Função exponencial

Almir Junior

Agosto 2021

1 Expoente real

Seja $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Considere os conjuntos:

$$S_\alpha = \{s \in \mathbb{Q} : s < \alpha\} \qquad \text{e} \qquad I_\alpha = \{i \in \mathbb{Q} : \alpha < i\}.$$

α é o único elemento tal que $s < \alpha < i$ para quais quer $s \in S_\alpha$ e $i \in I_\alpha$.

Dado $a \in \mathbb{R}$ com $0 < a \neq 1$, considere, para todo $s \in S_\alpha$ e $i \in I_\alpha$, a desigualdade:

$$a^s < a^\alpha < a^i.$$

Chamamos a^s de aproximação por falta e a^i de aproximação por excesso. E temos que o número a^α está bem definido desde que α está bem definido.

2 Função exponencial

Definição 1. *Seja $a \in \mathbb{R}$ tal que $0 < a \neq 1$. Chamamos de função exponencial de base a a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = a^x$.*

Exemplo 1. $f(x) = 2^x$

Exemplo 2. $g(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$

Exemplo 3. $h(x) = (\sqrt{3})^x$

Observação 1. *A função exponencial não possui raiz real, desde que para qualquer $a \in \mathbb{R}$ não nulo não existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $a^x = 0$*

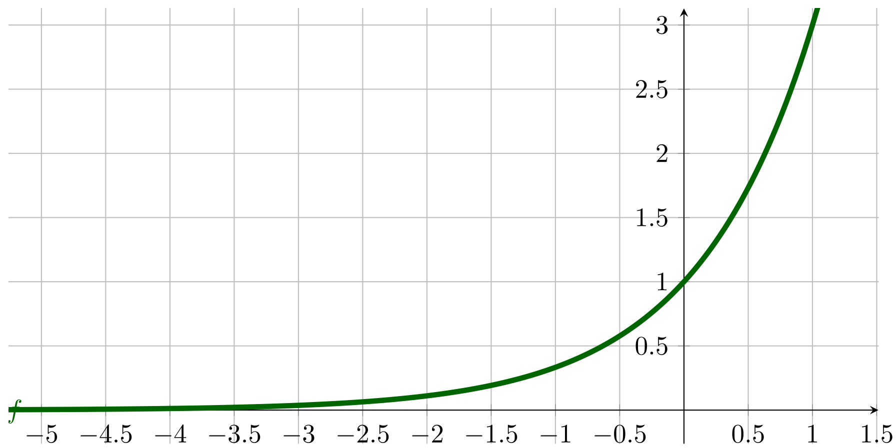
Proposição 1. *Seja $a \in \mathbb{R}$ tal que $0 < a \neq 1$ e considere a função $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $x \mapsto \exp(x) = a^x$. Então,*

1. $f(0) = 1$
2. $f(x + y) = f(x)f(y)$
3. $f(x - y) = \frac{f(x)}{f(y)}$

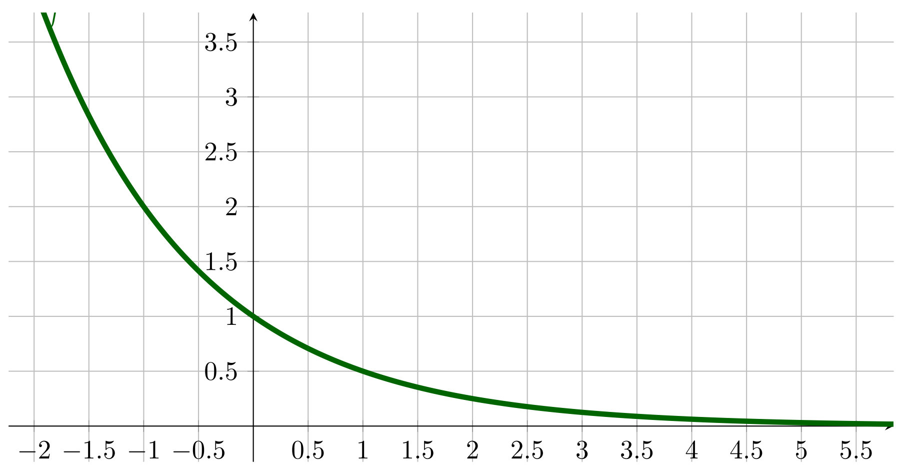
Proposição 2. *Se $1 < a$, então a função exponencial de base a é crescente.*

Proposição 3. *Se $0 < a < 1$, então a função exponencial de base a é decrescente.*

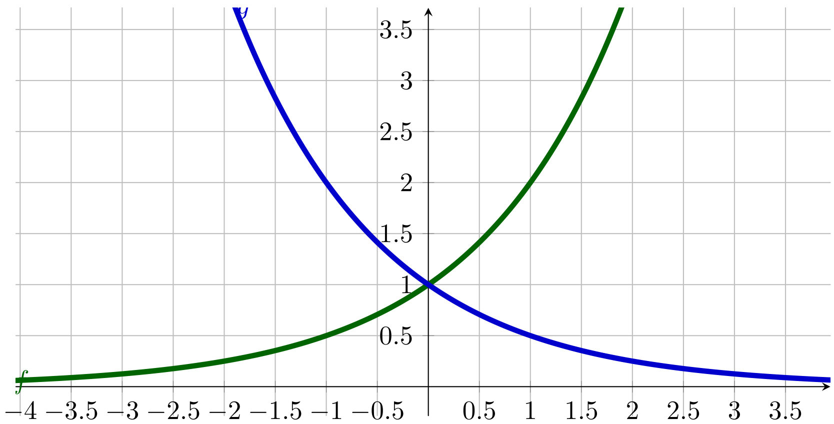
Exemplo 4. $f(x) = 3^x$



Exemplo 5. $f(x) = (1/2)^x$



Exemplo 6. *A funçãoexponencial é injetiva. De fato, se cada uma das retas cortar o gráfico em um só ponto ou em nenhum, então a função é injetiva, e isso acontece com o gráfico da função em questão:*



3 Constante e de Euler

O número de Euler é irracional e é dado por:

$$e = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}.$$

Assim, e possui infinitas dígitos decimais diferentes de zero:

$$e = 2,718\ 281\ 828\ 459\ 045\ 235\ 360...$$

4 Função exponencial de base e

Definição 2. *A função exponencial de base e é o mapa* $\exp:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *dado por* $\exp(x) = e^x$.

Comentário 1. *Em particular, a* ***Proposição*** *é válida para a função* exp.

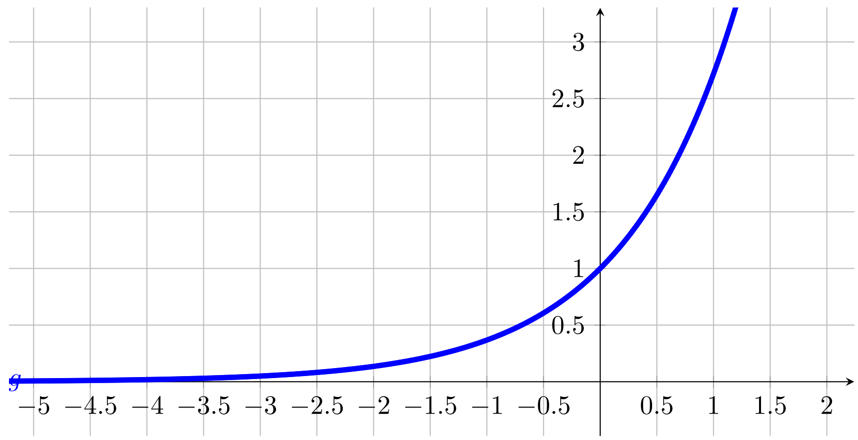
Proposição 4. *Considere a função* $\exp:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *com* $x\mapsto\exp(x)=e^x$. *Assim,*

1. $\exp(0) = 1$
2. $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$
3. $exp(x-y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$

Exemplo 7. 1. $\exp(3)\exp(2) = \exp(3+2) = \exp(5)$

2. $\frac{\exp(9)}{\exp(9)} = \exp(9-9) = \exp(0) = 1$

O gráfico de $\exp(x) = e^x$ é:



5 Equação Exponencial

Definição 3. *Equações exoponenciais são igualdades com icógnita no expoente.*

Exemplo 8. $11^{2x+5} = 0$

Exemplo 9. $8^{x^2-x} = 4^{x+1}$

6 Método de redução a uma base comum

Seja $a \in \mathbb{R}$ tal que $1 < a \neq 0$. Assim, temos

$$a^r = a^s \iff r = s$$

Exercício 1. *ENEM Enquanto um ser está vivo, a quantidade de carbono* 14 *nele existente não se altera. Quando ele morre, essa quantidade vai diminuindo. Sabe-se que a meia-vida do carbono* 14 *é de* 5 730 *anos, ou seja, num fóssil de um organismo que morreu há* 5 730 *anos haverá metade do carbono* 14 *que existia quando ele estava vivo. Assim, cientistas e arqueólogos usam a seguinte fórmula para saber a idade de um fóssil encontrado:* $Q(t) = Q_0 \cdot 2^{-t/5730}$ *em que* t *é o tempo, medido em ano,* $Q(t)$ *é a quantidade de carbono* 14 *medida no instante* t *e* Q_0 *é a quantidade de carbono* 14 *no ser vivo correspondente. Um grupo de arqueólogos, numa de suas expedições, encontrou* 5 *fósseis de espécies conhecidas e mediram a quantidade de carbono* 14 *neles existente. Na tabela temos esses valores juntamente com a quantidade de carbono* 14 *nas referidas espécies vivas.*

Fóssil	Q_0	$Q(t)$
1	128	32
2	256	8
3	512	64
4	1 024	512
5	2 048	128

O fóssil mais antigo encontrado nessa expedição foi:

(a) 1.

(b) 2.

(c) 3.

(d) 4.

(e) 5.

Resolução. A partir do enunciado temos:

$$Q(t) = Q_o 2^{-\frac{t}{5730}} \implies \frac{Q(t)}{Q_0} = 2^{-\frac{t}{5730}}. \tag{1}$$

Analisando a tabela, vemos que para cada fóssil Q_0 é uma potência de base 2, assim como $Q(t)$. Então, utlizando (1), para cada fóssil temos:

$$\begin{aligned}
(1) : \frac{32}{128} = 2^{-\frac{t}{5730}} &\implies 2^{-2} = 2^{-\frac{t}{5730}} \implies -2 = -\frac{t}{5730} \implies t = 11460 \\
(2) : \frac{8}{256} = 2^{-\frac{t}{5730}} &\implies 2^{-5} = 2^{-\frac{t}{5730}} \implies -5 = -\frac{t}{5730} \implies t = 28650 \\
(3) : \frac{64}{512} = 2^{-\frac{t}{5730}} &\implies 2^{-3} = 2^{-\frac{t}{5730}} \implies -3 = -\frac{t}{5730} \implies t = 17190 \\
(4) : \frac{512}{1024} = 2^{-\frac{t}{5730}} &\implies 2^{-1} = 2^{-\frac{t}{5730}} \implies -1 = -\frac{t}{5730} \implies t = 5730 \\
(5) : \frac{128}{2048} = 2^{-\frac{t}{5730}} &\implies 2^{-4} = 2^{-\frac{t}{5730}} \implies -4 = -\frac{t}{5730} \implies t = 22920.
\end{aligned}$$

Portanto a alternativa correta é a (b). $\square$