# Função Quadrática

Almir Junior

Julho

**Definição 1.** *Uma aplicação $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ recebe o nome de função quadrática ou função do segundo grau quando $x \mapsto ax^2 + bx + c$ onde $a, b, c \in \mathbb{R}$ são dados com $a \neq 0$.*

Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto ax^2 + bx + c$. Temos que:

$$\begin{aligned} f(x) &= a\left(x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left(x^2 + 2\frac{bx}{2a} + \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{4ac}{4a^2}\right) \\ &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] \end{aligned}$$

**Definição 2.** *Sendo função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto ax^2 + bx + c$, dizemos que a forma canônica da função $f$ é:*

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right].$$

**Exemplo 1.** $f(x) = x^2 + 3x - 1$ *onde* $a = 1, b = 3$ *e* $c = -1$

**Exemplo 2.** $g(x) = 3x^2 + 7$ *onde* $a = 3, b = 0$ *e* $c = 7$

**Exemplo 3.** $h(x) = -3x^2$ *onde* $a = -3, b = c = 0$

O gráfico de uma função do segundo grau é uma parábola, de forma que: se $a > 0$, então a concavidade da parábola é voltada para cima;Se $a < 0$, então a concavidade da parábola é voltada para baixo.

**Comentário 1.** *Resolver as inequações dos exemplos acima significa encontrar os valores de $x \in \mathbb{R}$ para os quais a expressão é válida. Graficamente, na expressão $f(x) < g(x)$, queremos encontrar os valores de $x \in \mathbb{R}$ para os quais o gráfico da função $f(x)$ está abaixo do gráfico de $g(x)$.*

**Definição 3.** *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $f(x) = ax^2 + bx + c$. Os zeros de $f$ são os valores de $x$ para os quais $f(x) = 0$. Então são as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$, ou seja, $x = (-b \pm \sqrt{\Delta})/2a$ onde $\Delta = b^2 - 4ac$.*

**Proposição 1.** *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $f(x) = ax^2 + bx + c$. Se $\Delta > 0$, então $f$ possui duas raízes reais distintas.*

*Demonstração.* Considere $\Delta > 0$ e suponha que $a > 0$. Temos que:

$$\begin{aligned} -\sqrt{\Delta} < \sqrt{\Delta} &\implies -b - \sqrt{\Delta} < -b + \sqrt{\Delta} \\ &\implies \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} < \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ &\implies x_1 < x_2 \therefore x_1 \neq x_2. \end{aligned}$$

Agora suponha que $a < 0$, daí:

$$\begin{aligned} -\sqrt{\Delta} < \sqrt{\Delta} &\implies -b - \sqrt{\Delta} < -b + \sqrt{\Delta} \\ &\implies \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} > \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ &\implies x_1 > x_2 \therefore x_1 \neq x_2. \end{aligned}$$

□

**Comentário 2.** *No caso $\Delta > 0$, o gráfico da função intersecta o eixo-x em dois pontos distintos.*

**Proposição 2.** *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $f(x) = ax^2 + bx + c$. Se $\Delta = 0$, então $f$ possui uma raiz real distinta e o gráfico intersecta o eixo-x em um único ponto.*

*Demonstração.* Considere $\Delta = 0$. Então temos que $\sqrt{\Delta} = 0$, daí:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{b}{2a}$$

□

**Comentário 3.** *No caso $\Delta = 0$, o gráfico da função intersecta o eixo-x em um único ponto.*

**Proposição 3.** *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $f(x) = ax^2 + bx + c$. Se $\Delta < 0$, então $f$ não possui raiz real.*

*Demonstração.* Considere $\Delta < 0$. Assim, temos que $\sqrt{\Delta} \notin \mathbb{R}$, no caso $\sqrt{\Delta} \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$. Daí segue que

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \notin \mathbb{R}.$$

Portanto, $f$ não possui raiz real. □

**Comentário 4.** *No caso $\Delta < 0$, o gráfico da função não intersecta o eixo-x.*

**Proposição 4.** *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $f(x) = ax^2 + bx + c$. Se $a < 0$, então o ponto máximo de $f$ é $(-b/2a, -\Delta/4a)$. Se $a > 0$, então o ponto mínimo de $f$ é $(-b/2a, -\Delta/4a)$.*

*Demonstração.* Considere $a < 0$. Escrevendo a função $f$ na sua forma canônica temos:

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right].$$

Basta observar que $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ tem valor minimal quando $x + \frac{b}{2a} = 0$, ou seja, para $x = -\frac{b}{2a}$. Assim, tomando $x = -\frac{b}{2a}$ obtemos:

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = a\left[\left(-\frac{b}{2a} + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = -\frac{\Delta}{4a}.$$

Daí, se $a > 0$ temos valor de mínimo, se $a < 0$ temos valor de máximo. □

**Definição 4.** *Para função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, chamamos de vértice da parabóla o ponto $(-b/2a, -\Delta/4a)$.*

**Exercício 1.** *Enem(2020) Em um ano, uma prefeitura apresentou o relatório de gastos públicos realizados pelo município. O documento mostra que foram gastos $72$ mil reais no mês de janeiro (mês $1$), que o maior gasto mensal ocorreu no mês de agosto (mês $8$) e que a prefeitura gastou $105$ mil reais no mês de dezembro (mês $12$). A curva que modela esses gastos é a parábola $y = T(x)$, com $x$ sendo o número correspondente ao mês e $T(x)$, em milhar de real. A expressão da função cujo gráfico é o da parábola descrita é:*

*a* $T(x) = -x^2 + 16x + 57$

*b* $T(x) = -\frac{11}{16}x^2 + 11x + 72$

*c* $T(x) = \frac{3}{5}x^2 - \frac{24}{5}x + \frac{381}{5}$

*d* $T(x) = -x^2 - 16x + 87$

*e* $T(x) = \frac{11}{6}x^2 - \frac{11}{2}x + 72$

*Solução.* Pelo enunciado, a curva que modela o gráfico é uma parábola, também temos que "que o maior gasto mensal ocorreu no mês de agosto (mês 8)", então é uma parábola com $a < 0$, pois só assim existe máximo. Com isso eliminamos as alternativas (c) e (d). Temos também que $T(1) = 72$, daí testando $x = 1$ nas alternativas restante, encontramos como resultado a alternativa (a). □