Radiciação

Almir Junior

Março de 2022

1 Definição da raiz

Definição 1. *Sejam* $a, b \in N$ *e* $n \in \mathbb{N}^*$. *Então* $\sqrt[n]{a} = b$ *se, e somente se,* $b^n = a$.

Comentário 1. *Chamamos a de radical, n de índice e* $\sqrt[n]{a}$ *de raíz n-ésima de a.*

Exemplo 1.

1. $\sqrt[3]{8} = 2$ *pois* $2^3 = 8$
2. $\sqrt[5]{100000} = 10$ *pois* $10^5 = 100000$

2 Potência de expoente racional

Podemos olhar para raízes como potências de expoente racional.

Definição 2. *Seja* $n \in \mathbb{N}*$, $m \in \mathbb{Z}$ *e* $\sqrt[n]{a^m}$ *a raiz n-ésima de* a^m. *Então* $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$.

Exemplo 2.

1. $9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3$.
2. $2^{\frac{5}{7}} = \sqrt[7]{2^5} = \sqrt[7]{32}$.
3. $\pi^{\frac{3}{11}} = \sqrt[11]{\pi^3}$.

3 Propriedades de radiciação

As propriedades de radiciação nos auxiliam a fazer operações entre raízes. São elas as seguintes: Para $a, b, m, n \in \mathbb{N}*$, temos:

(i) $\sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}} = \sqrt[n]{a^m}$

(ii) $\sqrt[n]{a^p \cdot b^q} = \sqrt[n]{a^p} \cdot \sqrt[n]{b^q}$

(iii) $\sqrt[n]{\frac{a^p}{b^q}} = \frac{\sqrt[n]{a^p}}{\sqrt[n]{b^q}}$

(iv) $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$

(v) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a^p}} = \sqrt[n\cdot m]{a^p}$

Exemplo 3. *(a)* $\sqrt[4]{x^6} = \sqrt{x^3}$

(b) $\sqrt[9]{y^3} = \sqrt[3]{y}$

(c) $\sqrt[3]{x^2 \cdot y^3} = \sqrt[3]{x^2}y$

(d) $\sqrt[9]{p \cdot q^{27}} = \sqrt[9]{p}q^3$

(e) $\sqrt{\frac{4\pi}{9}} = \frac{2\sqrt{\pi}}{3}$

(f) $\sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{2}{3}$

(g) $(\sqrt{2})^4 = 4$

(h) $x > 1, (\sqrt[x]{5})^x = 5$

(i) $\sqrt{\sqrt{32}} = \sqrt{2}$

(j) $\sqrt{\sqrt[5]{x^{10}}} = x$

4 Raiz com radical negativo

É possível termos uma raiz de radical negativo desde que o índice seja ímpar. Vamos tentar seguir a **Definição 1**. Pela definição, $\sqrt[3]{-8} = x$ se, e somente se, $x^3 = -8$. Sabemos que $(-2)^3 = -8$, logo $x = 2$. Portanto $\sqrt{3}{-8} = -2$. Por outro lado, se tivessemos $\sqrt{-27}$, pela definição, $\sqrt{-27} = y$ se e somente se, $y^2 = -27$. O que é impossível desde que toda potência de expoente par tem resultado positivo independente do sinal da base. Então, para obtermos uma raiz de radicando negativo é necessário que o índice da raiz seja ímpar.

Definição 3. *Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$ ímpar. Então $\sqrt[n]{-a} = -b$ se, e somente se, $(-b)^n = -a$. Além disso, $\sqrt[n]{-a} = -\sqrt{a}$.*

Exemplo 4. *1.* $\sqrt[5]{-32} = -2$

2. $\sqrt[3]{-343} = -7$

3. $\sqrt[15]{(-a)^{15}} = -a$

5 Exercícios

Exercício 1 (FUVEST)**.** *Simplifique* $\sqrt[3]{\frac{2^{28}+2^{30}}{10}}$.

(a) $\frac{2^8}{5}$

(b) $\frac{2^9}{5}$

(c) 2^8

(d) 2^9

(e) $\left(\frac{2^{58}}{10}\right)^{\frac{1}{3}}$