Funções do Segundo Grau

Matemática II

Almir Junior

IME-USP

Junho 2021

Função do Segundo Grau

Definição

Uma aplicação $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ recebe o nome de *função quadrática* ou *função do segundo grau* quando $x \mapsto ax^2 + bx + c$ onde $a, b, c \in \mathbb{R}$ são dados com $a \neq 0$.

Função do Segundo Grau

Definição

Uma aplicação $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ recebe o nome de *função quadrática* ou *função do segundo grau* quando $x \mapsto ax^2 + bx + c$ onde $a, b, c \in \mathbb{R}$ são dados com $a \neq 0$.

Exemplos

1. $f(x) = x^2 + 3x - 1$ onde $a = 1, b = 3$ e $c = -1$

Função do Segundo Grau

Definição

Uma aplicação $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ recebe o nome de *função quadrática* ou *função do segundo grau* quando $x \mapsto ax^2 + bx + c$ onde $a, b, c \in \mathbb{R}$ são dados com $a \neq 0$.

Exemplos

1. $f(x) = x^2 + 3x - 1$ onde $a = 1, b = 3$ e $c = -1$
2. $g(x) = 3x^2 + 7$ onde $a = 3, b = 0$ e $c = 7$

Função do Segundo Grau

Definição

Uma aplicação $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ recebe o nome de *função quadrática* ou *função do segundo grau* quando $x \mapsto ax^2 + bx + c$ onde $a, b, c \in \mathbb{R}$ são dados com $a \neq 0$.

Exemplos

1. $f(x) = x^2 + 3x - 1$ onde $a = 1, b = 3$ e $c = -1$
2. $g(x) = 3x^2 + 7$ onde $a = 3, b = 0$ e $c = 7$
3. $h(x) = -3x^2$ onde $a = -3, b = c = 0$

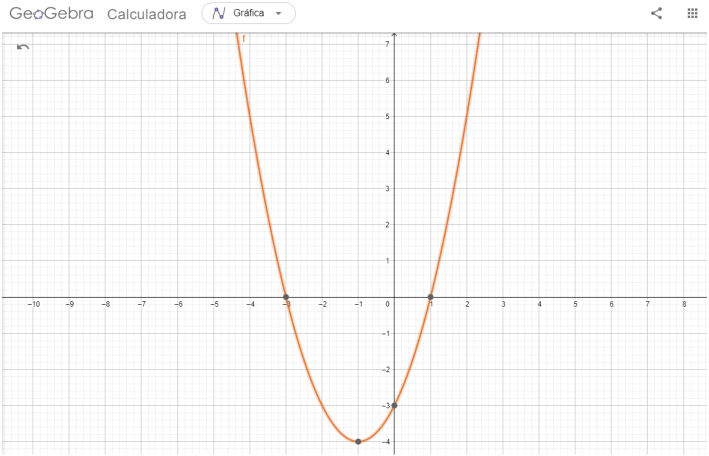
Gráfico

O gráfico de uma função do segundo grau é uma parábola.

Gráfico

O gráfico de uma função do segundo grau é uma parábola.

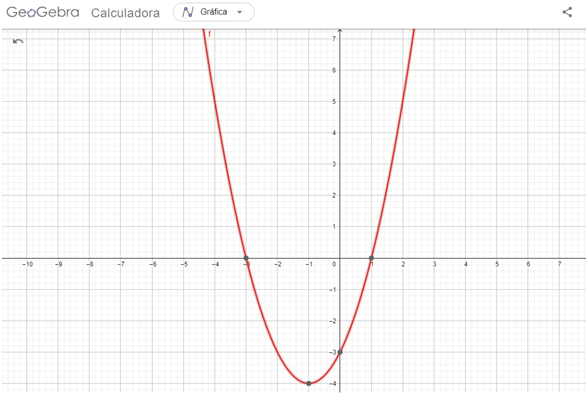
GeoGebra



Gráfico

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $f(x) = ax^2 + bx + c$ uma função quadrática. Se $a > 0$, então a concavidade da parábola é voltada para cima.

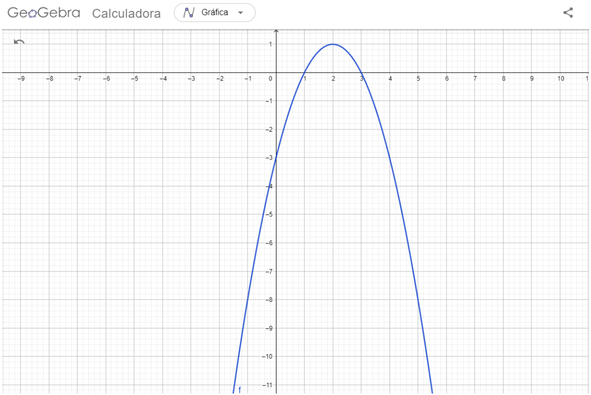
GeoGebra



Gráfico

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $f(x) = ax^2 + bx + c$ uma função quadrática. Se $a < 0$, então a concavidade da parábola é voltada para baixo.

GeoGebra



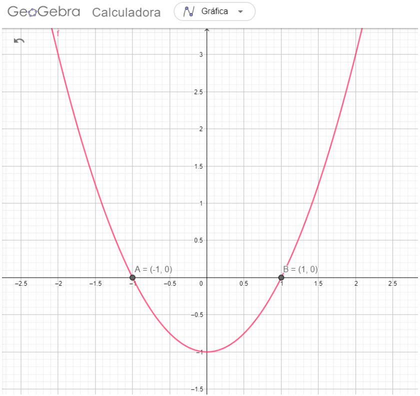
Zeros

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $f(x) = ax^2 + bx + c$ uma função quadrática. Os zeros de f são os valores de x para os quais $f(x) = 0$. Então são as raízes da equação $ax^2 + bx + c$.

zeros

Se $\Delta > 0$, então f possui duas raízes reais distintas e o gráfico intersecta o *eixo-x* em dois pontos.

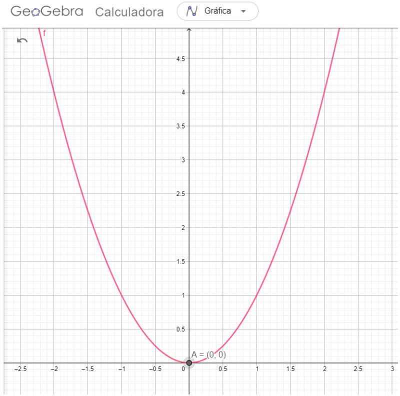
$f(x) = x^2 - 1$



zeros

Se $\Delta = 0$, então f possui uma raiz real distinta e o gráfico intersecta o *eixo-x* em um único ponto.

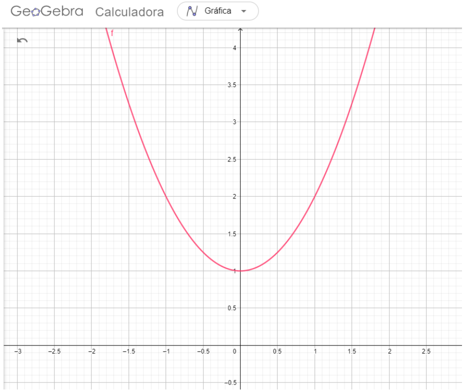
$f(x) = x^2$



zeros

Se $\Delta < 0$, então f não possui raiz real e não istersecta o *eixo-x*.

$f(x) = x^2 + 1$



Função Identidade

Definição

Uma aplicação $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é chamada de *função Identidade* quando $x \mapsto f(x) = x$, ou seja, para todo $x \in R$ tem-se $f(x) = x$.

Ponto de máximo

Considere a função $f(x) = ax^2 + bx + c$. Se $a < 0$, então o ponto máximo de f é $(-b/2a, -\Delta/4a)$.

Ponto de máximo

Considere a função $f(x) = ax^2 + bx + c$. Se $a < 0$, então o ponto máximo de f é $(-b/2a, -\Delta/4a)$.

Demonstração

Temos que:

$$f(x) = a\left(x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a}\right)$$

$$a\left(x^2 + 2\frac{bx}{2a} + \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{4ac}{4a^2}\right)$$

$$a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

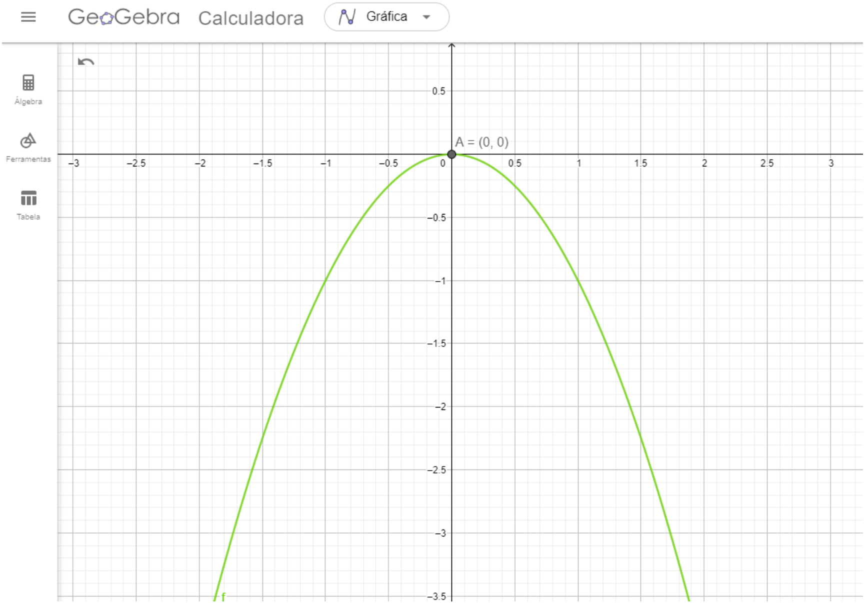
Ponto de maximal

Considere a função $f(x) = ax^2 + bx + c$. Se $a < 0$, então o ponto máximo de f é $(-b/2a, -\Delta/4a)$.

Demonstração

Portanto para $x = -b/2a$ temos:

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{b}{2a}\right) &= a\left[\left(-\frac{b}{2a} + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] \\ &= a\left(-\frac{\Delta}{4a^2}\right) \\ &= -\frac{\Delta}{4a} \end{aligned}$$


GeoGebra Calculadora
Gráfica
Álgebra
Ferramentas
Tabela
A = (0, 0)
f

Ponto minimal

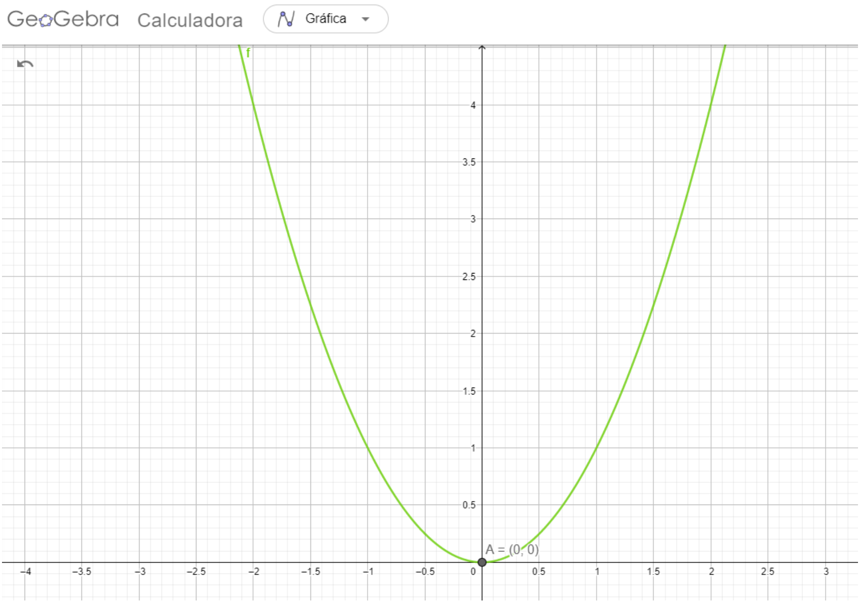
Considere a função $f(x) = ax^2 + bx + c$. Se $a > 0$, então o ponto mínimo de f é $(-b/2a, -\Delta/4a)$.

Ponto minimal

Considere a função $f(x) = ax^2 + bx + c$. Se $a > 0$, então o ponto mínimo de f é $(-b/2a, -\Delta/4a)$.

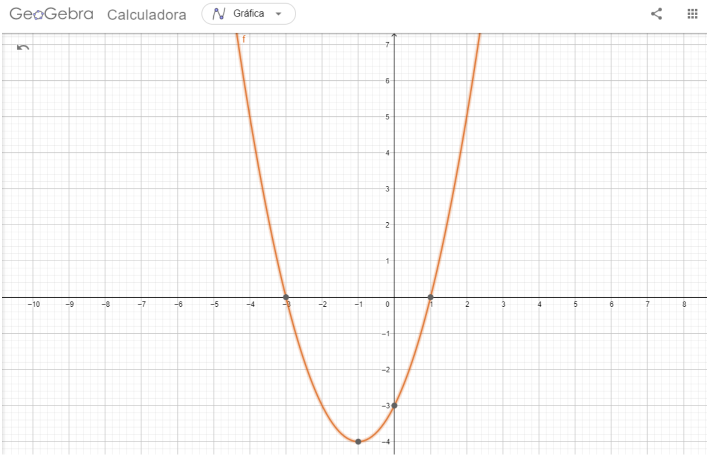
Demonstração

Análoga ao caso $a < 0$.

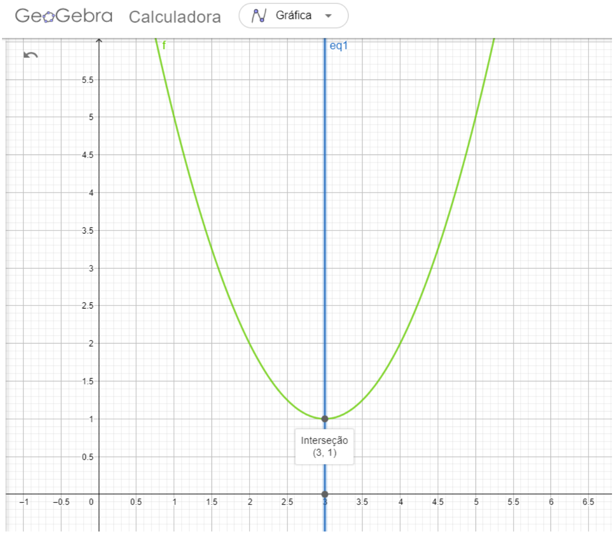

GeoGebra Calculadora
Gráfica
f
A = (0, 0)
4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
−4
−3.5
−3
−2.5
−2
−1.5
−1
−0.5
0.5
1
1.5
2
2.5
3

Vértice da Parábola

Para função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, o ponto $(-b/2a, -\Delta/4a)$ é chamado vértice da parábola.



Eixo de simetria



Enem(2020)

Em um ano, uma prefeitura apresentou o relatório de gastos públicos realizados pelo município. O documento mostra que foram gastos 72 mil reais no mês de janeiro (mês 1), que o maior gasto mensal ocorreu no mês de agosto (mês 8) e que a prefeitura gastou 105 mil reais no mês de dezembro (mês 12). A curva que modela esses gastos é a parábola $y = T(x)$, com x sendo o número correspondente ao mês e $T(x)$, em milhar de real. A expressão da função cujo gráfico é o da parábola descrita é:

a. $T(x) = -x^2 + 16x + 57$
b. $T(x) = -\frac{11}{16}x^2 + 11x + 72$
c. $T(x) = \frac{3}{5}x^2 - \frac{24}{5}x + \frac{381}{5}$
d. $T(x) = -x^2 - 16x + 87$
e. $T(x) = \frac{11}{6}x^2 - \frac{11}{2}x + 72$

Rabisco

Rabisco