

Expressões algébricas e fatoração

Almir Junior

Março de 2022

1 Expressões algébricas

Definição 1. *Expressões algébricas são aquelas que envolvem números, letras e operações.*

Exemplo 1. (a) $2x$

(b) $a(x + 1)$

(c) $4m^2 + 8^m + 1$

Comentário 1. *Chamamos as letras de variáveis e os números de constantes.*

2 Distributividade e fator comum

A distributividade é uma operação envolvendo soma e multiplicação.

Definição 2. • *Distributividade à esquerda*

$$a(x \pm y) = ax \pm ay.$$

• *Distributividade à direita*

$$(x \pm y)a = xa \pm ya.$$

• *Distributividade avançada*

$$(a + b)(x + y) = (a + b)x + (a + b)y = xa + xb + ay + by.$$

$$(a - b)(x + y) = (a - b)x + (a - b)y = xa - xb + ay - by.$$

$$(a + b)(x - y) = (a + b)x - (a + b)y = xa + xb - ay + by.$$

$$(a - b)(x - y) = (a - b)x - (a - b)y = xa - xb - ay + by.$$

Exemplo 2. (a) $4(a + 3)$

$$4(a + 3) = 4a + 12$$

$$(b) (2t - 5g)3$$

$$(2t - 5g)3 = 6t - 15g$$

$$(c) (4 - r)(11 + s)$$

$$\begin{aligned} (4 - r)(11 + s) &= (4 - r)11 + (4 - r)s \\ &= 44 - 11r + 12 - 3r \\ &= 28 - 11r - 3r \end{aligned}$$

Comentário 2. Note que após realizar a distributiva as duas parcelas restante possuem fator comum.

3 Produtos Notáveis

É muito útil memorizar algumas expressões oriundas do produto de expressões algébricas aplicando a distributividade. Essas expressões são chamadas de *produtos notáveis* e as mais utilizados são:

$$\text{Proposição 1. (a)} (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(b) (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(c) (a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

$$(d) (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(e) (a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} (a + b)^2 &= (a + b)(a + b) \\ &= (a + b)a + (a + b)b \\ &= a^2 + ba + ba + b^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a - b)^2 &= (a - b)(a - b) \\ &= (a - b)a - (a - b)b \\ &= a^2 - ba - ba + b^2 \\ &= a^2 - 2ab + b^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a + b)(a - b) &= (a + b)a - (a + b)b \\ &= a^2 + ba - ab - b^2 \\ &= a^2 - b^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(a+b)^3 &= (a+b)(a+b)^2 \\
&= (a+b)(a^2 + 2ab + b^2) \\
&= a^3 + 2a^2b + ab^2 + ba^2 + 2ab^2 + b^3 \\
&= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(a-b)^3 &= (a-b)(a-b)^2 \\
&= (a-b)(a^2 - 2ab + b^2) \\
&= a^3 - 2a^2b - ab^2 - ba^2 + 2ab^2 - b^3 \\
&= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.
\end{aligned}$$

□

Exemplo 3.

$$(a+1)^2$$

$$(a+1)^2 = a^2 + 2a + 1$$

$$(s+4)^3$$

$$(s+4)^3 = s^3 + 12s^2 + 48s + 64$$

$$(2x-3)(2x+3)$$

$$(2x-3)(2x+3) = 4x^2 - 9$$

$$(2x-3)^2$$

$$(2x-3)^2 = 4^2 - 12x + 9$$

$$(2-s)^3$$

$$(2-s)^3 = 8 - 12s + 6s^2 - s^3$$

4 Fatoração de expressões algébricas

Definição 3. Fatorar um expressão algébrica é transformar uma soma de uma ou mais parcelas em um produto de um ou mais fatores.

Comentário 3. Para efetuar a fatoração de uma expressão algébrica precisamos encontrar fatores em comum nas parcelas e utilizar a distributividade e os produtos notáveis para transformar a soma em produto.

Exemplo 4. (a) $3x + 12$

$$3x + 12 = 3(x + 12).$$

$$(b) \ 15x^4 - 20x^7$$

$$15x^4 - 20x^7 = 5x^4(3 - 4x^3).$$

$$(c) \ 3x(a + b) - 4(a + b)$$

$$3x(a + b) - 4(a + b) = (a + b)(3x - 4).$$

$$(d) \ 9m^2 - 25$$

$$9m^2 - 25 = (3m - 5)(3m + 5).$$

$$(e) \ 2x(x - 1) - 3(1 - x)$$

$$2x(x - 1) - 3(1 - x) = 2x(x - 1) + 3(-1 + x) = (x - 1)(2x + 3).$$

5 Exercícios

Exercício 1. Simplifique as expressões.

$$(a) \frac{k^2 - 9}{k + 3}$$

$$(b) \frac{m^2 - 2mn + n^2}{m^2 - n^2}$$

Exercício 2. Sendo $x + 1/x = a$, reescreva em termos de a a expressão $x^2 + 1/x^2$.