Um pouco sobre conjuntos

Almir Junior

Março de 2022

1 Conjunto, elemento e pertinência

Devemos carregar a noção intuitiva de conjunto, elemento e pertinência. Normalmente usamos como notação para conjuntos letras maiúsculas e letras minúscalas para elementos. Para que haja um conjunto é necessário que tenhamos primeiramente seus elementos, para isso utilizamos a relação de pertinência simbolizada por $\in$ caso o elemento esteja no conjunto, caso contrário usamos $\notin$.

Assim, dado um conjunto A e um elemento x temos o seguinte, se x faz parte de A escrevemos $x \in A$ e lê-se "x pertece ao conjunto A", se x não faz parte de A então $x \notin A$ e lê-se "x não pertece ao conjunto A". Um conjunto pode ter como elemento outros conjuntos.

2 Representação de conjuntos e conjunto de referência

Podemos apresentar um conjunto listando seus elementos ou apresentando propriedades que seus elementos possuem. No caso de conjuntos finitos-com finitos elementos- podemos simplesmente listar seus elementos. Se o conjunto for infinito-com infinitos elementos-é conveniente apresentar alguma propriedade que todos seus elementos possuam.

Exemplo 1. *Para apresentar o conjunto S dos naturais menores que sete podemos escrever $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ou $S = \{n \in \mathbb{N}; n < 7\}$. lemos a última expressão como, S é o conjunto dos números naturais n tais que n é menor do que sete.*

Exemplo 2. *Para designar o conjunto dos número pares é totalmente conveniente utilizar alguma propriedade que descreva seus elementos. Sabemos que números pares são aqueles inteiros múltiplos de 2, isto é, são os $n \in \mathbb{Z}$ tais que $n = 2k$ onde $k \in \mathbb{Z}$. Sendo assim, podemos representar o conjunto de todos números pares por $P = \{n \in \mathbb{Z}; n = 2k \text{ e } k \in \mathbb{Z}\}$, lê-se P é o conjunto dos números inteiros n tais que n é igual a duas vezes outro número inteiro qualquer k.*

Uma maneira de evitar contradições ao trabalharmos com conjuntos é formar conjuntos somente quando temos previamente seus elementos, ou seja, quando já sabemos quem são seus elementos e em qual conjunto estão. Um exemplo de contradição é o seguinte. Definimos um conjunto $\mathcal{M}$ cujo os elementos são os conjuntos A que não pertencem a si mesmo, ou seja, $A \notin A$. Olhando para $\mathcal{M}$ temos duas possibilidades:

1. $\mathcal{M} \in \mathcal{M}$
2. $\mathcal{M} \notin \mathcal{M}$.

Ora, se $\mathcal{M} \in \mathcal{M}$, então $\mathcal{M} \notin \mathcal{M}$ por conta de sua definição. E se $\mathcal{M} \notin \mathcal{M}$, então $\mathcal{M} \in \mathcal{M}$ também por causa de sua definição. Isso é uma contradição, pois, no sentido da lógica binária, não tem como uma verdade e uma mentira ocorrerem ao mesmo tempo, ou uma coisa é ou não é. Essa contradição pode ser interpretada a partir do Paradoxo do Barbeiro.

3 Conjunto unitário e conjunto vazio

Podemos ter conjuntos os quais possuem um único elemento, esses são chamados de conjunto unitário.

Exemplo 3. *1.* $\mathbf{H} = \{0\}$

2. $\mathcal{J} = \{-10^6\}$

3. $D = \{n \in \mathbb{Z}; n \text{ é primo e par}\}$

Um conjunto que não possui nenhum elemento é chamado de conjunto vazio e é representado por $\varnothing$.

Exemplo 4. *1.* $A = \{a \in \mathbb{Z}; a \text{ é par e ímpar}\}$

2. $M = \{x \in \mathbb{R}; x = \sqrt{-y}, y \in \mathbb{R}_+^*\}$

4 Inclusão

Dado um conjunto A é possível formar um novo conjunto B com elementos do conjunto A. Dessa forma, B é um subconjunto de A e representamos essa relação por $A \subset B$, lê-se "A está contido em B", por ou $A \supset B$, lê-se "A contém B. Se existir pelo menos um elemento em B que não pertence ao conjunto A, então B não é subconjutno de A e denotamos por $B \not\subset A$ ou $A \not\supset B$.

Definição 1. *$B \subset A$ se, e somente se, todo elemento de B pertence ao conjunto A.*

Definição 2. *$B \not\subset A$ se, e somente se, existe pelo menos um elemento de B que não pertence ao conjunto A.*

Exemplo 5. *Sendo* $A = \{1, 2, 5, -12, 0\}$ *assinale V para verdadeiro ou F para falso.*

1. $1 \in A$(V)
2. $10^3 \in A$(F)
3. $\{-1, 2, 5, 0\} \subset A$(F)
4. $\{0, 2, \} \subset A$(V)
5. $\{1, 3, 2, 5\} \not\subset A$(V)

Axioma 1 (axioma da extensão)**.** *Dizemos que dois conjuntos são iguais se, e somente se, possuem os mesmo elementos.*

Exemplo 6. *Sejam* $R = \{0, 1, 2, 3\}, S = \{1, 2, 3\}$ *e* $T = \{3, 2, 1, 0\}$*. Assinale V para verdadeiro ou F para falso.*

1. $R = S$(F)
2. $T \neq S$(V)
3. $S = R$(F)
4. $T = R$(V)

5 Operações entre conjuntos

Os conjuntos podem ser combinados de certa maneira para formar novos conjuntos. Se A e B são conjuntos, então a intersecção de A e B é um novo conjunto o qual possui como elementos aqueles que estão tanto em A quanto em B simultaneamente. Denotamos a intersecção de A e B por $A \cap B$.

Definição 3. $A \cap B = \{x; x \in A \text{ } e \text{ } x \in B\}$

A união de A e B é um novo conjunto o qual possui tanto os elementos de A quanto os de B, denotamos por $A \cup B$.

Definição 4. $A \cup B = \{x; x \in A \text{ } ou \text{ } x \in B\}$

A diferença de A por B é o conjunto dos elementos que pertencem ao A e não pertencem ao B, ou seja, retiramos de A os elementos que pertencem ao B e ficamos somente com aqueles que pertencem exclusivamente ao conjunto A. Denotamos por $A - B$.

Definição 5. $A - B = \{x; x \in A \text{ } e \text{ } x \notin B\}$

Exemplo 7. *Sendo* $J = \{1, 3, 5, 7\}, K = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ *e* $L = \{9, 10, 11\}$ *determine:*

1. $J \cap K$
2. $K \cup L$
3. $K - J$
4. $L - J$
5. $L \cap K$