Bài tập đại số áp dụng từ k62

Dùng cho nhóm 1 (các ngành kĩ thuật)

(Kiểm tra giữa kỳ chung toàn khóa: Tự luận, 60 phút, sau khi học tám tuần, hệ số 0,3, nội dung : Các chương 1 và 2) .

Chương I

Tập hợp – Logic – Ánh xạ - Cấu trúc đại số - Số phức

Bài 1. Lập bảng giá trị chân lý của các biểu thức mệnh đề sau

a) $\left[A\wedge(B\vee C)\right]\to C$ b) $\left[\overline{A}\wedge(B\vee C)\right]\wedge B$

Bài 2. Chứng minh các mệnh đề sau đây là đúng :

a) $\left[\overline{A}\wedge(A\vee C)\right]\to C$.

b) $\left[(A\to B)\wedge(B\to C)\right]\to(A\to C)$.

c) $\left[A\wedge(A\to B)\right]\to B$.

d) $\left[(A\vee B)\wedge(A\to C)\wedge(B\to C)\right]\to C$

Bài 3. Chứng minh rằng:

a) $A\leftrightarrow B$ và $(A\wedge B)\vee(\overline{A}\wedge\overline{B})$ là tương đương logic.

b) $(A\to B)\to C$ và $A\to(B\to C)$ không tương đương logic.

c) $\overline{A\leftrightarrow B}$ và $\overline{A}\leftrightarrow B$ là tương đương logic.

Bài 4. Cho A là tập hợp con của tập số thực, cận dưới đúng x_0 của A kí hiệu $\text{Inf}(A) = x_0$ có thể xác định bởi mệnh đề sau: “ Với mọi x trong A có $x_0 \le x$ và với x_1 có tính chất là $x_1 \le x$ với mọi x trong A thì suy ra $x_1 \le x_0$”. Hãy dùng các kí hiệu để diễn tả mệnh đề trên và mệnh đề phủ định của nó. Từ đó đưa ra cách chứng minh một số không phải là Inf(A).

Bài 5. Giả sử $f(x), g(x)$ là các hàm số xác định trên R. Kí hiệu $A=\{x\in\mathbb{R}\,|\,f(x)=0\}$, $B=\{x\in\mathbb{R}\,|\,g(x)=0\}$. Xác định tập nghiệm phương trình:

a) $f(x)g(x)=0$ b) $[f(x)]^2+[g(x)]^2=0$

Bài 6. Cho 3 tập hợp $A=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x^2-4x+3\le 0\}$, $B=\{x\in\mathbb{R}\,|\,|x-1|\le 1\}$, $C=\{x\in\mathbb{R}\,|\,x^2-5x+6<0\}$. Xác định tập hợp sau: $(A\cup B)\cap C$ và $(A\cap B)\cup C$.

Bài 7. Cho A, B, C là các tập hợp bất kì, chứng minh:

a) $A\cap(B\setminus C)=(A\cap B)\setminus(A\cap C)$. b) $A\cup(B\setminus A)=A\cup B$.

Bài 8. Cho hai ánh xạ

$$f:\ \mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R},\quad x\mapsto\frac{1}{x}\qquad\qquad g:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad x\mapsto\frac{2x}{1+x^2}$$

a) Ánh xạ nào là đơn ánh, toàn ánh. Tìm $g(\mathbb{R})$.

b) Xác định ánh xạ $h=g\circ f$.

Bài 9. Chứng minh các tính chất của ảnh và nghịch ảnh của ánh xạ f: $X\to Y$

a) $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B);\ A,B\subset X$.

b) $f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B);\ A,B\subset X$ .Nêu ví dụ chứng tỏ điều ngược lại không đúng.

c) $f^{-1}(A\cup B)=f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B);\ A,B\subset Y$

d) $f^{-1}(A\cap B)=f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B);\ A,B\subset Y$

e) $f^{-1}(A\setminus B)=f^{-1}(A)\setminus f^{-1}(B);\ A,B\subset Y$

f) Chứng minh f là đơn ánh khi và chỉ khi $f(A\cap B)=f(A)\cap f(B);\ \forall A,B\subset X$

Bài 10. Cho ánh xạ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ xác định bởi $f(x)=x^2+4x-5,\quad \forall x\in\mathbb{R}$, và $A=\{x\in\mathbb{R}\,|-3\le x\le 3\}$. Xác định các tập hợp f(A), $f^{-1}(A)$.

Bài 11. Cho $G=\{f_1,f_2,f_3,f_4,f_5,f_6\}$ là tập các ánh xạ từ $\mathbb{R}\setminus\{0;1\}\to\mathbb{R}\setminus\{0;1\}$ xác định như sau:

$$f_1(x)=x;f_2(x)=\frac{1}{1-x};f_3(x)=1-\frac{1}{x};f_4(x)=\frac{1}{x};f_5(x)=1-x;f_6(x)=\frac{x}{x-1}.$$

Chứng minh G cùng với phép toán là phép hợp thành tích ánh xạ lập thành một nhóm không Abel.

Bài 12. Nêu rõ các tập sau với các phép toán thông thường các lập thành một vành, trường không?

a) Tập các số nguyên lẻ.

b) Tập các số nguyên chẵn.

c) Tập các số hữu tỉ.

d) $X=\{a+b\sqrt{2}\,|a,b\in\mathbb{Z}\}$.

e) $Y=\{a+b\sqrt{3}\,|a,b\in\mathbb{Q}\}$

Bài 13. Viết các số phức sau dưới dạng chính tắc:

a) $(1+i\sqrt{3})^9$ b) $\sqrt[8]{1-i\sqrt{3}}$ c) $\dfrac{(1+i)^{21}}{(1-i)^{13}}$ d) $(2+i\sqrt{12})^5(\sqrt{3}-i)^{11}$.

Bài 14. Tìm nghiệm phức của phương trình sau:

a) $z^2+z+1=0$ b) $z^2+2iz-5=0$ c) $z^4-3iz^2+4=0$

d) $z^6 - 7z^3 - 8 = 0$ e) $\dfrac{(z+i)^4}{(z-i)^4} = 1$ f) $z^8(\sqrt{3}+i) = 1-i$. g) $z^2 + (7+i)z + 14 + 5i = 0$

Bài 15. Chứng minh nếu $z + \dfrac{1}{z} = 2\cos\theta$ thì $z^n + \dfrac{1}{z^n} = 2\cos n\theta, \forall n \in \mathbb{N}$

Bài 16.

a) Tính tổng các căn bậc n của 1.

b) Tính tổng các căn bậc n của số phức z bất kỳ.

c) Cho $\varepsilon_k = \cos\dfrac{2k\pi}{n} + i\sin\dfrac{2k\pi}{n}; k = 0,1,...,(n-1)$. Tính tổng $S = \sum_{k=0}^{n-1} {\varepsilon_k}^m$ $(m \in \mathbb{N})$.

Bài 17. Cho phương trình $\dfrac{(x+1)^9 - 1}{x} = 0$.

a) Tìm các nghiệm của phương trình trên.

b) Tính môđun của các nghiệm.

c) Tính tích của các nghiệm từ đó tính $\prod_{k=1}^{8} \sin\dfrac{k\pi}{9}$.

Bài 18. Tìm nghiệm phức của phương trình sau:

a) $\overline{z^7} = \dfrac{1024}{z^3}$ b) $z^4 = z + \bar{z}$.

Bài 19. Cho x, y, z là các số phức có môđun bằng 1. So sánh môđun của các số phức x + y + z và xy + yz + zx.

Chương II

Ma trận - Định thức - Hệ phương trình

Bài 1. Cho các ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Tính các ma trận : A+BC, A^tB-C, A(BC), (A+3B)(B-C).

Bài 2. Tìm ma trận X thoả mãn:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + 2X = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$

b) $\frac{1}{2}X - \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -6 & 6 \\ -2 & 9 & 2 \\ -4 & -8 & 6 \end{bmatrix}$

Bài 3. Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \end{bmatrix}$ và hàm số $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$. Tính f(A).

Bài 4. a) Cho $A = \begin{bmatrix} \text{cosa} & \text{-sina} \\ \text{sina} & \text{cosa} \end{bmatrix}$. Tính A^n. b) Cho $A = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$. Tính A^n.

Bài 5. Tìm tất cả các ma trận vuông cấp 2 thoả mãn:

a) $X^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ b) $X^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Bài 6. a) Chứng minh rằng ma trận $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ thoả mãn phương trình sau: $x^2 - (a+d)x + ad - bc = 0$.

b) Chứng minh với A là ma trận vuông cấp 2 thoả mãn thì $A^k = 0, (k > 2) \Leftrightarrow A^2 = 0$.

Bài 7. Không khai triển định thức mà dùng các tính chất của định thức để chứng minh:

a) $\begin{vmatrix} a_1 + b_1x & a_1 - b_1x & c_1 \\ a_2 + b_2x & a_2 - b_2x & c_2 \\ a_3 + b_3x & a_3 - b_3x & c_3 \end{vmatrix} = -2x\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ac \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$. c) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$.

Bài 8. Tính các định thức sau:

a) $A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{vmatrix}$ b) $B = \begin{vmatrix} a+b & ab & a^2+b^2 \\ b+c & bc & b^2+c^2 \\ c+a & ca & a^2+c^2 \end{vmatrix}$ c) $C = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix}$

d) $D=\begin{vmatrix}1 & 1 & 2 & 3\\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1 & 5\\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2\end{vmatrix}$ e) $E=\begin{vmatrix}1+x & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1-x & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1+z & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1-z\end{vmatrix}$.

Bài 9. Chứng minh nếu A là ma trận phản xứng cấp n lẻ thì det(A)=0.

Bài 10. Tìm hạng của các ma trận sau:

a) $A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 5 & -1\\ 2 & -1 & -1 & 4\\ 5 & 1 & -1 & 7\\ 7 & 7 & 9 & 1\end{bmatrix}$ b) $B=\begin{bmatrix}4 & 3 & -5 & 2 & 3\\ 8 & 6 & -7 & 4 & 2\\ 4 & 3 & -8 & 2 & 7\\ 4 & 3 & 1 & 2 & -5\\ 8 & 6 & -1 & 4 & -6\end{bmatrix}$

Bài 11. Biện luận theo a hạng của ma trận sau:

a) $A=\begin{bmatrix}3 & a & 1 & 2\\ 1 & 4 & 7 & 2\\ 1 & 10 & 17 & 4\\ 4 & 1 & 3 & 3\end{bmatrix}$ b) $B=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 1 & -1 & 1\\ a & -1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & a & 0 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 2 & -1 & 1\end{bmatrix}$.

Bài 12. Tìm ma trận nghịch đảo của các ma trận sau:

a) $A=\begin{bmatrix}3 & 4\\ 5 & 7\end{bmatrix}$ b) $B=\begin{bmatrix}3 & -4 & 5\\ 2 & -3 & 1\\ 3 & -5 & 1\end{bmatrix}$ c) $C=\begin{bmatrix}1 & -a & 0 & 0\\ 0 & 1 & -a & 0\\ 0 & 0 & 1 & -a\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

Bài 13. Chứng minh rằng ma trận A vuông cấp n thoả mãn $a_kA^k+a_{k-1}A^{k-1}+\cdots+a_1A+a_0E=0,(a_0\neq 0)$ thì A là ma trận khả nghịch.

Bài 14. Cho $A=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 1\\ 2 & 3 & 4\\ 3 & 1 & -1\end{bmatrix}; B=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 3 & 4\\ 0 & 3\end{bmatrix}; C=\begin{bmatrix}2 & 12 & 10\\ 6 & 16 & 7\end{bmatrix}$. Tìm ma trận X thỏa mãn $AX+B=C^T$.

Bài 15. Giải hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases}x_1-2x_2+x_3=4\\ 2x_1+x_2-x_3=0\\ -x_1+x_2+x_3=-1\end{cases}$ b) $\begin{cases}3x_1-5x_2-7x_3=1\\ x_1+2x_2+3x_3=2\\ -2x_1+x_2+5x_3=2\end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2 \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5 \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ -4x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ -2x_1 + x_2 + 4x_3 = 4 \\ 10x_1 - 5x_2 - 6x_3 = -10 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 5x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 3 \\ x_1 - 4x_2 - 3x_3 = 1 \end{cases}$

Bài 16. Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp Gauss.

a) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 + 3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 - 8 = 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 - 6 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 - 3 = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 1 \\ 4x_1 - 10x_2 + 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 1 \\ 2x_1 - 14x_2 + 7x_3 - 7x_4 + 11x_5 = -1 \end{cases}$

Bài 17. Giải và biện luận các hệ phương trình :

a) $\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + ax_2 + x_3 + x_4 = a \\ x_1 + x_2 + ax_3 + x_4 = a^2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} (2-a)x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + (2-a)x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + (2-a)x_3 = 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x_1 - ax_2 + a^2x_3 = a \\ ax_1 - a^2x_2 + ax_3 = 1 \\ ax_1 + x_2 - a^3x_3 = 1 \end{cases}$.

Bài 18. Tìm đa thức bậc 3 : $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ thoả mãn p(1) = 0; p(-1) = 4 ; p(2) = 5; p(-2) = -15.

Bài 19. Cho phương trình ma trận: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & 7 & 2a+1 \\ 3 & 9 & 4a \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

a) Giải phương trình khi a = 0. b) Tìm a để phương trình có vô số nghiệm.

Bài 20. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + mx_4 = 4 \\ -x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = k \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 + (m-1)x_4 = 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2mx_4 = 5 \end{cases}$.

a) Giải hệ phương trình khi m = 2, k = 5.
b) Tìm điều kiện để hệ có nghiệm duy nhất.
b) Tìm điều kiện để hệ phương trình có vô số nghiệm.

Chương III. Không gian véc tơ

Một vài ký hiệu thường gặp:

$\mathbb{R}^n = \left\{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}, \forall i = \overline{1,n}\right\}$

$P_n[x] = \left\{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \mid a_i \in \mathbb{R}, \forall i = \overline{0,n}\right\}$

$M_{m\times n}$ = tập các ma trận kích thước mxn. Đặc biệt M_n là tập các ma trận vuông cấp n.

Bài 1. Tập V với các phép toán có phải là không gian véc tơ không?

a) $V = \left\{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\right\}$ với các phép toán xác định như sau

$$(x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z')$$
$$k(x, y, z) = (|k| x, |k| y, |k| z)$$

b) $V = \left\{x = (x_1, x_2) \mid x_1 > 0, x_2 > 0\right\} \subset \mathbb{R}^2$ với các phép toán xác định như sau:

$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 y_1, x_2 y_2)$ và $k(x_1, x_2) = (x_1^k, x_2^k)$ trong đó k là số thực bất kỳ

Bài 2. Chứng minh các tập hợp con của các không gian véc tơ quen thuộc sau là các không gian véc tơ con của chúng:

a) Tập $E = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 0\right\}$.

b) Tập các đa thức có hệ số bậc nhất bằng 0 (hệ số của x)của KGVT $P_n[x]$.

c) Tập các ma trận tam giác trên của tập các ma trận vuông cấp n.

d) Tập các ma trận đối xứng của tập các ma trận vuông cấp n.

e) Tập các ma trận phản xứng của tập các ma trận vuông cấp n ($a_{ij} = -a_{ji}$).

f) Tập các hàm khả vi trong không gian các hàm số xác định trên [a,b].

Bài 3. Cho V_1, V_2 là hai không gian véc tơ con của KGVT V. Chứng minh:

a) $V_1 \cap V_2$ là KGVT con của V.

b) Cho $V_1 + V_2 := \left\{u_1 + u_2 \mid u_1 \in V_1, u_2 \in V_2\right\}$. Chứng minh $V_1 + V_2$ là KGVT con của V.

Bài 4. Cho V_1, V_2 là hai không gian véc tơ con của KGVT V. Ta nói V_1, V_2 là bù nhau nếu $V_1 + V_2 = V, V_1 \cap V_2 = \left\{\theta\right\}$. Chứng minh rằng V_1, V_2 bù nhau khi và chỉ khi mọi véc tơ u của V có biểu diễn duy nhất dưới dạng $u = u_1 + u_2, (u_1 \in V_1, u_2 \in V_2)$.

Bài 5. Cho V là KGVT các hàm số xác định trên [a,b] . Đặt

$$V_1 = \left\{ f(x) \in V \,\middle|\, f(x) = f(-x), \forall x \in [a,b] \right\} \quad ; \; V_2 = \left\{ f(x) \in V \,\middle|\, f(x) = -f(-x), \forall x \in [a,b] \right\}.$$

Chứng minh V_1, V_2 là bù nhau.

Bài 6. Cho V_1, V_2 là hai không gian véc tơ con của KGVT V, $\{v_1, v_2, \cdots, v_m\}$ là hệ sinh của V_1, $\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ là hệ sinh của V_2. Chứng minh $\{v_1, \cdots, v_m, u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ là hệ sinh của $V_1 + V_2$.

Bài 7. Trong KGVT V, cho hệ véctơ $\{u_1, u_2, \cdots, u_n, u_{n+1}\}$ là phụ thuộc tuyến tính và $\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ là hệ độc lập tuyến tính. Chứng minh u_{n+1} là tổ hợp tuyến tính của các véc tơ $u_1, u_2, \cdots, u_n$.

Bài 8. Trong $\mathbb{R}^3$ xét xem các hệ véc tơ sau độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính:

a) $v_1 = (1;2;3), v_2 = (3;6;7)$.

b) $v_1 = (4;-2;6), v_2 = (-6;3;-9)$.

c) $v_1 = (2;3;-1), v_2 = (3;-1;5), v_3 = (-1;3;-4)$.

Bài 9. Trong $\mathbb{R}^3$, chứng minh $v_1 = (1;1;1), v_2 = (1;1;2), v_3 = (1;2;3)$ lập thành một cơ sở. Xác định ma trận chuyển từ cơ sở chính tắc sang cơ sở trên và tìm toạ độ của $x = (6;9;14)$ đối với cơ sở trên theo hai cách trực tiếp và dùng công thức đổi tọa độ.

Bài 10. Trong các trường hợp sau, chứng minh $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ là một cơ sở của $\mathbb{R}^3$ và tìm $[v]_B$ biết rằng:

a) $v_1 = (2;1;1), v_2 = (6;2;0), v_3 = (7;0;7), v = (15;3;1)$.

b) $v_1 = (0;1;1), v_2 = (2;3;0), v_3 = (1;0;1), v = (2;3;0)$.

Bài 11. Tìm cơ sở và số chiều của KGVT sinh bởi hệ véc tơ sau:

a) $v_1 = (2;1;3;4), v_2 = (1;2;0;1), v_3 = (-1;1;-3;0)$ trong $\mathbb{R}^4$.

b) $v_1 = (2;0;1;3;-1), v_2 = (1;1;0;-1;1), v_3 = (0;-2;1;5;-3), v_4 = (1;-3;2;9;-5)$ trong $\mathbb{R}^5$.

Bài 12. Trong $\mathbb{R}^4$ cho các véc tơ : $v_1 = (1;0;1;0), v_2 = (0;1;-1;1), v_3 = (1;1;1;2), v_4 = (0;0;1;1)$. Đặt $V_1 = \text{span}\{v_1, v_2\}, V_2 = \text{span}\{v_3, v_4\}$. Tìm cơ sở và số chiều của các KGVT $V_1 + V_2, V_1 \cap V_2$.

Bài 13. Trong $P_3[x]$ cho các véc tơ $v_1 = 1, v_2 = 1 + x, v_3 = x + x^2, v_4 = x^2 + x^3$.

a) Chứng minh $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ là một cơ sở của $P_3[x]$.

b) Tìm toạ độ của véc tơ $v = 2 + 3x - x^2 + 2x^3$ đối với cơ sở trên.

c) Tìm toạ độ của véc tơ $v = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ đối với cơ sở trên.

Bài 14. Cho KGVT $P_3[x]$ với cơ sở chính tắc $E = \{1, x, x^2, x^3\}$ và cở sở $B = \{1, a + x, (a + x)^2, (a + x)^3\}$. Tìm ma trận chuyển cơ sở từ E sang B và ngược lại từ B sang E. Từ đó tìm tọa độ của véc tơ $v = 2 + 2x - x^2 + 3x^3$ đối với cơ sở B.

Bài 15. Cho KGVT $P_3[x]$ và hệ véc tơ $v_1 = 1 + x^2 + x^3$, $v_2 = x - x^2 + 2x^3$, $v_1 = 2 + x + 3x^3$, $v_4 = -1 + x - x^2 + 2x^3$.

a) Tìm hạng của hệ véc tơ.

b) Tìm một cơ sở của không gian $span\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$

Bài 16. Tìm cơ sở và số chiều của không gian nghiệm của hệ phương trình thuần nhất sau:

a) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 + 5x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 3x_5 = 0 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 4x_5 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + x_4 + 7x_5 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 8x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}$

Bài 17. Cho A,B là các không gian hữu hạn chiều. Chứng minh $\dim(A + B) = \dim(A) + \dim(B) - \dim(A \cap B)$

Chương IV. Ánh xạ tuyến tính

Bài 1. Cho ánh xạ $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi công thức $f(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 + x_2 - x_3, 2x_1 + x_3)$.

a) Chứng minh f là ánh xạ tuyến tính.
b) Tìm ma trận của f đối với cặp cơ sở chính tắc.
c) Tìm một cơ sở của kerf.

Bài 2. Cho ánh xạ $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ xác định bởi công thức $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_3 + x_1, x_1 + x_2 + x_3)$

a) Chứng minh f là ánh xạ tuyến tính.
b) Tìm ma trận của f đối với cặp cơ sở chính tắc.

Bài 3. Cho ánh xạ đạo hàm $D : P_n[x] \to P_n[x]$ xác định bởi

$D(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n) = a_1 + 2a_2x + \cdots + na_nx^{n-1}$.

a) Chứng minh D là ánh xạ tuyến tính.
b) Tìm ma trận của D đối với cơ sở chính tắc $E = \{1, x, x^2, \cdots, x^n\}$.
c) Xác định kerf và imf

Bài 4. Cho ánh xạ $f : P_2[x] \to P_4[x]$ xác định như sau: $f(p) = p + x^2p, \forall p \in P_{2.}[x]$

a) Chứng minh f là ánh xạ tuyến tính.

b) Tìm ma trận của f đối với cặp cơ sở chính tắc $E_1 = \{1, x, x^2\}$ của $P_2[x]$ và $E_2 = \{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ của $P_4[x]$.

c) Tìm ma trận của f đối với cặp cơ sở $E_1' = \{1+x, 2x, 1+x^2\}$ của $P_2[x]$ và $E_2 = \{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ của $P_4[x]$.

Bài 5. Xét $\mathbb{R}^2$ giống như tập các véc tơ thông thường trong mặt phẳng có gốc ở gốc tọa độ. Cho f là phép quay một góc α.Tìm ma trận của f đối với cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^2$.

Bài 6. Cho ánh xạ $f: M_2 \to M_2$ xác định như sau: $f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a+b & b+c \\ c+d & d+a \end{bmatrix}$.

a) Chứng minh f là ánh xạ tuyến tính.

b) Tìm ma trận của f đối với cơ sở chính tắc $e_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, e_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, e_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ của M_2.

Bài 7. Cho $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \\ 6 & -2 & 4 \end{bmatrix}$ là ma trận của axtt $f: P_2[x] \to P_2[x]$ đối với cơ sở $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ trong đó:

$v_1 = 3x + 3x^2, v_2 = -1 + 3x + 2x^2, v_3 = 3 + 7x + 2x^2$.

a) Tìm $f(v_1), f(v_2), f(v_3)$. b) Tìm $f(1+x^2)$.

Bài 8. Cho ánh xạ $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 - x_3, x_1 - x_2 + x_3, -x_1 + x_2 + x_3)$. Tìm ma trận của f đối với cơ sở $B = \{v_1 = (1;0;0), v_2 = (1;1;0), v_3 = (1;1;1)\}$.

Bài 9. Cho V là KGVT $V^* = \mathrm{Hom}(V, R)$ ={f: V $\to$ R, f là ánh xạ tuyến tính}.

Giả sử V có cơ sở $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$. Xét tập hợp $\{f_1, f_2, ..., f_n\} \in V^*$ trong đó $f_i(e_j) = \begin{cases} 1 & \text{khi } i = j \\ 0 & \text{khi } i \neq j \end{cases}$. Chứng minh $\{f_1, f_2, ..., f_n\}$ là cơ sở của V^*, và được gọi là cơ sở đối ngẫu ứng với $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$.

Bài 10. Cho A là ma trận vuông cấp n. Ta xác định ánh xạ $f_A: M_n \to M_n$ như sau $f_A(X) = AX$.

a) Chứng minh f_A là biến đổi tuyến tính.

b) Giả sử $\det(A) \neq 0$. Chứng minh f_A là đẳng cấu tuyến tính.

c) Cho $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Tìm ma trận của f_A đối với cơ sở chính tắc của M_2 là

$$E_1=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_2=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_3=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, E_3=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Bài 11. Cho ma trận $A=\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 7 & 1 \end{bmatrix}$ là ma trận của ánh xạ tuyến tính $f:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ đối với cặp cơ sở $B=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ của $\mathbb{R}^4$ và $B'=\{u_1,u_2,u_3\}$ của $\mathbb{R}^3$ trong đó :

$v_1=(0;1;1;1), v_2=(2;1;-1;-1), v_3=(1;4;-1;2), v_4=(6;9;4;2)$ và $u_1=(0;8;8), u_2=(-7;8;1), u_3=(-6;9;1)$.

a) Tìm $[f(v_1)]_{B'}, [f(v_2)]_{B'}, [f(v_3)]_{B'}, [f(v_4)]_{B'}$.

b) Tìm $f(v_1), f(v_2), f(v_3), f(v_4)$.

c) Tìm $f(2;2;0;0)$.

Bài 12. Cho toán tử tuyến tính trên $P_2[x]$ xác định bởi:

$$f(1+2x)=-19+12x+2x^2; f(2+x)=-14+9x+x^2; f(x^2)=4-2x-2x^2$$

Tìm ma trận của f đối với cơ sở chính tắc của $P_2[x]$ và tìm $rank(f)$.

Bài 13. Cho V,V' là 2 KGVT n chiều và $f:V\to V'$ là ánh xạ tuyến tính. Chứng minh các khẳng định sau tương đương:

a) f là đơn ánh. b) f là toàn ánh. c) f là song ánh.

Bài 14. Tìm các giá trị riêng và cơ sở không gian riêng của các ma trận:

a) $A=\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$ b) $B=\begin{bmatrix} 10 & -9 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ c) $C=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

d) $D=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ e) $E=\begin{bmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{bmatrix}$ f) $F=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Bài 15. Cho ánh xạ tuyến tính $f:P_2[x]\to P_2[x]$ xác định như sau:

$f(a_0+a_1x+a_2x^2)=(5a_0+6a_1+2a_2)-(a_1+8a_2)x+(a_0-2a_2)x^2$.

a) Tìm giá trị riêng của f.

b) Tìm các véc tơ riêng ứng với các giá trị riêng tìm được.

Bài 16. Tìm ma trận P làm chéo hóa A và xác định $P^{-1}AP$ khi đó với:

a) $A=\begin{bmatrix}-14 & 12\\ -20 & 17\end{bmatrix}$ b) $B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 6 & -1\end{bmatrix}$ c) $C=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&1\end{bmatrix}$ d) $D=\begin{bmatrix}2&1&-2\\0&3&1\\0&0&3\end{bmatrix}$.

Bài 17. Ma trận A có đồng dạng với ma trận chéo không? Nếu có , tìm ma trận cheo đó:

a) $A=\begin{bmatrix}-1&4&-2\\-3&4&0\\-3&1&3\end{bmatrix}$ b) $B=\begin{bmatrix}5&0&0\\1&5&0\\0&1&5\end{bmatrix}$ c) $C=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\3&0&1\end{bmatrix}$.

Bài 18. Cho ánh xạ tuyến tính $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ xác định như sau:

$f(x_1,x_2,x_3)=(2x_1-x_2-x_3,x_1-x_2,-x_1+x_2+2x_3)$. Hãy tìm cơ sở để f có dạng chéo.

Bài 19. Tìm cở sở của $\mathbb{R}^3$ để ma trận của $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ có dạng chéo trong đó

$f(x_1,x_2,x_3)=(2x_1+x_2+x_3,x_1+2x_2+x_3,x_1+x_2+2x_3)$.

Bài 20. Cho $f:V\to V$ là toán tử tuyến tính. Giả sử $f^2=f\circ f:V\to V$ có giá trị riêng λ^2. Chứng minh một trong 2 giá trị λ hoặc $-\lambda$ là giá trị riêng của f.

Bài 21. Cho $D:P_n[x]\to P_n[x]$ là ánh xạ đạo hàm, còn $g:P_n[x]\to P_n[x]$ xác định bởi

$g(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n)=(2x+3)(a_1+2a_2x+\cdots+na_nx^{n-1})$. Tìm các giá trị riêng của D và g.

Bài 22. Cho A là ma trận kích thước $m\times n$, B là ma trận kích thước $n\times p$. Chứng minh

$\operatorname{rank}(AB)\le\min\{\operatorname{rank}(A),\operatorname{rank}(B)\}$, với rank(A) = hạng của ma trận A.

Chương V

Dạng song tuyến tính, dạng toàn phương, không gian Euclide, đường mặt bậc hai

Bài 1. Cho f là dạng song tuyến tính trên không gian véc tơ 3 chiều V có ma trận đối với cơ sở $\boldsymbol{B}=\{u_1,u_2,u_3\}$ là $A=\begin{bmatrix}1&-1&0\\-2&0&-2\\3&4&5\end{bmatrix}$. Cho $h:V\to V$ là ánh xạ tuyến tính có ma trận đối với cơ sở $\boldsymbol{B}$ là $B=\begin{bmatrix}-1&1&1\\-3&-4&2\\1&-2&-3\end{bmatrix}$.

a) Xác định $f(u_1;u_3); f(u_1-u_2+u_3,2u_1+3u_2-u_3)$

b) Chứng minh ánh xạ $g(u,v)=f\left(u,h(v)\right)$ là dạng song tuyến tính trên V. Tìm ma trận của nó đối với cơ sở ***B***.

Bài 2. Cho dạng song tuyến tính trên $P_2[x]$ xác định bởi $f\big(p(x),q(x)\big)=p(1)q(2)$. Tìm ma trận và biểu thức của f đối với cơ sở chính tắc.

Bài 3. Trên $\mathbb{R}^3$ cho các dạng toàn phương ω có biểu thức tọa độ:

$\omega_1(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+5x_2^2-4x_3^2+2x_1x_2-4x_1x_3$. $\omega_2(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+4x_1x_3+x_2x_3$.

Bằng phương pháp Lagrange, đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc.

Bài 4. Cho dạng song tuyến tính trên $\mathbb{R}^3$ xác định bởi:

$$<(x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)> \; = 2x_1y_1+x_1y_2+x_2y_1+ax_2y_2-2x_2y_3-2x_3y_2+3x_3y_3$$

(a là tham số). Tìm ma trận của dạng song tuyến tính trên đối với cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^3$ và tìm điều kiện của a để dạng song tuyến tính là một tích vô hướng trên $\mathbb{R}^3$.

Bài 5. Trong $\mathbb{R}^3$ trang bị một dạng song tuyến tính như sau:

$f(x,y)=(x_1,x_2,x_3)A(y_1,y_2,y_3)^t$ với: $A=\begin{bmatrix}4 & 2 & -1\\ 2 & 3 & 4\\ -1 & a^2 & 2a\end{bmatrix}$ và $x=(x_1,x_2,x_3), y=(y_1,y_2,y_3)$. Xác định a để f(x,y) là một tích vô hướng trên $\mathbb{R}^3$.

Bài 6. Giả sử V là KGVT n chiều với cơ sở $B=\{e_1,e_2,...,e_n\}$. Với u, v là các véc tơ của V ta có $u=a_1e_1+a_2e_2+\cdots+a_ne_n; v=b_1e_1+b_2e_2+\cdots+b_ne_n$. Đặt $<u,v>=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$

a) Chứng minh $<u,v>$ là một tích vô hướng trên V.

b) Áp dụng cho trường hợp $V=\mathbb{R}^3$, với $e_1=(1;0;1), e_2=(1;1;-1), e_3=(0;1;1), u=(2;-1;-2), v=(2;0;5)$. Tính $<u,v>$.

c) Áp dụng cho trường hợp $V=P_2[x]$, với $B=\{1;x;x^2\}, u=2+3x^2, v=6-3x-3x^2$. Tính $<u,v>$.

d) Áp dụng cho trường hợp $V=P_2[x]$, với $B=\{1+x;2x;x-x^2\}, u=2+3x^2, v=6-3x-3x^2$. Tính $<u,v>$.

Bài 7. Xét không gian $P_3[x]$. Kiểm tra các dạng $<p,q>$ sau có phải là tích vô hướng hay không?

a) $< p, q >= p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2)$

b) $< p, q >= p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2) + p(3)q(3)$

c) $< p, q >= \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx$

Trong trường hợp là tích vô hướng tính $< p, q >$ với $p = 2 - 3x + 5x^2 - x^3 . q = 4 + x - 3x^2 + 2x^3$

Bài 8. Cho V là không gían Euclide. Chứng minh:

a) $\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right)$.

b) $u \perp v \Leftrightarrow \|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2, \forall u, v \in V$.

Bài 9. Cho cơ sở $B = \{(1;1;-2),(2;0;1),(1;2;3)\}$ trong không gian $\mathbb{R}^3$ với tích vô hướng chính tắc. Trực giao hóa Gram-Schmidt cơ sở B để thu được cơ sở trực chuẩn B' và tìm tọa độ của véc tơ $u = (5;8;6)$ đối với cơ sở B'.

Bài 10. Tìm hình chiếu trực giao của véc tơ u lên không gian sinh bởi véc tơ v:

a) $u = (1;3;-2;4), v = (2;-2;4;5)$

b) $u = (4;1;2;3;-3), v = (-1;-2;5;1;4)$

Bài 11. Cho không gian $\mathbb{R}^3$ với tích vô hướng chính tắc và các véc tơ $u = (3;-2;1), v_1 = (2;2;1), v_2 = (2;5;4)$. Đặt $W = span\{v_1, v_2\}$. Xác định hình chiếu trực giao của véc tơ u lên không gian W.

Bài 12. Cho $\mathbb{R}^4$ với tích vô hướng chính tắc. Cho $u_1 = (6;3;-3;6), u_2 = (5;1;-3;1)$. Tìm cơ sở trực chuẩn của không gian sinh bỡi $\{u_1, u_2\}$.

Bài 13. Trong $P_2[x]$ định nghĩa tích vô hướng $< p, q >= \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx$ với $p, q \in P_2[x]$.

a) Trực chuẩn hoá Gram – Smit cơ sở $B = \{1; x; x^2\}$ để nhân được cơ sở trực chuẩn A.

b) Xác định ma trận chuyển cơ sở từ B sang A

c) Tìm $[r]_A$ biết $r = 2 - 3x + 3x^2$

Bài 14. Cho không gian Euclide V hữu hạn chiều, W là không gian con của V và u là một véctơ của V. Chứng minh:

a) Tồn tại véc tơ u' của W sao cho $(u-u')\perp W$

b) Khi đó $\|u-u'\|\le\|u-w\|, \forall w\in W$

Bài 15. Trong $\mathbb{R}^5$ với tích vô hướng chính tắc cho các véc tơ

$v_1=(1;1;0;0;0), v_2=(0;1;-1;2;1), v_3=(2;3;-1;2;1)$. Gọi $V=\{x\in\mathbb{R}^5 \mid x\perp v_i, i=1;2;3\}$

a) Chứng minh V là không gian véc tơ con của $\mathbb{R}^5$.

b) Tìm dimV.

Bài 16. Cho V là không gian Ơclit n chiều, V_1 là không gian con m chiều của V. Gọi $V_2=\{x\in V \mid x\perp v, \quad \forall v\in V_1\}$.

a) Chứng minh V_2 là không gian véc tơ con của V.

b) Chứng minh V_1 và V_2 bù nhau.

c) Tìm $\dim V_2$.

Bài 17. Cho V là không gian Ơclit n chiều, chứng minh điều kiện cần và đủ để ánh xạ $f: V\to\mathbb{R}$ tuyến tính là tồn tại véc tơ a cố định của V để $f(x)=\langle a,x\rangle, \forall x\in V$.

Bài 18. Chéo hoá trực giao các ma trận sau

a) $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&1\end{bmatrix}$ b) $B=\begin{bmatrix}-7&24\\24&7\end{bmatrix}$ c) $C=\begin{bmatrix}1&-1&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ d) $D=\begin{bmatrix}7&-2&0\\-2&6&2\\0&2&5\end{bmatrix}$

Bài 19. Đưa dạng toàn phương về dạng chính tắc bằng phương pháp trực giao

a) $x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2$

b) $7x_1^2-7x_2^2+48x_1x_2$

c) $2x_1^2+2x_2^2+3x_3^2-2x_1x_2-2x_2x_3$

Bài 20. Nhận dạng đường cong phẳng sau:

a) $2x^2-4xy-y^2+8=0$. b) $x^2+2xy+y^2+8x+y=0$. c) $11x^2+24xy+4y^2-15=0$.

d) $2x^2+4xy+5y^2=24$.

Bài 21. Nhận dạng các mặt bậc 2 sau:

a) $x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2=4$. b) $5x^2+y^2+z^2-6xy+2xz-2xy=1$.

c) $2x_1^2+2x_2^2+3x_3^2-2x_1x_2-2x_2x_3=16$.

Bài 22. Cho $Q(x_1,x_2,x_3)=9x_1^{\ 2}+7x_2^{\ 2}+11x_3^{\ 2}-8x_1x_2+8x_1x_3$.

a) Tìm $\underset{x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}+x_3^{\ 2}=1}{\mathrm{Max}} Q(x_1,x_2,x_3)$, $\underset{x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}+x_3^{\ 2}=1}{\mathrm{Min}} Q(x_1,x_2,x_3)$. Với giá trị nào thì $Q(x_1,x_2,x_3)$ đạt max, min.

b) Tìm $\underset{x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}+x_3^{\ 2}=16}{\mathrm{Max}} Q(x_1,x_2,x_3)$, $\underset{x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}+x_3^{\ 2}=16}{\mathrm{Min}} Q(x_1,x_2,x_3)$

Bài 23. Cho A, B là các ma trận vuông đối xứng cấp n có các trị riêng đều dương. Chứng minh A+B cũng có các trị riêng dương.