

# Funções: constante, identidade e afim

Almir Junior

Julho

**Comentário 1.** Para um melhor entendimento do conteúdo, sugiro esboçar todos os gráficos em <https://www.geogebra.org/calculator>.

**Definição 1.** Seja  $f : A \rightarrow B$  uma função. Dizemos que  $f$  é uma função real de variável real quando  $A, B \subseteq \mathbb{R}$ .

**Definição 2.** Uma aplicação  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é chamada de função constante quando  $x \mapsto f(x) = k$ , isto é, para todo  $x \in \mathbb{R}$  tem-se  $f(x) = k$ , onde  $k$  é um número real fixo(esboce o gráfico).

**Exemplo 1.** Considere a função  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de forma que  $x \mapsto g(x) = 9$ .

**Exemplo 2.** Considere a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de forma que  $x \mapsto f(x) = -22/7$ .

**Definição 3.** Uma aplicação  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é chamada de função Identidade quando  $x \mapsto f(x) = x$ , ou seja, para todo  $x \in \mathbb{R}$  tem-se  $f(x) = x$ .

**Definição 4.** Seja  $f : A \rightarrow B$ . Dizemos que  $f$  é crescente quando para todo  $x_1, x_2 \in A$  com  $x_1 < x_2$  tivermos  $f(x_1) < f(x_2)$ .

**Definição 5.** Seja  $f : A \rightarrow B$ . Dizemos que  $f$  é decrescente quando para todo  $x_1, x_2 \in A$  com  $x_1 < x_2$  tivermos  $f(x_1) > f(x_2)$ .

**Definição 6.** Uma aplicação  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  recebe o nome de função afim quando  $x \mapsto f(x) = ax + b$  onde  $a, b \in \mathbb{R}$  são fixos com  $a \neq 0$ .

**Exemplo 3.** 1.  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  com  $f(x) = -4x + 9$

2.  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  com  $\varphi(x) = x - \sqrt{2}$

3.  $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  com  $r(x) = \frac{3x}{2} + 5$

**Proposição 1.** Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  um função afim  $f(x) = ax + b$ . Se  $a > 0$ , então  $f$  é crescente. Se  $a < 0$ , então  $f$  é decrescente.

*Demonstração.* Primeiro considere  $0 < a$ . Tome  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  arbitrários tais que  $x_1 < x_2$ , assim:

$$x_1 < x_2 \implies ax_1 < ax_2 \implies ax_1 + b < ax_2 + b \implies f(x_1) < f(x_2).$$

Agora considere  $a < 0$  e, novamente, tome  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  arbitrários tais que  $x_1 < x_2$ , daí:

$$x_1 < x_2 \implies ax_1 > ax_2 \implies ax_1 + b > ax_2 + b \implies f(x_1) > f(x_2).$$

□

**Proposição 2.** Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  um função afim  $f(x) = ax + b$ . Então o coeficiente  $b$  é o ponto no qual o gráfico de  $f$  intersecta o eixo  $-y$ .

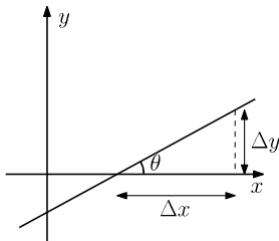
*Demonstração.* Para achar o valor de  $y \in \mathbb{R}$  para o qual o gráfico de  $f$  intersecta o eixo  $-y$  basta tomar  $x = 0$ . Fazendo isso temos:

$$f(0) = a0 + b \implies f(0) = b$$

□

**Proposição 3.** Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  um função afim  $f(x) = ax + b$ . O coeficiente  $a$  é a tangente do gráfico de  $f$  em relação ao eixo  $-x$ .

*Demonstração.* Considere a imagem abaixo:



Temos que o cateto oposto a  $\theta$  é dado por  $\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$  e o adjacente por  $\Delta x = x_2 - x_1$ . Assim pelas relações trigonométricas temos que:

$$\tan \theta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}. \quad (1)$$

Temos também que  $f(x_2) = ax_2 + b$  e  $f(x_1) = ax_1 + b$ , com isso obtemos o sistema:

$$\begin{cases} f(x_2) = ax_2 + b \\ f(x_1) = ax_1 + b \end{cases}$$

Subtraindo a segunda equação da primeira obtemos:

$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) &= ax_2 + b - ax_1 - b \implies f(x_2) - f(x_1) = a(x_2 - x_1) \\ &\implies \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = a. \end{aligned} \quad (2)$$

Portanto, de (1) e (2) temos que  $a = \tan \theta$

□

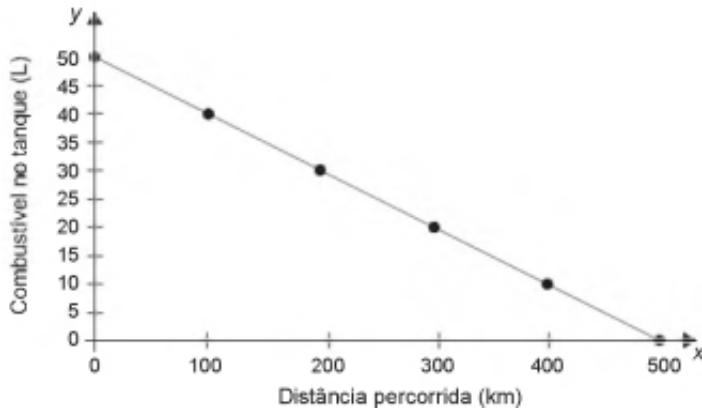
**Observação 1.** Tomar números arbitrários é o mesmo que pegar qualquer um do conjunto contanto que satisfaçam a relação desejada. O fato de  $a > 0$  e  $a < 0$  interfere na multiplicação feita na desigualdade  $x_1 < x_2$ , o que implica direto na demonstração.

**Exercício 1.** ENEM Por muitos anos, o Brasil tem figurado no cenário mundial entre os maiores produtores e exportadores de soja. Entre os anos de 2010 e 2014, houve uma forte tendência de aumento da produtividade, porém, um aspecto dificultou esse avanço: o alto custo do imposto ao produtor associado ao baixo preço de venda do produto. Em média, um produtor gastava 1200 reais por hectare plantado, e vendia por 50 reais cada saca de 60 kg. Ciente desses valores, um produtor pode, em certo ano, determinar uma relação do lucro  $L$  que obteve em função das sacas de 60 kg vendidas. Suponha que ele plantou 10 hectares de soja em sua propriedade, na qual colheu  $x$  sacas de 60 kg e todas as sacas foram vendidas. Qual é a expressão que determinou o lucro  $L$  em função de  $x$  obtido por esse produtor nesse ano?

- (a)  $L(x) = 50x - 1200$
- (b)  $L(x) = 50x - 12000$
- (c)  $L(x) = 50x + 12000$
- (d)  $L(x) = 500x - 1200$
- (e)  $L(x) = 1200x - 500$

*Solução.* Sabemos que o lucro é a diferença do custo com o valor da venda. Segundo o enunciado, o produtor gasta 1200 por hectare plantado(custo) e "ele plantou 10 hectares de soja em sua propriedade". Então ele teve um custo de 12000 nesses 10 hectares. Também sabemos que ele vende cada saca por 50 reais. Então, a função  $L$ , que recebe como argumento quantidades de saca e devolve valores em reais, deve descontar o valor de custo(12000) que o vendedor teve em relação a esses 10 hectares, ou seja, deve ter em sua lei o  $-12000$ . E como cada saca é vendida por 50 reais, o  $x$  que aparece na lei da função deve estar multiplicado por 50. Portanto ficamos com a alternativa (b).  $\square$

**Exercício 2.** ENEM Uma indústria automobilística está testando um novo modelo de carro. Cinquenta litros de combustível são colocados no tanque desse carro, que é dirigido em uma pista de testes até que todo o combustível tenha sido consumido. O segmento de reta no gráfico mostra o resultado desse teste, no qual a quantidade de combustível no tanque é indicada no eixo-y (vertical), e a distância percorrida pelo automóvel é indicada no eixo-x (horizontal). A expressão algébrica que relaciona a quantidade de combustível no tanque e a distância percorrida pelo automóvel é:



$$(a) \quad y = -10x + 500$$

$$(b) \quad y = -\frac{x}{10} + 50$$

$$(c) \quad y = -\frac{x}{10} + 500$$

$$(d) \quad y = \frac{x}{10} + 50$$

$$(e) \quad y = \frac{x}{10} + 500$$

*Solução.* Analisando o gráfico, temos que a reta é decrescente, logo a lei da função deve possuir coeficiente angular negativo. O ponto de intersecção do gráfico com o eixo- $y$  é  $(0, 50)$ , logo devemos ter o coeficiente linear igual a 50. Também temos que a raiz da função é  $x = 500$ , ou seja:  $f(x) = 0$  quando  $x = 500$ . Juntando essas informações, ficamos com a alternativa (b).

□