Funções: composta e inversível

Almir Junior

Agosto 2021

1 Função composta

Sejam $f : A \to B$ e $g : B \to C$. Chamamos de *função composta* de g e f uma função $h : A \to C$ dada por $h(x) = g(f(x))$ para todo $x \in A$. Indicamos a função composta de g e f por $g \circ f$.

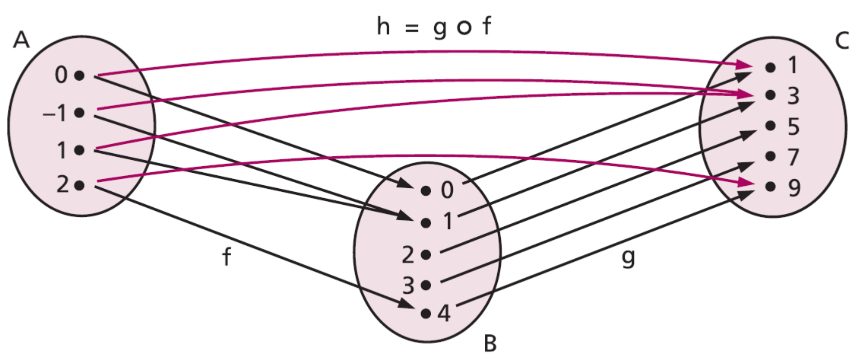
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] & B \arrow[d, "g"] \\ & C \end{tikzcd}$$

Exercício 1. *Sejam* $A = \{-1, 0, 1, 2\}, B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ *e* $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ *e considere* $f : A \to B, f(x) = x^2$ *e* $g : B \to C, g(x) = 2x + 1$. *Encontre a lei da composta* $g \circ f : A \to C$ *e indique* $Im(g)$.

Demonstração. Resolução Usando a definição temos,

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = 2f(x) + 1 = 2x^2 + 1 \implies g \circ f(x) = 2x^2 + 1.$$

Como o domínio de $g \circ f$ é A, para encontrar a imagem de $g \circ f$ basta usar cada elemento de A como argumento de $g \circ f$. Assim, temos $\mathrm{Im} g \circ f = \{1, 3, 9\}$. $\square$



Exercício 2 (UNICAMP). *Sabendo que a é um número real, considere $f(x) = ax + 2$ definida para todo número real x. Se $f(f(1)) = 1$, então*

(a) $a = -1$

(b) $a = -1/2$

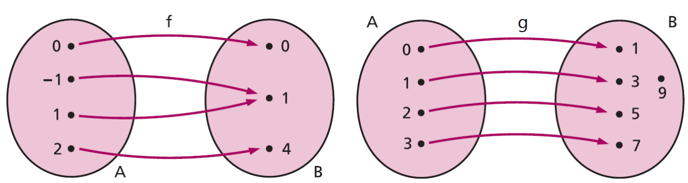
(c) $a = 1/2$

(d) $a = 1$

Demonstração. Vamos primeiro encontrar a composta de $f(f(x)) = f \circ f(x)$. Temos $f(f(x)) = af(x) + s = a(ax + 2) + 2 = a^2x + a2 + 2$. Daí segue que, $f(f(1)) = a^2 + 2a + 2$. Como $f(f(1)) = 1$, obtemos $a^2 + 2a + 2 = 1$. Assim, $a^2 + 2a + 1 = 0$. Agora resolvendo a última equação, temos que $\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 0$, portanto a equação $a^2 + 2a + 1 = 0$ possui uma única raiz que pode ser obtida por soma e produto. Com isso, temos que $a = -1$. $\square$

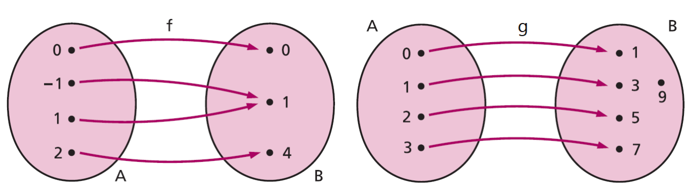
2 Sobrejetividade

Definição 1. *Uma função $f : A \to B$ é dita sobrejetiva quando $Im(f) = B$, ou seja, quando a imagem é igual ao contradomínio.*



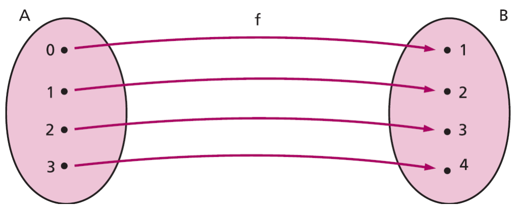
3 Injetividade

Definição 2. *Dizemos que uma função $f : A \to B$ é injetiva quando para quaisquer $x_1, x_2 \in A$ com $x_1 \neq x_2$ tivermos $f(x_1) \neq f(x_2)$. Ou seja, f é injetiva quando para todo $y \in Im(f)$ existe um único $x \in A$ tal que $f(x) = y$.*



4 Bijetividade

Definição 3. *Uma função $f : A \to B$ é dita bijetiva quando é injetiva e sobrejetiva, ou seja, quando para todo $y \in B$ existe um único $x \in A$ tal que $f(x) = y$.*

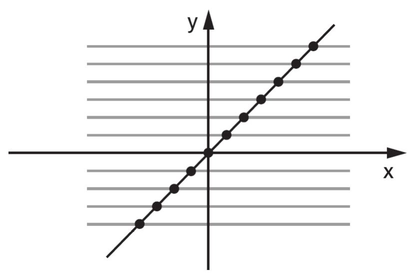


5 Reconhecimento através do gráfico

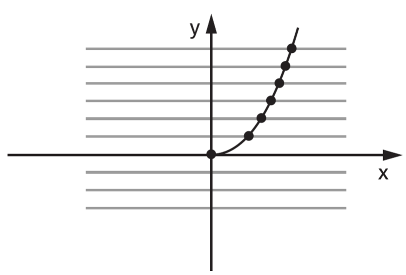
Análise gráfica: podemos analisar se uma função $f : A \Rightarrow B$ é sobrejetora ou injetora a partir das retas paralelas ao eixo-x determinadas pelos pontos $(0, y)$ tais que $y \in B$.

Proposição 1. *Injetividade Se cada uma das retas cortar o gráfico em um só ponto ou em nenhum, então a função é* ***injetiva****.*

Exemplo 1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x$

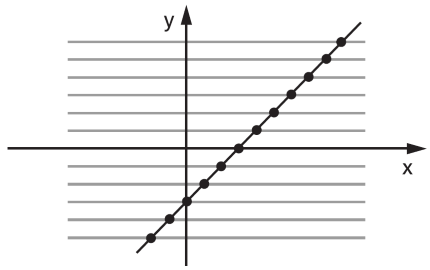


Exemplo 2. $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$

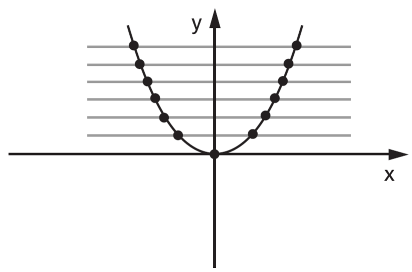


Proposição 2. *Sobrejetividade Se cada uma das retas cortar o gráfico da função em um ou mais pontos, então a função é* ***sobrejetora****.*

Exemplo 3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x - 1$

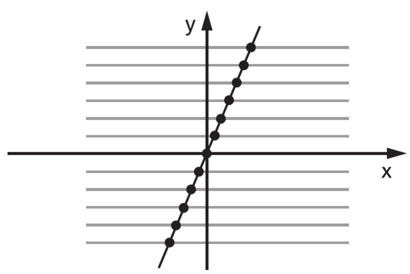


Exemplo 4. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+, f(x) = x^2$

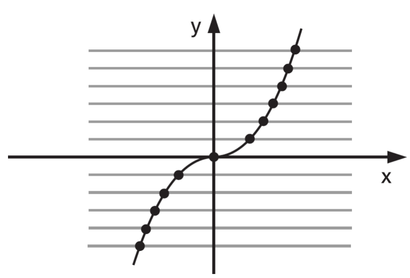


Proposição 3. *Bijetividade Se cada uma das retas cortar o gráfico em um só ponto, então a função é* ***bijetora****.*

Exemplo 5. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x$



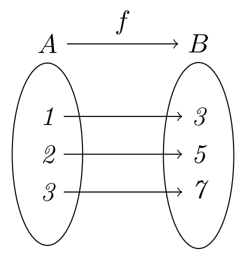
Exemplo 6. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x|x|$

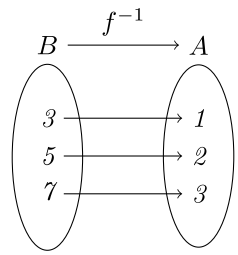


6 Função inversa

Vamos abordar um exemplo antes de definir o que é função inversa.

Exemplo 7. *Sejam* $A = \{1, 2, 3\}, B = \{3, 5, 7\}$ *e* $f : A \to B$ *dada por* $f(n) = 2n + 1$.





Definição 4. *Se* $f : A \to B$ *é uma função bijetora, então* $f^{-1} : B \to A$ *é uma função tal que para cada* $y \in B$ *temos* $f^{-1}(y) = x$ *desde que* $f(x) = y$ *para cada* $x \in A$. *A chamamos de inversa de* f.

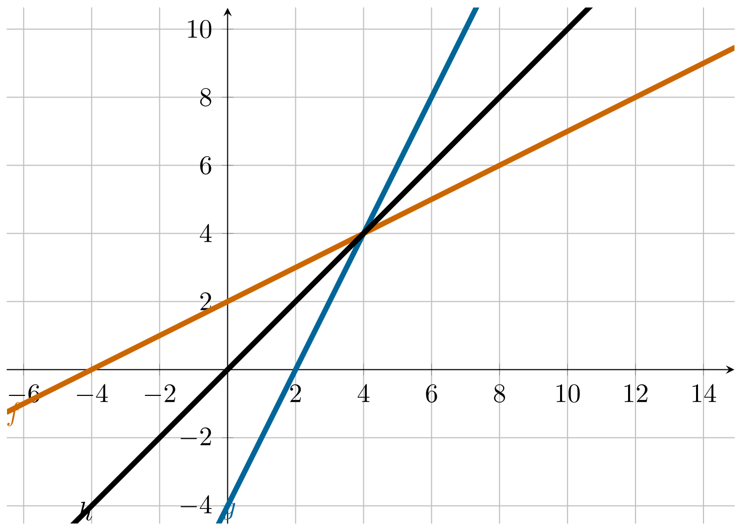
Teorema 1. *Seja* $f : A \to B$ *uma função. Então,* f *adimite função inversa* f^{-1} *se, e somente se,* f *for bijetora.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponha que f adimite a inversa f^{-1}. Seja $y \in B$. Daí, existe um único $x \in A$ tal que $f^{-1}(y) = x$, logo, $f(x) = y$. Portanto, para qualquer $y \in B$, existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$, ou seja, f é sobrejetiva. Agora tome $x_1, x_2 \in B$ com $x_1 = x_2$. Se tivermos $f(x_1) = f(x_2) = y$, então teríamos $f^{-1}(y) = x_1$ e por outro lado $f^{-1}(y) = x_2$. O que não pode ocorrer pois f^{-1} é função.
($\Leftarrow$) Considere f bijetiva. Assim, para todo $y \in B$ existe um único $x \in A$ tal que $f(x) = y$. Logo $f^{-1}(y) = x$. Portanto, todo $y \in B$ tem uma única imagem $f^{-1}(y) \in A$, logo f^{-1} é uma função. $\square$

Comentário 1. *Gráfico da inversa sejam* $f : A \to B$ *uma função que adimite inversa* $f^{-1} : B \to A$. *Os gráficos de* f *e* f^{-1} *são simétricos em relação à bissetriz do primeiro e terceiro quadrante, ou seja, em relação à função identidade* $g(x) = x$.

Observação 1. *Note que, se* $(x, y) \in G(f)$, *então devemos ter* $(y, x) \in G(f^{-1})$.

Exemplo 8. *Gráfico da inversa de f(x)=x/2+2*



Teorema 2. *Composta de funções inversas entre si Seja $f : A \to B$ uma função bijetiva. Se $f^{-1} : B \to A$ é a inversa de f, então $f \circ f^{-1} = I_B$ e $f^{-1} \circ f = I_A$.*

Demonstração. Seja $x \in A$. Temos que $f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(f(x)) = x$. Portanto, $f^{-1} \circ f(x) = x$. Agora tome $y \in B$. Assim, existe um único $x \in A$ tal que $f(x) = y$ e, então, $f^{-1}(y) = x$. Daí temos $f \circ f^{-1}(y) = f(f^{-1}(y)) = f(x) = y$. Portanto, $f \circ f^{-1}(y) = y$. $\square$

Exemplo 9. *Sejam $f(x) = 2x + 1$ e $f^{-1}(x) = x/2 - 1/2$. Calcule $f \circ f^{-1}$ e $f^{-1} \circ f$.*

Exercício 3. *FUVEST Sabendo que a função $f : \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R} - \{a\}$ definida por $f(x) = \frac{2x-3}{x-1}$ é inversível, determine o valor do número real a.*