Função Logarítmica

Almir Junior

Setembro 2021

1 Logaritmos

Sabemos resolver equações e inequações exponenciais reduzindo as potênciais a uma base comum.

Exemplo 1. $9^{x+2} < 81$

Exemplo 2. $49 = 7^{5y+4}$

O que podemos dizer sobre equações exponenciais da forma $3^x = 4$? Queremos definir o número uma expressão para o elemento x.

Definição 1. *Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $0 < b \neq 1$ e $0 < a$. Chamamos de logaritmo de a na base b o exponte de b para o qual a potência resulte em a, ou seja:*

$$\log_b a = x \iff b^x = a.$$

Exemplo 3. *A partir da definiçãço temos:*

1. $\log_2 4 = 2$
2. $\log_7 \frac{1}{49} = -2$
3. $\log_{\sqrt{3}} 1 = 0$

Observação 1. *Com as restrições impostas($a, b \in \mathbb{R}$ tal que $0 < b \neq 1$ e $0 < a$), o logaritmo é único.*

Observação 2. *Bases especiais Temos que $\log_{10} a := \log a$ e $\log_e a := \ln a$ onde $e = 2,71...$ é a constante de Euler.*

Exemplo 4.

1. $\log 10 = 1$
2. $\log 100 = 2$
3. $\ln 2 = 0,693147...$
4. $\ln e^2 = 2$

Proposição 1. *Sejam* $a, b \in \mathbb{R}$ *com* $0 < b \neq 1$ *e* $0 < a$. *Assim,*

1. $\log_b 1 = 0$
2. $\log_b b = 1$
3. $b^{\log_b a} = a$
4. $\log_b a = \log_b c \iff a = c$

Demonstração. Segue da definição de logaritmo:
1. $\log_b 1 = x \iff b^x = 1 = b^0 \iff x = 0 \therefore \log_b 1 = 0$.
2. $\log_b b = x \iff b^x = b = b^1 \iff x = 1$.
3. $\log_b a = x \iff b^x = a \iff b^{\log_b a} = a$.
4. $\log_b a = \log_b c \iff \log_b a^{\log_b c} \iff \log_b a = c \therefore a = c$. □

Exemplo 5. *Resolva* $8^{\log_2 5}$.

Resolução. Desde que $2^3 = 8$ e utilizando propriedades de potência temos:

$$8^{\log_2 5} \iff 8 = (2^3)^{\log_2 5} = (2^{\log_2 5})^3.$$

Agora, usando **Proposição 1** parte 3, segue:

$$(2^{\log_2 5})^3 = 5^3 = 125.$$

□

Exemplo 6. *Resolva* $9^{2-\log_3 \sqrt{2}}$.

Resolução. Desde que $3^2 = 9$ e utilizando propriedades de potência temos:

$$9^{2-\log_3 \sqrt{2}} = \frac{9^2}{9^{\log_3 \sqrt{2}}} = \frac{9^2}{(3^2)^{\log_3 \sqrt{2}}} = \frac{9^2}{(3^{\log_3 \sqrt{2}})^2}.$$

Usando **Proposição 1** parte 3, segue:

$$\frac{9^2}{(\sqrt{2})^2} = \frac{81}{2}.$$

□

Proposição 2. *Sejam* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *com* $0 < a, 0 < c$ *e* $0 < b \neq 1$. *Então,*

$$\log_b(ac) = \log_b a + \log_b c.$$

Demonstração. Sejam $\log_b a = x$ e $\log_b c = y$. Então $b^x = a$ e $b^y = c$. Com isso temos que $ac = b^x b^y = b^{x+y}$. O que, pela definição do lagaritmo, implica em $\log_b ac = x + y$. Portanto, substituindo x e y temos $\log_b ac = \log_b a + \log_b c$. □

Proposição 3. *Sejam* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *com* $0 < a, 0 < c$ *e* $0 < b \neq 1$. *Então,*

$$\log_b \left(\frac{a}{c}\right) = \log_b a - \log_b c.$$

Demonstração. Sejam $\log_b a = x$ e $\log_b c = y$. Então $b^x = a$ e $b^y = c$. Com isso temos que $a/c = b^x/b^y = b^{x-y}$. O que, pela definição do lagaritmo, implica em $\log_b(a/c) = x - y$. Portanto, substituindo x e y temos $\log_b(a/c) = \log_b a - \log_b c$. □

Proposição 4. *Sejam* $a, b \in \mathbb{R}$ *com* $0 < a, 0 < b \neq 1$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Então,*

$$\log_b(a^\alpha) = \alpha \log_b a.$$

Demonstração. Seja $\log_b a = x$ e seja $\log_b a^\alpha$. Então $b^x = a$ e $b^y = a^\alpha$. Com isso temos que $b^y = a^\alpha = (b^x)^\alpha = b^{x\alpha}$, logo $y = x\alpha$. Portanto, substituindo x e y temos $\log_b(a^\alpha) = (\log_b a) \cdot \alpha$. □

Proposição 5. *Mudança de base Sejam* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *com* $0 < a, 0 < b \neq 1$ *e* $0 < c \neq 1$. *Então,*

$$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}.$$

Demonstração. Sejam $\log_b a = x, \log_c a = y$ e $\log_c b = z$. Então, por definição, $b^x = a, c^y = a$ e $c^z = b$. Substituinto as duas últimas igualdades na primeira temos:

$$b^x = a \iff (c^z)^x = c^y \iff c^{zx} = c^y \iff zx = y \iff x = y/z.$$

Agora substituindo o x, y e z, concluimos:

$$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}.$$

□

Exercício 1 (FUVEST)**.** *Se* $\log_2 y = -\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\log_2 x$, *para* $x > 0$, *então*

(A) $y = \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{2}}$

(B) $y = \sqrt{\frac{x^3}{2}}$

(C) $y = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt[3]{x^2}$

(D) $\sqrt{2}\sqrt[3]{x^2}$

(E) $\sqrt{2x^3}$

Resolução. Para resolver essa questão usaremos a definição de logritmo e as proposições 3 e 4

$$\begin{aligned}
\log_2 y = -\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\log_2 x &\iff \log_2 y = -\frac{1}{2} + \log_2\left(x^{\frac{2}{3}}\right)\\
&\iff \log_2 y - \log_2\left(x^{\frac{2}{3}}\right) = -\frac{1}{2}\\
&\iff \log_2\left(\frac{y}{x^{\frac{2}{3}}}\right) = -\frac{1}{2}\\
&\iff 2^{-\frac{1}{2}} = \frac{y}{x^{\frac{2}{3}}}\\
&\iff y = \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

□

2 Função Logarítmica

Definição 2. *Seja $a \in \mathbb{R}$ tal que $0 < a \neq 1$. Chamamos de função logarítmica de base a o mapa $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ dado por $f(x) = \log_a x$.*

Exemplo 7. $f(x) = \log_3 x$

Exemplo 8. $g(x) = lnx$

Exemplo 9. $h(x) = \log_{\frac{3}{2}} x$

Proposição 6. *Seja $a \in \mathbb{R}$ tal que $0 < a \neq 1$. Então, as funções $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \log_a x$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ dada por $g(x) = a^x$ são inversas uma da outra.*

Demonstração. Se f é inversa de g e vice-versa, então $f \circ g = g \circ f = id$(função identidade). Vamos mostrar que essas igualdades são verdadeiras. Para o caso $f \circ g$, utlizando a **Proposição** 4 e a parte 2 da **Proposição** 1 temos:

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = \log_a(g(x)) = \log_a(a^x) = x\log_a(a) = x.$$

Agora para $g \circ f$, utlizando a parte 3 da **Proposição 1** temos:

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = a^{f(x)} = a^{\log_a(x)} = x.$$

□

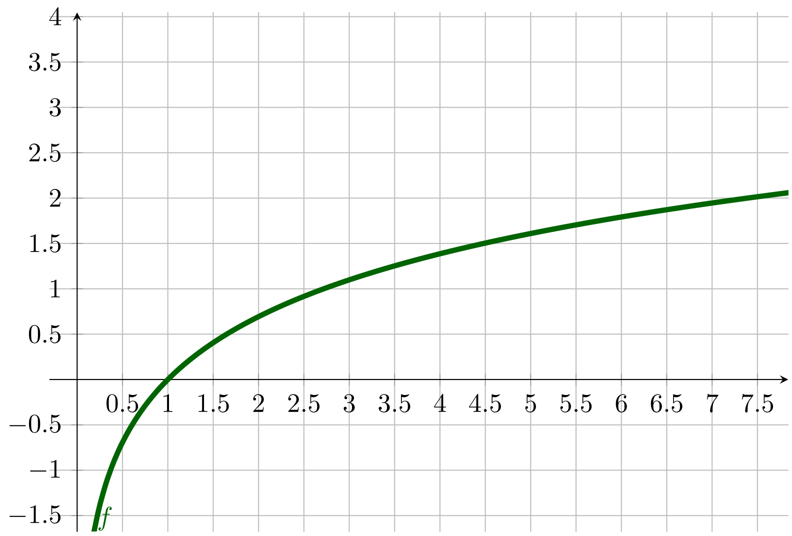
Proposição 7. *A função logarítmica é crescente se, e somente se, $1 < a$.*

Demonstração. □

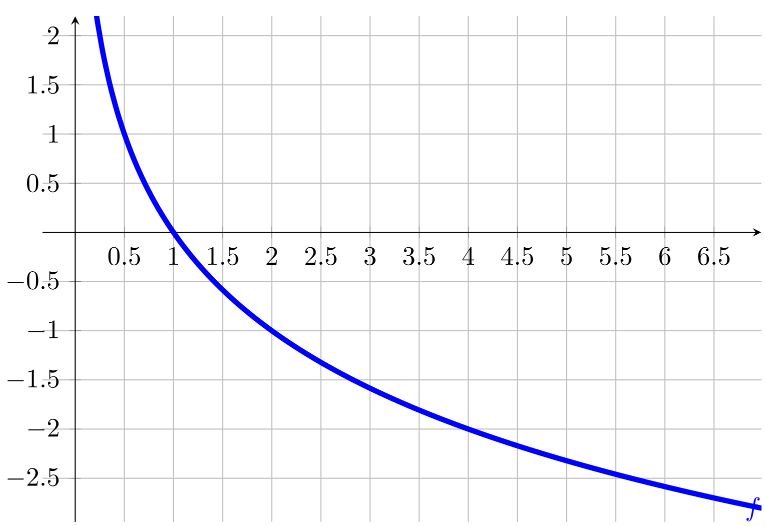
Proposição 8. *A função logarítmiva é decrescente se, e somente se, $0 < a < 1$.*

Demonstração. □

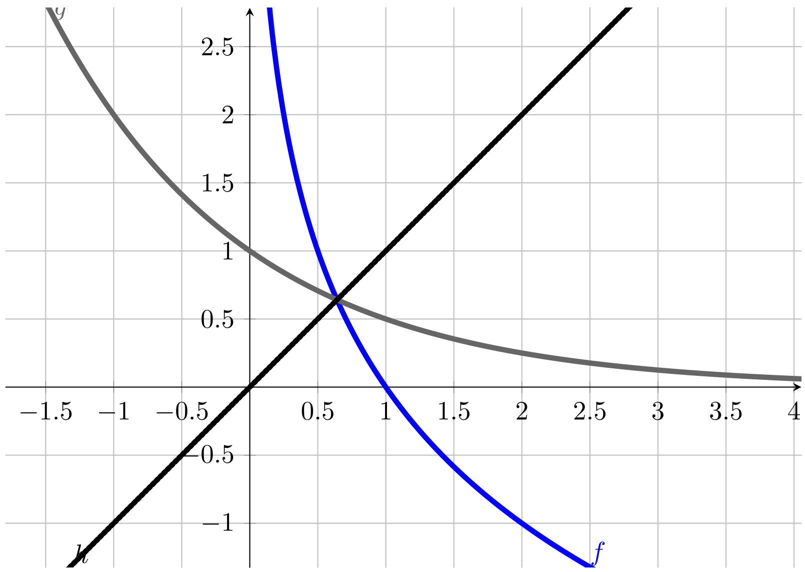
Exemplo 10. *Gráfico da função* $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}, f(x) = \ln(x)$.



Exemplo 11. *Gráfico da função* $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}, f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x)$.



Exemplo 12. *Como a função* $g(x) = (1/2)^x$ *é inversa da* $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x)$ *e vise-versa, devemos ter os gráficos simétricos em relação ao gráfico da função identidade.*



Exercício 2. *A Lei de Zipf, batizada com o nome do linguista americano George Zipf, é uma lei empírica que relaciona a frequência* (f) *de uma palavra em um dado texto com o seu ranking* (r)*. Ela é dada por*

$$f = \frac{A}{r^B}.$$

O ranking da palavra é a sua posição ao ordenar as palavras por ordem de frequência. Ou seja, $r = 1$ *para a palavra mais frequente,* $r = 2$ *para a segunda palavra mais frequente e assim sucessivamente.* A *e* B *são constantes positivas. Diponível em: Acesso em: 12 ago. 2020 (adatpado).*

Com base nos valores de $X = \log(r)$ *e* $Y = \log(f)$*, é possível estimar valores para* A *e* B*. No caso hipotético em que a lei é verificada exatamente, a relação entre* Y *e* X *é:*

(A) $Y = \log(A) - B \cdot X$

(B) $Y = \frac{\log(A)}{X+\log(B)}$

(C) $Y = \frac{\log(A)}{B} - X$

(D) $Y = \frac{\log(A)}{B \cdot X}$

(E) $Y = \frac{\log(A)}{X^B}$

Demonstração. **Resolução** A partir da relação $f = A/(r^B)$, temos:

$$\begin{aligned} f = \frac{A}{r^B} \implies \log(f) &= \log\left(\frac{A}{r^B}\right) \\ &= \log(A) - \log(r^B) \\ &= \log(A) - B\log(r) \\ \implies Y = \log(A) - B \cdot X. \end{aligned}$$

Portanto, alternativa (A). □