

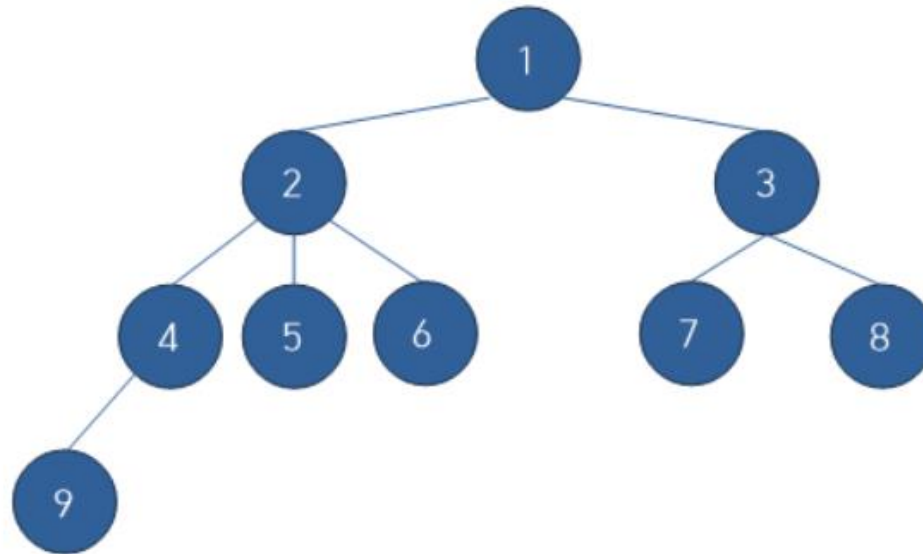
알고리즘

Lowest Common Ancestor (LCA)
최소공통조상노드

이영석

문제

- 트리에서 두 노드 사이의 가장 첫번째 만나는 부모노드는?
 - 6과 3? 1
 - 9와 6? 2



문제해결 방법

1. 각 노드의 모든 부모노드 리스트를 찾아 비교하기
 1. 각 노드 \rightarrow 모든 부모 노드의 경로 상 노드 비교: $O(n)$
 - 경로 찾기 최적화: 2^n 으로 비교하기: $O(\log n)$
2. DFS(preorder, 방문 노드 모두 기록)후 min segment tree
 1. DFS/Euler tour (preorder)
 2. segment tree (range minimum query)

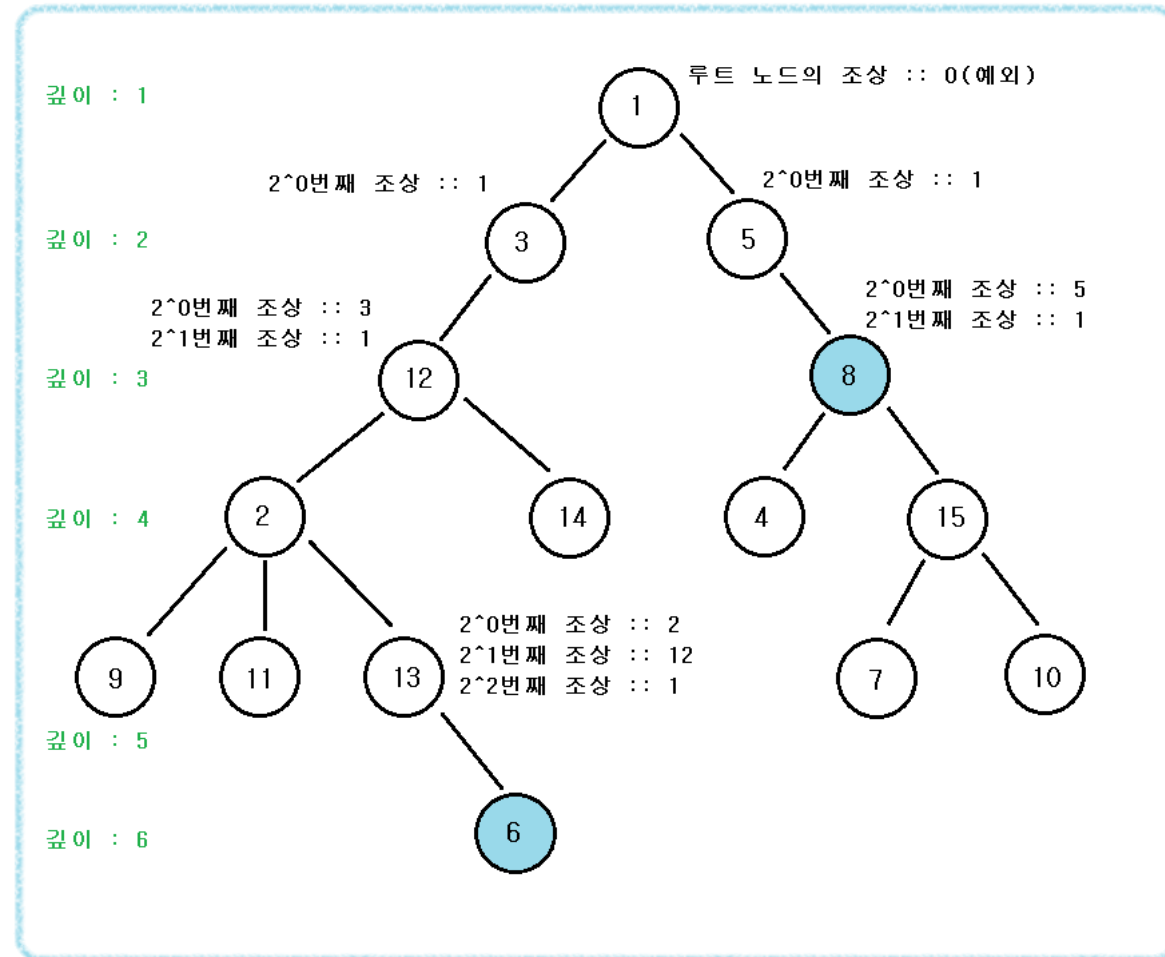
LCA 풀기(1)

- i 번째 조상 찾기 -> 2진수 표현

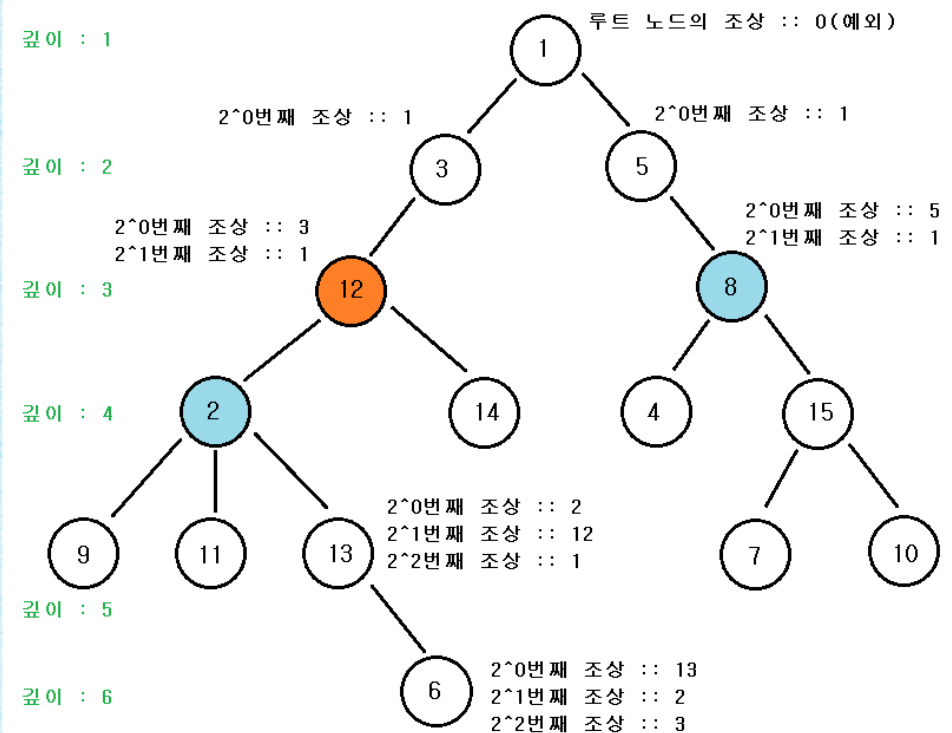
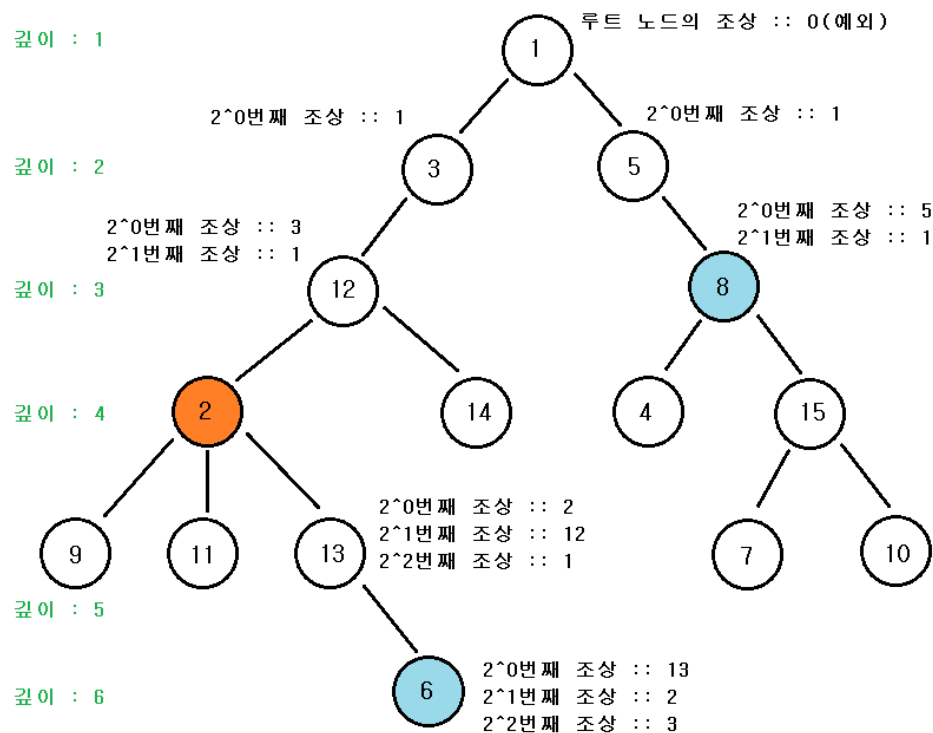
- $3 = 11 = 2^0 + 2^1$
- $7 = 111 = 2^0 + 2^1 + 2^2$
- $11 = 1011 = 2^0 + 2^1 + 2^3$

- 2^n 번째 조상 노드 표현

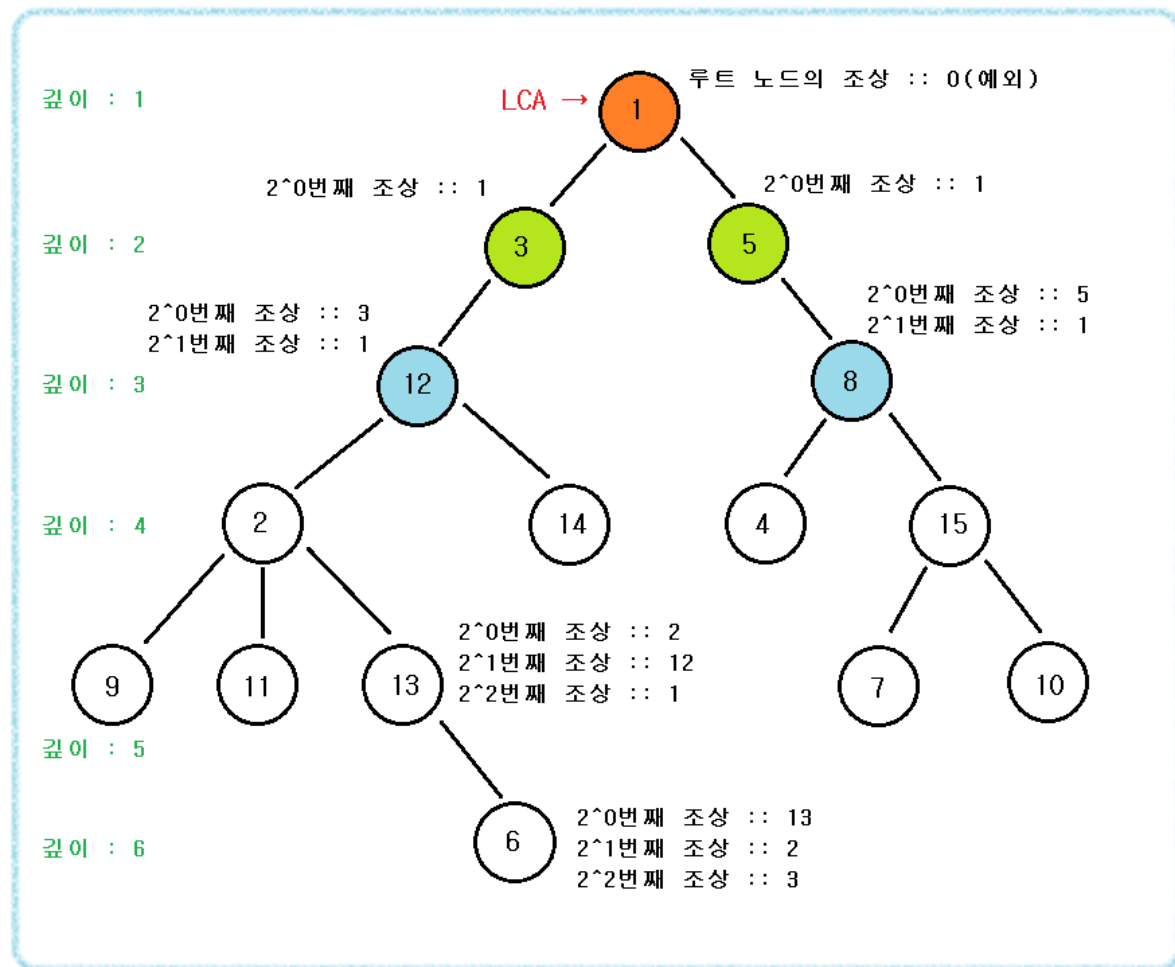
- $2^n = 2^{n-1} + 2^{n-1}$



- 깊이가 더 깊은 노드를 올려서 균형을 맞춘다



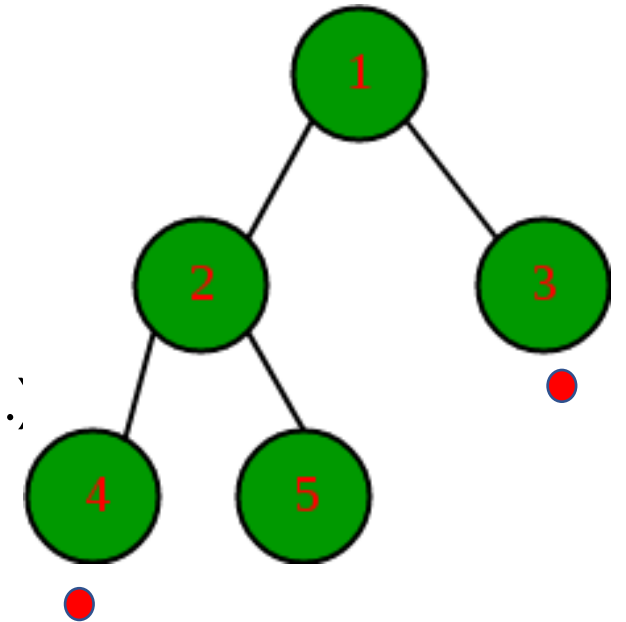
- a, b 노드에서 2^k 부모 찾기
 - 부모 노드가 다르면 노드를 이동하여 다시 검색
 - 부모 노드가 같으면 다음 최소 공통 노드가 있는지 2^{k-1} 검색
- 이렇게 이동하면
 - 최소공통노드가 부모 노드가 됨
- 12와 8의 LCA ?
 - 4th 부모: 0, 0
 - 2nd 부모: 1, 1
 - 1st 부모: 3, 5 -> 부모노드 이동
 - 3, 5의 부모가 LCA



LCA 풀기(2)

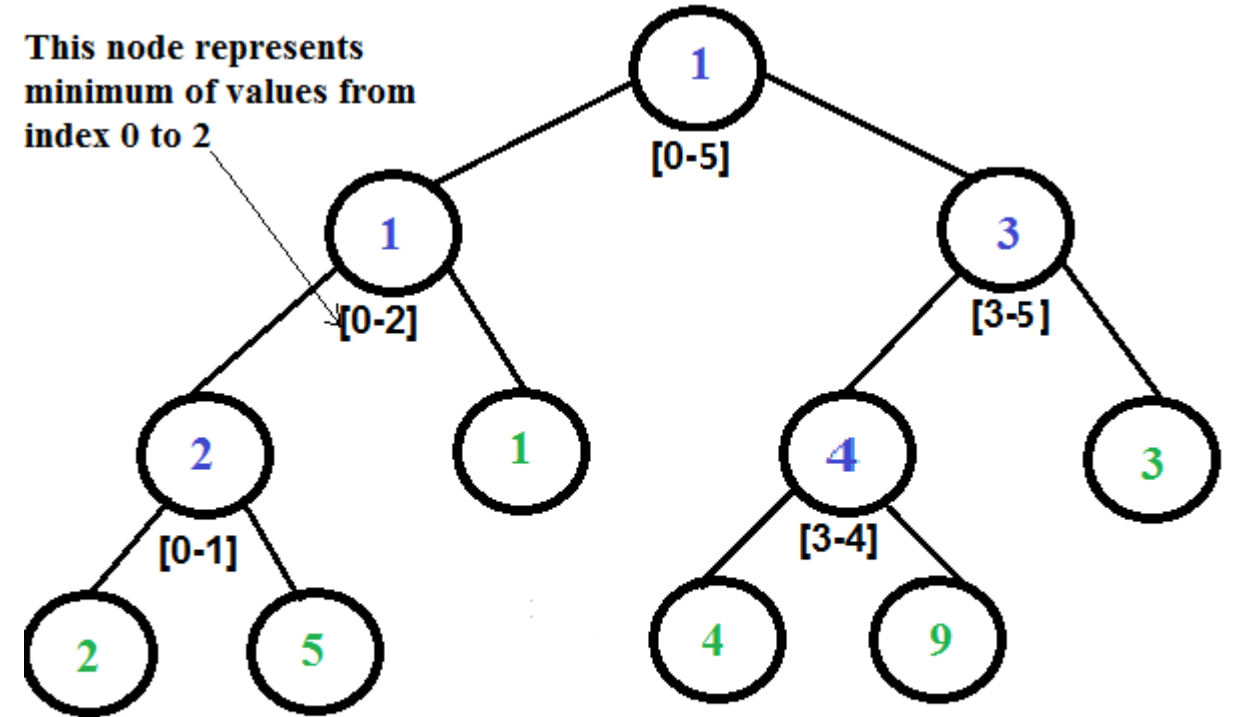
- LCA -> RMQ (range minimum query)
 - 노드 순회: DFS(preorder)
 - E[]: 1 2 4 2 5 2 1 3 1
 - 노드 Level (Depth): L[]
 - L[]: 1 2 3 2 3 2 1 2 1
 - 인덱스: i번째 노드가 E[]에서 첫번째 나오는 index ($i=1, 2, \dots$)
 - H[]: 0 1 7 2 4
 - LCA(4, 3) 문제는 E[] 범위에서 L[2:7]의 최소값 찾기!
 - H[4] -> 2, H[3] -> 7: **노드의 인덱스 찾기**
 - E[2] <-> E[7] 범위에서
 - **L[2] <-> L[7] 값의 최소찾기!**
-
- E[]: 1 2 **4** 2 5 2 1 **3**
 - L[]: 1 2 **3** 2 **3** 2 **1** 2

$$\text{LCA}(4, 3) = 1$$

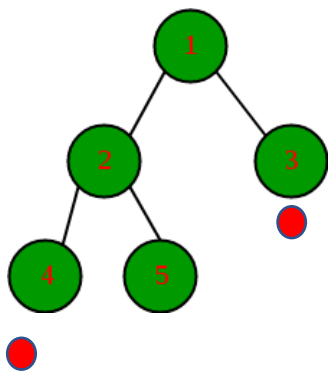


Segment Tree

- Minimum segment tree
 - leaf node: 데이터
 - non-leaf node: 왼쪽 자식과 오른쪽 자식의 **최소값**



Segment Tree for input array {2, 5, 1, 4, 9, 3}

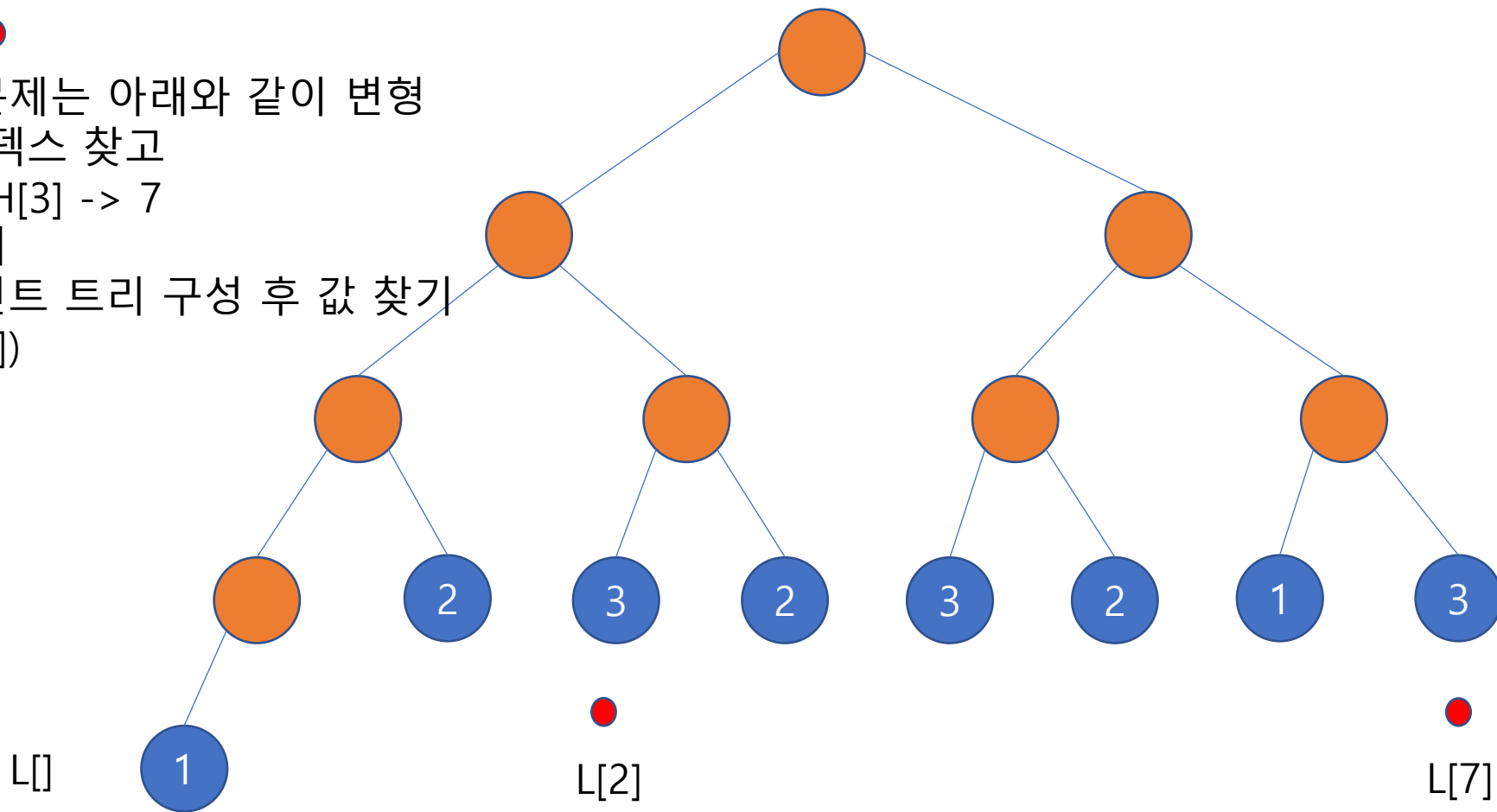


H[]: 0 1 7 2 4

E[]: 1 2 4 2 5 2 1 3

L[]: 1 2 3 2 3 2 1 2

LCA(4, 3) 문제는 아래와 같이 변형
 4와 3의 인덱스 찾고
 $H[4] \rightarrow 2, H[3] \rightarrow 7$
 이 인덱스의
 최소 세그먼트 트리 구성 후 값 찾기
 $RMQ(L[2: 7])$



정리

- 그래프/트리
 - 노드 방문/탐색
- 트리
 - 공통조상노드 찾기