

TRƯỜNG ĐỜI 36
NỖ CON MÃ ĐÌNH



Course name

Assignment Report

Report title

Nợ phó: STUDENT: H (xxxxxxx)

THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH, 20 THÁNG SÁU 2025



Mục lục

1	Xác suất thống kê	1
1.1	Lý thuyết	1
1.2	Công thức Bayes	1
1.3	Xích Markov	2
1.4	Bài tập	3
1.5	Đề thi thử trường sở	4
2	Ứng dụng tích phân	6
3	Toán rời rạc	8



1 Xác suất thống kê

1.1 Lý thuyết

Định nghĩa Cho hai biến cố A và B . Xác suất của biến cố A với điều kiện biến cố B đã xảy ra được gọi là xác suất của A với điều kiện B , kí hiệu là $P(A|B)$.

Nếu $P(B) > 0$ thì:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Nhận xét

- Từ định nghĩa của xác suất có điều kiện, ta suy ra $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$.
- Người ta chứng minh được rằng

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B).$$

Công thức trên được gọi là công thức nhân xác suất.

- Người ta cũng tính $P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$.

Công thức xác suất đầy đủ Cho 2 biến cố A, B với $0 < P(B) < 1$, ta có:

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}).$$

Mặt khác:

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$$

$$P(A \cap \overline{B}) = P(\overline{B}) \cdot P(A|\overline{B})$$

Từ đó ta có công thức xác suất đầy đủ như sau:

$$P(A) = P(B) \cdot P(A|B) + P(\overline{B}) \cdot P(A|\overline{B}).$$

1.2 Công thức Bayes

Từ công thức nhân xác suất:

$$P(B|A) \cdot P(A) = P(B) \cdot P(A|B) = P(A \cap B).$$



Với hai biến cố A, B mà $P(A) > 0$, ta có công thức xác suất Bayes:

$$P(B|A) = \frac{P(B) \cdot P(A|B)}{P(A)}.$$

Do $P(A) = P(B) \cdot P(A|B) + P(\bar{B}) \cdot P(A|\bar{B})$, nên công thức Bayes còn có dạng:

$$P(B|A) = \frac{P(B) \cdot P(A|B)}{P(B) \cdot P(A|B) + P(\bar{B}) \cdot P(A|\bar{B})}$$

1.3 Xích Markov

Mô hình Markov là một mô hình xác suất gồm một tập hợp hữu hạn các trạng thái và các xác suất chuyển trạng thái, trong đó xác suất chuyển sang trạng thái tiếp theo chỉ phụ thuộc vào trạng thái hiện tại, phụ thuộc vào 2 yếu tố chính:

- Mô hình đầu vào, biểu thị điều kiện hoặc số lượng ban đầu: $I_{m \times 1}$ (Initial State) với m là số lượng tham số.
- Mô hình chuyển trạng thái, biểu thị mối liên hệ giữa các đại lượng: $M_{m \times m}$ (Modification), trong đó đại lượng x_{ab} biểu thị mối liên hệ giữa đại lượng b từ đại lượng a .

Sự chuyển trạng thái giữa 2 chu kỳ liên tiếp nhau được biểu thị: $I_n = M \cdot I_{n-1}$

Vậy sau khi trải qua n chu kỳ, xác suất của mô hình là:

$$I_n = M^n \cdot I_0$$

Ví dụ

Cuối năm 2036, tiểu vương quốc Ỗ-i-i LGBT Skibidi thực hiện khảo sát thống kê thành phần chính trong ngành công nghiệp nặng trọng điểm Scammer, Đồ Bạ, Streamer thu được kết quả so với năm trước như sau:

- Mỗi đơn vị đầu ra ngành Scammer cần (0%, 30%, 20%).
- Mỗi đơn vị đầu ra ngành Đồ Bạ cần (45%, 5%, 5%).
- Mỗi đơn vị đầu ra ngành Streamer cần (35%, 10%, 0%).

Trong đó (A, B, C) là số đơn vị đầu vào của ngành A, B, C . Giả sử số liệu trên không đổi qua các năm, tính cơ cấu kinh tế của mỗi ngành vào năm 2063, biết năm 2036 kim ngạch kinh tế của các ngành lần lượt là 100, 200, 120 triệu USD.

$$\text{Mô hình ma trận đầu vào và ma trận chuyển đổi: } I_0 = \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 120 \end{pmatrix} \text{ (triệu USD), } M = \begin{pmatrix} 0 & 0.45 & 0.35 \\ 0.3 & 0.05 & 0.1 \\ 0.2 & 0.05 & 0 \end{pmatrix}$$



$$\Rightarrow I_{27} = M^{27} \cdot I_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0.45 & 0.35 \\ 0.3 & 0.05 & 0.1 \\ 0.2 & 0.05 & 0 \end{pmatrix}^{27} \times \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 120 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.000 \cdot 10^{-4} \\ 1.518 \cdot 10^{-4} \\ 9.380 \cdot 10^{-4} \end{pmatrix}$$

Vậy Scammer, Đồ Bạ, Streamer chiếm lần lượt $2.000 \cdot 10^{-6}\%$, $1.518 \cdot 10^{-6}\%$, $9.380 \cdot 10^{-6}\%$ cơ cấu kinh tế.

1.4 Bài tập

Theo một số liệu thống kê, năm 2004 ở Canada có 65% nam giới là thừa cân và 53,4% nữ giới là thừa cân. Nam giới và nữ giới ở Canada đều chiếm 50% dân số cả nước. Hỏi trong năm 2004, xác suất để một người Canada được chọn ngẫu nhiên là người thừa cân bằng bao nhiêu?

Xét hai biến cố:

- A : “Người được chọn ra là người thừa cân”;
- B : “Người được chọn ra là nam giới” $\Rightarrow \bar{B}$: “Người được chọn ra là nữ giới”.

$$\text{Từ giả thiết: } \begin{cases} P(B) = P(\bar{B}) = 50\% = 0,5 \\ P(A|B) = 65\% = 0,65 \\ P(A|\bar{B}) = 53,4\% = 0,534. \end{cases}$$

Theo công thức xác suất toàn phần:

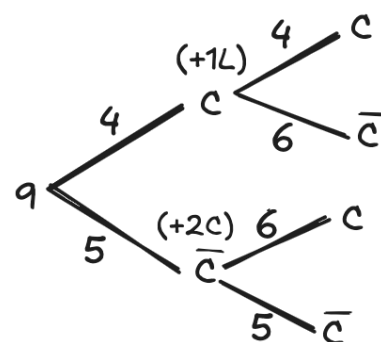
$$P(A) = P(B) \cdot P(A|B) + P(\bar{B}) \cdot P(A|\bar{B}) = 0,5 \cdot 0,65 + 0,5 \cdot 0,534 = \boxed{0,592}.$$

Một hộp chứa 9 thẻ được đánh số từ 1 tới 9, bạn A lấy ngẫu nhiên 1 thẻ từ hộp, xem rồi bỏ ra ngoài. Nếu thẻ là số chẵn thì A cho vào hộp 2 số 10 và 11. Nếu thẻ là số lẻ thì A cho thêm vào số 12, 13, 14. Bạn B lấy 3 thẻ ngẫu nhiên từ hộp. Gọi X là tích các số trên thẻ B lấy ra, biết X chia hết cho 2, tính xác suất của bạn A lấy ra được số chẵn.

Gọi C là biến cố lấy được số chẵn.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} P(C) \cdot P(X : 2|C) = \frac{4}{9} \cdot \left(1 - \frac{C_6^3}{C_{10}^3}\right) \\ P(\bar{C}) \cdot P(X : 2|\bar{C}) = \frac{5}{9} \cdot \left(1 - \frac{C_5^3}{C_{11}^3}\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow P(C|X : 2) = \frac{\frac{4}{9} \cdot \left(1 - \frac{C_6^3}{C_{10}^3}\right)}{\frac{4}{9} \cdot \left(1 - \frac{C_6^3}{C_{10}^3}\right) + \frac{5}{9} \cdot \left(1 - \frac{C_5^3}{C_{11}^3}\right)} = \frac{572}{1351} \approx \boxed{0.4151}$$

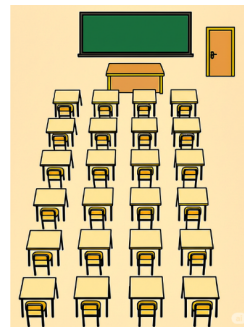




1.5 Đề thi thử trường sở

2425 – Sở GDDT Nghệ An – Đợt 3

Cúm A (Influenza A) là bệnh nhiễm trùng đường hô hấp cấp tính do các virus cúm mùa gây nên. Virus cúm A có thể lây truyền trực tiếp trong không khí thông qua đường hô hấp. Giả sử Virut cúm A có khả năng lây nhiễm đối với người ngồi trong vòng bán kính $1,9m$ là 85% và đối với người ngồi cách hơn $1,9m$ là 5%. An là một học sinh bị nhiễm cúm A nhưng bản thân không hay biết. An đi dự thi cuối kỳ. Phòng thi của An có 24 bạn được xếp vào 24 chỗ ngồi của một phòng thi có 4 dãy, mỗi dãy 6 chỗ ngồi như hình vẽ. Khoảng cách giữa hai người theo hàng ngang là $1,6m$, theo hàng dọc là $1m$ (hình vẽ). Do không biết trước An bị cúm A nên các thí sinh được xếp ngẫu nhiên vào phòng thi. Một bạn cùng phòng của An sau khi dự thi đi kiểm tra thấy không bị nhiễm cúm. Tính xác suất để thí sinh đó ngồi gần An trong vòng $1,9m$. (Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

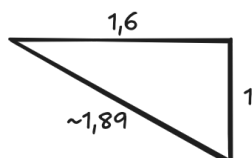


Gọi A là biến cố ngồi gần An, B là biến cố bị nhiễm bệnh.

Vì nếu ngồi chéo An thì bạn đó vẫn bị nhiễm bệnh nên xét vị trí An được xếp:

- Nếu An ngồi ở 1 trong 4 góc phòng, chỉ có 3 vị trí trong bán kính lây bệnh.
- Nếu An ngồi ở 1 trong 12 rìa phòng, có 5 vị trí trong bán kính lây bệnh.
- Nếu An ngồi ở 1 trong 8 vị trí giữa phòng, có 8 vị trí trong bán kính lây bệnh.

$$\Rightarrow P(A) = \frac{4}{24} \cdot \frac{3}{23} + \frac{12}{24} \cdot \frac{5}{23} + \frac{8}{24} \cdot \frac{8}{23} = \frac{17}{69} \Rightarrow P(\bar{A}) = \frac{52}{69}$$



$$\Rightarrow P(A|\bar{B}) = \frac{\frac{17}{69} \cdot 0.15}{\frac{17}{69} \cdot 0.15 + \frac{52}{69} \cdot 0.95} \approx 0.0491 \approx \boxed{0.05}$$

2425 – Sở GDDT Nghệ An – Đợt 3

Một nghiên cứu dịch tễ học trong một cộng đồng dân số tại một địa phương X đưa ra các số liệu sau:

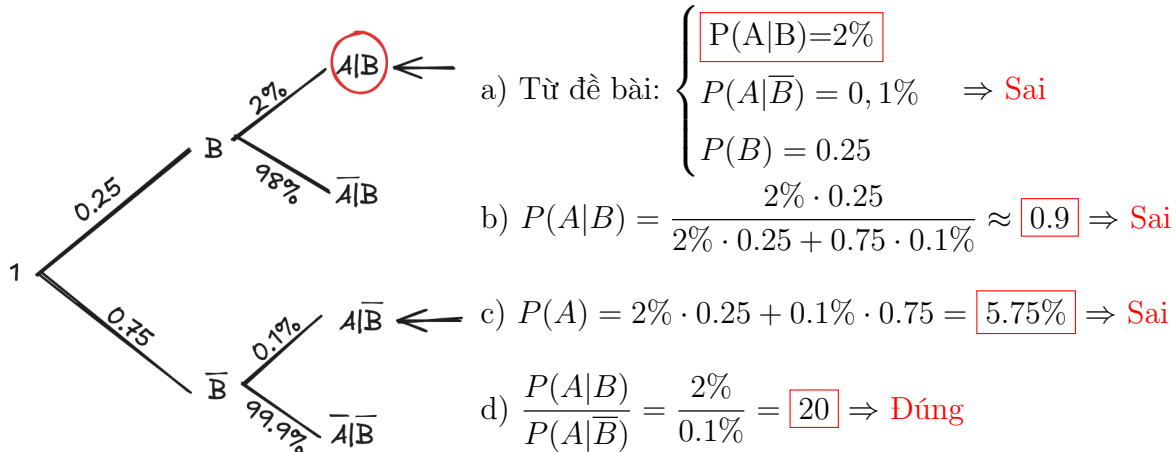
- Tỷ lệ người có hút thuốc lá là 25%.
- Tỷ lệ bị ung thư phổi ở nhóm người hút thuốc lá là 2%, trong khi ở nhóm người không hút thuốc lá chỉ là 0,1%.

Xét một người được chọn ngẫu nhiên từ cộng đồng này. Ký hiệu A là biến cố "Người đó bị ung thư phổi" và B là biến cố "Người đó có hút thuốc lá".

- $P(A|B) = 0,1$
- Nếu một người bị ung thư phổi, thì xác suất người đó có hút thuốc lá là 0,8 (làm tròn đến hàng phần mười).
- Tỷ lệ người bị ung thư phổi ở địa phương X là 1,5%



d) Dựa trên các số liệu này, tỷ lệ người bị ung thư phổi ở nhóm người có hút thuốc lá cao gấp 20 lần so với ở nhóm người không hút thuốc.



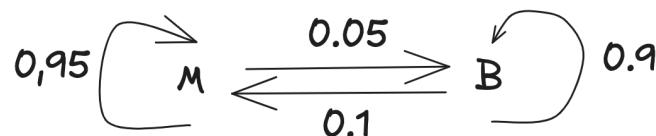
2425 – Cụm trường Tuyên Quang - Vĩnh Phúc

Ông Hùng hằng ngày đi làm bằng xe máy hoặc xe buýt. Tỷ lệ trễ giờ nếu ông đi làm bằng xe máy là 5%, bằng xe buýt là 10%. Xét trong tháng 6, ông Hùng ngày nào cũng đi làm đều đặn và trong ngày đầu tiên của tháng, xác suất ông chọn đi làm bằng xe máy là 60%.

Từ ngày thứ hai trở đi, cách ông Hùng chọn phương tiện đi làm phụ thuộc vào việc ông có bị trễ giờ trong ngày hôm trước hay không:

- Nếu ngày hôm trước ông Hùng không bị trễ giờ thì ông ấy tiếp tục sử dụng loại phương tiện mà ông đã đi trong ngày hôm trước.
- Nếu ngày hôm trước ông Hùng bị trễ giờ thì ông sẽ chuyển sang sử dụng loại phương tiện còn lại.

Xác suất để ngày cuối cùng của tháng 6 ông Hùng đi làm bằng xe máy là p , khi đó giá trị của $10^4 \cdot p$ là? (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).



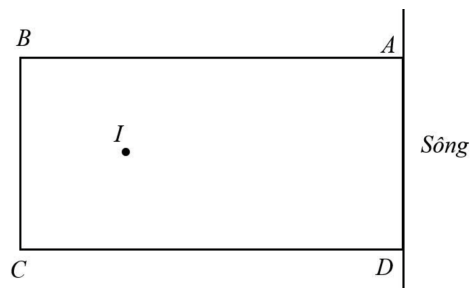
$$\text{Áp dụng mô hình Markov: } I_{30} = M^{29} \cdot I_1 = \begin{pmatrix} 0,95 & 0,9 \\ 0,05 & 0,1 \end{pmatrix}^{29} \begin{pmatrix} 0,6 \\ 0,4 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,6661 \\ 0,3339 \end{pmatrix} \Rightarrow 10^4 \cdot p = 6661$$



2 Ứng dụng tích phân

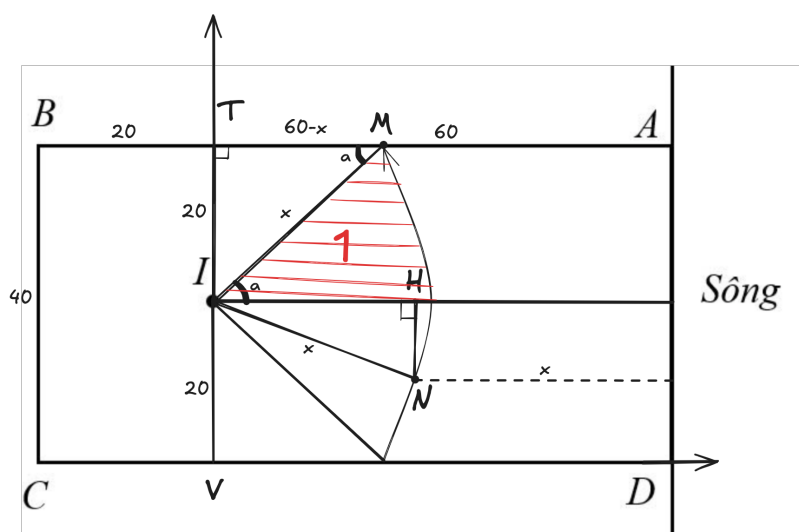
2425 – Sở GDDT Nghệ An – Đợt 3

Một lập trình viên tạo một trò chơi. Trong trò chơi đó có một vùng đất hình chữ nhật $ABCD$. Một con sông nằm bên cạnh vùng đất đó, AD là bờ sông. Một giếng nước khoan được đặt tại điểm I nằm trong hình chữ nhật, với: $AB = 80\text{m}$, $AD = 40\text{m}$. Điểm I cách cạnh AB 20m , cách cạnh AD 60m . Nhân vật trong game khi đến vùng đất này cần phải di chuyển đến giếng nước hoặc bờ sông để lấy nước.



Lập trình viên muốn tô màu một phần của vùng đất đó sao cho khi đứng trong vùng tô màu này, nhân vật di chuyển đến giếng nước để lấy nước nhanh hơn so với đến bờ sông.

Diện tích vùng tô màu đó là bao nhiêu mét vuông? (Giả sử rằng khi di chuyển, vận tốc của nhân vật không đổi; làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).



Khai thác dữ kiện, dễ thấy ranh giới cần tìm có dạng parabolic và ta có số liệu như hình vẽ.

$$\text{Xét } \triangle TIM: x^2 = 20^2 + (60 - x)^2 \Leftrightarrow x = \frac{100}{3}(\text{m})$$

$$\Rightarrow \sin \alpha = \frac{20}{100/3} = \frac{3}{5} \Rightarrow \alpha = \arcsin\left(\frac{3}{5}\right)$$

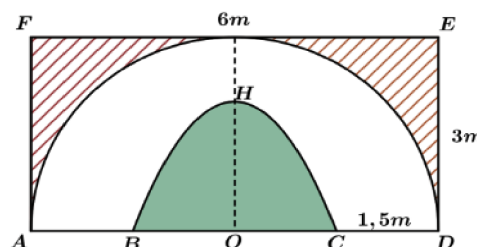
$$\text{Xét } \triangle IHN: IN = \frac{IH}{\cos \alpha} = \frac{60 - IN}{\cos \alpha} \Leftrightarrow IN = \frac{60}{\cos \alpha + 1}$$

$$\begin{aligned} S &= S_{BCVT} + 2S_{\triangle ITM} + 2S_1 = 40 \cdot 20 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot \left(60 - \frac{100}{3}\right) + 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^\alpha \left(\frac{60}{\cos \alpha + 1}\right)^2 dx \\ &= \frac{17600}{9} \approx 1956(\text{m}^2) \end{aligned}$$



2425 - Cùm trường Tuyên Quang - Vĩnh Phúc

Bác Bình muốn nhờ thợ trang trí một bức tường hình chữ nhật $ADEF$ với kích thước $EF = 6\text{ m}$, $DE = 3\text{ m}$ sao cho cân xứng hai nửa. Phần gạch chéo là hình giới hạn bởi đường gấp khúc $AFED$ và nửa đường tròn đường kính AD , được thuê sơn với đơn giá 250.000đ/m^2 . Phần màu trắng giới hạn bởi nửa đường tròn đường kính AD và một đường parabol (có đỉnh H cách đường thẳng AB một khoảng bằng 2 m và đi qua hai điểm B, C nằm trên cạnh AD thỏa mãn $AB = 1,5\text{ m}$, $CD = 1,5\text{ m}$) được thuê trang trí bằng bức phù điêu đắp bằng xi măng với đơn giá $1.950.000\text{đ/m}^2$ (tham khảo hình vẽ).



Hỏi Bác Bình phải trả bao nhiêu triệu đồng để trang trí bức tường như vậy? (Kết quả làm tròn đến hàng phần mười của triệu đồng)

Cách 1: Dễ thấy parabola có phương trình $y = -\frac{8}{9}x^2 + 2 \Rightarrow S_{(P)} = \int_{-1.5}^{1.5} (-\frac{8}{9}x^2 + 2)dx = 4\text{ (m}^2\text{)}$

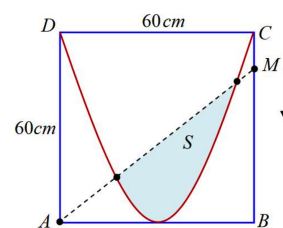
Cách 2: $S_{(P)} = \frac{2}{3}dh = \frac{2}{3} \cdot 3 \cdot 2 = 4\text{ (m}^2\text{)}$

$S_1 + S_2 = S_{ADEF} - \frac{1}{2}S_{(O;OD)} = 3 \cdot 6 - \frac{1}{2}\pi \cdot 3^2 = 18 - \frac{9}{2}\pi\text{ (m}^2\text{)}$

$\Rightarrow T = 0.25 \cdot (18 - \frac{9}{2}\pi) + 1.95 \cdot (\frac{1}{2}\pi \cdot 3^2 - 4) = \frac{3(51\pi - 22)}{20} \approx \boxed{20.7}$ (triệu đồng)

2425 - Tư duy mở 42

Trên mặt phẳng cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 60 cm và một đường parabol (P) như hình vẽ. Gọi M là điểm nằm trên cạnh BC sao cho $BM > CM$ và di chuyển đến B với tốc độ không đổi 2 cm/s . Hãy xác định tốc độ thay đổi của diện tích S giới hạn bởi đoạn AM và (P) theo đơn vị dm^2/s ở thời điểm M là trung điểm của cạnh BC . (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)



Ta có: $\begin{cases} (P) : y = \frac{x^2}{15} \\ M(30; 60 - 2t) \Rightarrow (d_{AM}) : y = (-\frac{t}{30} + 1)x + (30 - t) \end{cases}$

$\Rightarrow \frac{x^2}{15} = (-\frac{t}{30} + 1)x + (30 - t) \Leftrightarrow 2x^2 + (t - 30)x + 30t - 30^2 = 0 \xrightarrow{\text{Viète}} \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{30 - t}{2} \\ x_1 x_2 = \frac{30t - 30^2}{2} \\ x_1 - x_2 = -\frac{\sqrt{\Delta}}{a} \end{cases}$

$\Rightarrow S(t) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{x^2}{15} dx = \frac{x^3}{45} \Big|_{x_1}^{x_2} = -\frac{1}{45}(x_1^3 - x_2^3) = -\frac{1}{45}(x_1 - x_2)(S^2 - P) \Rightarrow S'(15) \stackrel{\text{Casio}}{\approx} \boxed{-0.2(\text{dm}^2)}$



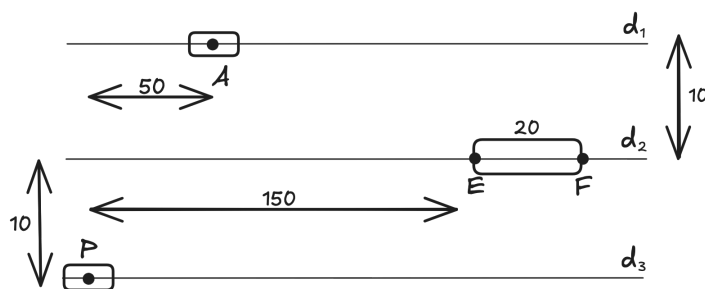
3 Toán rời rạc

2425 – Nguyễn Khuyến - Lê Thánh Tông

Có 3 phương tiện chuyển động cùng hướng trên một đại lộ theo 3 đường thẳng song song được biểu diễn trên một mặt phẳng:

- Một ô tô con (xem như điểm A) chuyển động trên đường thẳng d_1 với tốc độ không đổi $20m/s$.
- Một xe container (xem như đoạn thẳng EF) dài $20m$ ($EF = 20m$) chuyển động với tốc độ không đổi $16m/s$ trên đường thẳng d_2 song song và cách d_1 một khoảng $10m$.
- Một xe cảnh sát (xem như điểm P) chuyển động với tốc độ không đổi $16m/s$ trên đường thẳng d_3 song song và cách d_2 một khoảng $10m$.

Phát hiện ô tô con có dấu hiệu vi phạm an toàn giao thông, xe cảnh sát tăng tốc với tốc độ $v(t) = 16 + \frac{t}{2}(m/s)$ để đuổi theo ô tô con, với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc bắt đầu tăng tốc. Tại thời điểm tăng tốc, xe cảnh sát cách ô tô con $50m$ (dọc theo chiều đại lộ) và cách đuôi xe container (điểm F) $150m$ (dọc theo chiều đại lộ). (tham khảo hình vẽ)



Trong thời gian xe cảnh sát tăng tốc, ô tô con và xe container vẫn duy trì tốc độ như trên đồng thời các xe không thay đổi quỹ đạo chuyển động. Sau khi tăng tốc được 28 giây thì xe cảnh sát bắt đầu giảm tốc để xử lý tình huống.

Trong khoảng thời gian xe cảnh sát tăng tốc, xe container che khuất tầm nhìn của xe cảnh sát đối với xe ô tô con (nghĩa là hai đoạn thẳng AP và EF có điểm chung) trong khoảng thời gian bao lâu? (làm tròn kết quả đến hàng phần chục)