

Radiciação

Almir Junior

Março de 2022

1 Definição da raiz

Definição 1. Sejam $a, b \in \mathbb{N}$ e $n \in \mathbb{N}^*$. Então $\sqrt[n]{a} = b$ se, e somente se, $b^n = a$.

Comentário 1. Chamamos a de radical, n de índice e $\sqrt[n]{a}$ de raiz n -ésima de a .

Exemplo 1. 1. $\sqrt[3]{8} = 2$ pois $2^3 = 8$

2. $\sqrt[5]{100000} = 10$ pois $10^5 = 100000$

2 Potência de expoente racional

Podemos olhar para raízes como potências de expoente racional.

Definição 2. Sejam $n \in \mathbb{N}^*$, $m \in \mathbb{Z}$ e $\sqrt[n]{a^m}$ a raiz n -ésima de a^m . Então $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$.

Exemplo 2. 1. $9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3$.

2. $2^{\frac{5}{7}} = \sqrt[7]{2^5} = \sqrt[7]{32}$.

3. $\pi^{\frac{3}{11}} = \sqrt[11]{\pi^3}$.

3 Propriedades de radiciação

As propriedades de radiciação nos auxiliam a fazer operações entre raízes. São elas as seguintes: Para $a, b, m, n \in \mathbb{N}^*$, temos:

$$(i) \quad \sqrt[n]{\sqrt[p]{a^{m \cdot p}}} = \sqrt[n]{a^m}$$

$$(ii) \quad \sqrt[n]{a^p \cdot b^q} = \sqrt[n]{a^p} \cdot \sqrt[n]{b^q}$$

$$(iii) \quad \sqrt[n]{\frac{a^p}{b^q}} = \frac{\sqrt[n]{a^p}}{\sqrt[n]{b^q}}$$

$$(iv) \quad (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

$$(v) \sqrt[n]{\sqrt[m]{a^p}} = \sqrt[n \cdot m]{a^p}$$

Exemplo 3. (a) $\sqrt[4]{x^6} = \sqrt{x^3}$

$$(b) \sqrt[9]{y^3} = \sqrt[3]{y}$$

$$(c) \sqrt[3]{x^2 \cdot y^3} = \sqrt[3]{x^2} y$$

$$(d) \sqrt[9]{p \cdot q^{27}} = \sqrt[9]{p} q^3$$

$$(e) \sqrt{\frac{4\pi}{9}} = \frac{2\sqrt{\pi}}{3}$$

$$(f) \sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{2}{3}$$

$$(g) (\sqrt{2})^4 = 4$$

$$(h) x > 1, (\sqrt[5]{5})^x = 5$$

$$(i) \sqrt{\sqrt{32}} = \sqrt{2}$$

$$(j) \sqrt{\sqrt[5]{x^{10}}} = x$$

4 Raiz com radical negativo

É possível termos uma raiz de radical negativo desde que o índice seja ímpar. Vamos tentar seguir a **Definição 1**. Pela definição, $\sqrt[3]{-8} = x$ se, e somente se, $x^3 = -8$. Sabemos que $(-2)^3 = -8$, logo $x = -2$. Portanto $\sqrt[3]{-8} = -2$. Por outro lado, se tivéssemos $\sqrt{-27}$, pela definição, $\sqrt{-27} = y$ se e somente se, $y^2 = -27$. O que é impossível desde que toda potência de expoente par tem resultado positivo independente do sinal da base. Então, para obtermos uma raiz de radicando negativo é necessário que o índice da raiz seja ímpar.

Definição 3. Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$ ímpar. Então $\sqrt[n]{-a} = -b$ se, e somente se, $(-b)^n = -a$. Além disso, $\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}$.

Exemplo 4. 1. $\sqrt[5]{-32} = -2$

$$2. \sqrt[3]{-343} = -7$$

$$3. \sqrt[15]{(-a)^{15}} = -a$$

5 Exercícios

Exercício 1 (FUVEST). Simplifique $\sqrt[3]{\frac{2^{28} + 2^{30}}{10}}$.

$$(a) \frac{2^8}{5}$$

(b) $\frac{2^9}{5}$

(c) 2^8

(d) 2^9

(e) $\left(\frac{2^{58}}{10}\right)^{\frac{1}{3}}$