Potenciação e Radiciação

Matemática II

Almir Junior

IME-USP

Maio 2021

Sobre Definição e Argumentação

Definições por Euclides

ensina e aceita-a sem demonstração. As definições que iniciam os *Elementos*[5] fazem referência aos objetos matemáticos que serão utilizados ao longo da obra e que possuem um conteúdo intuitivo. Alguns exemplos:

Livro I – Definições

1. Ponto é aquilo de que nada é parte
2. E linha é comprimento sem largura
3. E extremidades de uma linha são pontos
4. E linha reta é a que está posta por igual com os pontos sobre si mesma
5. E superfície é aquilo que tem somente comprimento e largura
6. E extremidades de uma superfície são retas

Referência

p. 131: Roque, T ; *História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas, Rio de Janeiro: Zahar; 1ª edição 2012.*

Sobre Definição e Argumentação

Definições por Euclides

O objetivo de diversos outros resultados do livro I seria, portanto, permitir a construção requerida em I-45 por meio de outras mais simples, o que caracteriza um procedimento típico dos *Elementos*. Se um postulado foi usado para demonstrar um teorema (ou para efetuar uma construção), esse teorema (ou essa construção) se torna uma verdade disponível para a demonstração de novos teoremas (ou para a realização de novas construções). Cada resultado constitui a base para o aprendizado de novos resultados. Os primeiros princípios servem, portanto, à demonstração dos primeiros resultados, que, em seguida, efetuarão o papel de premissas para novas demonstrações. O encadeamento dedutivo das proposições pode ser compreendido, assim, como a busca de uma espécie de economia na argumentação.

Referência

1 p. 135: Roque, T ; *História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas, Rio de Janeiro: Zahar; 1ª edição 2012.*

Definição e Argumentação

Dialética

dialética

Significado de Dialética

substantivo feminino

Arte do diálogo; arte de, através do diálogo, fazer a demonstração de um tema, argumentando para definir e distinguir com clareza os assuntos e conceitos debatidos nessa discussão.

Processo de busca da verdade por meio da argumentação e/ou da discussão racional, tentando demonstrar alguma coisa.

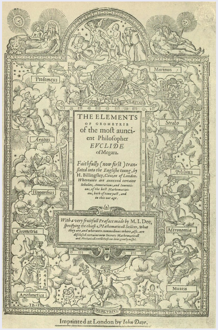
[Filosofia] Aristóteles. Dedução lógica que se efetiva tendo em conta as proposições demonstráveis.

Referência

https://www.dicio.com.br/dialetica/

Os Elementos por Euclides

Imagens do livro: contracapa da primeira versão em inglês de Sir Henry Billingsley dos Elementos de Euclides, 1570



Referência

https://en.wikipedia.org/wiki/Euclid's_Elements

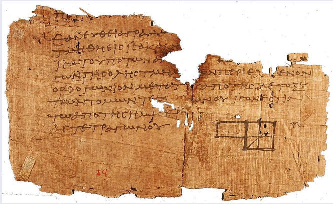
Os Elementos por Euclides

Imagens do livro: uma página da primeira edição impressa de Elementos, impressa por Erhard Ratdolt em 1482

Referência

https://en.wikipedia.org/wiki/Euclid's_Elements

Imagens do livro: fragmento do Elementos de Euclides contido em Oxyrhynchus papyri



Referência

https://en.wikipedia.org/wiki/Euclid's_Elements

Site legal sobre o livro

https://mathcs.clarku.edu/~djoyce/java/elements/bookI/bookI.html

Definição 1

Seja a um número qualquer e $n > 0$. Definimos:

$$a^1 := a \qquad a^n := \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdots a}_{\text{n vezes}} \qquad a^{-n} := \frac{1}{a^n}.$$

Potenciação

Definição 1

Seja a um número qualquer e $n > 0$. Definimos:

$$a^1 := a \qquad a^n := \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdots a}_{\text{n vezes}} \qquad a^{-n} := \frac{1}{a^n}.$$

Exemplos

- $2^4 =$
- $(-3)^3 =$
- $10^{-1} =$

Definição 2

Sejam a e b números quaisquer e $n > 0$. Definimos:

$$a^n \cdot b^n := (a \cdot b)^n \qquad a^n \cdot a^m := a^{n+m}.$$

Exemplos

- $2^4 \cdot 2^5 =$
- $\pi^{49} \cdot \pi^{51} =$
- $7^4 \cdot 3^4 =$
- $10^a \cdot 55^a =$

Definição 2

Sejam a e b números quaisquer e $n > 0$. Definimos:

$$a^n \cdot b^n := (a \cdot b)^n \qquad a^n \cdot a^m := a^{n+m}.$$

Exemplos

- $2^4 \cdot 2^5 =$
- $\pi^{49} \cdot \pi^{51} =$
- $7^4 \cdot 3^4 =$
- $10^a \cdot 55^a =$

Propriedade 1

$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

Propriedade 1

$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

Exemplos

- $(y^3)^5 =$
- $(z^{-13})^{-3} =$
- $(e^{-5})^5$

Propriedade 2

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Propriedade 2

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Exemplo

- $\left(\frac{r}{s}\right)^2 =$

- $\left(-\frac{3}{y}\right)^3 =$

- $\left(\frac{\varphi}{2}\right)^{-4} =$

Propriedade 3

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Propriedade 3

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Exemplos

- $\frac{(-\delta)^3}{(-\delta)^2} =$
- $\frac{p^{20}}{p^{25}} =$
- $\frac{15^5}{3^4 \cdot 5^2}$

Propriedade 4

Seja a um número qualquer não nulo. Prove que $a^0 = 1$.

Propriedade 4

Seja a um número qualquer não nulo. Prove que $a^0 = 1$.

Exemplos

- $1^0 =$
- $\pi^0 =$
- $(10^9)^0 =$

Propriedade 5

Sejam a e b números quaisquer e não nulos. Temos $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{b^n}{a^n}$.

Propriedade 5

Sejam a e b números quaisquer e não nulos. Temos $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{b^n}{a^n}$.

Exemplos

- $\left(\frac{33}{47}\right)^{-1} =$
- $\left(\frac{4f}{7g}\right)^{-3} =$
- $\left(\frac{3x}{9y}\right)^{-2} =$

VUNESP

Se $x = 10^{-3}$, então $\frac{(0{,}1)\cdot(0{,}001)\cdot 10^{-1}}{10\cdot(0{,}0001)}$ é igual a:

a) $100x$ b) $10x$ c) x d) $\frac{x}{10}$ e) $\frac{x}{100}$

Resolução

VUNESP

Se $x = 10^{-3}$, então $\frac{(0{,}1)\cdot(0{,}001)\cdot 10^{-1}}{10\cdot(0{,}0001)}$ é igual a:

a)$100x$ b)$10x$ c)x d)$\frac{x}{10}$ e)$\frac{x}{100}$

Resolução

Radiciação

Definição 1

Seja $n > 1$. Então $\sqrt[n]{a} = b$ se, e somente se, $b^n = a$.

Radiciação

Definição 1

Seja $n > 1$. Então $\sqrt[n]{a} = b$ se, e somente se, $b^n = a$.

Exemplos

1. $\sqrt[3]{8} =$

2. $\sqrt[5]{100000} =$

Definição 2

Seja $n > 1$ e $\sqrt[n]{a^m}$ a raiz n-ésima de a^m. Então $\sqrt[n]{a^m} := a^{\frac{m}{n}}$.

Definição 2

Seja $n > 1$ e $\sqrt[n]{a^m}$ a raiz n-ésima de a^m. Então $\sqrt[n]{a^m} := a^{\frac{m}{n}}$.

Exemplos

1. $9^{\frac{1}{2}} =$
2. $2^{\frac{5}{7}} =$
3. $\pi^{\frac{3}{7}} =$

Definição 2

Seja $n > 1$ e $\sqrt[n]{a^m}$ a raiz n-ésima de a^m. Então $\sqrt[n]{a^m} := a^{\frac{m}{n}}$.

Exemplos

1. $9^{\frac{1}{2}} =$
2. $2^{\frac{5}{7}} =$
3. $\pi^{\frac{3}{7}} =$

Observação

$\sqrt[n]{a^n} =$

Propriedade 1

Sejam $n > 1$ e $p > 1$. Então $\sqrt[n\cdot p]{a^{m\cdot p}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Propriedade 1

Sejam $n > 1$ e $p > 1$. Então $\sqrt[n\cdot p]{a^{m\cdot p}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Exemplo

1. $\sqrt[4]{x^6} =$

2. $\sqrt[9]{y^3} =$

Propriedade 2

$\sqrt[n]{a^p \cdot b^q} = \sqrt[n]{a^p} \cdot \sqrt[n]{b^q}$.

Propriedade 2

$$\sqrt[n]{a^p \cdot b^q} = \sqrt[n]{a^p} \cdot \sqrt[n]{b^q}.$$

Exemplos

1. $\sqrt[3]{x^2 \cdot y^3} =$

2. $\sqrt[9]{p \cdot q^{27}} =$

Propriedade 3

Sejam a um número qualquer, b não nulo e $n > 1$. Então $\sqrt[n]{\frac{a^p}{b^q}} = \frac{\sqrt[n]{a^p}}{\sqrt[n]{b^q}}$.

Propriedade 3

Sejam a um número qualquer, b não nulo e $n > 1$. Então $\sqrt[n]{\frac{a^p}{b^q}} = \frac{\sqrt[n]{a^p}}{\sqrt[n]{b^q}}$.

Exemplos

1. $\sqrt{\frac{4\pi}{9}} =$

2. $\sqrt[3]{\frac{8}{27}} =$

Propriedade 4

$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$

Propriedade 4

$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$

Exemplos

1. $(\sqrt{2})^4 =$
2. $x > 1, (\sqrt[x]{5})^x =$

Propriedade 5

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a^p}} = \sqrt[n \cdot m]{a^p}.$$

Propriedade 5

$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a^p}} = \sqrt[n \cdot m]{a^p}$.

Exemplos

1. $\sqrt[2]{\sqrt[2]{32}} =$

2. $\sqrt[2]{\sqrt[5]{x^{10}}} =$

EPCAR(Adaptado)

Mostre que $\dfrac{\left(\sqrt[5]{31+\sqrt[6]{10-\sqrt{83-\sqrt{4}}}}\right)^{2}}{\left(\sqrt[3]{\sqrt[6]{2^9}}\right)^{4}\left(\sqrt[6]{\sqrt[3]{2^9}}\right)^{4}}=2^{-2}$

Resolução

FUVEST

$$\sqrt[3]{\frac{2^{28}+2^{30}}{10}} = \qquad a)\ \frac{2^8}{5} \qquad b)\ \frac{2^9}{5} \qquad c)\ 2^8 \qquad d)\ 2^9 \qquad e)\ \left(\frac{2^{58}}{10}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Resolução