Conjuntos dos Números Naturais

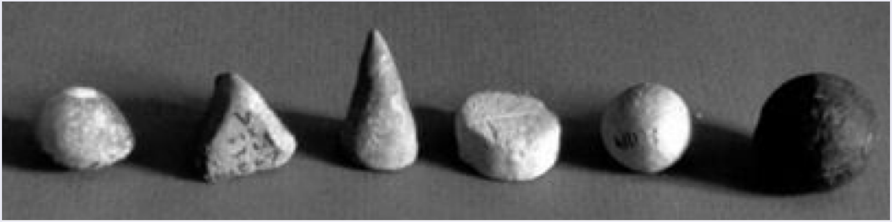
Matemática II

Almir Junior

IME-USP

Maio 2021

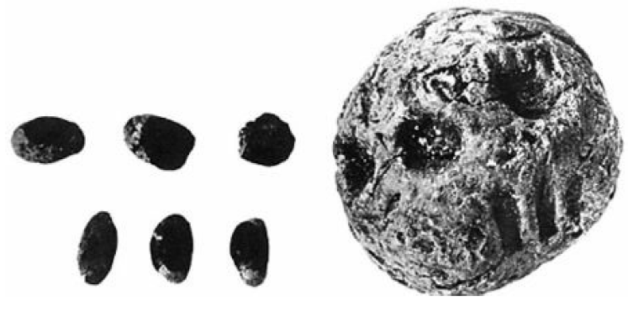
Tokens: cones, esferas e discos representando medidas.



Referência

Roque, T ; *História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas, Rio de Janeiro: Zahar; 1ª edição 2012.*

Os tokens inseridos nos inólucros e marcados na superfície.



Referência

Roque, T ; *História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas, Rio de Janeiro: Zahar; 1ª edição 2012.*

Tablete de argila plano, contendo a descrição da quantidade de ovelhas.

Referência

Roque, T ; *História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas, Rio de Janeiro: Zahar; 1ª edição 2012.*

Sistema sexagesimal posicional - 1700 a.E.C

Referência

Roque, T ; *História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas, Rio de Janeiro: Zahar; 1ª edição 2012.*

Contagem

$$\begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \cdots & 26 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ A & B & C & D & E & F & G & H & \cdots & Z \end{array}$$

Contagem

$$\begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \cdots & 26 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ A & B & C & D & E & F & G & H & \cdots & Z \end{array}$$

Associando números

Para realizar uma contagem, associamos a cada elemento um, e somente um, número dos quais usamos para fazer contagem.

Contagem

$$\begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \cdots & 26 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ A & B & C & D & E & F & G & H & \cdots & Z \end{array}$$

Associando números

Para realizar uma contagem, associamos a cada elemento um, e somente um, número dos quais usamos para fazer contagem.

Conjunto dos Números Naturais

Usamos a letra $\mathbb{N}$ para nos referirmos ao conjunto dos números naturais.

(Axiomas de Peano)

Indicamos por $s(n)$ o sucessor de um natural n. O conjunto $\mathbb{N}$ é definido pelos seguintes axiomas:

1. $0 \in \mathbb{N}$
2. $n \in \mathbb{N} \implies s(n) \in \mathbb{N}$.
3. $s(n) = s(m) \implies n = m$
4. Princípio da Indução Finita: Seja $\mathcal{S}$ um conjunto de números naturais tal que:
   - $0 \in \mathcal{S}$
   - $n \in \mathcal{S} \implies s(n) \in \mathcal{S}$.

   Então, $S = \mathbb{N}$

(Axiomas de Peano)

Indicamos por $s(n)$ o sucessor de um natural n. O conjunto $\mathbb{N}$ é definido pelos seguintes axiomas:

1. $0 \in \mathbb{N}$
2. $n \in \mathbb{N} \implies s(n) \in \mathbb{N}$.
3. $s(n) = s(m) \implies n = m$
4. Princípio da Indução Finita: Seja $\mathcal{S}$ um conjunto de números naturais tal que:
    - $0 \in \mathcal{S}$
    - $n \in \mathcal{S} \implies s(n) \in \mathcal{S}$.

    Então, $S = \mathbb{N}$

Definição 1

Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ números naturais quaisquer. Então:

- $m + 0 = 0$
- $m + s(n) = s(m + n)$

Proposição 1

Seja $m \in \mathbb{N}$. Então para todo $n \in \mathbb{N}$ temos $m + n \in \mathbb{N}$.

Demonstração

Proposição 2

Para todos $m, n, p \in \mathbb{N}$, vale: $m + (n + p) = (m + n) + p$.

Demonstração

Proposição 3

Para todo $m \in \mathbb{N}$, tem-se que: $m + 0 = m = 0 + m$.

Demonstração

Proposição 4

O elemento neutro aditivo é único.

Demonstração

Definição 2

Indicaremos por 1 o número natural que é o sucessor de 0, isto é, $s(0) = 1$

Definição 2

Indicaremos por 1 o número natural que é o sucessor de 0, isto é, $s(0) = 1$

Proposição

Para todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se que: $s(m) = 1 + m$.

Demonstração

Definição 2

Indicaremos por 1 o número natural que é o sucessor de 0, isto é, $s(0) = 1$

Proposição

Para todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se que: $s(m) = 1 + m$.

Demonstração

Números Naturais

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 15, 16.17, 18, 19, ...\}$$

Proposição 5

Para todo par $m, n \in \mathbb{N}$ tem-se: $m + n = n + m$.

Demonstração

Exercício para casa

Proposição 6 (Propriedade cancelativa da soma)

Sejam $m, n, p \in \mathbb{N}$. Se $m + p = n + p$, então $m = n$.

Demonstração

Definição 3

Sejam $m, n \in \mathbb{N}$. Fixado m definimos indutivamente o produto $n \cdot m$ de forma que:

- $0 \cdot m = 0$
- $s(n) \cdot m = n \cdot m + m$

Definição 3

Sejam $m, n \in \mathbb{N}$. Fixado m definimos indutivamente o produto $n \cdot m$ de forma que:

- $0 \cdot m = 0$
- $s(n) \cdot m = n \cdot m + m$

Proposição 7

Sejam $m, n \in \mathbb{N}$. Então $m \cdot n \in \mathbb{N}$.

Demonstração

Proposição 8

Seja $m \in \mathbb{N}$. Então $m \cdot 0 = m$.

Demonstração

Proposição 9

Seja $m \in \mathbb{N}$. Então $m \cdot 1 = m$.

Demonstração

Proposição 10

O elemento neutro multiplicativo é único.

Demonstração

Proposição 11

Sejam $m, n \in \mathbb{N}$. Então $n \cdot s(m) = n \cdot m + n$.

Demonstração

Proposição 12

Sejam $m, n \in \mathbb{N}$. Então $m \cdot n = n \cdot m$.

Demonstração

Proposição 13

Sejam $m, n \in \mathbb{N}$. Então $m \cdot n = 0$ se, e somente se, $n = 0$ ou $m = 0$.

Demonstração

Proposição 14

Sejam $a, b, c \in \mathbb{N}$. Então $a(b+c) = ab + ac$ e $(b+c)a = ba + bc$.

Demonstração

Proposição 15

Sejam $a, b, c \in \mathbb{N}$. Então $(ab)c = a(bc)$.

Demonstração

Exercício 1

Prove que $1 + 2 + 3 + 4 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Exercício 2

Prove que $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + ... + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

Exercício 3. Prove que

$$1\left(\frac{1}{2}\right)^{1-1} + 2\left(\frac{1}{2}\right)^{2-1} + 3\left(\frac{1}{2}\right)^{3-1} + 4\left(\frac{1}{2}\right)^{4-1} + ... + n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 4 - \frac{n+2}{2^{n-1}}$$