Equação do 1º e 2º grau

Almir Junior

Abril de 2022

1 Equação do 1º grau

Definição 1. *Sejam* $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$. *Uma equação do primeiro grau é uma expressão da forma*

$$ax + b = 0.$$

Exemplo 1. *(a)* $2x + 1 = 0$

(b) $x - 1 = 0$

(c) $\pi x + \sqrt{3} = 0$

Comentário 1. *O nome primeiro grau refere-se ao maoir expoente da variável* x. *Também podemos chamar essas expressões de equações lineares.*

Solucionar uma equação é encontrar um elemento $x \in \mathbb{R}$ que satisfaça a igualdade ao ser substituido na equação.

Exemplo 2. *(a)* $2x + 1 = 0$
Se substituirmos x *por* $-\frac{1}{2}$, *obtemos:*

$$2\left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = -1 + 1 = 0$$

Ou seja, a igualdade é verdadeira para $x = \frac{1}{2}$. *Portanto,* $x = -\frac{1}{2}$ *é solução da equação* $2x + 1 = 0$. *Assim, o conjunto solução é* $S = \{x \in \mathbb{R}; x = -\frac{1}{2}\}$.

A solução geral de um equação do 1º grau $ax + b = 0$ é dada por

$$ax + b = 0 \implies ax = -b \implies x = -\frac{b}{a}$$

Exemplo 3 ((a))**.**
$4x - 3 = 0 \implies x = \frac{3}{4}$
$\pi x + \sqrt{3} = 0 \implies x = -\frac{\sqrt{3}}{\pi}$

2 Produto de expressões do 1º grau

Dada a equação $(x-a)(x-b)=0$ em $\mathbb{R}$, devemos ter $x-a=0$ ou $x-b=0$, ou seja, ou $x=a$ ou $x=b$. Isso decorre de, dados $a,b\in\mathbb{R}$, se $ab=0$ então necessariamente $a=0$ ou $b=0$.

Exemplo 4. *(a)* $(x+3)(x-\sqrt{5})=0 \implies x=-3$ *ou* $x=\sqrt{5}$.

(b) $(2-5y)(y+1)=0 \implies y=\frac{2}{5}$ *ou* $y=-1$

Comentário 2. *Veja que* $(x-a)(x-b)=0$ *implica em* $x^2-x(a+b)+ab=0$ *ao aplicar a distributiva no lado esquerdo da igualdade. Portanto, nesse caso estamos lidando com uma maneira de resolver equações do 2º grau e como as raízes são* $x=a$ *ou* $x=b$ *segue que o coeficiente que multiplica* x *é igual a soma das raízes* $a+b$ *e a constante é igual ao produto das raízes* ab.

3 Equações do 2º grau

Definição 2. *Sejam* $a,b\in\mathbb{R}, a\neq 0$. *Uma equação do 2º grau é uma expressão da forma* $ax^2+bx+c=0$.

Existem algumas maneiras de resolver equações de grau 2. Uma delas é fatorar a expressão a fim de deixá-la como $n(x-m)(x-k)=0$. Assim, a partir do que foi discutido acima, sabemos que as raízes para essa equação é $x=m$ ou $x=k$. Se a equação for da forma $x^2+bx+c=0$ pelo último comentário, sabemos que b é a soma das raízes e c é o produto das raízes.

Exemplo 5. *(a)* $x^2-7x+10=0$

Ora, como $10=2\times 5$ *e* $7=5+2$, *segue que* $x=5$ *ou* $x=2$.

(b) $x^2+6x+9=0$

Note que o coeficiente que multiplica x *está positivo, então devemos observar para* $x^2-(-6)x+9=0$. *Como* $9=(-3)^2$ *e* $-6=-3-3$, *logo* $x=-3$.

Em suma, podemos fatorar expressões do 2º grau como produto de duas expressões do 1º grau para localizar suas raízes.

Exemplo 6. *(a)* $8x^2+6x+1=0$

$8x^2+6x$	$+1=0$
2	1
4	1

O produto dos números 2 e 4 na da coluna direita tem que resultar no coeficiente de x^2, *ou seja, 8. Na coluna do esquero, o produto dos dois números 1 e 1 tem que resultar na constante que é 1. Agora multiplicando em xis e somando os resultados dessa multiplicação devemos obter o valor da constante multiplicando* x, *ou seja, 6. De fato,* $2\times1+4\times1=6$. *Portanto* *a primeira linha corresponde a um dos fatores e a segunda linha ao outro, assim* $(2x+1)(4x+1)$ *é a fatoração de* $8x^2+6x+1=0$. *Logo, as raízes são* $x=-1/2$ *ou* $x=-1/4$.

Comentário 3. *Nem sempre essas duas técnicas para resolver equações do segundo grau são favoráveis. Portanto precisamos de uma maneira mais forte de encontrar as raízes desse tipo de equação.*

Uma outra maneira de encontrar as raízes de um equação de grau 2 é utilizar o método de completar quadrados. Vamos ver alguns exemplos.

Exemplo 7. *(a)* $x^2-6x+6=0$
Como $x^2-6x+6=x^2-2.3x+9-2$ *podemos reescrever nossa equação como* $x^2-2.3x+9-2=0$. *Disso segue que:*

$$\begin{aligned} x^2-2.3x+9-2&=0\\ \Longrightarrow\ x^2-2.3x+9&=2\\ \Longrightarrow\ (x-3)^2&=2\\ \Longrightarrow\ x-3&=\pm\sqrt{2}\\ \Longrightarrow\ x&=3\pm\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Portanto, $x=3+\sqrt{2}$ *ou* $x=3-\sqrt{2}$.

(b) $x^2+14x+5=0$
Como $x^2+14x+5=x^2+2.7x+49-44$ *podemos reescrever nossa equação como* $x^2+2.7x+49-44=0$. *Disso segue que:*

$$\begin{aligned} x^2+2.7x+49-44&=0\\ \Longrightarrow\ (x+7)^2-44&=0\\ \Longrightarrow\ (x+7)^2&=44\\ \Longrightarrow\ x+7=\pm\sqrt{44}&=\pm2\sqrt{11}\\ \Longrightarrow\ x&=-7\pm2\sqrt{11}. \end{aligned}$$

Portanto, $x=-7+2\sqrt{11}$ *ou* $x=-7-2\sqrt{11}$.

(c) $x^2+12x+38=0$
Como $x^2+12x+38=x^2+2.6x+36+2$ *podemos reescrever nossa equação como* $x^2+2.6x+36+2=0$. *Disso segue que:*

$$\begin{aligned} x^2+2.6x+36+2&=0\\ \Longrightarrow\ (x+6)^2+2&=0\\ \Longrightarrow\ (x+6)^2&=-2\\ \Longrightarrow\ x+6&=\pm\sqrt{-2}. \end{aligned}$$

Ora, $\sqrt{-2}\notin\mathbb{R}$. *Portanto, não existe solução real para equação.*

4 Fórmula de Báscara

Proposição 1 (Fórmula de Báscara)**.** *Seja $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$. Então as soluções da equação $ax^2 + bx + c = 0$ são dadas por*

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Demonstração. Como $a \neq 0$, temos

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a}\right) = 0$$

Então $a = 0$ ou $x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0$. Mas como $a \neq 0$, segue que $x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0$. Assim, utilizando o método de completar quadrados, obtemos

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = x^2 + 2x\frac{b}{2a} + \frac{c}{a} &= 0 \\ \implies x^2 + 2x\frac{b}{2a} + \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} &= \frac{b^2}{4a^2} \\ \implies x^2 + 2x\frac{b}{2a} + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} &= \frac{b^2}{4a^2} - \frac{4ac}{4a^2} \\ \implies \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \\ \implies x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} &= \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ \implies x = -\frac{b}{2a} &\pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ \implies x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}&. \end{aligned}$$

□

Exemplo 8. *(a)* $x^2 + 2x + 1 = 0$

Pela fórmula obtemos:

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \times 1 \times 1}}{2 \times 1} = \frac{-2}{2} = -1.$$

Portanto, $x = -1$.

(b) $3x^2 - 7x + 3 = 0$

$$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \times 3 \times 3}}{2 \times 3} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 36}}{6} = \frac{7 \pm \sqrt{13}}{6}.$$

Portanto, $x = \frac{7+\sqrt{13}}{6}$ ou $x = \frac{7-\sqrt{13}}{6}$.