

Operação entre frações

Almir Junior

Fevereiro 2022

1 Frações entre números inteiros

Definição 1. Seja $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}^*$ não nulo. Definimos:

$$(a) \frac{a}{b} := a \div b$$

$$(b) \frac{b}{b} := 1$$

2 Frações irreduutíveis

Frações irreduutíveis são aquelas cujo o máximo divisor comum entre o numerador e o denominador é 1.

Exemplo 1. (a) $\frac{11}{2}$

(b) $\frac{42}{21}$

(c) $\frac{100}{101}$

3 Simplificação de frações

Podemos multiplicar e dividir o numerador e o denominador de uma fração por um mesmo número sem alterar seu valor. Simplificar uma fração é dividir o numerador e denominador por um mesmo número até a fração se tornar irreduutível.

Exemplo 2. (a) $\frac{14}{22}$

$$\frac{14}{22} = \frac{14 \div 2}{22 \div 2} = \frac{7}{11} \tag{1}$$

(b) $\frac{14}{22}$

$$\frac{14}{22} = \frac{2 \cdot 7}{2 \cdot 11} = \frac{2}{2} \frac{7}{11} = \frac{7}{11}$$

4 Multiplicação de frações

Definição 2. Definimos a operação de multiplicação por:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} := \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Exemplo 3. (a) $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7}$

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 7} = \frac{10}{21}$$

(b) $-\frac{11}{13} \cdot \frac{3}{2}$

$$-\frac{11}{13} \cdot \frac{3}{2} = -\frac{11 \cdot 3}{13 \cdot 2} = -\frac{33}{26}$$

5 Soma e subtração de frações

Definição 3. Sejam $a, c \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}^*$.

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} := \frac{a \pm c}{b}$$

Proposição 1. Sejam $a, c \in \mathbb{Z}$ e $b, d \in \mathbb{Z}^*$.

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$$

Demonstração.

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{d} \pm \frac{c}{d} \cdot \frac{b}{b} = \frac{ad \pm cd}{bd}$$

□

Comentário 1. Multiplicamos a fração a/b por $d/d = 1$ e a c/d por $b/b = 1$ para igualar os denominadores e note que $d/d = b/b = 1$, ou seja, não alteramos o valor das frações. Dessa forma foi possível utilizar a **Definição 3** e chegar num resultado para a soma de frações com denominadores distintos.

Exemplo 4. 1. $\frac{1}{4} + \frac{3}{2}$

$$\frac{1}{4} + \frac{3}{2} = \frac{1 \cdot 2 + 3 \cdot 4}{4} = \frac{2 + 12}{4} = \frac{14}{4} = \frac{7}{2}$$

2. $\frac{3}{2} - \frac{1}{3}$

$$\frac{3}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3 \cdot 3 - 2 \cdot 1}{3 \cdot 2} = \frac{9 - 2}{6} = \frac{7}{6}$$

6 Divisão entre frações

Proposição 2. Sejam $a \in \mathbb{Z}$ e $b, c, d \in \mathbb{Z}^*$. Então

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} := \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

Demonstração.

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} \cdot \frac{\frac{d}{c}}{\frac{d}{c}} = \frac{\frac{ad}{bc}}{\frac{cd}{dc}} = \frac{ad}{bc}$$

□

Comentário 2. Multiplicamos a fração $(a/b)/(c/d)$ por $(d/c)/(d/c) = 1$ para tornar a fração de frações em um única fração.

Exemplo 5. (a) $\frac{3}{5} \div \frac{2}{7}$

$$\frac{3}{5} \div \frac{2}{7} = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{7} = \frac{3 \cdot 7}{5 \cdot 2} = \frac{21}{10} = 2,1$$

(b) $\frac{11}{13} \div \frac{3}{9}$

$$\frac{11}{13} \div \frac{3}{9} = \frac{11}{13} \cdot \frac{9}{4} = \frac{11 \cdot 9}{13 \cdot 4} = \frac{33}{52}$$