Fatoração em primos, mmc e mdc

Almir Junior

Março de 2022

1 Conjunto dos número inteiros

O conjunto dos números inteiros é representado por $\mathbb{Z}$. Esse é o conjunto de todos os números negativos e positivos que não possuem casas decimais diferente de zero, o zero também faz parte desse conjunto. Assim:

$$\mathbb{Z} = \{..., -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ...\}.$$

Usamos a letra $\in$ para dizer se um elemento pertence a um conjunto, caso contrário utilizamos $\notin$.

Exemplo 1. *(i)* $0 \in \mathbb{Z}$

(ii) $1,7 \notin \mathbb{Z}$

(iii) $-100 \in \mathbb{Z}$

(iv) $3,14151618 \notin \mathbb{Z}$.

Para excluir o zero de um conjunto utilizamos um asterisco, então o conjunto dos inteiros sem o zero é representado por

$$\mathbb{Z}^* = \{..., -6, -5, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ...\}.$$

Para retirar os elementos negativos de um conjunto, utilizamos o sinal $+$, assim

$$\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, ...\}.$$

O conjunto dos inteiros positivos é conhecido também como o conjuntos dos números naturais e é representado por $\mathbb{N}$.

De forma análoga, podemos excluir os números positivos de um conjunto, para tanto utilizamos o sinal de $-$. Dessa forma temos

$$\mathbb{Z}_- = \{0, -1, -2, -3, -4, -5, -6, -7, -8, -9, -10, ...\}.$$

2 Regras de sinais

Para $a, b \in \mathbb{Z}_+$ temos as seguintes regras

(i) $-(-a) = a$

(ii) $ab = (-a)(-b)$

(iii) $(-a)b = a(-b) = -ab.$

Note também que a operação de subtração é a soma de inteiro negativo, ou seja

(i) $a - b = a + (-b)$

(ii) $a - a = a + (-a) = 0$(onde $-a$ é o oposto de a)

(iii) $-a - a = -2a.$

Exemplo 2. *1.* $-(-2) = 2$

2. $2 \cdot 3 = (-2)(-3) = 6$

3. $(-4) \cdot 7 = -28$

4. $2 \cdot (-5) = -10$

5. $-16 - 16 = -32$

3 Relação de divisibilidade

Definição 1. *Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$. Diremos que a divide b ou b é múltiplo de a, se e somente se, existe $c \in \mathbb{Z}$ tal que $ac = b$.*

Exemplo 3. *1.* *2 divide 14, porque existe $7 \in \mathbb{Z}$ tal que $2 \cdot 7 = 14$*

2. *-3 divide 6, pois existe $-2 \in \mathbb{Z}$ tal que $(-3)(-2) = 6$.*

Comentário 1. *Para indicar que um número divide outro utilizamos o símbolo $|$, caso contrário usamos $\nmid$.*

Exemplo 4. *1.* $2 \mid 14$

2. $-3 \mid 6.$

4 Divisão euclidiana

A divisão euclidiana é uma maneira de escrever um número inteiro como produto e soma de únicos três números.

Teorema 1. *Se $a, b \in \mathbb{Z}_+$, com $b \neq 0$ então existem únicos $q, r \in \mathbb{Z}_+$ tais que $a = bq + r$, onde $0 \leq r < b$.*

Comentário 2. *Se $r = 0$, então $a = bq$ e temos que $b \mid a$. Chamamos a de dividendo, b de divisor, q de quociente e r de resto.*

Exemplo 5. *1. Para $a = 4$ e $b = 3$, obtemos $q = 1 = r$. Assim $4 = 3 \cdot 1 + 1$*

2. Para $a = 25$ e $b = 3$, temos $q = 8$ e $r = 1$. Logo $25 = 3 \cdot 8 + 1$.

3. Para $a = 81$ e $b = 3$, vem $q = 27$ e $r = 0$. Ou seja $3 \mid 81$.

5 Números primos e fatoração em primos

Definição 2. *Dizemos que p é primo se, e somente se, seus divisores forem $1, -1, p$ e $-p$.*

Exemplo 6.

2

47

997

29.

Comentário 3. *Se um número n não é primo, dizemos que ele é composto. Isso significa que esse número possui pelo menos um divisor diferente de $-1, 1, n$ e de $-n$.*

Existem infinitos números primos, esse resultado foi apresentado por Euclides de Alexandria em sua obra chamada Elementos. É possível fazer algumas contas e utilizar propriedades para mostrar que os números primos são infinitos.

Teorema 2. *Existem infinitos números primos.*

Um outro teorema importante sobre números primos é o seguinte

Teorema 3. *Todo número composto pode ser escrito como produto de números primos de forma única a menos da ordem.*

Comentário 4. *Escrever um número composto como produto de números primos é o que chamamos de fatoração em primos.*

Exemplo 7. *1.* $6 = 2 \cdot 3$

2. $20 = 2^2 \cdot 5$

3. $1000 = 2^3 \cdot 5^3$

4. $81 = 3^4$.

6 Cálculo dos divisores primos

Para calcular os divisores primos de um número composto começamos dividindo esse número pelo menor primo possível até não ser mais divisível por esse primo, depois dividimos pelo segundo menor primo possível e assim consecutivamente até chegarmo em 1.

Exemplo 8. *Encontre a fatoração em primos do número* 500.

$$\begin{array}{r|l} 500 & 2 \\ 250 & 2 \\ 125 & 5 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Assim a fatoração é $500 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$.

7 Máximo divisor comum

Definição 3. *Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$. Se $c \in \mathbb{Z}$ é tal que $c \mid a$ e $c \mid b$, dizemos que c é um divisor comum de a e b.*

Exemplo 9. *(a)* $3 \mid 6$ *e* $3 \mid 15$, *então* 3 *é divisor comum de* 15 *e* 6.

(b) $5 \mid 25$ *e* $5 \mid 10$, *então* 5 *é divisor comum de* 25 *e* 10.

Definição 4. *Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$. Se $d \in \mathbb{Z}$ é o maior dos divisores em comum de a e b, dizemos que $mdc(a, b) = d$.*

Comentário 5. *Para encontrar o mdc entre dois números basta fatorálos em primos e encontrar o maior divisor comum entre eles. Note que o mdc pode ser um número composto.*

Exemplo 10. *Encontre* $mdc(50, 60)$.

$$\begin{array}{r|l} 50\ ,\ 60 & 2 \\ 25\ ,\ 30 & 5 \\ 5\ ,\ 6 & \end{array}$$

Então $mdc(50, 60) = 2 \cdot 5 = 10$

Comentário 6. *No exemplo acima nós buscamos o menor primo que dividi* 50 *e* 60 *ao mesmo tempo, dividimos e obtemos* 25 *e* 30, *fizemos o mesmo processo até os resultados não possuirem divisor comum.*

Definição 5. *Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$. Se $mdc(a, b) = 1$, dizemos que a e b são primos entre si.*

Exemplo 11. *1.* 10 *e* 9 *são primos entre si.*

2. 11 *e* 12 *são primos entre si.*

8 Mínimo múltiplo comum

Definição 6. *Sejam* $a, b \in \mathbb{Z}$. *Dizemos que* $c \in \mathbb{Z}$ *é um múltiplo comum de* a *e* b *se, e somente se,* $a \mid c$ *e* $b \mid c$.

Exemplo 12. *1.* 20 *é múltiplo comum de* 5 *e* 4*, pois* $4 \mid 20$ *e* $5 \mid 20$.

2. 6 *é múltiplo comum de* 2 *e* 3*, pois* $2 \mid 6$ *e* $3 \mid 6$.

Definição 7. *O mínimo múltiplo comum entre dois números é o menor dos múltiplos comum entre eles.*

Exemplo 13. *Encontre o* $mmc(360, 210)$

$$\begin{array}{c|c} 360\ ,\ 210 & 2 \\ 180\ ,\ 105 & 2 \\ 90\ ,\ 105 & 2 \\ 45\ ,\ 105 & 3 \\ 15\ ,\ 35 & 3 \\ 5\ ,\ 35 & 5 \\ 1\ ,\ 7 & 7 \\ 1\ ,\ 1 & \end{array}$$

Assim, o $mmc(360, 210) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 2520$.