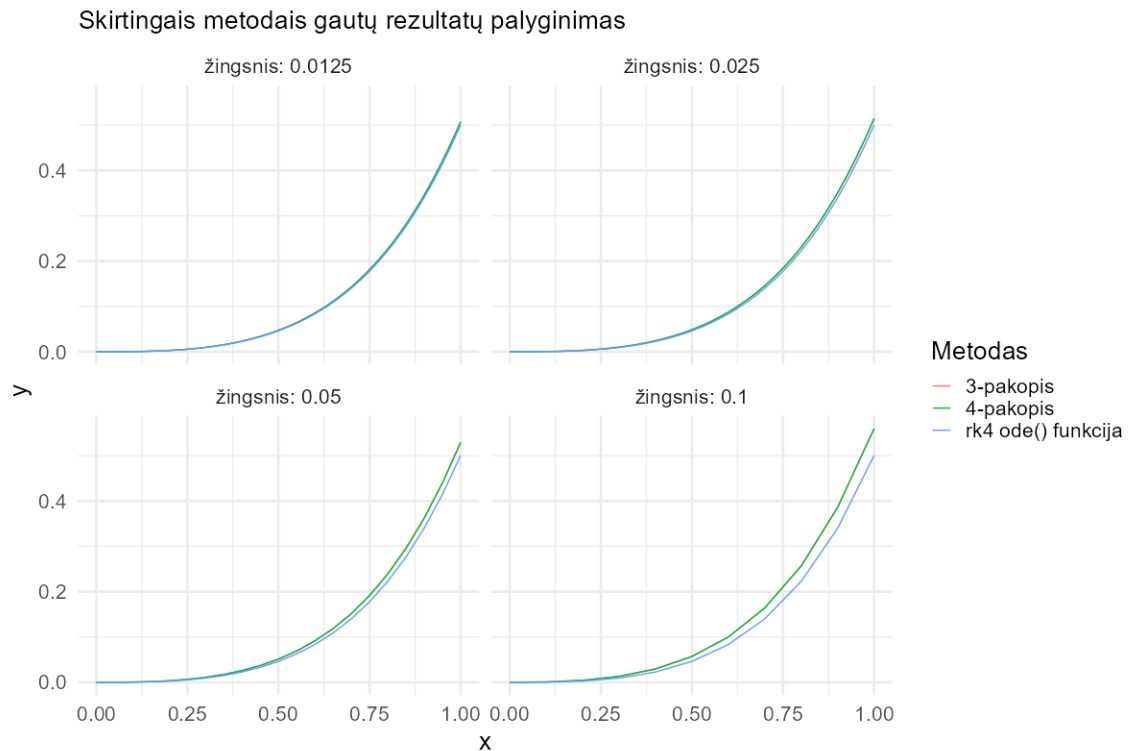
1 pav. 3-pakopiu RK metodu gauti rezultatai keičiant žingsnio dydį



2 pav. 4-pakopiu RK metodu gauti rezultatai keičiant žingsnio dydį

Gautiems rezultatams palyginti naudota R funkcija *ode* iš paketo *deSolve* su argumento *method* reikšme *rkMethod('rk4')* (4-pakopis Rungės-Kuto metodas).

Rastų sprendinių palyginimas naudojant skirtingus žingsnio dydžius ir metodus (3-pakopį, 4-pakopį ir R funkcijos *ode* metodą *rk4*) pateiktas žemiau (3 pav.):



3 pav. Gautų rezultatų naudojant skirtingus metodus ir žingsnio dydžius palyginimas

Iš aukščiau pateikto grafiko nematome ryškių skirtumų tarp rezultatų gautų naudojant 3-pakopį ir 4-pakopį metodus – su visais žingsnio dydžiais abejais metodais gautos kreivės persidengia. Tačiau pastebima, kad didėjant naudoto žingsnio dydžiui didėja ir skirtumas tarp gautų rezultatų ir *ode* funkcijos gražinamų rezultatų.

Priedas

Žemiau pateiktas naudotas programinis kodas:

```
# Dovydas Martinkus
# Duomenų Mokslas 4k. 1gr.
# 4 uždutis

###

## Funkciju aprasymas

funkcija <- function(x,u) {
  x*sin(2*u) + x^2
}

tinklas <- function(start,end,step) {
  N <- (end-start) / step
  if (N%%1!=0) {
    print('Netinkamas zingsnio dydis')
  }
  step * 0:N
}

rungek_kuto <- function(func,m,u0,zingsnis,a,b,sigma,start=0,
                        end=1) {

  tinklas <- tinklas(start,end,zingsnis)
  n <- length(tinklas)-1

  y <- u0
  for (i in 1:n) {
    y_i <- y[i] + zingsnis * k_m(func,m,y[i],tinklas[i],
                                zingsnis,a,b,sigma)
  }
  y <- c(y,y_i)
  data.frame(x=tinklas,y=y,zingsnis=zingsnis,m=m)
}

k_m <- function(func,m,y_n,t_n,zingsnis,
                a_array,b_matrix,sigma_array) {
  k <- numeric()
  for (i in 1:m) {
    if (i == 1) {
      a = 1
      b_sum = 1
    }
    else {
      a = a_array[i]
      b_sum <- b_matrix[i,1:(i-1)] %*% k
    }
  }
}
```

```

    k_i <- func(t_n + zingsnis*a, y_n + zingsnis*b_sum)
    k <- c(k,k_i)
  }
  k %%% sigma_array[1:m]
}

runges_paklaida <- function(func,m,u0,zingsnis,a,b,sigma,p,start=0,
                             end=1) {
  result_a<-runges_kuto(func,m,u0,zingsnis,a,b,sigma,start=0,
                        end=1)
  result_b<-runges_kuto(func,m,u0,zingsnis*2,a,b,sigma,start=0,
                        end=1)

  y_tau <- result_a[lengths(result_a)[1],2]
  y_2tau <- result_b[lengths(result_b)[1],2]
  data.frame(m=m,zingsnis=zingsnis,paklaida=abs(y_2tau-y_tau) / (2^p-1))
}

```

3-pakopis

```

a_3 <- c(0,1/2,1)
sigma_3 <- c(1/6,4/6,1/6)
b_3 <- matrix(c(0,0,
                1/2,0,
                -1,2),nrow=3,byrow = TRUE)

```

```

runges_kuto(funkcija,3,0,0.025,a_3,b_3,sigma_3)

runges_paklaida(funkcija,3,0,0.025,a_3,b_3,sigma_3,3)

```

4-pakopis

```

a_4 <- c(0,1/2,1/2,1)
sigma_4 <- c(1/6,2/6,2/6,1/6)
b_4 <- matrix(c(0,0,0,0,
                1/2,0,0,0,
                0,1/2,0,0,
                0,0,1),nrow = 4,byrow = TRUE)

```

```

runges_kuto(funkcija,4,0,0.025,a_4,b_4,sigma_4)

runges_paklaida(funkcija,4,0,0.025,a_4,b_4,sigma_4,4)

```



```

# Rezultatu palyginimas

library(deSolve)

funkcija2 <- function(x,u,parms=NULL) {
  list(funkcija(x,u))
}

r_rungek_kuto <- function(func,rk,u0,zingsnis,start=0,end=1) {
  tinklas <- tinklas(start,end,zingsnis)
  y<- ode(times = tinklas, y = u0, func = func,
    parms = NULL, method = rkMethod('rk4'))
  data.frame(x=tinklas,y=y[,2],zingsnis=zingsnis,m=rk)
}

rezultatai <- NULL
paklaida <- NULL

for (i in c(0.1,0.05,0.025,0.0125)) {
  rezultatai <-rbind(rezultatai,
    rungek_kuto(funkcija,3,0,i,a_3,b_3,sigma_3))
  rezultatai <-rbind(rezultatai,
    rungek_kuto(funkcija,4,0,i,a_4,b_4,sigma_4))
  rezultatai <-rbind(rezultatai,
    r_rungek_kuto(funkcija2,'rk4',0,i))

  paklaida <- rbind(paklaida,
    rungek_paklaida(funkcija,3,0,i,a_3,b_3,sigma_3,3),
    rungek_paklaida(funkcija,4,0,i,a_4,b_4,sigma_4,4))
}

rezultatai$zingsnis <- factor(rezultatai$zingsnis)
rezultatai$m <- factor(rezultatai$m,labels=c("3-pakopis","4-pakopis","rk4 ode() funkcija"))

library(ggplot2)

ggplot(subset(rezultatai,1==1),aes(x,y,color=m)) +
  geom_line() + facet_wrap(vars(zingsnis),labeller = 'label_both') +
  theme_minimal(base_size=20) + labs(subtitle='Skirtingais metodais gautų rezultatų palyginimas') +
  scale_color_discrete("Metodas",)

ggplot(subset(rezultatai,m=4),aes(x,y,color=zingsnis)) +
  geom_line() +
  theme_minimal(base_size=20) + labs(title='') + labs(subtitle='4-pakopio RK metodo rezultatai su
skirtingu žingsnio dydžiu') +
  scale_color_discrete("Žingsnio dydis")

```

```
ggplot(subset(rezultatai,m=3),aes(x,y,color=žingsnis)) +  
  geom_line() +  
  theme_minimal(base_size=20) + labs(subtitle='3-pakopio RK metodo rezultatai su skirtingu žingsnio  
dydžiu') +  
  scale_color_discrete("Žingsnio dydis")
```