

Funções: constante, identidade e afim

Almir Junior

Julho

Comentário 1. Para um melhor entendimento do conteúdo, sugiro esboçar todos os gráficos em <https://www.geogebra.org/calculator>.

Definição 1. Seja $f : A \rightarrow B$ uma função. Dizemos que f é uma função real de variável real quando $A, B \subseteq \mathbb{R}$.

Definição 2. Uma aplicação $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada de função constante quando $x \mapsto f(x) = k$, isto é, para todo $x \in \mathbb{R}$ tem-se $f(x) = k$, onde k é um número real fixo (esboce o gráfico).

Exemplo 1. Considere a função $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de forma que $x \mapsto g(x) = 9$.

Exemplo 2. Considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de forma que $x \mapsto f(x) = -22/7$.

Definição 3. Uma aplicação $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada de função Identidade quando $x \mapsto f(x) = x$, ou seja, para todo $x \in \mathbb{R}$ tem-se $f(x) = x$.

Definição 4. Seja $f : A \rightarrow B$. Dizemos que f é crescente quando para todo $x_1, x_2 \in A$ com $x_1 < x_2$ tivermos $f(x_1) < f(x_2)$.

Definição 5. Seja $f : A \rightarrow B$. Dizemos que f é decrescente quando para todo $x_1, x_2 \in A$ com $x_1 < x_2$ tivermos $f(x_1) > f(x_2)$.

Definição 6. Uma aplicação $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ recebe o nome de função afim quando $x \mapsto f(x) = ax + b$ onde $a, b \in \mathbb{R}$ são fixos com $a \neq 0$.

Exemplo 3. 1. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ com $f(x) = -4x + 9$

2. $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ com $\varphi(x) = x - \sqrt{2}$

3. $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ com $r(x) = \frac{3x}{2} + 5$

Proposição 1. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ um função afim $f(x) = ax + b$. Se $a > 0$, então f é crescente. Se $a < 0$, então f é decrescente.

Demonstração. Primeiro considere $0 < a$. Tome $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ arbitrários tais que $x_1 < x_2$, assim:

$$x_1 < x_2 \implies ax_1 < ax_2 \implies ax_1 + b < ax_2 + b \implies f(x_1) < f(x_2).$$

Agora considere $a < 0$ e, novamente, tome $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ arbitrários tais que $x_1 < x_2$, daí:

$$x_1 < x_2 \implies ax_1 > ax_2 \implies ax_1 + b > ax_2 + b \implies f(x_1) > f(x_2).$$

□

Proposição 2. *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ um função afim $f(x) = ax + b$. Então o coeficiente b é o ponto no qual o gráfico de f intersecta o eixo $-y$.*

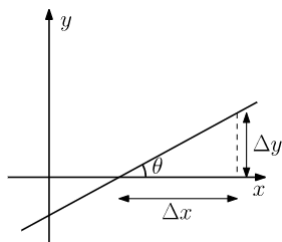
Demonstração. Para achar o valor de $y \in \mathbb{R}$ para o qual o gráfico de f intersecta o eixo- y basta tomar $x = 0$. Fazendo isso temos:

$$f(0) = a0 + b \implies f(0) = b$$

□

Proposição 3. *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ um função afim $f(x) = ax + b$. O coeficiente a é a tangente do gráfico de f em relação ao eixo $-x$.*

Demonstração. Considere a imagem abaixo:



Temos que o cateto oposto a θ é dado por $\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$ e o adjacente por $\Delta x = x_2 - x_1$. Assim pelas relações trigonométricas temos que:

$$\tan \theta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}. \quad (1)$$

Temos também que $f(x_2) = ax_2 + b$ e $f(x_1) = ax_1 + b$, com isso obtemos o sistema:

$$\begin{cases} f(x_2) &= ax_2 + b \\ f(x_1) &= ax_1 + b \end{cases}$$

Subtraindo a segunda equação da primeira obtemos:

$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) &= ax_2 + b - ax_1 - b \implies f(x_2) - f(x_1) = a(x_2 - x_1) \\ &\implies \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = a. \end{aligned} \quad (2)$$

Portanto, de (1) e (2) temos que $a = \tan \theta$

□

Observação 1. Tomar números arbitrários é o mesmo que pegar qualquer um do conjunto contanto que satisfaçam a relação desejada. O fato de $a > 0$ e $a < 0$ interfere na multiplicação feita na desigualdade $x_1 < x_2$, o que implica direto na demonstração.

Exercício 1. ENEM Por muitos anos, o Brasil tem figurado no cenário mundial entre os maiores produtores e exportadores de soja. Entre os anos de 2010 e 2014, houve uma forte tendência de aumento da produtividade, porém, um aspecto dificultou esse avanço: o alto custo do imposto ao produtor associado ao baixo preço de venda do produto. Em média, um produtor gastava 1200 reais por hectare plantado, e vendia por 50 reais cada saca de 60 kg. Ciente desses valores, um produtor pode, em certo ano, determinar uma relação do lucro L que obteve em função das sacas de 60 kg vendidas. Suponha que ele plantou 10 hectares de soja em sua propriedade, na qual colheu x sacas de 60 kg e todas as sacas foram vendidas. Qual é a expressão que determinou o lucro L em função de x obtido por esse produtor nesse ano?

(a) $L(x) = 50x - 1200$

(b) $L(x) = 50x - 12000$

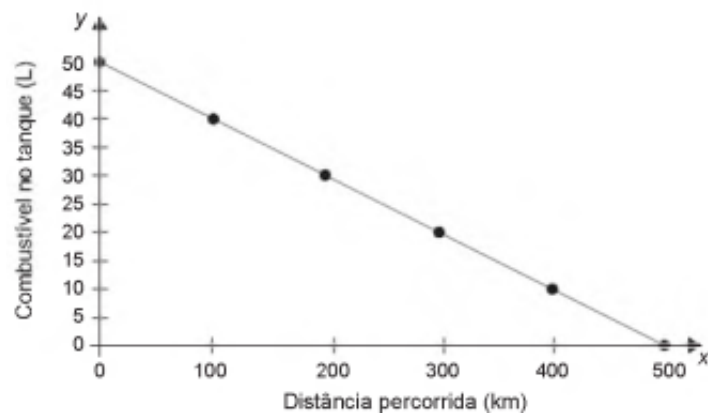
(c) $L(x) = 50x + 12000$

(d) $L(x) = 500x - 1200$

(e) $L(x) = 1200x - 500$

Solução. Sabemos que o lucro é a diferença do custo com o valor da venda. Segundo o enunciado, o produtor gasta 1200 por hectare plantado (custo) e "ele plantou 10 hectares de soja em sua propriedade". Então ele teve um custo de 12000 nesses 10 hectares. Também sabemos que ele vende cada saca por 50 reais. Então, a função L , que recebe como argumento quantidades de saca e devolve valores em reais, deve descontar o valor de custo (12000) que o vendedor teve em relação a esses 10 hectares, ou seja, deve ter em sua lei o -12000 . E como cada saca é vendida por 50 reais, o x que aparece na lei da função deve estar multiplicado por 50. Portanto ficamos com a alternativa (b). \square

Exercício 2. ENEM Uma indústria automobilística está testando um novo modelo de carro. Cinquenta litros de combustível são colocados no tanque desse carro, que é dirigido em uma pista de testes até que todo o combustível tenha sido consumido. O segmento de reta no gráfico mostra o resultado desse teste, no qual a quantidade de combustível no tanque é indicada no eixo- y (vertical), e a distância percorrida pelo automóvel é indicada no eixo- x (horizontal). A expressão algébrica que relaciona a quantidade de combustível no tanque e a distância percorrida pelo automóvel é:



(a) $y = -10x + 500$

(b) $y = -\frac{x}{10} + 50$

(c) $y = -\frac{x}{10} + 500$

(d) $y = \frac{x}{10} + 50$

(e) $y = \frac{x}{10} + 500$

Solução. Analisando o gráfico, temos que a reta é decrescente, logo a lei da função deve possuir coeficiente angular negativo. O ponto de intersecção do gráfico com o *eixo-y* é $(0, 50)$, logo devemos ter o coeficiente linear igual a 50. Também temos que a raiz da função é $x = 500$, ou seja: $f(x) = 0$ quando $x = 500$. Juntando essas informações, ficamos com a alternativa (b).

□