Inequações

Almir Junior

Julho

Comentário 1. *Para um melhor entendimento do conteúdo, sugiro esboçar todos os gráficos e fazer o produto dos sinais.*

Definição 1. *Sejam $g, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções, podendo ser uma delas a função constante. Chamamos de inequação na variável x qualquer uma das expressões abaixo:*

- $f(x) < g(x)$
- $f(x) > g(x)$
- $f(x) \geq g(x)$
- $f(x) \leq g(x)$

onde $k \in \mathbb{R}$.

Exemplo 1. $5x + 9 < 0$

Exemplo 2. $\frac{2x}{7} > x^2 + x$

Exemplo 3. $\sqrt{2}x + 2 \leq 2x$

Exemplo 4. $13x^2 \geq 17x^2 - 9$

Comentário 2. *Resolver as inequações dos exemplos acima significa encontrar os valores de $x \in \mathbb{R}$ para os quais a expressão é válida. Graficamente, na expressão $f(x) < g(x)$, queremos encontrar os valores de $x \in \mathbb{R}$ para os quais o gráfico da função $f(x)$ está abaixo do gráfico de $g(x)$.*

Definição 2. *O conjunto solução S de uma inequação é o conjunto dos valores $x \in \mathbb{R}$ para os quais a inequação é satisfeita.*

Proposição 1. *Princípio de Equivalência 1 Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Se $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, então:*

$$f(x) < g(x) \iff f(x) \pm h(x) < g(x) \pm h(x)$$

Proposição 2. *Princípio de Equivalência 2 Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Se $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, possui sinal constante, então:*

1. *Se* $h(x) > 0 : f(x) < g(x) \iff h(x)f(x) < h(x)g(x)$
2. *Se* $h(x) < 0 : f(x) < g(x) \iff h(x)f(x) > h(x)g(x)$

Comentário 3. *Note que no* ***Princípio de Equivalência 2*** *podemos tomar* $h(x) = 1/g(x)$ *tomando os cuidados necessário em relação a* $g(x)$. *Assim é possível fazer divisão numa inequação.*

Exercício 1. *Sejam* $f, g, h, i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *com* $f(x) = 6x^2 + 5x + 1, g(x) = 2x - 1, h(x) = 3x+2$ *e* $i(x) = -5x+4$. *Resolva a inequação:* $f(x) \leq g(x)h(x) - i(x)$.

Demonstração. Solução Substituindo as expressões das funções na equação obtemos:

$$\begin{aligned} & 6x^2 + 5x + 1 \leq (2x-1)(3x+2) - (-5x+4) \\ \implies & 6x^2 + 5x + 1 \leq 6x^2 - x - 2 + 5x - 4 = 6x^2 + 4x - 6 \\ & \implies x \leq -7 \end{aligned}$$

Portanto o conjunto solução é $S = \{x \in \mathbb{R}; x \leq -7\}$ □

Definição 3. *Duas inequações são equivalentes quando seus conjuntos soluções são iguais.*

Exemplo 5. *Temos* $3x - 1 > 0 \iff 9x - 3 > 0$, *pois para ambos os casos obtemos o conjunto solução igual a* $\{x \in \mathbb{R}; x > 1/3\}$.

Exemplo 6. *Temos que* $5x^2 - 25 < 0 \iff x^2 - 5$, *porque nos dois casos o conjunto solução é* $\{x \in \mathbb{R}; x = \pm\sqrt{5}\}$.

Definição 4. *Sejam* $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *funções. Denominamos por inequação produto as inequações:*

- $f(x)g(x) > 0$
- $f(x)g(x) < 0$
- $f(x)g(x) \geq 0$
- $f(x)g(x) \leq 0$

Exemplo 7. $(x+2)(x-1) < 0$

Exemplo 8. $(x^2 + 4x - 1)(2x+3) \geq 0$

Exemplo 9. $(2x^2 - x)(x+9) \leq 0$

Exercício 2. *FGV Determine os valores reais de* $x \in \mathbb{R}$ *para os quais* $(x^2 - 8x + 12)(x^2 - 5x) < 0$.

Demonstração. Solução Sejam $f(x) = x^2 - 8x + 12$ e $g(x) = x^2 - 5x$. Assim temos que $f(x) = 0$ quando $x = 6$ ou $x = 2$, e $g(x) = 0$ quando $x = 0$ ou $x = 5$. Fazendo o produto dos sinais obtemos o conjunto solução $S = (-\infty, 0) \cup (2, 5) \cup (6, \infty)$. □

Definição 5. *Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções. Denominamos por inequação quociente as inequações:*

- $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$
- $\frac{f(x)}{g(x)} < 0$
- $\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0$
- $\frac{f(x)}{g(x)} \leq 0$

Exemplo 10. $\frac{x+1}{x-1} < -3$

Exemplo 11. $\frac{x^2-4}{x^2} \geq 0$

Exemplo 12. $\frac{5x^2-3}{x+8} \leq 6$

Exercício 3. *Resolva a inequação $\frac{x^2}{x} < -1$ em $\mathbb{R}$.*

Demonstração. Solução Pelos Princípio de Equivalência obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{x} < -1 &\implies \frac{x^2}{x} + 1 < 0 \\ &\implies \frac{x^2 + x}{x} < 0 \end{aligned}$$

Sejam $f(x) = x^2 + x$ e $g(x) = x$. Temos que $f(x) = 0$ quando $x = 0$ ou $x = -1$, e $g(x) = 0$ quando $x = 0$. Daí fazendo o produto dos sinais obtemos o conjuntos solução $S = (-\infty, -1)$. □

Exercício 4. *UFJF Os valores de $x \in \mathbb{R}$ que satisfazem a inequação $\frac{x^2-2x-3}{x-2} \geq 0$ são:*

a $[-1, 2] \cup [3, \infty[$

b $[-1, 2] \cup]3, \infty[$

c $[1, 3]$

d $[-3, 2[$

e $[-3, -2] \cup]2, \infty[$

Demonstração. Solução Sejam $f(x) = x^2 - 2x - 3$ e $g(x) = x - 2$. Temos que $f(x) = 0$ quando $x = -1$ ou $x = 3$, e $g(x) = 0$ quando $x = 2$. Daí fazendo o produto dos sinais obtemos o conjuntos solução $S = [-1, -2] \cup [3.\infty)$.

□