Funções: constante, identidade e afim

Almir Junior

Julho

Comentário 1. *Para um melhor entendimento do conteúdo, sugiro esboçar todos os gráficos em https://www.geogebra.org/calculator.*

Definição 1. *Seja* $f : A \to B$ *uma função. Dizemos que* f *é uma função real de variável real quando* $A, B \subseteq \mathbb{R}$.

Definição 2. *Uma aplicação* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é chamada de função constante quando* $x \mapsto f(x) = k$, *isto é, para todo* $x \in R$ *tem-se* $f(x) = k$, *onde* k *é um número real fixo(esboçe o gráfico).*

Exemplo 1. *Considere a função* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *de forma que* $x \mapsto g(x) = 9$.

Exemplo 2. *Considere a função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *de forma que* $x \mapsto f(x) = -22/7$.

Definição 3. *Uma aplicação* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é chamada de função Identidade quando* $x \mapsto f(x) = x$, *ou seja, para todo* $x \in R$ *tem-se* $f(x) = x$.

Definição 4. *Seja* $f : A \to B$. *Dizemos que* f *é crescente quando para todo* $x_1, x_2 \in A$ *com* $x_1 < x_2$ *tivermos* $f(x_1) < f(x_2)$.

Definição 5. *Seja* $f : A \to B$. *Dizemos que* f *é decrescente quando para todo* $x_1, x_2 \in A$ *com* $x_1 < x_2$ *tivermos* $f(x_1) > f(x_2)$.

Definição 6. *Uma aplicação* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *recebe o nome de função afim quando* $x \mapsto f(x) = ax + b$ *onde* $a, b \in \mathbb{R}$ *são fixos com* $a \neq 0$.

Exemplo 3.

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *com* $f(x) = -4x + 9$
2. $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *com* $\varphi(x) = x - \sqrt{2}$
3. $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *com* $r(x) = \frac{3x}{2} + 5$

Proposição 1. *Seja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *um função afim* $f(x) = ax + b$. *Se* $a > 0$, *então* f *é crescente. Se* $a < 0$, *então* f *é decrescente.*

Demonstração. Primeiro considere $0 < a$. Tome $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ arbitrários tais que $x_1 < x_2$, assim:

$$x_1 < x_2 \implies ax_1 < ax_2 \implies ax_1 + b < ax_2 + b \implies f(x_1) < f(x_2).$$

Agora considere $a < 0$ e, novamente, tome $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ arbitrários tais que $x_1 < x_2$, daí:

$$x_1 < x_2 \implies ax_1 > ax_2 \implies ax_1 + b > ax_2 + b \implies f(x_1) > f(x_2).$$

$\square$

Proposição 2. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ um função afim $f(x) = ax + b$. Então o coeficiente b é o ponto no qual o gráfico de f intersecta o $eixo - y$.*

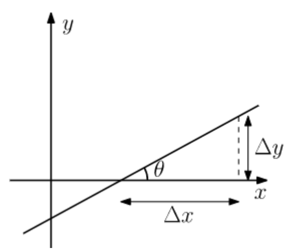
Demonstração. Para achar o valor de $y \in \mathbb{R}$ para o qual o gráfico de f intersecta o *eixo-y* basta tomar $x = 0$. Fazendo isso temos:

$$f(0) = a0 + b \implies f(0) = b$$

$\square$

Proposição 3. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ um função afim $f(x) = ax + b$. O coeficiente a é a tangente do ângulo θ formado pelo gráfico de f e pelo $eixo - x$.*

Demonstração. Considere a imagem abaixo:



Tome $\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$ e $\Delta x = x_2 - x_1$. Assim cateto oposto a θ é d$\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$ e o cateto adjacente é $\Delta x = x_2 - x_1$. Pelas relações trigonométricas temos:

$$\tan\theta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}. \tag{1}$$

Também $f(x_2) = ax_2 + b$ e $f(x_1) = ax_1 + b$, com isso obtemos o sistema:

$$\begin{cases} f(x_2) & = ax_2 + b \\ f(x_1) & = ax_1 + b \end{cases}$$

Subtraindo a segunda equação da primeira obtemos:

$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) = ax_2 + b - ax_1 - b &\implies f(x_2) - f(x_1) = a(x_2 - x_1) \\ &\implies \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = a. \end{aligned} \tag{2}$$

Portanto, de (1) e (2) temos que $a = \tan\theta$ $\square$

Observação 1. *Tomar números arbitrários é o mesmo que pegar qualquer um do conjunto contanto que satisfaçam a relação desejada. O fato de $a > 0$ e $a < 0$ interfere na multiplicação feita na desigualdade $x_1 < x_2$, o que implica direto na demonstração.*

Exercício 1. *ENEM Por muitos anos, o Brasil tem figurado no cenário mundial entre os maiores produtores e exportadores de soja. Entre os anos de 2010 e 2014, houve uma forte tendência de aumento da produtividade, porém, um aspecto dificultou esse avanço: o alto custo do imposto ao produtor associado ao baixo preço de venda do produto. Em média, um produtor gastava 1200 reais por hectare plantado, e vendia por 50 reais cada saca de 60 kg. Ciente desses valores, um produtor pode, em certo ano, determinar uma relação do lucro L que obteve em função das sacas de 60 kg vendidas. Suponha que ele plantou 10 hectares de soja em sua propriedade, na qual colheu x sacas de 60 kg e todas as sacas foram vendidas.Qual é a expressão que determinou o lucro L em função de x obtido por esse produtor nesse ano?*

(a) $L(x) = 50x - 1200$

(b) $L(x) = 50x - 12000$

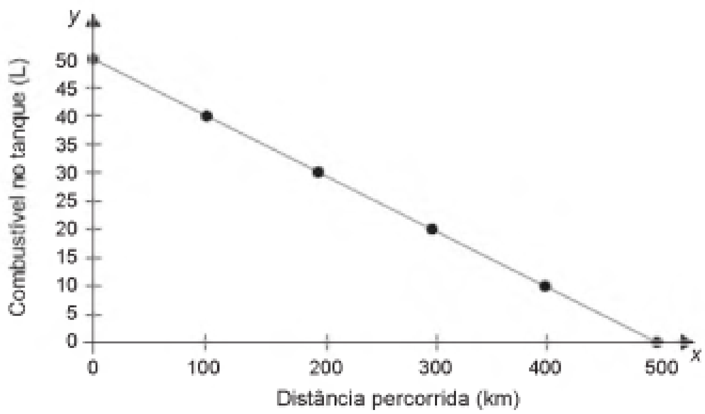
(c) $L(x) = 50x + 12000$

(d) $L(x) = 500x - 1200$

(e) $L(x) = 1200x - 500$

Solução. Sabemos que o lucro é a diferença do custo com o valor da venda. Segundo o enunciado, o produtor gasta 1200 por hectar plantado(custo) e "ele plantou 10 hectares de soja em sua propriedade". Então ele teve um custo de 12000 nesses 10 hectares. Também sabemos que ele vende cada saca por 50 reais. Então, a função L, que recebe como argumento quantidades de saca e devolve valores em reais, deve descontar o valor de custo(12000) que o vendedor teve em relação a esses 10 hectares, ou seja, deve ter em sua lei o -12000. E como cada saca é vendida por 50 reais, o x que aparece na lei da função deve estar multiplicado por 50. Portanto ficamos com a alternativa (b). □

Exercício 2. *ENEM Uma indústria automobilística está testando um novo modelo de carro. Cinquenta litros de combustível são colocados no tanque desse carro, que é dirigido em uma pista de testes até que todo o combustível tenha sido consumido. O segmento de reta no gráfico mostra o resultado desse teste, no qual a quantidade de combustível no tanque é indicada no eixo-y (vertical), e a distância percorrida pelo automóvel é indicada no eixo-x (horizontal). A expressão algébrica que relaciona a quantidade de combustível no tanque e a distância percorrida pelo automóvel é:*



(a) $y = -10x + 500$

(b) $y = -\frac{x}{10} + 50$

(c) $y = -\frac{x}{10} + 500$

(d) $y = \frac{x}{10} + 50$

(e) $y = \frac{x}{10} + 500$

Solução. Analisando o gráfico, temos que a reta é decrescente, logo a lei da função deve possuir coeficiente angular negativo. O ponto de intersecção do gráfico com o *eixo-y* é $(0, 50)$, logo devemos ter o coeficiente linear igual a 50. Também temos que a raiz da função é $x = 500$, ou seja: $f(x) = 0$ quando $x = 500$. Juntando essas informações, ficamos com a alternativa (b).

$\square$