Função Modular

Almir Junior

Agosto

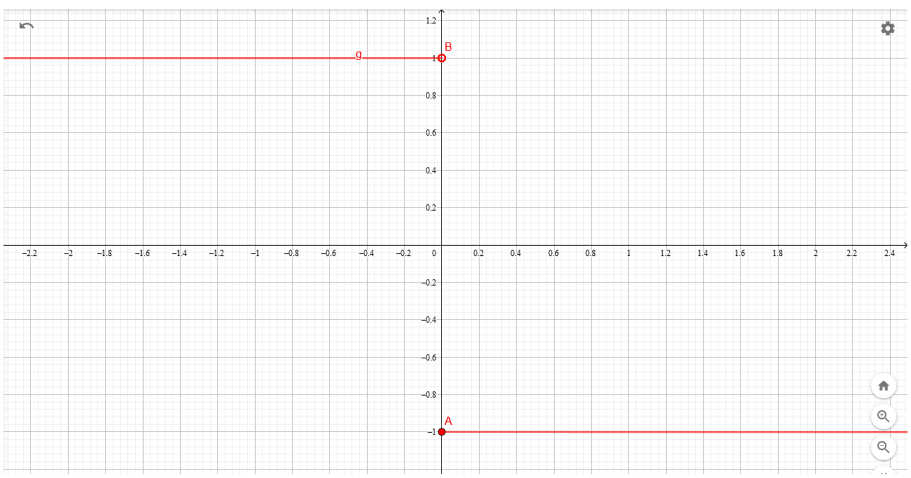
1 Função definida por sentenças abertas

Uma função $f : A \to B$ pode ser definida por algumas sentenças, onde cada uma está ligada a um sobconjunto do domínio A da função f.

Exemplo 1. *Considere $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por:*

$$g(x) = \begin{cases} 1 & se\ x < 0 \\ -1 & se\ 0 \leq x \end{cases}$$

Então a função é dada pela sentença $g(x) = 1$ quando $x < 0$, ou seja, no subconjunto $(-\infty, 0)$ de $\mathbb{R}$ a função g é uma função constante igual a 1. E $g(x) = -1$ quando $0 \leq x$, isto é, no subconjunto $[0, \infty)$ a função g é uma função constante igual a -1. A função g possui o seguinte gráfico:

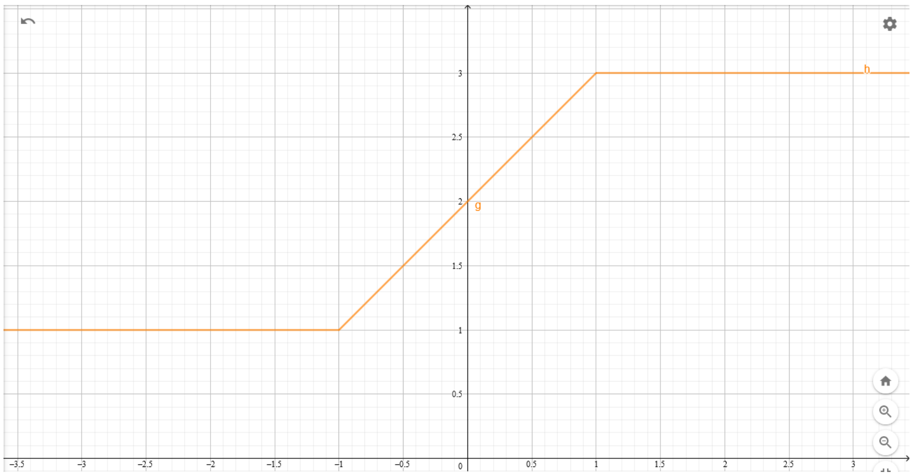


Note que, pela definição de g, temos $g(0) = -1$, e então o ponto A pertence ao gráfico da função mas o ponto B não pertence ao gráfico.

Exemplo 2. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como:*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & se\ x < -1 \\ x + 2 & se\ -1 \leq x < 1 \\ 3 & se\ 1 \leq x \end{cases}$$

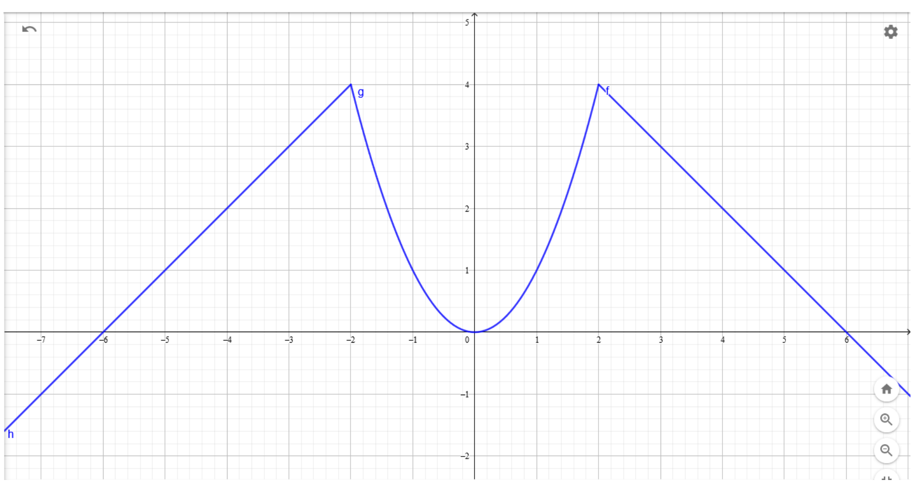
O gráfico de f é o seguinte:



Exemplo 3. *Seja $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por:*

$$h(x) = \begin{cases} -x+6 & se\ x \leq -2 \\ x^2 & se\ -2 < x \leq 2 \\ x+6 & se\ 2 < x \end{cases}$$

O gráfico de h é:



2 Módulo

Definição 1. *Seja $x \in \mathbb{R}$, define-se o módulo de x ou valor absoluto de x pela seguinte relação:*

$$|x| = \begin{cases} x & se\ 0 \leq x \\ -x & se\ x < 0 \end{cases}$$

Exemplo 4. $|5| = 5$ *pois* $0 \leq 5$.

Exemplo 5. $|-1| = 1$ *pois* $-1 < 0$.

Exemplo 6. $|0| = 0$ *pois* $0 \leq 0$.

Exemplo 7. $|-\sqrt{2}| = \sqrt{2}$ *pois* $-\sqrt{2} < 0$.

Exemplo 8. $|\pi| = \pi$ *pois* $0 < \pi$.

Proposição 1. *As seguintes propriedades decorrem da definição:*

1. $0 \leq |x|, \forall x \in \mathbb{R}$
2. $|x| = 0 \iff x = 0$
3. $|x||y| = |xy|$
4. $|x| = x^2, \forall x \in \mathbb{R}$
5. $x \leq |x|, \forall x \in \mathbb{R}$
6. $|x + y| \leq |x| + |y|$
7. $|x| \leq r \iff -r \leq x \leq r$
8. $|x| \geq r, 0 < r, \iff x \leq -r$ *ou* $r \leq x$

Demonstração. Vamos demonstrar cada uma das propriedades.

1. Se tivermos $x < 0$, então $|x| = -x > 0$. Se $0 \leq x$, temos $|x| = x \geq 0$. Portanto $0 \leq |x|$.

2. ($\Rightarrow$) Se $|x| = 0$, então devemos ter $0 \leq x$, senão teríamos $x < 0$ que implica em $|x| = -x > 0$. Agora, se $x > 0$, teríamos $|x| = x > 0$. Portanto, devemos ter $|x| = 0$. ($\Leftarrow$) Se $x = 0$, então $0 \leq x$, logo $|x| = x = 0$.

3. Vamos analisar cada possibilidade para x e y. Se $0 \leq x$ e $0 \leq y$, então $0 \leq xy$. Daí $|x| = x, |y| = y$ e $|xy| = xy$, logo $|x||y| = xy$ e $|xy| = xy$. Portanto $|x||y| = |xy|$.
   Se $x < 0$ e $y < 0$, então $0 < xy$. Daí temos $|x| = -x, |y| = -y$ e $|xy| = xy$, logo $|x||y| = (-x)(-y) = xy$ e $|xy| = xy$. Portanto $|x||y| = |xy|$.
   Se $x < 0$ e $0 \leq y$, então $xy \leq 0$. Daí $|x| = -x, |y| = y$ e $|xy| = -xy$, logo $|x||y| = -xy$ e $|xy| = -xy$. Portanto $|x||y| = |xy|$. O caso $0 \leq x$ e $y < 0$ é análogo.

4. Vamos analisar os casos. Se $0leqx$, então $|x| = x$, logo $|x|^2 = x^2$. Se $x < 0$, então $|x| = -x$, logo $|x|^2 = (-x)^2 = x^2$. Portanto, $|x|^2 = x^2$.

5. Analisando os casos, temos: se $x < 0$, então $|x| = -x > 0$, logo $x \leq |x|$. Se $0 \leq x$, então $|x| = x \geq x$. Portanto $x \leq |x|$.

6. Utilizando a parte 4 temos que $|x+y|^2 = (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \leq |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = (|x|+|y|)^2$, logo $|x+y| \leq |x| + |y|$.

7. Note que devemos ter $0 \leq r$, daí segue que:

$$\begin{aligned} |x| \leq r &\iff |x|^2 \leq r^2 \iff x^2 - r^2 \leq 0 \iff (x-r)(x+r) \leq 0 \\ &\iff x \leq r \text{ ou } -r \leq x \iff -r \leq x \leq r \end{aligned}$$

8. Como $0 < r$, então:

$$\begin{aligned} |x| \geq r &\iff |x|^2 \geq r^2 \iff x^2 - r^2 \geq 0 \iff (x-r)(x+r) \geq 0 \\ &\iff r \leq x \text{ ou } x \leq -r \end{aligned}$$

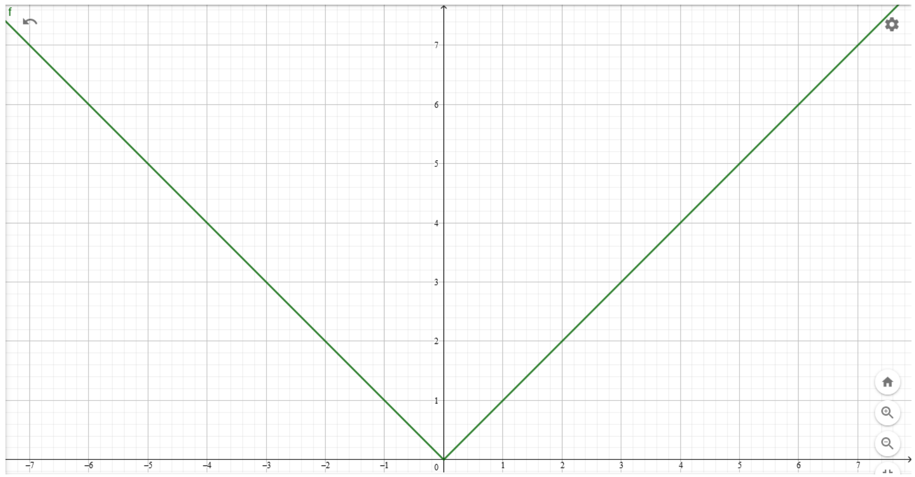
□

3 Função Modular

Definição 2. *Chamamos de função modular a aplicação* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = |x|$. *Pela definição do valor absoluto, temos que:*

$$f(x) = \begin{cases} x & se\ 0 \leq x \\ -x & se\ x < 0 \end{cases}$$

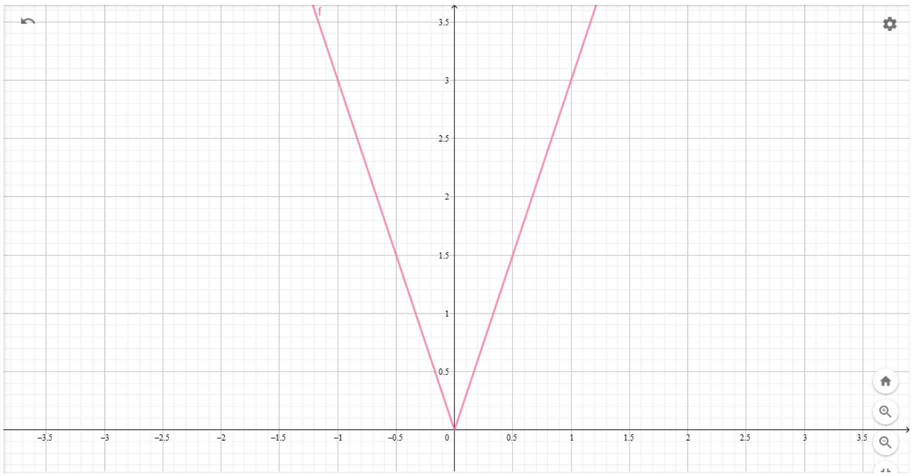
Então temos que a função modular é função de duas sentenças abertas dadas por $f(x) = x$ quando $0 \leq x$ e $f(x) = -x$ quando $x < 0$. Daí temos o seguinte gráfico para f:



Exemplo 9. *Considere a função* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $g(x) = |3x|$. *Então, pela definição do módulo, temos que:*

$$g(x) = \begin{cases} 3x & se\ 0 \leq 3x \\ -3x & se\ 3x < 0 \end{cases}$$

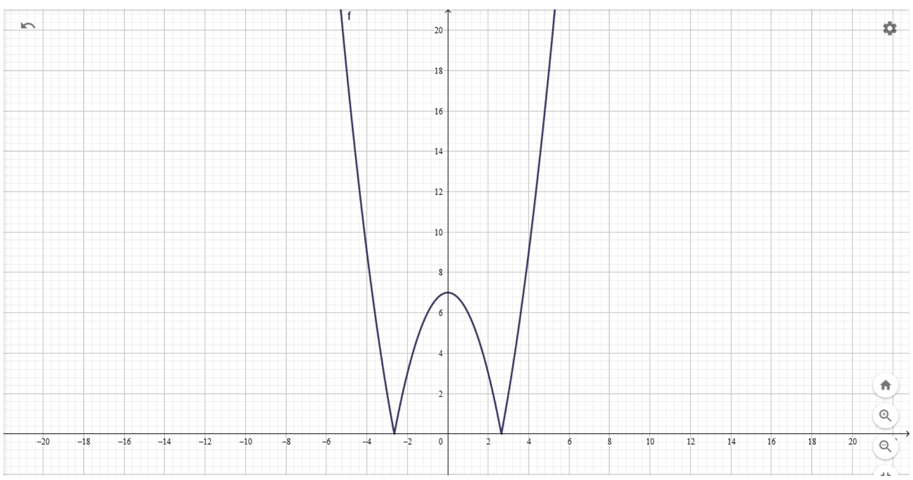
Assim, o gráfico de g é:



Exemplo 10. *Considere a função $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $h(x) = |x^2 - 7|$. Então, pela definição do módulo, temos que:*

$$h(x) = \begin{cases} x^2 - 7 & \textit{se } 0 \leq 5x \\ -(x^2 - 7) & \textit{se } 5x < 0 \end{cases}$$

Assim, o gráfico de h é:



Exercício 1. *Construa o gráfico da função $m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $m(x) = |2x+3|$.*

Exercício 2. *Construa o gráfico da função $j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $j(x) = |-x^2+4|$.*

4 Equações modulares

Definição 3. *Uma equação modular em uma variável é uma equação que envolve o módulo de pelo menos uma expressão que contém variável. Equações* *modulares podem ou não possuir um conjunto solução.*

Exemplo 11. *Resolva* $|2x+4|=3$.

Demonstração. Solução Pela definição de módulo temos que $2x+4=3$ ou $2x+4=-3$. Assim, resolvendo as equações temos que $x=-1/2$ ou $x=-7/2$. $\square$

Exemplo 12. *Resolva* $|2x+9|=|\sqrt{3}+x|$.

Demonstração. Solução Pelas propriedades de módulo temos que $2x+9=\sqrt{3}+x$ ou $2x+9=-(\sqrt{3}+x)$. Resolvendo as equações obtemos $x=\sqrt{3}-9$ ou $x=(-9-\sqrt{3})/3$. $\square$

Exercício 3. *Resolva* $|x^2+x-5|=|4x-1|$.

Demonstração. Solução Temos que $x^2+x-5=4x-1$ ou $x^2+x-5=-(4x-1)$. Daí temos $x^2-3x-4=0$ ou $x^2+5x-6=0$, logo $S=\{-6,-1,1,4\}$. $\square$

Exemplo 13. *Resolva* $|2x-3|+|x+2|=4$.

Demonstração. Solução Sejam $f(x)=|2x-3|$ e $g(x)=|x+2|$, temos que

$$f(x)=\begin{cases} 2x-3 & \text{se } 0\leq 2x-3 \\ -(2x-3) & \text{se } 2x-3<0 \end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases} x+2 & \text{se } 0\leq x+2 \\ -(x+2) & \text{se } x+2<0 \end{cases}$$

Resolvendo as inequações na parte direita das igualdade, temos:

$$f(x)=\begin{cases} 2x-3 & \text{se } 3/2\leq x \\ -(2x-3) & \text{se } x<3/2 \end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases} x+2 & \text{se } -2\leq x \\ -(x+2) & \text{se } x<-2 \end{cases}$$

Analisando os sinais das funções f e g nos intervalos $(-\infty,-2),[-2,3/2)$ e $[3/2,\infty)$, temos que:

$$f(x)+g(x)=\begin{cases} -3x+1 & \text{se } x<-2 \\ -x+5 & \text{se } -2\leq x<3/2 \\ 3x-1 & \text{se } 3/2\leq x \end{cases}$$

Daí resolvendo a equação $|2x-3|+|x+2|=4$ com as informações acima, temos que:

$$-3x+1=4 \implies x=-1 \tag{1}$$

$$-x+5=4 \implies x=1 \tag{2}$$

$$3x-1=4 \implies x=\frac{5}{3} \tag{3}$$

Das equações acima temos que apenas a (1) não satisfaz a condição de $f(x)+g(x)$. Portanto $S=\{1,5/3\}$. $\square$

5 Inequações modulares

Definição 4. *Uma inequação modular em uma variável é uma inequação que envolve o módulo de pelo menos uma expressão que contém variável. Inequações modulares podem ou não possuir um conjunto solução.*

Exemplo 14. *Resolva* $|3x-2|<4$.

Demonstração. Solução Temos que:

$$|3x-2|<4 \iff -4<3x-2<4 \iff -\frac{2}{3}<x<\frac{6}{3} \iff -\frac{2}{3}<x<2$$

Portanto temos que $S=\{x\in\mathbb{R}|-2/3<x<2\}$. $\square$

Exemplo 15. *Resolva* $|x^2-x-4|>2$.

Demonstração. Solução Temos que:

$$\begin{aligned}|x^2-x-4|>2 &\iff x^2-x-4>2 \text{ ou } x^2-x-4<-2\\ &\iff x^2-x-6>0 \text{ ou } x^2-x-2<0\end{aligned}$$

Resolvendo as inequações quadráticas obtemos $S=(3,\infty)\cup(-\infty,2)$. $\square$

Exemplo 16. *Resolva* $|x^2-4|<3x$.

Demonstração. Solução Temos que:

$$|x^2-4|<3x \iff |x^2-4|-3x<0$$

Também temos que:

$$|x^2-4|=\begin{cases} x^2-4 & \text{se } 0\leq x^2-4\\ -(x^2-4) & \text{se } x^2-4<0\end{cases}$$

Resolvendo as inequações no lado direito temos:

$$|x^2-4|=\begin{cases} x^2-4 & \text{se } x<-2 \text{ ou } 2<x\\ -(x^2-4) & \text{se } -2<x<2\end{cases}$$

Assim, se tivermos $x<-2$ ou $2<x$ vem:

$$x^2-4-3x<0 \iff -1<x<4$$

então $S_1=(-1,4)$. Se tivermos $-2<x<2$ obtemos:

$$-x^2+4-3x<0 \iff x<-4 \text{ ou } 1<x$$

Daí $S_2=(-\infty,-4)\cup(1,\infty)$. Portanto, $S=S_1\cap S_2=(1,4)$. $\square$