Conjuntos dos Números Inteiros

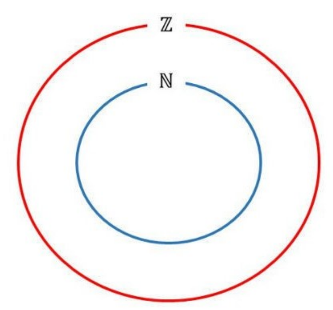
Matemática II

Almir Junior

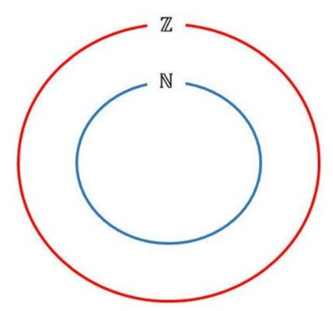
IME-USP

Maio 2021

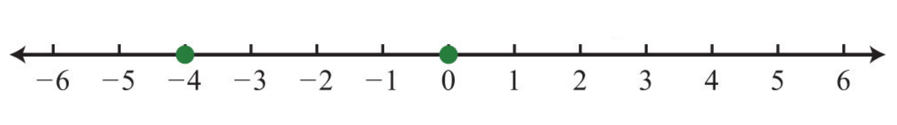
$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$



$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$



Reta numérica



Números Inteiros

Notaremos por $\mathbb{Z}$ o conjunto dos números inteiros. Nesse conjunto definimos duas operações: multiplicação e adição.

Números Inteiros

Notaremos por $\mathbb{Z}$ o conjunto dos números inteiros. Nesse conjunto definimos duas operações: multiplicação e adição.

Definição Axiomática

A.1 $\forall a, b, c \in \mathbb{Z}$ tem-se que $(a + b) + c = a + (b + c)$

A.2 $\exists \overline{o} \in \mathbb{Z}, \forall a \in \mathbb{Z}$ t.q. $a + \overline{o} = \overline{o} + a = a$

A.3 $\forall a \in \mathbb{Z}, \exists \overline{a} \in \mathbb{Z}$ t.q. $a + \overline{a} = \overline{o}$

A.4 $\forall a, b \in \mathbb{Z}$ tem- se que: $a + b = b + a$

M.1 $\forall a, b, c \; in\mathbb{Z}$ tem-se que: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

M.2 $\exists \overline{u} \in \mathbb{Z}, \forall a \in \mathbb{Z}$ t.q. $a \cdot \overline{u} = \overline{u} \cdot a = a$

M.3 $\forall a, b, c \in \mathbb{Z}$ tem-se que: $ab = ac \implies a = c$

M.4 $\forall a, b \in \mathbb{Z}$ tem- se que: $a \cdot b = b \cdot a$

Propriedade Cancelativa

Para todos $a, b, c \in \mathbb{Z}$ tem-se que:

$$a + b = a + c \implies b = c$$

Propriedade Cancelativa

Para todos $a, b, c \in \mathbb{Z}$ tem-se que:

$$a + b = a + c \implies b = c$$

Propriedade Distributiva

Para todos $a, b, c \in \mathbb{Z}$ tem-se que:

$$a(b + c) = ab + ac$$

Proposição 1

Para todos $a \in \mathbb{Z}$ tem se que: $a \cdot 0 = 0$.

Demonstração

Proposição 2

Para todo $a, b \in \mathbb{Z}$ tais que $a \cdot b = 0$. Então $a = 0$ ou $b = 0$.

Demonstração

Proposição 3 (Regra dos sinais)

Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$. Então vale:

1. $-(-a) = a$
2. $(-a)(b) = -(ab) = a(-b)$
3. $(-a)(-b) = ab$

Demonstração

Definição 1

Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$ tais que $|a| \leq |b|$. Tem-se que:

$$a \mid b \iff \exists k \in \mathbb{Z} \quad \text{t.q.} \quad b = ak.$$

Definição 1

Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$ tais que $|a| \leq |b|$. Tem-se que:

$$a \mid b \iff \exists k \in \mathbb{Z} \quad \text{t.q.} \quad b = ak.$$

Exemplos

1. $5 \mid 10$
2. $3 \mid 18$
3. $a \neq 0, a \mid a$
4. $3 \nmid 2$

Proposição 4

Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Se $a \mid b$ e $b \mid c$, então $a \mid c$.

Demonstração

Exemplos

1. $2 \mid 6$ e $6 \mid 36$

2. $5 \mid 15$ e $15 \mid 30$

Proposição 5

Sejam $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Se $a \mid b$ e $c \mid d$, então $ac \mid bd$.

Demonstração

Exemplos

1. $2 \mid 10$ e $5 \mid 15$

2. $5 \mid 10$ e $3 \mid 6$

Proposição 6

Sejam $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Se $a \mid b$ e $a \mid c$, então $a \mid (b + c)$.

Demonstração

Exemplos

1. $7 \mid 14$ e $7 \mid 21$

2. $3 \mid 18$ e $3 \mid 9$

Definição2

Dizemos que um número $p \in \mathbb{Z}$ diferente de 1 é primo quando seus divisores são $\{\pm p, \pm 1\}$.

Definição2

Dizemos que um número $p \in \mathbb{Z}$ diferente de 1 é primo quando seus divisores são $\{\pm p, \pm 1\}$.

Exemplo

1. 2
2. 3
3. 5
4. 7

Teorema Fundamental da Aritmética

Seja $a \in \mathbb{Z}$. Então $a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha 4} \cdots p_n^{\alpha_n}$ onde p_i é primo para todo $i \in \{1, ..., n\}$ e $n \in \mathbb{N}$.

Aplicação

1. $10 = 2 \cdot 5$

Teorema Fundamental da Aritmética

Seja $a \in \mathbb{Z}$. Então $a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha 4} \cdots p_n^{\alpha_n}$ onde p_i é primo para todo $i \in \{1, ..., n\}$ e $n \in \mathbb{N}$.

Aplicação

1. $10 = 2 \cdot 5$
2. $16 = 2^4$

Teorema Fundamental da Aritmética

Seja $a \in \mathbb{Z}$. Então $a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha 4} \cdots p_n^{\alpha_n}$ onde p_i é primo para todo $i \in \{1, ..., n\}$ e $n \in \mathbb{N}$.

Aplicação

1. $10 = 2 \cdot 5$
2. $16 = 2^4$
3. $52 = 2 \cdot 3 \cdot 7$

Teorema Fundamental da Aritmética

Seja $a \in \mathbb{Z}$. Então $a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha 4} \cdots p_n^{\alpha_n}$ onde p_i é primo para todo $i \in \{1, ..., n\}$ e $n \in \mathbb{N}$.

Aplicação

1. $10 = 2 \cdot 5$
2. $16 = 2^4$
3. $52 = 2 \cdot 3 \cdot 7$
4. $36 = 2^2 \cdot 3^2$

Teorema

Existem infinitos números primos.

Demonstração

Definição 3

Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$. Dizemos que $c \in \mathbb{Z}$ é o maior divisor comum de a e b se c é o maior inteiro tal que $c \mid a$ e $c \mid b$. Denotamos c por $\text{mdc}(a, b)$.

Definição 3

Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$. Dizemos que $c \in \mathbb{Z}$ é o maior divisor comum de a e b se c é o maior inteiro tal que $c \mid a$ e $c \mid b$. Denotamos c por $\text{mdc}(a, b)$.

Exemplos

1. $\text{mdc}(2, 3)=$

2. $\text{mdc}(8, 36)=$

3. $\text{mdc}(10, 15)=$

Definição 4

Sejam $a, b \in \mathbb{Z}^*$. Dizemos que $c \in \mathbb{Z}$ é um múltiplo comum de a e b se $a \mid c$ e $b \mid c$.

Definição 4

Sejam $a, b \in \mathbb{Z}^*$. Dizemos que $c \in \mathbb{Z}$ é um múltiplo comum de a e b se $a \mid c$ e $b \mid c$.

Exemplo

1. 12 é múltiplo comum de 2 e 3
2. 20 é múltiplo comum de 4 e 10

Definição 5

Sejam $a, b \in \mathbb{Z}^*$. Dizemos que $m \in \mathbb{Z}$ é o mínimo múltiplo comum de a e b se m é o menor múltiplo comum de a e b. Denotamos m por $\text{mmc}(a, b)$.

Definição 5

Sejam $a, b \in \mathbb{Z}^*$. Dizemos que $m \in \mathbb{Z}$ é o mínimo múltiplo comum de a e b se m é o menor múltiplo comum de a e b. Denotamos m por $\text{mmc}(a, b)$.

Exemplo

1. $\text{mmc}(4, 2) =$
2. $\text{mmc}(3, 2) =$
3. $\text{mmc}(10, 30) =$

Teorema(Algoritmo da divisão)

Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$ com $b \neq 0$. Então, existem únicos $q, r \in \mathbb{Z}$ tais que $a = bq + r$ e $0 \leq r < b$.

Teorema(Algoritmo da divisão)

Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$ com $b \neq 0$. Então, existem únicos $q, r \in \mathbb{Z}$ tais que $a = bq + r$ e $0 \leq r < b$.

Exemplo: Interprete $\div$ como divisão inteira e resolva os itens abaixo.

1. $5 \div 2 =$
2. $10 \div 3 =$
3. $21 \div 7 =$