CALCULUL PROBABILITĂŢILOR

Mircea Balaj

ORADEA

2007

Cuprins

Capitolul 1

Noţiuni şi rezultate fundamentale în Teoria Probabilităţilor

1.1 Introducere

Teoria Probabilităţilor studiază fenomene luate din realitatea concretă prin crearea unor modele care neglijează aspectele particulare, neesenţiale, operând asupra imaginilor abstractizate ale realitatăţii. Legătura între realitate şi abstractul matematic este realizată de către experimentul aleator, imagine fidelă a fenomenului studiat şi punct de plecare pentru definirea modelului matematic. Un experiment aleator se poate repeta de mai multe ori fără ca rezultatul să fie neapărat acelaşi. Orice realizare a unui astfel de experiment se va numi *probă*.

1.2 Corp de părţi

Definiţia 1.2.1. Fie Ω o mulţime nevidă. O familie nevidă Σ de părţi ale lui Ω se numeşte *corp de părţi* dacă satisface următoarele condiţii:

(i) $A \in \Sigma \Rightarrow \bar{A} \in \Sigma$, unde $\bar{A}$ este complementara lui A în raport cu Ω;

(ii) $A, B \in \Sigma \Rightarrow A \cup B \in \Sigma$.

Propoziţie 1.2.1. *Dacă Σ este un corp de părţi ale lui Ω , atunci:*

(a) $\emptyset,\ \Omega \in \Sigma$*;*

(b) $A_1, \dots A_n \in \Sigma \Rightarrow \bigcup_{i=1}^n A_i \in \Sigma$ *şi* $\bigcap_{i=1}^n A_i \in \Sigma$*;*

(c) $A, B \in \Sigma \Rightarrow A \setminus B \in \Sigma$.

Demonstraţie. (a) Deoarece $\Sigma \neq \emptyset$ putem lua $A \in \Sigma$. Din (i), $\overline{A} \in \Sigma$, iar din (ii), $\Omega = A \cup \overline{A} \in \Sigma$. Apoi, $\emptyset = \overline{\Omega} \in \Sigma$.

(b) Prima relaţie se demonstrează prin inducţie matematică. A doua rezultă din (i), şi (ii), folosind formulele lui de Morgan. Mai precis, avem

$$\bigcap_{i=1}^n A_i = \overline{\bigcup_{i=1}^n \overline{A}_i} \in \Sigma.$$

(c) Rezultă din $A \setminus B = A \cap \overline{B}$. □

Definiţia 1.2.2. Fie Ω o mulţime nevidă. O familie nevidă Σ de părţi ale lui Ω se numeşte *corp borelian de părţi* dacă satisface următoarele condiţii:

(i) $A \in \Sigma \Rightarrow \bar{A} \in \Sigma$;

(ii) $A_n \in \Sigma, n \geq 1 \Rightarrow \bigcup_{n=1}^\infty A_n \in \Sigma$.

Definiţia 1.2.3. Dacă Σ este un corp borelian de părţi ale lui Ω şi $\{A_n\}$ este un şir din Σ , *limita superioară*, respectiv cea *inferioară* a acestui şir se notează şi definesc astfel:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{k\geq n} A_k,$$

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n\geq 1}\bigcap_{k\geq n} A_k.$$

Dacă cele două limite sunt egale spunem că şirul este convergent şi valoarea lor comună se numeşte limita şirului.

Propoziţie 1.2.2. *Dacă Σ este un corp borelian de părţi ale lui Ω şi $\{A_n\}$ este un şir din Σ atunci $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma$, $\overline{\lim}_{n\to\infty} A_n, \underline{\lim}_{n\to\infty} A_n \in \Sigma$ şi dacă şirul este convergent, $\lim_{n\to\infty} A_n \in \Sigma$.*

Propoziţie 1.2.3. *Dacă Σ este un corp borelian de părţi ale lui Ω şi $\{A_n\}$ este un şir din Σ atunci:*

(i) $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \subset \underline{\lim}_{n\to\infty} A_n \subset \overline{\lim}_{n\to\infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

(ii) Dacă şirul $\{A_n\}_{n\geq 1}$ este ascendent (adică $A_n \subset A_{n+1}$, $\forall n \geq 1$) atunci $\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

(ii) Dacă şirul $\{A_n\}_{n\geq 1}$ este descendent (adica $A_n \supset A_{n+1}$, $\forall n \geq 1$), atunci $\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

Demonstraţie. (i) Vom demonstra doar incluziunea din stânga, celelalte două lăsându-le în seama cititorului. Pentru fiecare $n \geq 1$ avem $A_n \subset \bigcup_{k\geq n} A_k$. Rezultă

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \subset \bigcap_{n\geq 1}\bigcup_{k\geq n} A_k = \underline{\lim}_{n\to\infty} A_n.$$

(ii) Dacă şirul $\{A_n\}$ este ascendent, atunci pentru fiecare $n \geq 1$, $\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = A_n$, de unde, $\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcup_{n=1} A_n$. Ca urmare ultimele două incluziuni din (i) devin egalităţi, ceea ce conduce la concluzia dorită.

(iii) Ultima afirmaţie poate fi demonstrată în două moduri, pe care le vom sugera doar, lăsând cititorului satisfacţia unei demonstraţii complete. O primă modalitate, similară demonstraţiei anterioare, pleacă de la faptul că pentru un şir descendent $\overline{\lim}_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. Al doilea mod de demonstraţie pleacă de la faptul că dacă şirul $\{A_n\}$ este descendent, atunci şirul complementarelor $\{\overline{A}_n\}$ este ascendent. Concluzia dorită se obţine acum din (ii) şi una din formulele lui De Morgan. □

1.3 Câmp de evenimente

În Teoria Probabilităţilor, conceptele fundamentale sunt cele de eveniment şi probabilitate. Unui experiment i se asociază o multime Σ de evenimente notate $A, B, \ldots$.

Definiţia 1.3.1. Dacă $A \in \Sigma$, evenimentul *contrar* lui A sau non A, notat $\overline{A}$ este evenimentul care se produce într-o probă dacă şi numai dacă nu se produce A.

Definiţia 1.3.2. Dacă $A, B \in \Sigma$, spunem că evenimentul A *implică* B şi scriem $A \subset B$ dacă B se produce ori de câte ori se produce A.

Se observă că relaţia "$\subset$" este o relaţie de ordine partială in Σ.

Definiţia 1.3.3. Dacă $A, B \in \Sigma$, $A \cup B$ (mai putem spune A sau B) este acel eveniment care se realizează într-o probă dacă se realizează cel puţin unul dintre evenimentele A, B.

Definiţia 1.3.4. Dacă $A, B \in \Sigma$, $A \cap B$ (mai putem spune A şi B) este acel eveniment care se realizează într-o probă dacă se realizează şi A şi B.

Definiţia 1.3.5. Dacă $A, B \in \Sigma$, $A \setminus B$ este acel eveniment care se realizeaă într-o probă dacă şi numai dacă se realizează A şi nu se realizează B.

Definiţia 1.3.6. Evenimentul care se realizează în orice probă a experimentului se numeşte *eveniment sigur* şi se notează Ω . Evenimentul care nu se realizează în nicio probă se numeşte *eveniment imposibil* şi se notează $\emptyset$.

Definiţia 1.3.7. Un eveniment $\omega \in \Sigma$ se numeşte *elementar* dacă relaţia $A \subset \omega$ implică $A = \emptyset$ sau $A = \omega$. Un eveniment care nu este elementar se numeşte *eveniment compus*.

Un eveniment compus se identifică cu o submulţime a lui Ω care se obţine prin reuniunea tuturor evenimentelor elementare care-l implică. Rezultă că evenimentul sigur este reuniunea tuturor evenimentelor e-lementare , adică $\Omega = \{\omega_i : i \in I\}$. Datorită dualităţii eveniment$\Leftrightarrow$ submulţime a lui Ω, operaţiile cu evenimente împrumută toate proprietăţile operaţiilor cu mulţimi, inclusiv formulele lui de Morgan.

Din Definitiile 1.3.2 si 1.3.6 rezultă că pentru orice eveniment $A \in \Sigma$ are loc

$$\emptyset \subset A \subset \Omega,$$

deci, $\Sigma \subset \mathcal{P}(\Omega)$.

Din Definitiile 1.3.1 si 1.3.3 rezultă că Σ este un corp de parţi ale lui Ω, pe care îl vom nota (Ω, Σ) si îl vom numi *câmp de evenimente*. Dacă Σ este un corp borelian de parţi vom vorbi despre câmpul borelian de evenimente (Ω, Σ). Dacâ Ω , privită ca mulţimea tuturor evenimentelor elementare, este mulţime finită, câmpul de evenimente (Ω, Σ) se numeşte câmp finit de evenimente. În caz contrar vorbim de un câmp infinit de evenimente.

1.4 Câmp de probabilitate

Utilizând noţiunea de câmp de evenimente se defineşte axiomatic noţiunea de probabilitate.

Definiţia 1.4.1. Fie (Ω, Σ) un câmp de evenimente. Numim *probabilitate* pe acest câmp o funcţie $P : \Sigma \to \mathbb{R}$ care satisface axiomele (condiţiile):

(i) $P(\Omega) = 1$;

(ii) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, dacă $A, B \in \Sigma$, $A \cap B = \emptyset$.

Definiţia 1.4.2. Două evenimente $A, B \in \Sigma$ cu proprietatea că $A \cap B = \emptyset$ se numesc *incompatibile*.

Observaţia 1.4.1. Prin inducţie axioma (ii) se extinde astfel: Pentru $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \Sigma$, cu $A_i \cap A_j = \emptyset$, pentru $i \neq j$, are loc:
$P(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \Sigma_{i=1}^n P(A_i)$.
Această relaţie exprimă faptul ca o probabilitate este finit aditivă.

Definiţia 1.4.3. Fie (Ω, Σ) un câmp borelian de evenimente. Numim *probabilitate complet aditivă* pe acest câmp o funcţie $P : \Sigma \to \mathbb{R}$ care satisface axioma (i) din Definitia 1.4.1 şi
(ii') $P(\bigcup_{n=1}^\infty A_n) = \Sigma_{n=1}^\infty P(A_n)$, oricare ar fi şirul $\{A_n\}_{n\geq 1}$ din Σ cu $A_i \cap A_j = \emptyset$, pentru $i \neq j$.

Definiţia 1.4.4. Un câmp de evenimente pe care s-a definit o probabilitate P se numeşte *câmp de probabilitate* şi se notează (Ω, Σ, P) . Dacă (Ω, Σ) este un câmp borelian de evenimente şi P este o probabilitate complet aditivă, atunci (Ω, Σ, P) se numeste câmp borelian de probabilitate.

Propoziţie 1.4.1. *Fie (Ω, Σ, P) un câmp de probabilitate. Pentru orice evenimente $A, B \in \Sigma$, $\{A_i : 1 \leq i \leq n\} \subset \Sigma$ avem:*
(i) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$;
(ii) $P(\emptyset) = 0$;

(iii) $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$*;*

(iv) $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$*;*

(v) $0 \leq P(A) \leq 1$*;*

(vi) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$*;*

(vii) $P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \leq \Sigma_{i=1}^{n} P(A_i)$*;*

(viii) $P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i \cap A_j) +$
$\sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \cdots + (-1)^{n-1} P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i)$ *(formula lui Poincaré).*

Demonstraţie. (i) $A \cap \overline{A} = \emptyset \Rightarrow 1 = P(\Omega) = P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}) \Rightarrow P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

(ii) $P(\emptyset) = 1 - P(\overline{\Omega}) = 1 - 1 = 0$.

(iii) $A \subset B \Rightarrow B = A \cup (B \setminus A),\ A \cap (B \setminus A) = \emptyset \Rightarrow P(B) = P(A) + P(B \setminus A) \geq P(A)$.

(iv) $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$ şi $(A \setminus B) \cap (A \cap B) = \emptyset \Rightarrow P(A) = P(A \setminus B) + P(A \cap B) \Rightarrow P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$.

(v) $\emptyset \subset A \subset \Omega$. Din (iv) rezultă

$0 = P(\emptyset) \leq P(A) \leq P(\Omega) = 1$.

(vi) Avem $A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)$ şi

$(A \setminus B) \cap (B \setminus A) = (A \setminus B) \cap (A \cap B) = (B \setminus A) \cap (A \cap B) = \emptyset$.

Conform Observaţiei 1.4.1

$P(A \cup B) = P(A \setminus B) + P(B \setminus A) + P(A \cap B)$.

Dacă avem în vedere (iv), putem continua

$P(A \cup B) = P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

(vii) O demonstraţie clasică a proprietăţii (vii) se poate face prin inducţie matematică şi o lăsăm în seama cititorului. Vom da o altă demonstraţie considerând pentru aceasta evenimentele $B_1, B_2, \ldots, B_n$ definite astfel:

$B_1 = A_1, B_2 = A_2 \setminus A_1,\ B_3 = A_3 \setminus (A_1 \cup A_2), \dots, B_n = A_n \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right)$.

Se observă că $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$ şi $B_i \cap B_j = \emptyset$, pentru $i \neq j$. Deoarece $B_i \subset A_i$, $P(B_i) \leq P(A_i)$ pentru $i = 1, \dots, n$. Atunci

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

(viii) Se demonstrează prin inducţie matematică după n. Pentru $n = 2$ formula lui Poincaré se reduce la proprietatea (vi). Se presupune formula adevărată pentru n şi se demonstrează pentru $n+1$ astfel:

$$P(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i) = P\left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i \cup A_{n+1}\right] = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) + P(A_{n+1}) - P\left[(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \cap A_{n+1}\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i \cap A_j) + \dots + (-1)^{n-1} P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) +$$

$$+ P(A_{n+1}) - P\left[\bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap A_{n+1})\right]. \tag{1.4.1}$$

Folosind încă o dată ipoteza de inducţie avem

$$P\left[\bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap A_{n+1})\right] = \sum_{i=1}^{n} P(A_i \cap A_{n+1}) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i \cap A_j \cap A_{n+1}) + \dots$$

$$+ (-1)^{n-1} P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i \cap A_{n+1}). \tag{1.4.2}$$

Înlocuind $P\left[\bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap A_{n+1})\right]$ obţinut în (1.4.2) în relaţia (1.4.1) se obţine

$$P(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i) = \sum_{i=1}^{n+1} P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n+1} P(A_i \cap A_j) +$$

$$\sum_{1\le i<j<k\le n+1} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \cdots + (-1)^n P(\bigcap_{i=1}^{n+1} A_i).$$

Rezultă că formula (viii) este adevărată pentru orice $n \geq 2$. $\square$

Propoziţie 1.4.2. *Fie (Ω, Σ, P) un câmp borelian de probabilitate.*

(a) Dacă $\{A_n\}_{n\geq 1}$ este un şir ascendent de evenimente din Σ, adică $A_n \subset A_{n+1}$, $\forall n \geq 1$, atunci

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(\lim_{n\to\infty} A_n) = P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n). \tag{1.4.3}$$

(b) Dacă $\{A_n\}_{n\geq 1}$ este un şir descendent de evenimente din Σ, adică $A_n \supset A_{n+1}$, $\forall n \geq 1$, atunci

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(\lim_{n\to\infty} A_n) = P(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n). \tag{1.4.4}$$

Demonstraţie. (a) Să considerăm şirul de evenimente, incompatibile două câte două, $B_1 = A_1, B_2 = A_2 \setminus A_1, \ldots, B_n = A_n \setminus A_{n-1}, \ldots$

Evident $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. Rezultă că

$$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = P(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) = \Sigma_{n=1}^{\infty} P(B_n),$$

deci seria $\Sigma_{n=1}^{\infty} P(B_n)$ este convergentă. Fie $S_n = \Sigma_{k=1}^{n} P(B_k)$. Atunci, pentru $n \geq 2$,

$$S_n = P(A_1) + \Sigma_{k=2}^{n} P(A_k \setminus A_{k-1}) = P(A_1) + \Sigma_{k=2}^{n} [P(A_k) - P(A_{k-1}],$$

deoarece şirul $\{A_n\}_{n\geq 1}$ este ascendent. Rezultă $S_n = P(A_n)$.

Deoarece $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = \lim_{n\to\infty} S_n$ şi $\Sigma_{n=1}^{\infty} P(B_n) = P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)$, rezultă (1.4.3).

(b) Dacă $\{A_n\}_{n\geq 1}$ este şir descendent atunci şirul $\{\overline{A}_n\}_{n\geq 1}$ este ascendent şi aplicându-i (1.4.3) obţinem

$$\lim_{n\to\infty} P(\overline{A}_n) = P(\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A}_n) = P\left(\overline{\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i}\right) = 1 - P(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i).$$

Ţinând seama că $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$, se obţine (1.4.4). □

Propoziţie 1.4.3. *Fie $\{A_n\}_{n\geq 1}$ un şir de evenimente din câmpul borelian de probabilitate (Ω, Σ, P). Atunci*

$$P(\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n) \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} P(A_n) \leq \overline{\lim}_{n\to\infty} P(A_n) \leq P(\overline{\lim}_{n\to\infty} A_n).$$

Demonstraţie. Deoarece $\{P(A_n)\}_{n\leq 1}$ este un şir de numere reale, se ştie că $\underline{\lim}_{n\to\infty} P(A_n) \leq \overline{\lim}_{n\to\infty} P(A_n)$.

Ramân deci de demonstrat inegalităţile

$$P(\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n) \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} P(A_n). \tag{1.4.5}$$

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} P(A_n) \leq P(\overline{\lim}_{n\to\infty} A_n). \tag{1.4.6}$$

Pentru demonstrarea inegalităţii (1.4.5), definim un nou şir de evenimente $\{B_n\}_{n\geq 1}$, prin $B_n = \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k, \quad n \geq 1$. Evident acest şir este ascendent, fapt ce implică relaţia $B_n = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$. Rezultă că

$$\lim_{n\to\infty} B_n = \lim_{n\to\infty} (\bigcup_{i=1}^{n} B_i) = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \underline{\lim}_{n\to\infty} A_n.$$

Din egalitatea precedentă şi din Propozitia 1.4.2(a) obţinem

$$P(\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n) = P(\lim_{n\to\infty} B_n) = \lim_{n\to\infty} P(B_n).$$

Din relaţia de definiţie a şirului $\{B_n\}_{n\geq 1}$ rezultă că $B_n \subset A_k$, deci $P(B_n) \leq P(A_k)$, pentru orice $k \geq n$. Deducem că $P(B_n) \leq \inf_{k\geq n} P(A_k)$.

Trecând la limită în această ultimă inegalitate, obţinem

$$\lim_{n\to\infty} P(B_n) \leq \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} P(A_k) = \underline{\lim}_{n\to\infty} P(A_n).$$

$\square$

Corolarul 1.4.4. *Fie $\{A_n\}_{n\geq 1}$ un şir convergent de evenimente din câmpul borelian de probabilitate (Ω, Σ, P). Atunci*

$$P(\lim_{n\to\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} P(A_n).$$

Propoziţie 1.4.5. *(Inegalitatea lui Boole) Dacă (Ω, Σ, P) un câmp borelian de probabilitate şi $\{A_i : i \in I\}$ este o mulţime cel mult numărabilă de evenimente, atunci*
$P(\bigcap_{i\in I} A_i) \geq 1 - \sum_{i\in I} P(\overline{A}_i)$.

Demonstraţie. $P(\bigcap_{i\in I} A_i) = 1 - P(\overline{\bigcap_{i\in I} A_i}) = 1 - P(\bigcup_{i\in I} \overline{A}_i) \geq 1 - \sum_{i\in I} P(\overline{A}_i)$. $\square$

1.5 Trei exemple de câmpuri de probabilitate

(a) Fie Ω o mulţime finită $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$. Luăm $\Sigma = \mathcal{P}(\Omega)$. Pentru a defini o probabilitate pe câmpul de evenimente (Ω, Σ) astfel format considerăm $p_1, \ldots p_n$ numere reale nenegative si luăm $P(\omega_i) = p_i$. Orice eveniment $A \in \Sigma$, $A \neq \emptyset$ va fi format din reuniunea unui număr finit de evenimente elementare, $A = \{\omega_{i_1}, \ldots, \omega_{i_k}\}$. Două evenimente elementare distincte ω_i, ω_j sunt incompatibile, deoarece în caz contrar, $\emptyset \neq \omega_i \cap \omega_j \subsetneqq \omega_j$. Din definiţia probabilităţii rezultă

$$P(A) = P(\omega_{i_1}) + \cdots + P(\omega_{i_k}) = p_{i_1} + \cdots + p_{i_k}.$$

Deoarece $P(\Omega) = 1$, rezultă că pentru a putea defini o probabilitate numerele $p_i \geq 0$ trebuie să satisfacă condiţia

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1. \tag{1.5.1}$$

În particular dacă evenimentele elementare ω_i sunt echiprobabile, din (1.5.1) rezultă $p_i = \frac{1}{n}$, $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$. Obţinem, în acest caz $P(A) = \frac{k}{n}$ şi ajungem la definiţia clasică a probabilităţii unui eveniment, ca raportul dintre numărul evenimentelor (cazurilor) favorabile şi numărul evenimentelor (cazurilor) posibile.

(b) Fie $\Omega = \{\omega_i\}_{i \in I}$, cu I o mulţime numărabilă de indici şi $\{p_i\}_{i \in I}$ o familie numărabilă de numere reale nenegative cu $\sum_{i \in I} p_i = 1$. Dacă evenimentul $A \in \Sigma = \mathcal{P}(\Omega)$ este format din evenimentele elementare $\{\omega_j\}_{j \in J}$, $J \subset I$ probabilitatea lui va fi $P(A) = \sum_{j \in j} p_j$.

Să remarcăm că în acest caz, dacă am presupune $p_i = p$, $\forall i \in I$, condiţia $\sum_{i \in I} p_i = 1$ ne-ar conduce la o contradicţie.

(c)Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ o mulţime masurabilă Lebesgue cu $\mu(\Omega) > 0$ şi Σ corpul borelian al părţilor lui Ω măsurabile Lebesgue. Aplicaţia $P : \Sigma \to [0, \infty)$ definită prin

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$$

este o probabilitate complet aditivă numită *probabilitate geometrică*, deci (Ω, Σ, P) este un câmp borelian de probabilitate.

1.6 Probabilitate condiţionată. Evenimente independente.

Definiţia 1.6.1. Fie (Ω, Σ, P) un câmp de probabilitate şi A, B două evenimente cu $P(B) > 0$. Se numeşte *probabilitatea de apariţie a eveni-*

mentului A conditionată de B (sau *probabilitatea lui A relativ la B*) şi se notează

$$P(A \mid B) = P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Propoziţie 1.6.1. *Dacă (Ω, Σ, P) este un câmp (borelian) de probabilitate, atunci (Ω, Σ, P_B) este de asemenea un câmp (borelian) de probabilitate.*

Demonstraţie. Pentru $A \in \Sigma$, $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \geq 0$.

$P_B(\Omega) = \frac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$.

Dacă $\{A_n\}_{n\geq 1}$ este un şir de evenimente din Σ două câte două incompatibile, atunci evenimentele $B \cap A_n,\ n \geq 1$ sunt şi ele incompatibile două câte două. Rezultă că

$$P_B(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \frac{P[(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \cap B]}{P(B)} = \frac{P[\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n \cap B)]}{P(B)} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P(A_n \cap B)}{P(B)} = \sum_{n=1}^{\infty} P_B(A_n).$$

□

Propoziţia următoare rezultă imediat din definiţia probabilităţii condiţionate.

Propoziţie 1.6.2. *Fie A, B două evenimente din câmpul de probabilitate (Ω, Σ, P) cu $P(A) \cdot P(B) > 0$. Atunci $P(A) \cdot P_A(B) = P(B) \cdot P_B(A) = P(A \cap B)$.*

Propoziţie 1.6.3. *Fie $A_1, A_2, \ldots, A_n$ evenimente din câmpul de probabilitate (Ω, Σ, P) cu $P(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i) > 0$. Are loc:*

$$P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = P(A_1)\ P(A_2 \mid A_1)\ P(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \ldots P(A_n \mid \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i).$$

Demonstraţie. Folosind formula probabilităţii conditionate vom obţine

$$P(A_1)\ P(A_2 \mid A_1)\ P(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \dots P(A_n \mid \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i) =$$

$$P(A_1)\frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1)}\ \frac{P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}{P(A_1 \cap A_2)} \dots \frac{P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i)}{P(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i)} = P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i).$$

□

Definiţia 1.6.2. Două evenimente A, B din câmpul de probabilitate (Ω, Σ, P) se numesc *independente* dacă $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

În general dacă $\{A_i : i \in I\}$ este o familie finită sau infinită de evenimente spunem ca acestea sunt independente dacă pentru orice familie finită de indici distincţi $\{i_1, i_2, \dots, i_k\} \subset I$ are loc

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2}) \dots P(A_{i_k}).$$

Observaţia 1.6.1. În general independenţa evenimentelor două căte două nu implică independenţa în totalitate a evenimentelor aşa cum o dovedeşte următorul exemplu:

Fie $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, $\Sigma = \mathcal{P}(\omega)$, $P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{4}$, $1 \le i \le 4$. Considerăm evenimentele $A = \{\omega_1, \omega_2\}$, $B = \{\omega_1, \omega_3\}$, $C = \{\omega_1, \omega_4\}$. Avem $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$, $P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C) = \frac{1}{4}$, iar $P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4}$. Evenimentele A, B, C sunt independente două căte două deoarece

$P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{1}{4}$, $P(A \cap C) = P(A)P(C) = \frac{1}{4}$,

$$P(B \cap C) = P(B)P(C) = \frac{1}{4},$$

dar

$$P(A \cap B \cap C) = P(\{\omega_1\}) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8} = P(A)P(B)P(C)$$

deci A, B, C nu sunt independente în totalitatea lor.

Exemplul 1.6.1. Trei urne U_1, U_2, U_3 conţin

U_1: 2 bile albe, 3 bile negre;

U_2: 3 bile albe, 2 bile negre;

U_3: 4 bile albe, o bila neagră.

(a) Care este probabilitatea ca extrăgând din fiecare urnă căte o bilă să se obţină trei bile albe?

(b) Se extrage o bilă din urnă U_1 care se pune în urna U_2, apoi din urna U_2 se extrage o bilă care se pune în urna U_3. În sfârşit, se extrage o bilă din urna U_3. Care este probabilitatea ca cele trei bile extrase să fie albe?

Solutie. Fie A_i evenimentul ca bila extrasă din urna $U_i (i = 1, 2, 3)$ sa fie albă. Pentru ambele părţi ale exerciţiului evenimentul a cărui probabilitate vrem să o determinăm este $A_1 \cap A_2 \cap A_3$.

În cazul (a) evenimentele A_1, A_2, A_3 sunt independente deci

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) = \frac{2}{5}\,\frac{3}{5}\,\frac{4}{5} = \frac{24}{125}.$$

În al doilea caz A_2 depinde de A_1, A_3 de A_2. Folosind formula din Propozitia 1.6.3 avem

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) = \frac{2}{5}\,\frac{4}{6}\,\frac{5}{6} = \frac{2}{9}.$$

Definiţia 1.6.3. O familie cel mult numarabilă $\{A_i : i \in I\}$ de evenimente dintr-un câmp de evenimente (Ω, Σ) formează un *sistem complet* de evenimente dacă

(i) $A_i \cap A_j = \emptyset$ pentru $i, j \in I, i \neq j$;

(ii) $\bigcup_{i \in I} A_i = \Omega$.

Teorema 1.6.4. *(formula probabilităţi totale) Fie $\{A_i : i \in I\}$ un sistem complet de evenimente dintr-un câmp (borelian) de probabilitate (Ω, Σ, P). Pentru orice eveniment $A \in \Sigma$ are loc*

$P(A) = \sum_{i \in I} P(A_i)\; P(A|A_i)$.

Demonstraţie. Deoarece

$$A = A \cap \Omega = A \cap \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) = \bigcup_{i \in I} (A \cap A_i),$$

ţinând cont că evenimentele $A \cap A_i$ sunt două câte două incompatibile, putem scrie

$$P(A) = P\left(\bigcup_{i \in I} (A \cap A_i) \right) = \sum_{i \in I} P(A_i) \frac{P(A \cap A_i)}{P(A_i)} = \sum_{i \in I} P(A_i) P(A|A_i).$$

□

Corolarul 1.6.5. *(formula lui Bayes) Dacă A este un eveniment din câmpul de probabilitate (Ω, Σ, P) cu $P(A) > 0$ şi $\{A_i : i \in I\}$ este un sistem complet de evenimente din acest câmp atunci:*

$$P(A_k|A) = \frac{P(A_k) \cdot P(A|A_k)}{\sum_{i \in I} P(A_i) \cdot P(A|A_i)}, \quad \forall k \in I.$$

Demonstraţie. Ţinând cont de definiţia probabilităţii condiţionate şi de formula probabilităţii totale avem

$$P(A_k|A) = \frac{P(A \cap A_k}{P(A)} = \frac{P(A_k) \cdot P(A|A_k)}{\sum_{i \in I} P(A_i) \cdot P(A|A_i)}.$$

□

Observaţia 1.6.2. Formula lui Bayes îsi găseşte aplicaţie în determinarea probabilităţii cauzelor producerii unui efect A atunci când se cunoaşte un sistem complet de cauze; $P(A|A_k)$ este probabilitatea de a fi acţionat cauza A_k, în ipoteza că A s-a produs.

Exemplul 1.6.2. Trei urne U_1, U_2, U_3 au compoziţiile ca în Exemplul 1.6.1. Dintr-o urnă, aleasă la întâmplare, se extrage o bilă. Se cer:

(a) Probabilitatea ca bila extrasă să fie albă.

(b) Ştiind că bila extrasă a fost albă să se determine probabilitatea ca ea sa provină din urna U_2.

Demonstraţie. Să notăm cu A_i evenimentul ca extragerea să se facă din urna $U_i, i \in \{1,2,3\}$ şi cu A evenimentul ca bila extrasă să fie albă. Din datele problemei avem $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{3}$, $P(A|A_1) = \frac{2}{5}, P(A|A_2) = \frac{3}{5}, P(A|A_1) = \frac{4}{5}$.

Probabilitatea cerută la punctul (a), $P(A)$ se determină cu formula probabilităţii totale, ţinând cont că $\{A_1, A_2, A_3\}$ constituie un sistem complet de evenimente.

$$P(A) = P(A_1)P(A|A_1) + P(A_2)P(A|A_2) + P(A_3)P(A|A_3) =$$

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}+\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{5}=\frac{3}{5}.$$

La punctul (b) avem de determinat $P(A_2|A)$ şi pentru aceasta folosim formula lui Bayes.

$$P(A_2|A) = \frac{P(A_2)P(A|A_2)}{\sum_{i=1}^{3} P(A_i)P(A|A_i)} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{1}{3}.$$

□

Teorema 1.6.6. *(Borel-Cantelli) Fie $\{A_n\}_{n\geq 1}$ un şir de evenimente dintr-un câmp borelian de probabilitate şi $s = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$.*

(a) Dacă $s < \infty$, atunci $P(\overline{\lim}_{n\to\infty} A_n) = 0$.

(b) Dacă $s = \infty$ şi evenimentele A_n, $n \geq 1$ sunt complet indedependente atunci $P(\overline{\lim}_{n\to\infty} A_n) = 1$.

Demonstraţie. (a) Dacă notăm cu $A = \overline{\lim}_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$, atunci $A \subset \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$, $\forall n \geq 1$. Din momotonia şi subaditivitatea funcţiei P rezultă că

$$P(A) \leq P(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k) \leq \sum_{k=n}^{\infty} P(A_k). \tag{1.6.1}$$

Deoarece seria $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$ este convergentă rezultă că $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} P(A_k) = 0$ ceea ce, împreună cu relaţia (1.6.1, implică $P(A) = 0$.

(b) Considerând limita inferioară a evenimentelor contrare şi păstrând pentru evenimentul A semnificaţia de la punctul (a), avem

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}\overline{A} = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}\overline{A}_k = \overline{\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k\right)} = \overline{A}.$$

Evenimentele $A_n,\ n \geq 1$ fiind complet indedependente şi evenimentele contrare $\overline{A}_n$ sunt complet indedependente, deci pentru orice $n \geq 1$ şi $N > n$ avem

$$P(\bigcap_{k=n}^{\infty}\overline{A}_k) \leq P(\bigcap_{k=n}^{N}\overline{A}_k) = \prod_{k=n}^{N}P(\overline{A}_k) = \prod_{k=n}^{N}[1 - P(A_k)].$$

Deoarece pentru $x \in [0,1]$ este adevărată inegalitatea $1 - x \leq e^{-x}$, rezultă că

$$P(\bigcap_{k=n}^{\infty}\overline{A}_k) \leq \prod_{k=n}^{N}e^{-P(A_k)} = e^{-\sum_{k=n}^{\infty}P(A_k)}. \tag{1.6.2}$$

Cum seria $\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)$ este divergentă rezultă că $\lim_{N\to\infty}\sum_{k=n}^{N}P(A_k) = \infty$, de unde $\lim_{N\to\infty}e^{-\sum_{k=n}^{N}P(A_k)} = 0$ şi, ţinând cont de relaţia (1.6.2), rezultă că $P(\bigcap_{k=n}^{\infty}\overline{A}_k) = 0$, pentru orice $n \geq 1$.

Şirul $\{\bigcap_{k=n}^{\infty}\overline{A}_k\}_{n\geq 1}$ fiind ascendent, este convergent şi limita sa este é $\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}\overline{A}_k = \overline{A}$. Ţinând cont de continuitatea funţiei P, putem scrie $P(\overline{A}) = P(\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}\overline{A}_k) = P(\lim_{n\to\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}\overline{A}_k) = 0$ şi demonstraţia este astfel încheiată. □

1.7 Scheme probabilistice

Există o serie de fenomene care din punct de vedere probabilistic se desfăşoară la fel. Vom prezenta anumite procedee de calcul ale probabilităţii pentru clase de astfel de fenomene.

(a) Schema binomială (schema lui Bernoulli cu bila întoarsă)

Această schemă probabilistică se aplică experimentelor în care un eveniment precizat apare cu aceiaşi probabilitate la fiecare repetare a experimentului considerat şi în care se cere determinarea probabilitatăţii ca în n probe ale experimentului, evenimentul precizat să se realizeze exact de k ori.

Modelul probabilistic se realizează printr-o urnă care conţine bile de două culori, să zicem albe şi negre, într-o proporţie cunoscută. Experimentul constă în extragerea unei bile, înregistrarea culorii bilei extrase şi reintroducerea bilei in urnă. Se repetă experimentul de n ori. Se cere probabilitatea ca din cele n bile extrase exact k să fie de culoare albă.

Fie A evenimentul ca la o efectuare a experimentului să se obţina o bilă de culoare albă şi probabilitatea acestuia să fie p, adică $p = P(A)$. Evenimentul contrar $\overline{A}$ constă în obţinerea unei bile negre şi notăm $q = 1 - p = P(\overline{A})$. Deoarece la fiecare repetare a experimentului bila extrasă se reintroduce in urnă, aceste probabilităţi ramân neschimbate. Notăm cu A_i evenimentul ca la proba de rang i să se realizeze evenimentul A; atunci $P(A_i) = P(A) = p$, $P(\overline{A}_i) = P(\overline{A}) = q$ pentru fiecare $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Evenimentul $B_{n,k}$ de a obţine k bile albe şi $n - k$ bile negre în cele n extrageri se scrie

$$B_{n,k} = \bigcup_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} (A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k} \cap \overline{A}_{i_{k+1}} \cap \cdots \cap \overline{A}_{i_n}),$$

unde reuniunea se ia dupa toţi indicii $i_1, i_2, \ldots i_k$ aleşi în toate modurile posibile astfel incât $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n$, $\{i_{k+1}, \ldots, i_n\} = \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{i_1, i_2, \ldots i_k\}$. Evenimentele care apar în această reuniune sunt două câte două incompatibile. Din acest motiv

$$P(B_{n,k}) = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k} \cap \overline{A}_{i_{k+1}} \cap \cdots \cap \overline{A}_{i_n}).$$

Evenimentele din fiecare intersecţie fiind independente, putem scrie

$$P(B_{n,k}) = \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n} P(A_{i_1})P(A_{i_2})\dots P(A_{i_k})P(\overline{A}_{i_{k+1}})\cdots\cap P(\overline{A}_{i_n})$$

$$= C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Observaţia 1.7.1. Se observă că această probabilitate coincide cu coeficientul lui x^k din dezvoltarea binomului $(px+q)^n$, ceea ce conduce la denumirea acestei scheme probabilistice ca schema binomială.

Exemplul 1.7.1. În medie, din 3 vizitatori ai unei consignaţii, 2 cumpără şi unul nu. Care este probabilitatea ca din 10 persoane aflate in consignaţie exact 4 să cumpere?

Solutie. Se aplică schema lui Bernoulli cu bila întoarsă în cazul $p = \frac{2}{3}, q = \frac{1}{3}, n = 10, k = 4$.
$P = C_{10}^4(\frac{2}{3})^4(\frac{1}{3})^6$.

(b) Schema lui Bernoulli cu mai multe stări (schema multinomială sau polinomială)

Este o generalizare a schemei precedente şi se aplică pentru determinarea probabilităţii ca r evenimente care constituie un sistem complet de evenimente asociate unui experiment, să apară de un număr precizat de ori în n probe. Modelul probabilistic se realizează printr-o urnă cu bile de r culori ($r \ge 2$), compoziţia urnei fiind cunoscută. Se extrag, una câte una, n bile din urnă, cu reintroducerea bilei extrase în urnă, după constatarea culorii. Probabilitatea cautată $P(n; k_1, k_2, \dots k_r)$ este probabilitatea ca din cele n bile extrase k_i să fie de culoarea i ($i = 1, \dots, r$), unde $k_1 + k_2 + \dots k_r = n$. Ca şi în cazul schemei binomiale găsim

$$P(n; k_1, k_2, \dots k_r) = \frac{n!}{k_1!k_2!\dots k_r!}\, p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_r^{k_r},$$

unde p_i reprezintă probabilitatea ca la o efectuare a experimentului să se obţină o biă de culoarea i.

Observaţia 1.7.2. Se observă că această probabilitate coincide cu coeficientul lui $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_r^{k_r}$ din dezvoltarea polinomului $(p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots p_r x_r)^n$, de unde şi denumirea de schema polinomială sau multinomială.

Exemplul 1.7.2. Se aruncă un zar de 6 ori. Care este probabilitatea de a obţine de 3 ori faţa cu un punct, de două ori o faţă cu un număr prim şi o dată o faţă cu un număr compus?

Soluţie Experimentul se repetă în aceleaşi condiţii. Să notăm cu A_1, A_2, A_3 evenimentele ca la o aruncare să obţinem faţa cu un punct, cu un număr prim, respectiv cu un număr compus. Evident $\{A_1, A_2, A_3\}$ constituie un sistem complet. Avem $P(A_1) = \frac{1}{6}, P(A_2) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, P(A_3) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$,

$$P(6; 3, 2, 1) = \frac{6!}{3!2!1!}(\frac{1}{6})^3(\frac{1}{2})^2(\frac{1}{3})^1 = \frac{5}{108}.$$

(c) Schema hipergeometrică (schema lui Bernoulli cu bila neîntoarsă)

Se aplică experimentelor cu următorul model probabilistic: Se consideră o urnă care conţine a bile de culoare albă şi b bile de culoare neagră. Se extrag n bile din urnă, una câte una, fără întoarcerea bilei extrase în urnă. Se cere probabilitatea ca din cele n bile extrase exact k să fie de culoare albă.

Notăm cu A_i evenimentul ca la proba de rang i să se obţină o bilă de culoare albă. Evenimentul $B_{n,k}$ care constă în obţinerea a k bile albe în cele n etrageri, se scrie:

$$B_{n,k} = \bigcup_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le n} (A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k} \cap \overline{A}_{i_{k+1}} \cap \dots \cap \overline{A}_{i_n}),$$

unde reuniunea se ia dupa toţi indicii $i_1, i_2, \dots i_k$ aleşi în toate modurile posibile astfel încât $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$, $\{i_{k+1}, \dots, i_n\} = \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{i_1, i_2, \dots i_k\}$. Evenimentele care apar în această reuniune sunt două câte două incompatibile. Din acest motiv

$$P(B_{n,k}) = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k} \cap \overline{A}_{i_{k+1}} \cap \cdots \cap \overline{A}_{i_n}). \quad (1.7.1)$$

Evenimentele $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_k} \overline{A}_{i_{k+1}} \dots \overline{A}_{i_n}$ nu sunt independente. Pentru calculul probabilităţii unei astfel de intersecţii se utilizează formula dată de Propozitia 1.6.3. Să considerăm probabilitatea unei astfel de intersecţii

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k \cap \overline{A}_{k+1} \cap \cdots \cap \overline{A}_n) = P(A_1) P(A_2 \mid A_1) P(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \dots$$

$$P(A_k \mid \bigcap_{i=1}^{k-1} A_i) P(\overline{A}_{k+1} \mid \bigcap_{i=1}^{k} A_i) \dots P(\overline{A}_n \mid A_1 \cap \cdots \cap A_k \cap \overline{A}_{k+1} \cap \cdots \cap \overline{A}_{n-1}) =$$

$$\frac{a}{a+b} \cdot \frac{a-1}{a+b-1} \cdots \frac{a-k+1}{a+b-k+1} \cdot \frac{b}{a+b-k} \cdot \frac{b-1}{a+b-k-1} \cdots \frac{b-n+k+1}{a+b-n+1}$$

$$= \frac{A_a^k A_b^{n-k}}{A_{a+b}^n}.$$

Toate celelalte intersecţii de evenimente care apar în formula (1.7.1) au aceiaşi probabilitate cu cea calculată mai sus, avand numărătorii fracţiilor comutaţi în toate modurile posibile. Rezultă că

$$P(B_{n,k}) = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \frac{A_a^k A_b^{n-k}}{A_{a+b}^n} = C_n^k \frac{A_a^k A_b^{n-k}}{A_{a+b}^n} = \frac{C_a^k C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n}.$$

Observaţia 1.7.3. Experimentul prezentat este echivalent, din punct de vedere probabilistic, cu extragerea simultană a n bile. Calculul probabilităţii ca din cele n bile extrase k sa fie de culoare albă şi $n-k$ sa fie negre se poate face pornind de la definiţia clasică a probabilităţii.

Numărul cazurilor posibile este C_{a+b}^{n}. Numărul cazurilor favorabile este produsul dintre numărul de moduri de a lua k bile albe avand la dispoziţie a bile albe si numărul de moduri de a lua $n-k$ bile negre din b bile negre, adică $C_a^k C_b^{n-k}$.

Observaţia 1.7.4. Desigur ca numărul bilelor albe (respectiv, negre) extrase nu poate depăşi numărul bilelor albe (respectiv, negre) existente în urnă, adică $0 \leq k \leq a$, $0 \leq n-k \leq b$. Rezultă de aici că $max\{0, n-k\} \leq k \leq min\{a, n\}$.

Exemplul 1.7.3. Într-o grupă de 26 de studenţi sunt 10 băieţi. Care este probabilitatea ca formând la întamplare un grup de 17 studenţi acesta sa fie format din 8 baieţi şi 9 fete?

Soluţie. Aplicând schema hipergeometrică obţinem

$$P = \frac{C_{10}^{8} C_{16}^{9}}{C_{26}^{17}}.$$

(d) Schema bilei neîntoarse cu mai multe stări

Se consideră o urnă care conţine bile de r culori, câte a_i bile de culoarea $i, i = \overline{1, r}$. Se extrag n bile din urnă, una câte una, fără întoarcerea bilei extrase în urnă. Se cere probabilitatea ca din cele n bile extrase k_i să fie de culoarea $i, i = \overline{1, r}$. Această probabilitate se obţine imediat folosind definiţia clasică a probabilităţii. Numărul cazurilor posibile este dat de numărul modurilor în care pot fi luate cele n bile din urnă, acesta fiind C_{a+b}^{n}. Din urnă pot fi luate k_i bile de culoarea i în $C_{a_i}^{k_i}$ moduri. Numărul cazurilor favorabile este $C_{a_1}^{k_1} C_{a_2}^{k_2} \ldots C_{a_r}^{k_r}$. Probabilitatea căutată este

$$P = \frac{C_{a_1}^{k_1} C_{a_2}^{k_2} \ldots C_{a_r}^{k_r}}{C_{a+b}^{n}}.$$

Exemplul 1.7.4. Într-o cutie sunt aşezate la întâmplare 40 de baterii provenind de la trei fabrici: 15 de la F_1, 18 de la F_2 şi restul de la F_3. Care este probabilitatea ca un cumpărător, care este servit cu 10 baterii luate de vânzător la întamplare să primească 5 baterii de la F_1, 3 de la F_2 si 2 de la F_3?

Soluţie. Aplicănd schema bilei întoarse cu 3 culori diferite obţinem

$$P(10;5,3,2)=\frac{C_{15}^5 C_{18}^3 C_7^2}{C_{40}^{10}}.$$

(e) Schema lui Poisson

Se aplică în cazul a n experimente independente, în experimentul i un eveniment A realizânduse cu probabilitatea p_i. Se cere probabilitatea ca evenimentul A să apară exact de k ori în cele n experimente. Notăm cu $B_{n,k}$ evenimentul a cărui probabilitate o calculăm.

$$B_{n,k}=\bigcup_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n}(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_k}\cap\overline{A}_{i_{k+1}}\cap\cdots\cap\overline{A}_{i_n}),$$

unde reuniunea se ia dupa toţi indicii $i_1, i_2, \dots i_k$ aleşi în toate modurile posibile astfel incât $1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n$, $\{i_{k+1},\dots,i_n\}=\{1,2,\dots,n\}\setminus\{i_1,i_2,\dots i_k\}$. Deoarece evenimentele reuniunii sunt două căte două incompatibile, iar cele din fiecare intersecţie sunt evenimente independente, se obţine

$$P(B_{n,k})=\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n}P(A_{i_1})P(A_{i_2})\dots P(A_{i_k})P(\overline{A}_{i_{k+1}})\cdots\cap P(\overline{A}_{i_n})=$$

$$\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n}p_{i_1}p_{i_2}\dots p_{i_k}q_{i_{k+1}}\dots q_{i_n}.$$

Observaţia 1.7.5. Probabilitatea din formula precedentă este data de coeficientul lui x^k in polinomul $\phi(x)=(p_1x+q_1)(p_2x+q_2)\dots(p_nx+q_n)$ numit funcţia generatoare a probabilităţii $P(B_{n,k})$.

Observaţia 1.7.6. Dacă se consideră $p_i = p, \ i = \overline{1,n}$ se obţine schema binomială.

Exemplul 1.7.5. La un serviciu financiar sunt verificate lucrările a 3 birouri care lucrează corect în proporţie de 97%, 96% şi respectiv 95%. Se alege la întamplare câte o lucrare de la fiecare birou. Cu ce probabilitate se vor găsi două lucrări corecte?

Soluţie Se aplică schema lui Poisson cu $n = 3, p_1 = 0,97, q_1 = 1-p_1 = 0,03, p_2 = 0,96, q_2 = 0,04, p_3 = 0,95, q_3 = 0,05$. Probabilitatea căutată este coeficientul lui x^2 din polinomul

$$\phi(x) = (p_1x + q_1)(p_2x + q_2)(p_3x + q_3),$$

adica $P(B_{3,2}) = p_1p_2q_3 + p_1q_2p_3 + q_1p_2p_3 = 0,11078$.

(f) Schema geometrică

Se repetă un experiment, repetările fiind independente. La fiecare probă este cercetată apariţia evenimentului A. Se cere probabilitatea ca evenimentul A să se producă prima oară la proba de rang k.

Modelul probabilistic se realizează printr-o urnă cu bile de două culori, albe şi negre, într-o proporţie cunoscută. Se extrag bile din urnă, una câte una, cu întoarcerea acestora după constatarea culorii. Se cere probabilitatea ca prima bila albă sa se obţină la a k-a extragere.

Notam cu A evenimentul a cărui probabilitate vrem să o determinăm şi cu A_i evenimentul ca la proba de rang i să obţinem bila albă. Atunci $A = \overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \cdots \cap \overline{A}_{k-1} \cap A_k$.

Ştiind că $P(A_i) = p, \ P(\overline{A}_i) = 1-p = q$ şi că $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \cdots \cap \overline{A}_{k-1}, A_k$ sunt independente, deoarece compoziţia urnei este aceiaşi înaintea oricărei extrageri, se obţine

$$P(A) = P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)\dots P(\overline{A}_{k-1})P(A_k) = p\, q^{k-1}.$$

Exemplul 1.7.6. La un magazin de galanterie pentru bărbaţi sunt cămăşi de aceiaşi mărime în proporţie de 51% talia I şi 49% talia a II-a. Care este probabilitatea ca un cumpărător care a doresşte o cămaşă de această mărime, de talia I să o obţină la a şasea încercare?

Soluţie Cu formula de mai sus, probabilitatea căutată va fi $P = 0,51 \cdot (0,49)^5$

(g) Schema lui Pascal

Generalizează schema geometrică, experimentul efectuânduse ca şi în cazul schemei geometrice, dar cerânduse probabilitatea ca a n-a bilă albă să se obţină după k bile negre, adică la la a $n+k$-a extragere. Dacă notăm cu $B_{n,k}$ evenimentul pentru care se cere calculată probabilitatea, atunci acesta se poate scrie sub forma $B_{n,k} = A_{n,k} \cap A_{n+k}$, unde prin $A_{n,k}$ s-a notat evenimentul ca în primele $n+k-1$ extrageri să se obţină exact $n-1$ bile albe, iar prin A_{n+k} s-a notat evenimentul ca la a $n+k$-a extragere să se obţină bilă albă. Probabilitatea evenimentului $A_{n,k}$ se calculează cu schema binomială,

$$P(A_{n,k}) = C_{n+k-1}^{n-1}\, p^{n-1} q^k,$$

iar probabilitatea evenimentului A_{n+k} este p. Evenimentele $A_{n,k}$ şi A_{n+k} fiind independente, rezultă că

$$P(B_{n,k}) = P(A_{n,k})P(A_{n+k}) = C_{n+k-1}^{n-1}\, p^n q^k = C_{n+k-1}^{k}\, p^n q^k.$$

Observaţia 1.7.7. Probabilitatea $P(B_{n,k})$ se obţine ca şi coeficient al lui x^k în dezvoltarea seriei

$$\frac{p^n}{(1-qx)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} C_{n+k-1}^{k}\, p^n q^k x^k, \quad |\, qx \,| < 1.$$

numită seria binomială. De aceea schema lui Pascal se mai numeşte schema binomială cu exponent negativ.

1.8 Probleme

1. O persoană urmează să dea patru telefoane la patru numere diferite. Notăm cu A_i evenimentul că la chemarea i nu primeşte răspuns. Cum se scriu, in funcţie de A_1, A_2, A_3, A_4, evenimentele:

(i) primeşte răspuns la toate chemările;

(ii) la cel mult o chemare nu primeşte răspuns;

(iii) la cel puţin o chemare nu primeşte răspuns;

(iv) la o singură chemare nu primeşte răspuns;

(v) nu primeşte răspuns la prima chemare şi la încă una din celelalte trei chemări, iar la celelalte două primeşte răspuns.

2. Fie (Ω, Σ, P) un câmp de probabilitate şi $A, B \in \Sigma$. Să se demonstreze relaţiile:

(i) $P(A \Delta B) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$;

(ii) $\max\{P(A), P(B)\} \leq P(A \cup B) \leq 2 \max\{P(A), P(B)\}$;

(iii) $P(A \cup B) \cdot P(A \cap B) \leq P(A)P(B$;

(iv)$P^2(A \cup B) + P^2(A \cap B) = P^2(A) + P^2(B) + 2P(A \setminus B) \cdot P(B \setminus A)$;

(v) $\mid P(A \cap B) - P(A)P(B) \mid \leq \frac{1}{4}$;

(vi) $P^2(A \cap B) + P^2(\overline{A} \cap B) + P^2(A \cap \overline{B}) + P^2(\overline{A} \cap \overline{B}) \geq \frac{1}{4}$.

3. Într-un fişier sunt 10000 de fişe. Care este probabilitatea ca numărul primei fişe extrase să conţină cifra 5?

4. Din 100 de mere, 10 sunt stricate. Care este probabilitatea ca luând la întămplare 5 mere, să luăm şi mere stricate?

5. Se aruncă 6 zaruri. Care este probabilitatea obţinerii tuturor numerelor de la 1 la 6? Dar probabilitatea să apară cel puţin o dată faţa 5?

6. Din mulţimea numerelor de 7 cifre diferite care se pot forma cu cifrele 1,2,3,4,5,6,7 se ia la întâmplare un număr. Care este probabilitatea ca numărul ales să conţină pe 1 şi 2 ca cifre consecutive în ordine

crescătoare?

7. Într-un tramvai cu trei vagoane urcă la întâmplare 9 persoane. Care sunt probabilităţile evenimentelor:

(i) A ca în primul vagon să urce 3 persoane;

(ii) B ca în fiecare vagon să urce câte 3 persoane;

(iii) C într-un vagon să urce 4 persoane, în altul 3, iar în celălalt 2 persoane.

8. O urnă conţine m bile albe şi n bile negre. Se extrag bile din urnă, una căte una, fără întoarcerea bilelor extrase în urnă. Care este probabilitatea de a obţine prima bilă albă la a k-a extragere?

9. O persoană scrie n scrisori, adresează plicurile, după care introduce în fiecare plic o scrisoare, la întâmplare. Care este probabilitatea ca nicio scrisoare să nu ajungă la destinatarul dorit şi ce devine aceasta când n tinde la infinit.

10. O urnă conţine o bilă albă şi una neagră. Se extrage câte o bilă până apare o bilă neagră. Dacă se extrage o bilă albă se pune înapoi în urnă împreună cu alte două bile albe. Să se determine probabilitatea ca în primele 20 de extrageri să nu se obţină nicio bilă neagră.

11. O urnă conţine n bile numerotate de la 1 la n. Se extrag bile din urnă, una câte una, fără a le pune din nou în urnă. Să se determine probabilitatea ca numerele primelor k bile extrase să coincidă cu numerele de ordine ale extragerilor.

12. Printre cele n bilete de examen, m sunt considerate de studenţii unei grupe, uşoare. Care din primii doi studenţi ai grupei care trag un bilet are şanse mai mari să scoată un bilet uşor?

13. Se dau şase urne cu următoarele structuri:

(S_1): două urne conţin câte 4 bile albe şi 2 bile negre;

(S_2): trei urne conţin câte 3 bile albe şi 5 negre;

(S_3): o urnă urnă conţine 6 bile albe şi 4 negre.

Se extrage la întâmplare o bilă dintr-o urnă. Se cer:

(a) Probabilitatea ca bila extrasă să fie neagră.

(b). Dacă s-a extras o bilă neagră, care este probabilitatea ca bila extrasă să fie dintr-o urnă cu structura S_2?

14. Se consideră două loturi de produse dintre care un lot are toate piesele corespunzătoare, iar al doilea lot are $\frac{1}{4}$ din piese rebuturi. Se alege la întâmplare un lot şi se extrage din el o piesă, constatându-se că este bună. Se reintroduce piesa în lot şi se extrage din acelaşi lot o piesă. Care este probabilitatea ca piesa extrasă să fie un rebut?

15. Împărţim numerele naturale de la 1 la 12 în trei grupe a câte patru numere şi înregistrăm fiecare grupă pe un bilet. Dintr-o urnă care conţine 12 bile numerotate de la 1 la 12 se extrage pe rând câte o bilă. Se cer:

(a) Probabilitatea ca din şase extrageri patru numere să se afle pe acelaşi bilet, presupunând că bilele extrase nu sunt întoarse în urnă.

(b) Aceiaşi probabilitate, presupunând că după fiecare extragere bila este reântoarsă în urnă.

16. Se aruncă două zaruri de 15 ori. Să se calculeze probabilităţile evenimentelor:

(a) ca dubla 6 să apară cel puţin o dată;

(b) dubla 6 să apară cel puţin de două ori.

17. Se consideră trei urne care conţin bile albe şi negre după cum urmează: $(2,6),(4,4),(6,2)$.

(a) Din prima urnă se fac 3 extrageri cu întoarcerea bilei extrase, iar din celelalte două urne câte o extragere. Care este probabilitatea de a obţine 2 bile albe şi una albă din prima urnă sau una albă şi una neagră din celelalte două?

(b) Din fiecare urnă se fac câte 3 extrageri, punându-se bila extrasă înapoi. Care este probabilitatea ca dintr-o urnă să se obţină două bile albe şi una neagră iar din celelalte două orice altă combinaţie?

18. Dintr-un grup de 18 trăgători 5 lovesc ţinta cu probabilitatea $\frac{4}{5}$, 7 cu probabilitatea $\frac{3}{5}$, iar 2 cu probabilitatea $\frac{1}{2}$. Un trăgător luat la întâmplare trage un foc, fără a atinge ţinta. Cărui grup de trăgători este mai probabil să-i aparţină acest trăgător?

19. La o zi onomastică sunt 10 invitaţi; 5 invitaţi aduc buchete de flori 4 roşii şi una albă, 4 invitaţi aduc buchete de 4 flori roşii şi 3 albe, 2 invitaţi aduc buchete de 4 flori roşii şi 5 albe. Sărbătoritul ia o floare şi o dăruieşte unui invitat. Care este probabilitatea ca floarea dăruită să provină de la primul grup de invitaţi?

20. Se aruncă două zaruri de 5 ori. Care este probabilitatea ca produsul punctelor feţelor apărute să fie 6 la cel puţin două aruncări?

21. Într-o urnă se află n bile de culoare albă şi neagră în proporţie necunoscută. Se extrag k bile din urnă cu întoarcerea bilei extrase. Care este probabilitatea ca urna să conţină numai bile albe, dacă toate cele k bile extrase au fost albe?

22. La fiecare repetare a unui experiment, apariţia unui eveniment A are probabilitatea $p > 0$. Care este probabilitatea ca numărul apariţiilor lui A să fie par, dacă se repetă experimentul de n ori?

23. Într-o cutie sunt 15 mingi de tenis, din care 9 sunt noi. Pentru primul joc sunt luate la întâmplare 3 mingi, după care sunt repuse în cutie. Pentru al doilea joc se iau din nou 3 mingi, la întâmplare. Care este probabilitatea ca toate mingile luate pentru jocul al doilea să fie noi?

24. Un muncitor produce cu probabilităţile 0,99, 0,07 şi 0,03 o piesă bună, o piesă cu defect remediabil şi un rebut. Muncitorul a produs trei piese. Care este probabilitatea ca între cele trei piese să fie cel puţin o piesă bună şi cel puţin un rebut?

25. Un magazin vinde în cursul unei săptămâni 2600 de bucăţi dintr-un anumit produs primit de la firmele A, B şi C în următoarele cantităţi:

3000 bucăţi, 2600 bucăţi, respectiv 3500 bucăţi. Care este probabilitatea ca 820 de bucăţi din marfa vândută să provină de la firma A, 500 de la B, iar restul de la firma C?

26. Într-un depozit se aduc piese de la trei ateliere. Primul atelier are două maşini care fabrică aceste piese şi dă 3% rebut, al doilea atelier are două maşini şi dă 2% rebut, iar al trilea atelier are trei maşini şi dă 5% rebut. Care este probabilitatea ca o piesă luată la întâmplare din depozit să fie defectă ştiind că fiecare maşină produce acelaşi număr de piese în unitatea de timp. Ştiind că piesa luată din depozit a fost defectă care este probabilitatea ca ea să provină de la al treilea atelier?

27. Fie (Ω, Σ, P) un câmp borelian de probabilitate Pentru oricare $A, B \in \Sigma$ notăm $d(A,B) = P(A \setminus B) + P(B \setminus A)$. Să se arate că pentru orice $A, B, C \in \Sigma$ are loc $d(A,C) \leq d(A,B) + d(B,C)$.

28. Evenimentele $A_1, A_2, \ldots, A_n$ satisfac

(a) $A_i \subset \bigcup_{j \neq i} A_j$;

(b) $A_i \cup A_j \cup A_k = \emptyset$ pentru orice $1 \leq i < j < k \leq n$.

Să se arate că $P(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n P(A_i)$.

29. Într-o urnă se găsesc trei cartonaşe identice ca formă, dimensiuni şi greutate. Unul din ele are ambele feţe roşii, al doilea are o faţă roşie şi una albă, iar al treilea are ambele feţe albe. Se extrage la întâmplare un cartonaş din urnă şi se aşează pe masă. Dacă faţa de deasupra este roşie care este probabilitatea ca faţa pe care este aşezat cartonaşul să fie albă?

30. Se aruncă un zar de 14 ori. Care este probabilitatea ca faţa 1 să apară de 3 ori, faţa 2 o dată, faţa 3 de 4 ori, faţa 4 de 2 ori, faţa 5 de 3 ori, faţa 6 o singură dată?

31. Avem trei loturi de câte 100 de piese. În primul lot trei piese sunt defecte, în al doilea lot patru piese sunt defecte, iar în al treilea lot cinci piese sunt defecte. Din fiecare lot se ia o piesă. Care este probabilitatea

obţinerii a două piese bune şi a uneia defecte?

32. Doi arcaşi trag asupra unei ţinte câte o săgeată. Probabilitatea ca primul să lovească ţinta este 0,8, iar pentru al doilea arcaş, 0,4. După trageri, în ţintă se găseşte o singură săgeată. Să se afle probabilitatea ca săgeata din ţintă să aparţină primului arcaş.

33. (Problema lui Banach). Un fumător cumpără două cutii de chibrituri fiecare conţinând n beţe. Apoi, de fiecare dată când are nevoie de chibrit scoate la întâmplare o cutie din care foloseşte un băţ. Care este probabilitatea ca în momentul când constată că o cutie este goală, cealaltă să mai conţină k beţe?

34. Dintr-o urnă care conţine n bile de culori diferite se extrag la întâmplare k bile cu întoarcere. Să se determine probabilitatea ca bilele extrase să fie de culori diferite.

35. Două persoane aruncă succesiv o monedă ale cărei feţe le numim A şi B. Jocul este căştigat de acela care obţine primul la aruncarea sa faţa A. Să se calculeze probabilitatea de câştig pentru fiecare din cei doi jucători, ştiind că pentru fiecare jucător probabilitatea de a obţine faţa A la o aruncare este $\frac{1}{2}$.

36.(Ruina jucătorului) Jucătorul A dispune de a dolari, iar jucătorul B de b dolari. Jocul constă într-un şir de partide. Cel care pierde o partidă dă un dolar partenerului. Jocul continuă până unul din jucători se ruinează. Dacă în fiecare partidă şansele sunt egale, care este probabilitatea ca A să-l ruineze pe B?

37. Dacă n persoane, printre care se află şi A şi B se aşează la întâmplare într-un rând, care este probabilitatea ca între A şi B să existe exact k persoane?

38. Numerele $1, 2, \ldots, n$ sunt scrise fiecare pe un cartonaş. Se introduc cartonaşele într-o urnă şi se extrag la întâmplare l cartonaşe (cartonaşele se extrag simultan). Să se afle probabilitatea ca pe cele l

cartonaşe să nu fie două numere consecutive.

39. O urnă conţine 5 bile albe şi 3 negre, o altă urnă conţine 6 bile albe şi 2 negre şi a treia, 7 bile albe şi una neagră. Se extrage câte o bilă din fiecare urnă. Să se determine probabilitatea ca două bile să fie albe şi una neagră.

40. Într-o cameră întunecoasă se gasesc cinci perechi de pantofi. Se aleg la întâmplare cinci pantofi.

(a) Care este probabilitatea ca între cei cinci pantofi aleşi să fie cel puţin o pereche, în ipoteza că cele cinci perechi de pantofi sunt de aceiaşi mărime şi culoare?

(b) Care este probabilitatea ca între cei cinci pantofi aleşi să fie cel puţin o pereche, în ipoteza că cele cinci perechi de pantofi sunt de mărimi (culori) diferite?

41. Două clase A şi B de câte 30 elevi au 15 elevi buni, 10 mediocri, 5 slabi respectiv, 10 buni, 12 mediocri şi 8 slabi. Un profesor ascultă la întâmplare câte un elev din fiecare clasă. Care este probabilitatea ca elevul din clasa A să fie mai bun decât cel din clasa B?

42. Un segment dat este frânt în două puncte alese la întâmplare. Care este probabilitatea ca cele trei segmente obţinute să poată forma un triunghi?

43. Două persoane A şi B şi-au dat întâlnire între orele 12^{00} şi 13^{00}. Una din ele vine, aşteaptă 20 de minute şi pleacă. Care este probabilitatea ca cei doi să se întâlnească?

44.(Problema lui Buffon). Un plan este împărţit cu drepte paralele echidistante, distanţa dintre două drepte alăturate fiind d. Se aruncă un ac de lungime $l (l < d)$. Să se determine probabilitatea ca acul să nu intersecteze niciuna din drepte.

45. Să se determine probabilitatea ca rădăcinile ecuţiei $ax^2+2ax+b = 0$ să fie reale, dacă coeficienţii a şi b sunt mărginiţi prin $\mid a \mid \leq n$ şi

$| b | \leq m$. Să se determine apoi probabilitatea ca rădăcinile să fie pozitive.

46. Un înotător pleacă de la plajă, pe ceaţă şi înoată a metri în linie dreaptă ce formează cu plaja unghiul $\phi \in (0, \frac{\pi}{2}]$. Se opreşte, constată că nu mai zăreşte ţărmul şi porneşte într-o direcţie, la întâmplare. Presupunând că linia coastei este dreaptă şi că nu există maree, care este probabilitatea de a ajunge la ţărm înotând cel mult a metri?

47. Pe un sement AB de lungime a se iau la întâmplare două puncte M, N. Să se determine probabilitatea ca distanţa dintre M şi N să fie mai mică decât $b (b < a)$.

Capitolul 2

Variabile aleatoare, vectori aleatori

2.1 Variabile aleatoare

Definiţia 2.1.1. Fie (Ω, Σ) un câmp borelian de evenimente. Se numeşte *variabilă aleatoare* pe acest cămp o funcţie $X : \Omega \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) < x\} \in \Sigma, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Observaţia 2.1.1. Precizăm că o funcţie care indeplineşte condiţia de mai sus se numeşte funcţie Σ-măsurabilă.

În cele ce urmează, pentru simplificarea scrierii vom utiliza următoarele notaţii:

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) < x\} = (X < x);$$

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} = (X \leq x);$$

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\} = (X = x);$$

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) > x\} = (X > x);$$

$$\{\omega \in \Omega : a < X(\omega) < b\} = (a < X < b); \quad etc.$$

Definiţia 2.1.2. Dacă mulţimea valorilor unei variabile aleatoare X este cel mult numarabilă, X se numeşte variabilă aleatoare *discretă*. În cazul particular când X ia un număr finit de valori ea se mai numeşte variabila aleatoare *simplă*.

Exemplul 2.1.1. În cazul experimentului aruncării cu zarul $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$, unde ω_i este evenimentul apariţiei feţei cu i puncte. Fie $A_1 = \{\omega_1\}, A_2 = \{\omega_3, \omega_5\}, A_3 = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$. Considerăm câmpul de evenimente generat de evenimentele A_i (adică cel mai mic corp de părţi ale lui Ω care conţine evenimentele A_1, A_2, A_3.

$$\Sigma = \{\emptyset, A_1, A_2, A_3, A_1 \cup A_2, A_1 \cup A_3, A_2 \cup A_3, \Omega\}.$$

Aplicaţia $X : \Omega \to \mathbb{R}$ definită prin tabelul

x	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6
$X(\omega)$	1	-1	0	-1	0	-1

este o variabilă aleatoare pe câmpul de evenimente (Ω, Σ) deoarece

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) < x\} = \begin{cases} \emptyset \in \Sigma & \text{dacă } x \in (-\infty, -1] \\ A_3 \in \Sigma & \text{dacă } x \in (-1, 0] \\ A_2 \cup A_3 \in \Sigma & \text{dacă } x \in (0, 1] \\ \Omega \in \Sigma & \text{dacă } x \in (1, \infty). \end{cases}$$

Aplicaţia $Y : \Omega \to \mathbb{R}$

x	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6
$Y(\omega)$	1	-1	0	-1	0	1

nu este variabilă aleatoare deoarece, pentru $x = 0$,

$$\{\omega \in \Omega : Y(\omega) < 0\} = \{\omega_2, \omega_4\} \notin \Sigma.$$

Propoziţie 2.1.1. *Dacă* (Ω, Σ) *este un câmp borelian de evenimente şi* $X : \Omega \to \mathbb{R}$, *atunci urmuatoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) X *este variabilă aleatoare.*

(ii) $(X \leq x) \in \Sigma, \ \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Demonstraţie. $(i) \Rightarrow (ii)$ Este uşor de văzut că $\bigcap_{n=1}^{\infty}(-\infty, x + \frac{1}{n}) = (-\infty, x]$, ceea ce implică

$$(X \leq x) = \bigcap_{n=1}^{\infty}(X < x + \frac{1}{n}).$$

Conform ipotezei, pentru fiecare $n \geq 1$, $(X < x + \frac{1}{n}) \in \Sigma$. Deoarece un câmp borelian de evenimente este închis în raport cu intersecţiile numărabile rezultă (ii).

Implicaţia $(ii) \Rightarrow (i)$ se demonstrează analog, tinând cont de egalitatea $\bigcup_{n=1}^{\infty}(-\infty, x - \frac{1}{n}] = (-\infty, x)$. □

Observaţia 2.1.2. Din egalitatile $(X \geq x) = \Omega \setminus (X < x)$, $(X > x) = \Omega \setminus (X \leq x)$, rezultă că în definiţia variabilei aleatoare condiţia $(X < x) \in \Sigma$ se poate înlocui cu una din condiţiile $(X \leq x) \in \Sigma$, $(X \geq x) \in \Sigma$ sau $(X > x) \in \Sigma$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Propoziţie 2.1.2. *Dacă* X *este o variabilă aleatoare şi* $c \in \mathbb{R}$ *atunci* $X + c,\ cX,\ |X|\,, X^k,\ \frac{1}{X}$ *(dacă* $0 \notin X(\Omega)$ *) sunt variabile aleatoare.*

Demonstraţie. Pentru orice $x \in \mathbb{R}$ avem

$$(X + c < x) = (X < x - c) \in \Sigma.$$

Dacă $c \neq 0$ avem

$$(cX < x) = \begin{cases} \left(X < \frac{x}{c}\right) \in \Sigma, & \text{dacă } c > 0, \\ \left(X > \frac{x}{c}\right) \in \Sigma, & \text{dacă } c < 0. \end{cases}$$

Dacă $c = 0$ atunci

$$(cX < x) = \begin{cases} \emptyset \in \Sigma, & \text{dacă } x \leq 0, \\ \Omega \in \Sigma, & \text{dacă } x > 0. \end{cases}$$

$$(\mid X \mid < x) = \begin{cases} (X < x) \cap (X > x) \in \Sigma, & \text{dacă } x > 0, \\ \emptyset \in \Sigma, & \text{dacă } x \leq 0. \end{cases}$$

Demonstrarea celorlalte afirmaţii se face similar şi o lăsăm pe seama cititorului. □

Propoziţie 2.1.3. *Dacă X şi Y sunt variabile aleatoare atunci $X + Y, X - Y, XY, \frac{X}{Y}$ (dacă $0 \notin Y(\Omega)$), $max(X, Y)$, $min(X, Y)$ sunt variabile aleatoare.*

Demonstraţie. Faptul că $X + Y$ este o variabilă aleatoare rezultă din egalitatea

$$(X + Y < x) = \bigcup_{c \in \mathbb{Q}} [(X < c) \cap (Y < x - c)] \in \Sigma, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Analog se demonstrează că $X - Y$ este variabilă aleatoare. Celelalte afirmaţii se demonstrează folosind identităţile

$$XY = \frac{1}{4}\left[(X+Y)^2 - (X-Y)^2\right], \ \frac{X}{Y} = X \cdot \frac{1}{Y},$$

$$max(X, Y) = \frac{1}{2} [\ X + Y + \mid X - Y \mid\ ],$$

$$min(X, Y) = \frac{1}{2} [\ X + Y - \mid X - Y \mid\ ].$$

□

Propoziţie 2.1.4. *Dacă X este o variabilă aleatoare, atunci există un şir de variabile aleatoare simple $\{X_n\}_{n \geq 1}$ care converge punctual către X.*

Demonstraţie. Să considerăm mai întâi cazul când X este o variabilă aleatoare nenegativă.

Pentru orice $n \geq 1$ fie X_n variabila aleatoare definită astfel:

$$X_n(\omega) = \begin{cases} \frac{i-1}{2^n} & \text{dacă } \frac{i-1}{2^n} \leq X(\omega) < \frac{i}{2^n},\ i = 1, 2, \ldots, n2^n \\ n & \text{dacă } X(\omega) \geq n. \end{cases}$$

Evident că X_n sunt variabile aleatoare simple. Pentru n suficient de mare $X(\omega) < n$ şi

$$0 \leq X(\omega) - X_n(\omega) < \frac{i}{2^n} - \frac{i-1}{2^n} = \frac{1}{2^n},$$

de unde $\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)$.

Dacă X este o variabilă aleatoare oarecare să introducem variabilele aleatoare $X^+ = \max\{X, 0\}, X^- = \min\{X, 0\}$. Observăm că X se poate scrie $X = X^+ + X^-$. Variabilele aleatoare X^+ şi X^- sunt nenegative, aplicând rezultatul precedent acestor variabile aleatoare obţinem rezultatul dorit. □

2.2 Funcţia de repartiţie a unei variabile aleatoare

O caracterizare a unei variabile aleatoare în care intervine esenţial probabilitatea se face cu ajutorul funcţiei de repartiţie.

Definiţia 2.2.1. Fie (Ω, Σ, P) un câmp borelian de probabilitate şi $X : \Omega \to \mathbb{R}$ o variabilă aleatoare. Funcţia $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin

$$F(x) = P(X < x),\ \ \forall x \in \mathbb{R},$$

se numeşte *funcţia de repartiţie* a variabilei aleatoare X.

Propoziţie 2.2.1. *Dacă F este funcţia de repartiţie a unei variabile aleatoare X, atunci pentru orice $a < b$ au loc relaţiile:*

(i) $P(a \leq X < b) = F(b) - F(a)$;

(ii) $P(a < X < b) = F(b) - F(a) - P(X = a)$;

(iii) $P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) + P(X = b)$;

(iv) $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a) + P(X = b) - P(X = a)$.

Demonstraţie. Deoarece $a < b$ evenimentul $(X < a)$ implică evenimentul $(X < b)$. Avem astfel:

$$P(a \leq X < b) = P[(X < b) \setminus (X < a)] =$$

$$P(X < b) - P[(X < b) \cap (X < a)] = P(X < b) - P(X < a) = F(b) - F(a).$$

(ii) $P(a < X < b) = P[(a \leq X < b) \setminus (X = a)] = P(a \leq X < b) - P(X = a) = F(b) - F(a) - P(X = a)$.

(iii) $P(a \leq X \leq b) = P[(a \leq X < b) \cup (X = b)] = P(a \leq X < b) + P(X = b) = F(b) - F(a) + P(X = b)$.

(iv) $P(a < X \leq b) = P\left[(a \leq X \leq b) \setminus (X = a)\right] = P(a \leq X \leq b) - P(X = a) = F(b) - F(a) + P(X = b) - P(X = a)$. □

Propoziţie 2.2.2. *Dacă F este funcţia de repartiţie a unei variabile aleatoare X, atunci:*

(i) *F este monoton crescătoare;*

(ii) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$.

(iii) *F este continuă la stânga.*

Demonstraţie. Din Propozitia 2.2.1 (i) rezultă că pentru două numere reale $x_1 < x_2$, avem $F(x_2) - F(x_1) = P(x_1 \leq X < x_2) \geq 0$, de unde $F(x_1) \leq F(x_2)$.

(ii) Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale decrescător cu $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$. Atunci $\{(X < x_n)\}_{n\geq 1}$ este un şir descendent de evenimente pentru care $\bigcap_{n=1}^{\infty}(X < x_n) = \emptyset$. Pe baza Propozitiei 1.4.2 (b) avem

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = \lim_{n\to\infty} P(X < x_n) = P(\lim_{n\to\infty}(X < x_n))$$

$$= P(\bigcap_{n=1}^{\infty}(X < x_n)) = P(\emptyset) = 0.$$

Analog se arată că $lim_{x\to\infty}F(x) = 1$.

(iii) Pentru a demonstra continuitatea la stânga a funcţiei F să considerăm un punct $x \in \mathbb{R}$ şi şirul crescător de numere reale $(x_n)_{n\geq 1}$ convergent la x. Evenimentele $\{(x_n \leq X < x)\}_{n\geq 1}$ formează un şir descendent de evenimente cu $\bigcap_{n=1}^{\infty}(x_n \leq X < x) = \emptyset$.

Rezultă că $\lim_{n\to\infty} P(x_n \leq X < x) = P(\emptyset) = 0$, adică $\lim_{n\to\infty}[F(x) - F(x_n)] = 0$, sau $\lim_{n\to\infty} F(x_n) = F(x)$. □

Observaţia 2.2.1. Se poate arăta că cele trei proprietăţi ale funcţiei de repartiţie date de Propozitia 2.2.2 caracterizează o funcţie de repartiţie, adică orice funcţie $F : \mathbb{R} \to (R)$ care satisface (i), (ii), (iii) este funcţia de repartiţie a unei variabile aleatoare.

Propoziţie 2.2.3. *Dacă F este funcţia de repartiţie a unei variabile aleatoare X, atunci $P(X \leq x) = F(x+0)$ şi $P(X = x) = F(x+0) - F(x)$.*

Demonstraţie. Pentru a demonstra prima relaţie să considerăm şirul descendent de evenimente $\{(X < x + \frac{1}{n})\}_{n\geq 1}$ pentru care $\lim_{n\to\infty}(X < x + \frac{1}{n}) = \bigcap_{n\geq 1}(X < x + \frac{1}{n}) = (X \leq x)$. □

Propoziţie 2.2.4. *Dacă F este funcţia de repartiţie a unei variabile aleatoare de tip discret având distribuţia* $\begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix}_{i\in I}$ *atunci funcţia sa de repartiţie are expresia*

$$F(x) = \sum_{x_i<x} p_i, \quad x \in \mathbb{R},$$

deci este o funcţie scară.

Demonstraţie. Din definiţia funcţiei de repartiţie, pntru orice $x \in \mathbb{R}$ avem:

$$F(x) = P(X < x) = P(\bigcup_{x_i<x} (X = x_i)) = \sum_{x_i<x} P(X = x_i) = \sum_{x_i<x} p_i.$$

$\square$

Exemplul 2.2.1. De-a lungul unei şosele sunt 3 bariere. Pentru oricare din cele 3 bariere probabilitatea de-a o găsi deschisă este p. Să se scrie distribuţia variabilei aleatoare X care reprezintă numărul barierelor trecute până la întâlnirea unei prime bariere închise şi să se determine funcţia de repartiţie a acestei variabile aleatoare.

Soluţie Variabila aleatoare X poate lua valorile $0, 1, 2, 3$. Să notaăm cu A_i evenimentul ca a i-a barieră întâlnită să fie deschisă, $1 \le i \le 3$. Atunci

$P(X = 0) = P(\overline{A}_1) = 1 - p = q.$

$P(X = 1) = P(A_1 \cap \overline{A}_2) = P(A_1)P(\overline{A}_2) = p\, q.$

$P(X = 2) = P(A_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3) = P(A_1)P(A_2)P(\overline{A}_3) = p^2q.$

$P(X = 3) = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) = p^3.$

Distribuţia variabilei aleatoare X este

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ p & pq & pq^2 & p^3 \end{pmatrix}$$

Conform propoziţiei precedente funcţia de repartiţie va fi o funcţie scară.

Pentru $x \in (-\infty, 0]$ $F(x) = P(X < x) = 0$.

Pentru $x \in (0, 1]$ $F(x) = P(X < x) = P(x = 0) = q$.

Pentru $x \in (1, 2]$ $F(x) = P(X < x) = P(x = 0) + P(X = 1) = q + pq$.

Pentru $x \in (2, 3]$ $F(x) = P(X < x) = P(x = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = q + pq + p^2q$.

Pentru $x \in (3, \infty)$ $F(x) = q + pq + p^2q + p^3 = q(1 + p + p^2) + p^3 = (1 - p)(1 + p + p^2) + p^3 = 1 - p^3 + p^3 = 1$.

Deci

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } x \in (-\infty, 0], \\ q & \text{dacă } x \in (0, 1], \\ q + pq & \text{dacă } x \in [1, 2), \\ q + pq + p^2q & \text{dacă } x \in [2, 3), \\ 1 & \text{dacă } x \in (3, \infty). \end{cases}$$

2.3 Vectori aleatori

Noţiunea de variabilă aleatoare (unidimensională) se poate generaliza definind-use variabilele aleatoare n-dimensionale ale căror valori sunt vectori din $\mathbb{R}^n$.

Definiţia 2.3.1. Fie (Ω, Σ, P) un câmp borelian de probabilitate. Numim *vector aleator* sau *variabilă aleatoare n-dimensională* o aplicaţie $X(X_1, X_2, \ldots, X_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ care satisface condiţia:

$$(X_1 < x_1, X_2 < x_2, \ldots, X_n < x_n) =$$

$$\{\omega \in \Omega : X_1(\omega) < x_1, \ldots, X_n(\omega) < x_n\} \in \Sigma, \ \ \forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Observaţia 2.3.1. Dacă X este o variabilă aleatoare n-dimensională atunci fiecare componentă a sa este o variabilă aleatoare (unidimensională) dacă avem în vedere că

$$(X_i < x) = (X_1 < \infty, \dots, X_{i-1} < \infty, X_i < x, X_{i+1} < \infty, \dots, X_n < \infty).$$

Reciproc, dacă $X_i, 1 \leq i \leq n$ sunt variabile aleatoare, atunci $X(X_1, \dots, X_n)$ este un vector aleator.

Definiţia 2.3.2. Numim *funcţia de repartiţie* ataşată vectorului aleator $X(X_1, X_2, \dots, X_n)$ funcţia $F : \mathbb{R}^n \to [0, 1]$ definită prin

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(X_1 < x_1, X_2 < x_2, \dots, X_n < x_n).$$

Propoziţie 2.3.1. *Dacă F este funcţia de repartiţie ataşată vectorului aleator $X(X_1, X_2, \dots, X_n)$ atunci:*

(i) $P(a_1 \leq X_1 < b_1, a_2 \leq X_2 < b_2, \dots, a_n \leq X_n < b_n) = F(b_1, \dots, b_n) - \sum_{i=1}^{n} F(b_1, \dots, a_i, \dots, b_n) + \sum_{1 \leq i < j \leq n} F(b_1, \dots, a_i, \dots a_j, \dots, b_n) - \dots + (-1)^{n-1} F(a_1, \dots, a_n)$.

(ii) F este monoton crescătoare în raport cu fiecare variabilă.

(iii) F este continuă la stânga în raport cu fiecare variabilă.

(iv) $\lim_{x_k \to \infty\ k=\overline{1,n}} F(x_1, \dots, x_n) = 1$,

$\lim_{x_i \to -\infty} F(x_1, \dots, x_n) = 0 \ \ \forall i \in \{1, \dots, n\}$.

Demonstraţie. Afirmaţiile (ii), (iii), (iv) se demonstrează analog cu afirmaţiile corespunzătoare din Propoziţia 2.2.2. Demonstraţia afirmaţiei (i) o vom da în cazul $n = 2$, pentru a nu complica scrierea.

$P(a_1 \leq X_1 < b_1, a_2 \leq X_2 < b_2) = P(a_1 \leq X_1 < b_1, X_2 < b_2) - P(a_1 \leq X_1 < b_1, X_2 < a_2) = P(X_1 < b_1, X_2 < b_2) - P(X_1 < a_1, X_2 <$

$b_2)-P(X_1 < b_1, X_2 < a_2)+P(X_1 < a_1, X_2 < a_2) = F(b_1, b_2)-F(a_1, b_2)-F(b_1, a_2) + F(a_1, a_2)$.

$\square$

Definiţia 2.3.3. Un vector aleator se numeşte de tip *discret* dacă mulţimea valorilor sale este cel mult numărabilă.

Observaţia 2.3.2. Un vector aleator este de tip discret dacă şi numai dacă fiecare componentă a sa este o variabilă aleatoare discretă.

Fie $Z = (X, Y)$ o variabilă aleatoare bidimensională discretă pe câmpul de probabilitate (Ω, Σ, P), ale cărui componente au repartiţiile

$$X : \begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix}_{i \in I} \quad Y : \begin{pmatrix} y_j \\ q_j \end{pmatrix}_{j \in J}.$$

Introducem notaţiile $A_i = (X = x_i)$, $B_j = (Y = y_j)$, $C_{ij} = (X = x_i, Y = y_j) = A_i \cap B_j$. Atunci $p_i = P(A_i)$, $q_j = P(B_j)$ si fie $p_{ij} = P(C_{ij})$.

Propoziţie 2.3.2. *Probabilităţile p_{ij}, $i \in I$, $j \in J$ au următoarele proprietăţi:*

(i) $p_{ij} \geq 0$, $\forall i \in I$, $\forall j \in J$;

(ii) $\sum_{j \in J} p_{ij} = p_i$;

(iii) $\sum_{i \in I} p_{ij} = q_i$;

(iv) $\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} p_{ij} = 1$.

Demonstraţie. Proprietatea (i) este evidentă. Deoarece familiile de evenimente $\{A_i : i \in I\}$, $\{B_j : j \in J\}$ sunt sisteme complete de evenimente pentru fiecare i fixat evenimentele $A_i \cap B_j$, $j \in J$ sunt incompatibile. Proprietatea (ii) se obţine astfel:

$$\sum_{j \in J} p_{ij} = \sum_{j \in J} P(A_i \cap B_j) = P(\bigcup_{j \in J}(A_i \cap B_j)) =$$

$$P[A_i \cap (\bigcup_{j\in J} B_j)] = P(A_i \cap \Omega) = P(A_i) = p_i.$$

Proprietatea (iii) se demonstrează analog. Din (ii) rezultă

$$\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} p_{ij} = \sum_{i\in I} p_i = 1.$$

$\square$

Definiţia 2.3.4. Dacă $Z = (X, Y)$ este o variabilă aleatoare bidimensională discretă atunci tabloul

$$\begin{pmatrix} x_i y_j \\ p_{ij} \end{pmatrix}_{(i,j)\in I\times J}$$

se numeşte *repartiţia (bidimensională)* a lui Z sau *repartiţia comună* a lui X şi Y.

În cazul în care X şi Y sunt variabile aleatoare simple, repartiţia lui Z se poate da sub forma unui tabel numit tabelul repartiţiei comune a lui X şi Y. Astfel, dacă $I = \{1, 2, \ldots, n\}$, $J = \{1, 2, \ldots, m\}$ repartiţia lui Z este dată de tabelul

$X\backslash Y$	y_1	$\ldots$	y_j	$\ldots$	y_m	$P(X = x_i)$
x_1	p_{11}	$\ldots$	p_{1j}	$\ldots$	p_{1m}	p_1
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
x_i	p_{i1}	$\ldots$	p_{ij}	$\ldots$	p_{im}	p_i
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
x_n	p_{n1}	$\ldots$	p_{nj}	$\ldots$	p_{nm}	p_n
$P(Y = y_j)$	q_1	$\ldots$	q_j	$\ldots$	q_m	$\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} p_{ij} = 1$

2.4 Variabile aleatoare şi vectori aleatori de tip continuu

Definiţia 2.4.1. Fie X o variabilă aleatoare a cărei funcţie de repartiţie este F. Dacă există o funcţie integrabilă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încât pentru orice $x \in \mathbb{R}$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt, \tag{2.4.1}$$

atunci f se numeşte *densitatea de probabilitate (de repartiţie)* asociată variabilei aleatoare X. O variabilă aleatoare care admite densitate de probabilitate se numeşte *variabilă aleatoare de tip continuu.*

Propoziţie 2.4.1. *Dacă X este o variabilă aleatoare de tip continuu având funcţia de repartiţie F şi densitatea de probabilitate f, atunci:*

(i) $f(x) \geq 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}$;

(ii) $F'(x) = f(x) \quad a.p.t.\ x \in \mathbb{R}$;

(iii) $P(a \leq X < b) = \int_a^b f(t)dt$;

(iv) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$.

Cele patru afirmaţii din Propozitia 2.4.1 rezultă imediat din formula 2.4.1 şi din proprietăţile funcţiei de repartiţie.

Observaţia 2.4.1. Dacă X este o variabilă aleatoare de tip continuu, atunci funcţia sa de repartiţie F este continuă şi $P(X = a) = 0$, $P(a \leq X < b) = P(a < X < b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b)$.

Observaţia 2.4.2. Orice funcţie integrabilă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pentru care sunt satisfăcute condiţiile (i) şi (iv) din Propozitia 2.4.1 este densitatea de probabilitate a unei variabile aleatoare de tip continuu.

Exemplul 2.4.1. Se dă funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} a \sin x & \text{dacă } x \in [0, \pi], \\ 0 & \text{dacă } x \notin [0, \pi]. \end{cases}$$

(a) Să se determine constanta a astfel încât f să fie densitatea de probabilitate a unei variabile aleatoare X.

(b) Să se afle funcţia de repartiţie corespunzătoare.

(c) Să se calculeze $P(0 \leq x < \frac{\pi}{4})$

Soluţie (a) Pentru ca f să fie densitatea de probabilitate a unei variabile aleatoare X trebuiesc îndeplinite condiţiile:

$f(x) \geq 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow a \geq 0$;

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 \Rightarrow 1 = \int_0^{\pi} a \sin x dx \Rightarrow 1 = 2a \Rightarrow a = \frac{1}{2}$.

Deci, $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \sin x & \text{dacă } x \in [0, \pi], \\ 0 & \text{dacă } x \notin [0, \pi]. \end{cases}$

(b) Deoarece $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$, vom avea

- dacă $x \in (-\infty, 0]$ $f(x) = 0$ şi $F(x) = 0$.

- dacă $x \in (0, \pi]$ atunci

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} f(t)dt + \int_0^x f(t)dt = \frac{1}{2} \int_0^x \sin t dt = \frac{1}{2}(1 - \cos x)$$

-dacă $x \in (\pi, \infty)$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} f(t)dt + \int_0^{\pi} f(t)dt + \int_{\pi}^{x} f(t)dt = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \sin t dt = 1.$$

În concluzie

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } x \in (-\infty, 0], \\ \frac{1}{2}(1 - \cos x) & \text{dacă } x \in (0, \pi], \\ 1 & \text{dacă } x \in (\pi, \infty). \end{cases}$$

(c) $P(0 \leq x < \frac{\pi}{4}) = F(\frac{\pi}{4}) - F(0) = \frac{1}{2}(1 - \frac{\sqrt{2}}{2})$.

Exemplul 2.4.2. Variabila aleatoare continuă X are densitatea de probabilitate

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{dacă } x \in (0,1), \\ 0 & \text{dacă } x \notin (0,1). \end{cases}$$

(a) Să se afle funcţia de repartiţie corespunzătoare.

(b) Să se determine densităţile de probabilitate ale variabilelor aleatoare $Y = e^X, Z = 2X^2 + 1$.

Soluţie (a) Se observă imediat că f este într-adevăr o densitate de probabilitate. Funcţia de repartiţie corespunzătoare se determină ca şi în cazul exemplului anterior.

- dacă $x \in (-\infty, -1],\ f(x) = 0$ şi $F(x) = 0$;

- dacă $x \in (-1, 1]$,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{-1} f(t)dt + \int_{-1}^{x} f(t)dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{x} dt = \frac{x+1}{2};$$

- dacă $x \in (-1, \infty)$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{-1} f(t)dt + \int_{-1}^{1} f(t)dt + \int_{1}^{x} f(t)dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} dt = 1.$$

Deci

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } x \in (-\infty, -1], \\ \frac{x+1}{2} & \text{dacă } x \in (-1, 1], \\ 1 & \text{dacă } x \in (1, \infty). \end{cases}$$

(b) Să determinăm mai întâi funcţia de repartiţie F_Y a variabilei aleatoare Y. Avem $F_Y(x) = P(Y < x) = P(e^X < x)$.

Deoarece funcţia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = e^x$ are infimumul $\inf_{x\in\mathbb{R}} e^x = 0$, rezultă că pentru orice $x \in (\infty, 0]$ evenimentul $(e^X < x)$ este imposibil, deci $F_Y(x) = 0$. Rezultă că $f_Y(x) = F_Y'(x) = 0$.

Dacă $x \in (0, +\infty)$ putem continua

$$F_Y(x) = P\left(X < lnx\right) = F(lnx) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } \ lnx \in (-\infty, -1], \\ \frac{lnx+1}{2} & \text{dacă } \ lnx \in (-1, 1], \\ 1 & \text{dacă } \ lnx \in (1, \infty) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{dacă } \ x \in (-\infty, \frac{1}{e}], \\ \frac{lnx+1}{2} & \text{dacă } \ x \in (\frac{1}{e}, e], \\ 1 & \text{dacă } \ x \in (e, \infty). \end{cases}$$

Densitatea de probabilitate corespunzătoare $f_Y(x) = F'_Y(x)$ este

$$f_Y(x) = \begin{cases} \frac{1}{2x} & \text{dacă } \ x \in (\frac{1}{e}, e], \\ 0 & \text{dacă } \ x \notin (\frac{1}{e}, e]. \end{cases}$$

Analog se determină mai întâi funcţia de repartiţie F_Z a variabilei aleatoare Z. Deoarece funcţia $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ h(x) = 2x^2 + 1$ are infimumul $\inf_{x\in\mathbb{R}}(2x^2 + 1) = 1$, rezultă că pentru orice $x \in (\infty, 1]$ evenimentul $(2X^2 + 1 < x)$ este imposibil, deci $F_Z(x) = 0$. Rezultă că $f_Z(x) = F'_Z(x) = 0$

Dacă $x \in (1, +\infty)$ putem continua

$$F_Z(x) = P\left(X^2 < \frac{x-1}{2}\right) = P\left(-\sqrt{\frac{x-1}{2}} < X < \sqrt{\frac{x-1}{2}}\right) =$$

$$F\left(\sqrt{\frac{x-1}{2}}\right) - F\left(-\sqrt{\frac{x-1}{2}}\right),$$

de unde, prin derivare obţinem

$$f_Z(x) = F'_Z(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{x-1}}\ f\left(\sqrt{\frac{x-1}{2}}\right) + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{x-1}} f\left(-\sqrt{\frac{x-1}{2}}\right) =$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{x-1}} \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{dacă } \ -\sqrt{\frac{x-1}{2}} \in (-1, 1) \\ 0 & \text{dacă } \ -\sqrt{\frac{x-1}{2}} \notin (-1, 1) \end{cases} +$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{x-1}}\begin{cases} \frac{1}{2} & \text{dacă } \sqrt{\frac{x-1}{2}} \in (-1,1) \\ 0 & \text{dacă } \sqrt{\frac{x-1}{2}} \notin (-1,1) \end{cases}.$$

Să remarcăm că $\sqrt{\frac{x-1}{2}} \in (-1,1) \Leftrightarrow -\sqrt{\frac{x-1}{2}} \in (-1,1) \Leftrightarrow x \in (1,3)$. Prin urmare

$$f_Z(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{x-1}} & \text{dacă } x \in (1,3) \\ 0 & \text{dacă } x \notin (1,3) \end{cases} + \begin{cases} \frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{x-1}} & \text{dacă } x \in (1,3) \\ 0 & \text{dacă } x \notin (1,3) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{x-1}} & \text{dacă } x \in (1,3) \\ 0 & \text{dacă } x \notin (1,3) \end{cases}.$$

Definiţia 2.4.2. Fie $X(X_1, X_2, \ldots X_n)$ un vector aleator având funcţia de repartiţie F. Dacă există o funcţie integrabilă $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ astfel încât

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f(t_1, \ldots, t_n) dt_1 \ldots dt_n, \qquad (2.4.2)$$

atunci f se numeşte *densitatea de probabilitate (de repartiţie)* asociată vectorului aleator X. Un vector aleator care admite densitate de probabilitate se numeşte *vector aleator de tip continuu.*

Proprietăţile vectorilor aleatori sunt puse in evidenţă de

Propoziţie 2.4.2. *Dacă $X(X_1, X_2, \ldots X_n)$ este un vector aleator de tip continuu avand funcţia de repartiţie F şi densitatea de probabilitate f, atunci:*

(i) $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq 0 \;\; \forall (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$;

(ii) $\frac{\partial^n F(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_n} = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad$ *a.p.t. pe* $\mathbb{R}^n$;

(iii) $P(a_1 \leq X_1 < b_1, \ldots, a_n \leq X_n < b_n) = \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_n}^{b_n} f(t_1, \ldots, t_n) dt_1 \ldots dt_n$;

(iv) $\int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} f(t_1, \ldots, t_n) dt_1 \ldots dt_n = 1$.

Observaţia 2.4.3. Orice funcţie integrabilă $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ pentru care sunt satisfăcute condiţiile (i) şi (iv) din Propoziţia 2.4.2 este densitatea de probabilitate a unei variabile aleatoare n-dimensionale de tip continuu.

Observaţia 2.4.4. Proprietatea (iii) din Propozitia 2.4.2 se poate extinde în felul următor:

Dacă X este o variabilă aleatoare n-dimensională de tip continuu având densitatea de probabilitate f şi D este un domeniu din $\mathbb{R}^n$ atunci

$$P(X \in D) = \underbrace{\int \dots \int}_{D} f(t_1, \dots, t_n) dt_1 \dots dt_n. \tag{2.4.3}$$

Propoziţie 2.4.3. *Fie $Z(X, Y)$ un vector aleator bidimensional de tip continuu având densitatea de probabilitate f. Atunci densităţile de probabilitate ale variabilelor aleatoare X, Y sunt*

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, t) dt, \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s, y) ds. \tag{2.4.4}$$

Demonstraţie. In relaţia $P(X < x, Y < y) = \int_{-\infty}^{x} ds \int_{-\infty}^{y} f(s, t) dt$ trecem la limită după y tinzând la infinit. Obţinem

$$P(X < x) = P(X < x, Y < \infty) = \int_{-\infty}^{x} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(s, t) dt \right) ds.$$

Pe de alta parte, din definiţia funcţiei de repartiţie,

$$P(X < x) = F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(s) ds.$$

Rezultă că $f_X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s, t) dt$. $\square$

Exemplul 2.4.3. Fie vectorul aleator (X, Y) având densitatea de probabilitate $f(x, y) = \frac{A}{(1+x^2)(1+y^2)}$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Să se determine:

(i) constanta A;

(ii) funcţia de repartiţie a vectorului aleator (X, Y);
(iii) $P(0 \leq X \leq 1, |\ y\ | \leq 1)$;
(iv) densitatea de probabilitate a variabilei aleatoare X.

Soluţie. (a) Se impun condiţiile:
– $f(x, y) \geq 0,\ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow A \geq 0$;
– $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dxdy = 1 \Rightarrow A \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+y^2} dy = 1$
$\Rightarrow A\pi^2 = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{\pi^2}$.
Deci $f(x, y) = \frac{1}{\pi^2\ (1+x^2)(1+y^2)}$
(b) Avem

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(x, y) dxdy = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} \frac{dsdt}{(1+s^2)(1+t^2)} =$$

$$\frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{x} \frac{ds}{(1+s^2)} \int_{-\infty}^{y} \frac{dt}{(1+t^2)} = \frac{1}{\pi^2}(arctgx + \frac{\pi}{2})(arctgy + \frac{\pi}{2}).$$

(c) $P(0 \leq X \leq 1, |\ y\ | \leq 1) = P(0 \leq X \leq 1, -1 \leq y \leq 1) =$

$$\int_{0}^{1} \int_{-1}^{1} f(x, y) dxdy = \frac{1}{\pi^2} arctg\ x\ |_0^1\ \ arctg\ y\ |_{-1}^1 = \frac{1}{\pi^2}\ \frac{\pi}{4}\ \frac{\pi}{2} = \frac{1}{8}.$$

(d) $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{(1+x^2)(1+y^2)} =$

$$\frac{1}{\pi^2}\ \frac{1}{1+x^2}\ arctgy\ |_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{\pi^2}\ \frac{1}{1+x^2}\ \pi = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

2.5 Variabile aleatoare independente

Între variabile aleatoare definite pe acelaşi câmp borelian de probabilitate are sens conceptul de independenţă definit pentru evenimente în paragraful 1.6.

Definiţia 2.5.1. Spunem că variabilele aleatoare X si Y sunt *independente* dacă

$$P(X < x, Y < y) = P(X < x)P(Y < y) \ \ \forall x, y \in \mathbb{R}, \tag{2.5.1}$$

sau, într-o formulare echvalentă

$$F_Z(x, y) = F_X(x)F_Y(y) \ \ \forall x, y \in \mathbb{R}, \tag{2.5.2}$$

unde F_Z, F_X, F_Y sunt funcţiile de repartiţie a vectorului aleator $Z(X, Y)$, respectiv ale variabilelor aleatoare X, Y.

Propoziţie 2.5.1. *Două variabilele aleatoare de tip discret X şi Y având distribuţiile*

$$X : \begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix}_{i \in I}, \quad Y : \begin{pmatrix} y_j \\ q_j \end{pmatrix}_{j \in J}$$

sunt independente dacă şi numai dacă

$$P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i)P(Y = y_j) \ \ \forall i \in I, \ \forall j \in J.$$

Demonstraţie. Dacă X şi Y sunt independente, ţinând cont de afirmaţia (i) din Propoziţia 2.3.1, se poate scrie

$P(X = x_i, Y = y_j) = \lim_{n\to\infty} P(x_i \le X < x_i + \frac{1}{n}, y_j \le Y < y_j + \frac{1}{n}) = \lim_{n\to\infty}[F_Z(x_i + \frac{1}{n}, y_j + \frac{1}{n}) - F_Z(x_i + \frac{1}{n}, y_j) - F_Z(x_i, y_j + \frac{1}{n}) + F_Z(x_i, y_j)] = \lim_{n\to\infty}[F_X(x_i + \frac{1}{n})F_Y(y_j + \frac{1}{n}) - F_X(x_i + \frac{1}{n})F_Y(y_j)) - F_X(x_i)F_Y(y_j + \frac{1}{n}) + F_X(x_i)F_Y(y_j)] = [F_X(x_i + 0) - F_X(x_i)][F_Y(y_j) - F_Y(y_j)]$.

Utilizând a doua relaţie din concluzia Propozitiei 2.2.3 obţinem

$P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i)P(Y = y_j)$.

Reciproc, se poate scrie succesiv

$F_Z(x, y) = P(X < x, Y < y) = P(\bigcup_{x_i<x}(X = x_i), \bigcup_{y_j<y}(Y = y_j)) = \sum_{x_i<x}\sum_{y_j<y} P(X = x_i, Y = y_j) = \sum_{x_i<x}\sum_{y_j<y} P(X = x_i)P(Y = y_j) = \sum_{x_i<x} P(X = x_i)\sum_{y_j<y} P(Y = y_j) = F_X(x)F_Y(y)$. □

Propoziţie 2.5.2. *Două variabile aleatoare de tip continuu X şi Y sunt independente dacă şi numai dacă*

$$f_Z(x,y) = f_X(x)f_Y(y), \tag{2.5.3}$$

unde f_Z, f_X, f_Y sunt densităţile de probabilitate a vectorului aleator $Z(X,Y)$, respectiv ale variabilelor aleatoare X, Y.

Demonstraţie. Faptul că (2.5.3) este o condiţie necesară pentru ca X si Y să fie independente rezultă prin derivarea relaţiei (2.5.2) în raport cu x şi respectiv y.

$$f_Z(x,y) = \frac{\partial^2 F_Z(x,y)}{\partial x, \partial y} = \frac{\partial^2 (F_X(x)F_Y(y))}{\partial x, \partial y} = F'_X(x)F'_Y(y) = f_X(x)f_Y(y).$$

$\square$

Definiţia 2.5.2. O familie cel mult numărabilă de variabile aleatoare $\{X_i : i \in I\}$ definite pe acelasi câmp de probabilitate se spune că este independentă dacă pentru orice familie finită de indici $\{i_1, \dots, i_k\} \subset I$ şi orice $x_{i_1}, \dots, x_{i_k} \in \mathbb{R}$ are loc

$$P(X_{i_1} < x_{i_1}, \dots, X_{i_k} < x_{i_k}) = P(X_{i_1} < x_{i_1}) \dots P(X_{i_k} < x_{i_k}).$$

2.6 Operaţii cu variabile aleatoare

În paragraful 2.1 am văzut că dacă X, Y sunt variabile aleatoare pe un câmp de probabilitate (Ω, Σ, P), aplicaţiile $X + c, cX,\ X + Y,\ X \cdot Y,$ $\frac{X}{Y}, X^2$ sunt de asemenea variabile aleatoare. În caz discret aceste variabile aleatoare sunt determinate de distribuţiile lor, iar în caz continuuu de densităţile lor de probabilitate.

Propoziţie 2.6.1. *Dacă X şi Y sunt variabile aleatoare discrete având distribuţiile*

$$X : \begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix}_{i\in I} \quad Y : \begin{pmatrix} y_j \\ q_j \end{pmatrix}_{j\in J}$$

şi $c \in \mathbb{R}$, variabilele aleatoare $X + c, cX, X + Y, X \cdot Y, \frac{X}{Y}, X^2$ vor avea distribuţiile

$$X + c : \begin{pmatrix} x_i + c \\ p_i \end{pmatrix}_{i\in I}, \quad cX : \begin{pmatrix} cx_i \\ p_i \end{pmatrix}_{i\in I},$$

$$X + Y : \begin{pmatrix} x_i + y_j \\ p_{ij} \end{pmatrix}_{(i,j)\in I\times J}, \quad X \cdot Y : \begin{pmatrix} x_i y_j \\ p_{ij} \end{pmatrix}_{(i,j)\in I\times J},$$

$$\frac{X}{Y} : \begin{pmatrix} \frac{x_i}{y_j} \\ p_{ij} \end{pmatrix}_{(i,j)\in I\times J}, \quad X^2 : \begin{pmatrix} x_i^2 \\ p_i \end{pmatrix}_{i,\in I},$$

unde $p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j)$.

Demonstraţia propoziţiei precedente este imediată. Exemplificăm doar pentru variabila aleatoare $X + Y$. Când X ia valoarea x_i şi Y ia valoarea y_j suma lor $X + Y$ ia valoarea $z_{ij} = x_i + y_j$. Dacă toate valorile z_{ij} sunt distincte $P(X + Y = z_{ij}) = P(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij}$. În acest caz în distribuţia sumei $X + Y$ valorile z_{ij} se vor scrie cu probabilităţile p_{ij}. În caz contrar, z_{ij} va fi înscris o singură dată cu probabilitatea $\sum_{x_i+y_j=z_{ij}} P(X = x_i, Y = y_j)$.

Observaţia 2.6.1. Dacă variabile aleatoare X şi Y sunt independente în distributţiile variabilelor $X + Y, X \cdot Y, \frac{X}{Y}$ se înlocuieşte p_{ij} cu $p_i q_j$.

Propoziţie 2.6.2. *Dacă variabila aleatoare de tip continuu X are densitatea de probabilitate f, atunci densitatea de probabilitate a variabilei aleatoare $Y = aX + b$ $(a, b \in \mathbb{R},\ a \neq 0)$ este*

$$f_Y(x) = \frac{1}{|a|} f\left(\frac{x - b}{a}\right). \tag{2.6.1}$$

Demonstraţie. Determinăm mai intâi funcţia de repartiţie F_Y a variabilei aleatoare, anume

$$F_Y(x) = P(aX + b < x) = \begin{cases} P(X < \frac{x-b}{a}) & , \text{ dacă } a > 0 \\ P(X > \frac{x-b}{a}) & , \text{ dacă } a < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} F(\frac{x-b}{a}) & , \text{ dacă } a > 0, \\ 1 - F(\frac{x-b}{a}) & , \text{ dacă } a < 0. \end{cases}$$

Prin derivarea funcţiei de repartiţie F_Y se obţine densitatea de probabilitate

$$f_Y(x) = \begin{cases} \frac{1}{a} f(\frac{x-b}{a}) & , \text{ dacă } a > 0 \\ -\frac{1}{a} f(\frac{x-b}{a}) & , \text{ dacă } a < 0 \end{cases} = \frac{1}{|a|} f\left(\frac{x-b}{a}\right).$$

□

Propoziţie 2.6.3. *Dacă vectorul aleator de tip continuuu (X, Y) are densitatea de probabilitate f, atunci densitatea de probabilitate a variabilei aleatoare $Z = X + Y$ este*

$$f_Z(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s, x - s)ds, \quad x \in \mathbb{R} \tag{2.6.2}$$

iar dacă variabilele aleatoare X şi Y sunt independente

$$f_Z(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(s) f_Y(x - s)ds, \quad x \in \mathbb{R} \tag{2.6.3}$$

Demonstraţie. Dacă variabilele aleatoare X si Y sunt independente formula (2.6.3) rezultă imediat din (2.6.2).

Pentru a stabili (2.6.2) vom determina mai întâi funcţia de repartiţie F_Z a variabilei aleatoare Z. În conformitate cu formula (2.4.3) avem

$$F_Z(x) = P(Z < x) = P(X+Y < x) = P((X, Y) \in D) = \int\int_D f(s, t)dsdt,$$

unde $D = \{(s,t) \in \mathbb{R} : s + t < x\}$ este domeniul din figura de mai jos.

$$F_Z(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{x-s} f(s,t)dt \right) ds.$$

Derivând formula de mai sus, obţinem:

$$f_Z(x) = F_Z'(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s, x-s)ds.$$

□

Propoziţie 2.6.4. *Dacă vectorul aleator de tip continuuu (X,Y) are densitatea de probabilitate f atunci densitatea de probabilitate a variabilei aleatoare $Z = X \cdot Y$ este*

$$f_Z(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(s, \frac{x}{s}\right) \frac{ds}{|s|}, \quad x \in \mathbb{R} \tag{2.6.4}$$

iar dacă variabilele aleatoare X şi Y sunt independente

$$f_Z(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(s) f_Y\left(\frac{x}{s}\right) \frac{ds}{|s|}, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{2.6.5}$$

Demonstraţie. Şi de această dată, dacă variabilele aleatoare X şi Y sunt independente formula (2.6.5) rezultă imediat din (2.6.4).

Pentru a stabili (2.6.4) vom determina mai întâi funcţia de repartiţie F_Z a variabilei aleatoare Z.

$$F_Z(x) = P(Z < x) = P(X \cdot Y < x) = P((X,Y) \in D) = \int\int_D f(s,t)dsdt,$$

unde $D = \{(s,t) \in \mathbb{R} : st < x\}$. Domeniul D fiind cel haşurat în figura (a) pentru $x > 0$, respectiv in figura (b) pentru $x < 0$.

În ambele cazuri

$$F_Z(x) = \int_{-\infty}^{0} \left(\int_{\frac{x}{s}}^{\infty} f(s,t)dt \right) ds + \int_{0}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\frac{x}{s}} f(s,t)dt \right) ds.$$

Derivând formula de mai sus, obţinem:

$$f_Z(x) = F'_Z(x) = \int_{-\infty}^{0} f\left(s, \frac{x}{s}\right) \cdot \left(-\frac{1}{s}\right) ds + \int_{0}^{\infty} f\left(s, \frac{x}{s}\right) \cdot \left(\frac{1}{s}\right) ds$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f\left(s, \frac{x}{s}\right) \frac{ds}{|s|}.$$

□

2.7 Probleme

1. O ladă conţine 7 piese bune şi 4 defecte. Se extrag deodată (fără întoarcere) 5 piese. Să se scrie distribuţia variabilei aleatoare X care reprezintă numărul pieselor defecte obţinute şi să se determine funcţia de repartiţie a lui X.

2. Se aruncă două zaruri. Fie X numărul feţei apărute pe primul zar şi Y variabila aleatoare care ia valoarea 1 dacă numărul apărut pe al doilea zar este 1, respectiv valorile 2 şi 3 dacă numărul apărut pe al doilea zar este număr prim, respectiv număr compus. Să se scrie distribuţiile variabilelor aleatoare X şi Y, funcţiile lor de repartiţie precum şi distribuţiile variabilelor aleatoare $X + Y, X \cdot Y, X/Y$.

3. Se aleg la întâmplare 4 numere din primele 12 numere naturale. Într-o urnă sunt 12 bile numerotate de la 1 la 12. Se iau 6 bile la întâmplare şi fie X numărul bilelor care sunt numerotate cu unul din cele 4 numere stabilite la început. Să se scrie distribuţia variabilei aleatoare X dacă extragerile sunt făcute:

(a) cu întoarcerea bilei extrase;

(b) fără întoarcerea bilei extrase.

4. Să se scrie distribuţia variabilei aleatoare care reprezintă suma punctelor obţinute la aruncarea a două zaruri.

5. Variabilele aleatoare simple, independente X şi Y au repartiţiile

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad Y : \begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Să se determine repartiţia variabilei aleatoare bidimensionale $Z = (X, Y)$.

6. Să se determine constantele A şi B astfel încât funcţia $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } x \leq -a, \\ A + B \arcsin \frac{x}{a} & \text{dacă } -a < x \leq a, \quad (a > 0) \\ 1 & \text{dacă } x \geq a. \end{cases}$$

să fie funcţia de repartiţie a unei variabile aleatoare de tip continuu X. Să se determine apoi:

(a) $P(-\frac{a}{2} < X < \frac{a}{2})$;

(b) densitatea de probabilitate a variabilei aleatoare X.

7. Să se determine constantele A şi B astfel încât funcţia $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin $F(x) = A + B\ arctgx$ să fie funcţia de repartiţie a unei variabile aleatoare de tip continuu X. Să se determine apoi:

(a) $P(\mid X - \frac{1}{2} \mid < \frac{1}{2})$;

(b) densitatea de probabilitate a variabilei aleatoare X.

8. Fie variabila aleatoare continuă X. Să se determine densitatea de probabilitate a variabilei aleatoare $Y = g(X)$, unde $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcţie strict monotonă. Folosind acest rezultat să se determine densitatea de probabilitate a variabilei aleatoare $Y = aX + b, a \neq 0$ în funcţie de densitatea de probabilitate a variabilei aleatoare X.

9. Fie variabilele aleatoare independente $X_1, X_2, \ldots, X_n$ având funcţiile de repartiţie $F_1, F_2, \ldots, F_n$. Să se determine funcţiile de repartiţie ale variabilelor aleatoare $\max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ şi $\min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

10. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{a}{\sqrt{1-x^2}} & \text{dacă } x \in (-1,1) \\ 0 & \text{dacă } x \notin (-1,1). \end{cases}$$

Să se determine:

(i) constanta a astfel încât f să fie densitatea de probabilitate a unei variabile aleatoare de tip continuu X;

(ii) funcţia de repartiţie corespunzătoare;

(iii) $P(\mid X+1 \mid < 1)$;

(iv) densităţile de probabilitate ale variabilelor aleatoare $Y = 3X - 5$, respectiv $Z = X^2$.

11. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} a \ln \frac{1}{x} & \text{dacă } x \in (0,1) \\ 0 & \text{dacă } x \notin (0,1). \end{cases}$$

Să se determine:

(i) constanta a astfel încât f să fie densitatea de probabilitate a unei variabile aleatoare de tip continuu X;

(ii) funcţia de repartiţie corespunzătoare;

(iii) $P(\mid X - \frac{3}{8} \mid < \frac{1}{8})$;

(iv) densităţile de probabilitate ale variabilelor aleatoare $Y = -2X + 3$, respectiv $Z = \ln X$.

12. Să se determine densitatea de probabilitate a variabilei aleatoare e^{-X}, dacă variabila aleatoare X are densitatea de probabilitatea

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{dacă } x > 0 \\ 0 & \text{dacă } x \leq 0. \end{cases}$$

13. Fie variabilele aleatoare independente X şi Y, fiecare având densitatea de probabilitate $f(x) = \frac{a}{e^x + e^{-x}}$, $x \in \mathbb{R}$. Să se determine:

(i) constanta a;

(ii) $P(X < 1, Y < 1)$.

14. Densitatea de probabilitate a vectorului aleator (X, Y) este

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}\sin(x+y) & \text{dacă } \ x, y \in (0, \frac{\pi}{2}) \\ 0 & \text{în rest }. \end{cases}$$

Să se determine:

(i) densitatea de probabilitate a variabilei aleatoare X;

(ii) funcţia de repartiţie a vectorului aleator (X, Y);

(iii) $P(\frac{\pi}{4} \leq X \leq \frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{6} \leq X \leq \frac{\pi}{3})$.

15. Se consideră variabila aleatoare X având densitatea de probabilitate $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ x \in \mathbb{R}$. Se cer densitatăţile de probabilitate ale variabilelor aleatoarte $\mid X \mid$ şi e^{X^2}.

16. Fie vectorul aleator (X, Y) având densitatea de probabilitate $f(x,y) = \frac{A}{(a^2+x^2)(b^2+y^2)},\ (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ a, b > 0$. Să se determine:

(i) constanta A;

(ii) funcţia de repartiţie a vectorului aleator (X, Y);

(iii) $P(0 \leq X \leq a, \mid Y \mid \leq b)$;

(iv) densitatea de probabilitate a variabilei aleatoare X.

17. Care este probabilitatea ca un punct de coordonate (X, Y) să se găsească în domeniul $D = (0,1) \times (0,1)$ dacă funcţia de repartiţie a vectorului aleator (X, Y) este

$$F(x,y) = \begin{cases} 1 - a^{-x^2} - a^{-2y^2} + a^{-x^2-2y^2} & \text{dacă } \ x, y > 0 \\ 0 & \text{în rest,} \end{cases}$$

$a > 0$?

18. Fie variabila aleatoare bidimensională continuă $Z = (X, Y)$ a cărei densitate de probabilitate este

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{20}(x+y+2) & \text{dacă } \ (x,y) \in [0,2] \times [1,3] \\ 0 & \text{în rest }. \end{cases}$$

Să se determine:

(i) funcţia de repartiţie a lui Z;

(ii) densităţile de repartiţie ale lui X şi Y;

(iii) funcţia de repartiţie a lui X.

19. Să se determine densitatea de probabilitate a variabilei aleatoare $Z = X + Y$ dacă X şi Y sunt variabile aleatoare independente având densităţile de probabilitate

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{dacă } x \in (0,1) \\ 0 & \text{dacă } x \notin (0,1), \end{cases} \quad f_Y(x) = \begin{cases} x & \text{dacă } x \in [0,1] \\ 2-x & \text{dacă } x \in (1,2] \\ 0 & \text{dacă } x \notin [0,2]. \end{cases}$$

20. Fie variabilele aleatoare independente X şi Y având densităţile de probabilitate $f_X(x) = f_Y(x) = \frac{2}{\pi(e^x+e^{-x})}$, $x \in \mathbb{R}$. Să se determine densitatea de probabilitate a variabilei aleatoare $Z = X + Y$.

21. Fie variabilele aleatoare independente $X_1, X_2, \ldots, X_n$, fiecare având densitatea de probabilitate dată de

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{dacă } x > 0 \\ 0 & \text{dacă } x \leq 0, \end{cases}$$

unde $\lambda > 0$. Să se determine densitatea de probabilitate a variabilei aleatoare $X_1 + X_1 + \ldots X_n$.

22. Fie variabilele aleatoare independente X şi Y având densităţile de probabilitate $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x \in \mathbb{R}$, respectiv

$$f_Y(x) = \begin{cases} xe^{-\frac{x^2}{2}} & \text{dacă } x > 0 \\ 0 & \text{dacă } x \leq 0. \end{cases}$$

Să se determine densitatea de probabilitate a variabilei aleatoare $Z = X \cdot Y$.

23. Fie vectorul aleator de tip continuu (X, Y) având densitatea de probabilitate

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-(x+y)} & \text{dacă } x, y > 0 \\ 0 & \text{în rest} . \end{cases}$$

Să se determine:

(i) densitatea de probabilitate a variabilei aleatoare $X + Y$;

(ii) $P(X < 2Y)$;

(iii) $P(X > 1)$.

24. Variabilele aleatoare independente X şi Y au aceiaşi densitate de probabilitate dată de $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$, $x \in \mathbb{R}$. Să se determine densităţile de probabilitate ale variabilelor aleatoare $X + Y$ şi $X \cdot Y$.

25. Fie vectorul aleator de tip continuu (X, Y) având densitatea de probabilitate

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{dacă } x, y \in [0, 2] \\ 0 & \text{în rest} . \end{cases}$$

Să se determine:

(i) $P(X \leq 1, Y \leq 1)$;

(ii) $P(X + Y \leq 1)$;

(iii) $P(X + Y > 2)$.

26. Densitatea de probabilitate a vectorului aleator (X, Y) este dată prin

$$\rho(x,y) = \begin{cases} a(R - \sqrt{x^2 + y^2}) & \text{dacă } x^2 + y^2 \leq R^2 \\ 0 & \text{în rest} . \end{cases}$$

Să se determine:

(i) constanta a;

(ii) Probabilitatea atingerii discului de rază $r < R$, concentric cu cel de rază R.

Capitolul 3

Caracteristici numerice ale variabilelor aleatoare

3.1 Valoarea medie a unei variabilele aleatoare

O caracteristică importantă, care masoară tendinţa centrală a repartiţiei unei variabile aleatoare, este valoarea sa medie.

Definiţia 3.1.1. Fie X o variabilă aleatoare şi F funcţia sa de repartitie. Daca $\int_{-\infty}^{\infty} x dF(x)$ este absolut convergentă (adică $\int_{-\infty}^{\infty} |x| dF(x) < \infty$), se numeşte *valoare medie* (sau *speranţa matematică*) a variabilei aleatoare X numărul real

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x). \tag{3.1.1}$$

Observaţia 3.1.1. În aplicaţiile curente se intâlnesc de obicei fie variabile aleatoare discrete, fie variabile aleatoare de tip continuu. Pentru acest motiv şi pentru evitarea unor dificultăţi care apar în mânuirea integralei Stieltjes toate rezultatele referitoare la valori medii sau la alte caracteristici numerice ale variabilelor aleatoare le vom demonstra doar pentru aceste două clase de variabile aleatoare.

Dacă X este o variabilă aleatoare de tip discret având distribuţia

$$\begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix}_{i\in I}$$

atunci valoarea sa medie este dată de

$$M(X) = \sum_{i\in I} x_i p_i. \tag{3.1.2}$$

Dacă X este o variabilă aleatoare de tip continuu având densitatea de probabilitate f atunci valoarea sa medie este dată de

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) d(x). \tag{3.1.3}$$

Propoziţie 3.1.1. *Dacă X este o variabilă aleatoare care are valoare medie atunci, pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$*

$$M(aX + b) = aM(X) + b. \tag{3.1.4}$$

Demonstraţie. Considerăm mai intâi cazul când X este o variabilă aleatoare de tip discret având distribuţia

$$\begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix}_{i\in I} .$$

În acest caz

$$M(aX + b) = \sum_{i\in I} (ax_i + b_i)p_i = a \sum_{i\in I} x_i p_i + b \sum_{i\in I} p_i = aM(X) + b.$$

Dacă X este o variabilă aleatoare de tip continuu având densitatea de probabilitate f atunci, conform Propozitiei 2.6.2, densitatea de probabilitate a variabilei aleatoare $Y = aX + b$ este $f_Y(x) = \frac{1}{|a|} f(\frac{x-b}{a})$ şi valoarea sa medie calculată cu formula (3.1.3) este

$$M(aX + b) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_Y(x) d(x) = \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} x f \left(\frac{x-b}{a} \right) dx.$$

Facem schimbarea de variabilă $y = \frac{x-b}{a}$, deci $dx = ady$,

$M(aX+b) = \int_{-\infty}^{\infty}(ay+b)f(y)dy = a\int_{-\infty}^{\infty} yf(y)dy + b\int_{-\infty}^{\infty} f(y)dy = aM(X)+b$. □

Corolarul 3.1.2. *(i) $M(aX) = aM(X)$, $a \in \mathbb{R}$.*

(ii) Valoarea medie a unei constante este constanta însăşi, adică $M(b) = b$.

Demonstraţie. Se face $b = 0$ (pentru afirmaţia (i)), respectiv $a = 0$ (pentru afirmaţia (ii)). □

Definiţia 3.1.2. Dacă X este o variabilă aleatoare care are valoare medie, variabila aleatoare $U = X - M(X)$ se numeşte *abaterea* lui X.

Corolarul 3.1.3. *Valoarea medie a abaterii unei variabile aleatoare este 0.*

Demonstraţie. Se ia în (3.1.4) $a = 1$ şi $b = -M(X)$. □

Propoziţie 3.1.4. *Dacă X şi Y sunt două variabile aleatoare care au valori medii atunci $X+Y$ are valoare medie şi $M(X+Y) = M(X) + M(Y)$.*

Demonstraţie. Dacă X Y sunt variabile aleatoare discrete având distribuţiile

$$X : \begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix}_{i\in I} \quad Y : \begin{pmatrix} y_j \\ q_j \end{pmatrix}_{j\in J},$$

atunci $X+Y$ va avea distribuţia $\begin{pmatrix} x_i + y_j \\ p_{ij} \end{pmatrix}_{(i,j)\in I\times J}$.

$$M(X+Y) = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} p_{ij}(x_i+y_j) = \sum_{i\in I} x_i \sum_{j\in J} p_{ij} + \sum_{j\in J} y_j \sum_{i\in I} p_{ij}.$$

Conform Propozitiei 2.3.2, $\sum_{j\in J} p_{ij} = p_i$, $\sum_{i\in I} p_{ij} = q_j$ şi avem

$M(X+Y) = \sum_{i\in I} x_i p_i + \sum_{j\in J} y_j q_j = M(X) + M(Y)$.

Dacă X si Y sunt variabile de tip continuu, conform formulei (2.6.2), variabila aleatoare $Z = X + Y$ va avea densitatea de probabilitate $f_Z(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s, x-s)ds$, unde f este densitatea de probabilitate a vectorului aleator (X, Y). Prin urmare

$$M(X+Y) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_Z(x)d(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(s, x-s)ds \right) dx =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x f(s, x-s)dx \right) ds.$$

Făcând schimbarea de variabilă $y = x - s, dy = dx$, urmează că

$$M(X+Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (s+y) f(s,y)dyds =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} s \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(s,y)dy \right) ds + \int_{-\infty}^{\infty} y \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(s,y)ds \right) dy = M(X) + M(Y).$$

□

Propoziţie 3.1.5. *Dacă X şi Y sunt două variabile aleatoare independente care au valori medii atunci $X \cdot Y$ are valoare medie şi $M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y)$.*

Demonstraţie. Dacă X, Y sunt variabile aleatoare discrete având distribuţiile

$$X : \begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix}_{i\in I} \quad Y : \begin{pmatrix} y_j \\ q_j \end{pmatrix}_{j\in J},$$

atunci $X \cdot Y$ va avea distribuţia $\begin{pmatrix} x_i y_j \\ p_{ij} \end{pmatrix}_{(i,j)\in I\times J}$, cu $p_{ij} = p_i q_j$, deoarece X si Y sunt independente. Avem

$$M(X \cdot Y) = \sum_{i\in I} \sum_{j\in J} p_{ij} x_i y_j = \sum_{i\in I} p_i x_i \sum_{j\in J} q_j y_j = M(X) \cdot M(Y).$$

Dacaă X si Y sunt variabile independente de tip continuu, conform formulei (2.6.5), variabila aleatoare $Z = X \cdot Y$ va avea densitatea de probabilitate $f_Z(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(s) f_Y\left(\frac{x}{s}\right) \frac{ds}{|s|} dx$.

$$M(X \cdot Y) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_Z(x) d(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x \left(\int_{-\infty}^{\infty} f_X(s) f_Y(\frac{x}{s}) \frac{ds}{|s|} \right) dx =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{|s|} f_X(s) f_Y(\frac{x}{s}) dx \right) ds$$

Facem schimbarea de variabilă $\frac{x}{s} = y$, $dx = sdy$,

$$M(X \cdot Y) = \int_{-\infty}^{0} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{sy}{-s} f_Y(y) sdy \right) f_X(s) ds +$$

$$\int_{0}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{sy}{s} f_Y(y) sdy \right) f_X(s) ds = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} sy f_Y(y) f_X(x) dy ds$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} s f_X(s) ds \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy = M(X) M(Y).$$

$\square$

Exemplul 3.1.1. Să se determine valoarea medie a variabilei aleatoare X a cărei densitate de probabilitate este dată de

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma \cdot x\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(\ln x - a)^2}{2\sigma^2}} & \text{dacă } x \geq 0 \\ 0 & \text{dacă } x < 0. \end{cases}$$

Soluţie. $M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) d(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{(\ln x - a)^2}{2\sigma^2}} dx$. Facem schimbarea de variabilă

$\frac{\ln x - a}{\sigma\sqrt{2}} = t$. Avem $x = e^{\sigma\sqrt{2}\, t + a}$, $dx = \sigma\sqrt{2} e^{\sigma\sqrt{2}\, t + a} dt$. Obţinem:

$$M(X) = \frac{e^a}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t^2 + \sigma\sqrt{2}\, t} dt = \frac{e^a}{\sqrt{\pi}} e^{\frac{\sigma^2}{2}} \int_0^{\infty} e^{-(t - \sigma\frac{\sqrt{2}}{2})^2} dt = e^{a + \frac{\sigma^2}{2}}.$$

3.2 Momente ale unei variabile aleatoare

Definiţia 3.2.1. Fie X o variabilă aleatoare având funcţia de repartiţie F. Se numesc:

(i) *momentul de ordinul* n al lui X şi se notează $\alpha_n(X)$, valoarea medie a variabilei aleatoare X^n, adică

$\alpha_n(X) = M(X^n) = \int_{-\infty}^{\infty} x^n dF(x)$,

(ii) *momentul centrat de ordinul* n al lui X şi se notează $\beta_n(X)$, momentul de ordinul n al abaterii $U = X - M(X)$, adică

$\beta_n(X) = M\left((X - M(X))^n\right) = \int_{-\infty}^{\infty}(x - M(X))^n dF(x)$;

(iii) *dispersia* lui X şi se notează $D^2(X)$ momentul centrat de ordinul 2 al lui X

$D^2(X) = M\left((X - M(X))^2\right) = \int_{-\infty}^{\infty}(x - M(X))^2 dF(x)$.

Ne intereresează, şi de această dată, la ce se reduc formulele precedente în cazul unei variabile aleatoare de tip discret, respectiv de tip continuu.

Observaţia 3.2.1. Dacă X este o variabilă aleatoare de tip discret având distribuţia $\begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix}_{i\in I}$, atunci

$$\alpha_n(X) = \sum_{i\in I} x_i^n p_i,$$

$$\beta_n(X) = \sum_{i\in I}(x_i - M(X))^n p_i,$$

$$D^2(X) = \sum_{i\in I}(x_i - M(X))^2 p_i.$$

Dacă X este o variabilă aleatoare de tip continuu având densitatea de probabilitate f atunci

$$\alpha_n(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x)dx,$$

$$\beta_n(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(X))^n f(x)dx,$$

$$D^2(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(X))^2 f(x)dx.$$

Propoziţie 3.2.1. *Dacă dispersia unei variabile aleatoare X există atunci:*

(i) $D^2(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$*;*

(ii) $D^2(aX + b) = a^2 D^2(X), \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$*.*

Demonstraţie. (i) Folosind proprietăţile valorii medii ale unei variabile aleatoare X avem

$$D^2(X) = M\left[(X - M(X))^2\right] = M[X^2 - 2M(X) \cdot X + (M(X))^2] =$$

$$M(X^2) - 2M(X) \cdot M(X) + (M(X))^2 = M(X^2) - [M(X)]^2.$$

(ii) $D^2(aX + b) = M\left[(aX + b - M(aX + b))^2\right] =$
$M\left[(aX + b - M(X) - b)^2\right] = M\left[a^2(X - M(X))^2\right] =$
$a^2 M\left[(X - M(X))^2\right] = a^2 D^2(X).$ □

Corolarul 3.2.2. *(i)*$D^2(aX) = a^2 D^2(X)$*;*
(ii) $D^2(b) = 0$.

Demonstraţie. Pentru afirmaţia (i) se ia $b = 0$, iar pentru (ii) se ia $a = 0$ în Propoziţia 3.2.1 (ii). □

Propoziţie 3.2.3. *Dacă variabilele aleatoare $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sunt independente două câte două, atunci*
$D^2(\sum_{i=1}^n X_i) = \sum_{i=1}^n D^2(X_i)$.

Demonstraţie. Calculăm mai întâi, pentru $i \neq j$,

$$M[(X_i - M(X_i))(X_j - M(X_j))] = M(X_i - M(X_i))M(X_j - M(X_j))$$

$= M(U_X)M(U_Y) = 0.$

Deci

$$D^2(\sum_{i=1}^n X_i) = M\left[\left(\sum_{i=1}^n X_i - \sum_{i=1}^n M(X_i)\right)^2\right] = M\left[\left(\sum_{i=1}^n (X_i - M(X_i))\right)^2\right] =$$

$$M\left[\sum_{i=1}^n (X_i - M(X_i))^2 + 2\sum_{1\leq i<j\leq n}(X_i - M(X_i))(X_j - M(X_j))\right] =$$

$$\sum_{i=1}^n M\left[(X_i - M(X_i))^2\right] + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} M\left[(X_i - M(X_i))(X_j - M(X_j))\right] =$$

$\sum_{i=1}^n D^2(X_i)$. □

Exemplul 3.2.1. Se aruncă două zaruri. Să se determine valoarea medie şi dispersia sumei punctelor obţinute.

Soluţie Dacă X este suma punctelor obţinute este clar că acestă variabilă aleatoare ia valorile $2, 3, 4, \ldots, 12$. Dacă i_1, respectiv i_2 desemnează numărul punctelor apărute la aruncarea primului, respectiv a celui de-al doilea zar, atunci rezultatul experimentului este perfect determinat de perechea ordonată (i_1, i_2).

Avem $P(X = 2) = \frac{1}{36}$, deoarece numărul cazurilor posibile coincide cu numărul perechilor ordonate (i_1, i_2) din produsul cartezian $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\times\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, deci este 36, în timp ce numărul cazurilor favorabile coincide cu numărul perechilor ordonate (i_1, i_2) pentru care $i_1 + i_2 = 2$, deci este egal cu 1. Analog se obţin $P(X=3)=\frac{2}{36}$, $P(X=4)=\frac{3}{36}$, etc. Distribuţia variabilei aleatoare X va fi:

$$X:\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ \frac{1}{36} & \frac{2}{36} & \frac{3}{36} & \frac{4}{36} & \frac{5}{36} & \frac{6}{36} & \frac{5}{36} & \frac{4}{36} & \frac{3}{36} & \frac{2}{36} & \frac{1}{36} \end{pmatrix}.$$

Conform formulei (3.1.2), vom avea $M(X)=2\cdot\frac{1}{36}+3\cdot\frac{2}{36}+4\cdot\frac{3}{36}+\cdots+12\cdot\frac{1}{36}=\cdots=7$.

Pentru calculul dispersiei vom utiliza formula dată de Propoziţia 3.2.1 (i). Avem nevoie pentru aceasta de $M(X^2)=2^2\cdot\frac{1}{36}+3^2\cdot\frac{2}{36}+4^2\cdot\frac{3}{36}+\cdots+12^2\cdot\frac{1}{36}=\cdots=\frac{329}{6}$. Obţinem $D^2(X)=M(X^2)-[M(X)]^2=\frac{329}{6}-49=\frac{35}{6}$.

Soluţia a II-a. Dacă X_1 este numărul de puncte obţinute pe primul zar şi X_2 numărul punctelor obţinute pe al doilea zar, atunci $X=X_1+X_2$ şi deci $M(X)=M(X_1)+M(X_2)$. În plus, variabilele aleatoare X_1, X_2 fiind independente, $D^2(X)=D^2(X_1)+D^2(X_2)$.

Variabilele aleatoare X_1, X_2 au aceiaşi distribuţie dată de tabloul

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

Avem $M(X_1)=M(X_2)=\frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6)=\frac{7}{2}$, $M(X_1^2)=M(X_2^2)=\frac{1}{6}(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2)=\frac{91}{6}$, de unde $M(X)=\frac{7}{2}+\frac{7}{2}=7$, $D^2(X)=2D^2(X_1)=2(\frac{91}{6}-\frac{49}{4})=\frac{35}{6}$.

Teorema 3.2.4. *(inegalitatea lui Cebâsev) Fie X o variabilă aleatoare care are valoare medie şi dispersie. Probabilitatea ca modulul abaterii lui X să ia valori mai mari decât un număr $L>0$ este cel mult egală cu raportul dintre dispersia lui X şi L^2, adică*

$$P(|\,X-M(X)\,|\geq L)\leq\frac{D^2(X)}{L^2}. \tag{3.2.1}$$

Demonstraţie. În cazul când X este o variabilă aleatoare de tip discret având distribuţia $\begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix}_{i\in I}$,

$$D^2(X) = \sum_{i\in I}(x_i - M(X))^2 p_i.$$

Fie $J \subset I$ mulţimea indicilor i pentru care $|x_i - M(X)| \geq L$, sau echivalent $(x_i - M(X))^2 \geq L^2$. Avem

$$D^2(X) = \sum_{i\in I}(x_i - M(X))^2 p_i \geq \sum_{i\in J}(x_i - M(X))^2 p_i \geq L^2 \sum_{i\in J} p_i.$$

Rezultă că

$$\frac{D^2(X)}{L^2} \geq \sum_{i\in J} p_i = \sum_{i\in J} P(X = x_i) = P\left(\bigcup_{i\in J}(X = x_i)\right).$$

Deoarece $(| X - M(X) | \geq L) = \bigcup_{i\in J}(X = x_i)$ inegalitatea precedentă devine

$\frac{D^2(X)}{L^2} \geq P\left(| X - M(X) | \geq L\right)$, adică inegalitatea din enunţ.

Dacă X este o variabilă aleatoare de tip continuu având densitatea de probabilitate f atunci $D^2(X) = \int_{-\infty}^{\infty}(x - M(X))^2 f(x)dx$. Valorile lui X pentru care $(| X - M(X) | \geq L)$ se găsesc în mulţimea $(-\infty, M(X) - L] \cup [M(X) + L, +\infty)$. Are loc:

$$D^2(X) \geq \int_{-\infty}^{M(X)-L}(x - M(X))^2 f(x)dx + \int_{M(X)+L}^{\infty}(x - M(X))^2 f(x)dx$$

$$\geq L^2\left(\int_{-\infty}^{M(X)-L} f(x)dx + \int_{M(X)+L}^{\infty} f(x)dx\right).$$

Deoarece $\int_{-\infty}^{M(X)-L} f(x)dx = P(X < M(X) - L) = P(X \leq M(X) - L)$, $\int_{M(X)+L}^{\infty} f(x)dx = P(X \geq M(X) + L)$, rezultă că

$$D^2(X) \geq L^2 P\left[(X \leq M(X) - L) \cup (X \geq M(X) + L)\right]$$

$$= L^2 P\left(\mid X - M(X) \mid \geq L\right).$$

$\square$

Observaţia 3.2.2. Considerând evenimentul contrar celui din relaţia (3.2.1) inegalitatea lui Cebâsev se poate scrie echivalent:

$$P\left(\mid X - M(X) \mid < L\right) \geq 1 - \frac{D^2(X)}{L^2}. \tag{3.2.2}$$

Exemplul 3.2.2. Variabila aleatoare X are densitatea de probabilitate

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^m e^{-x}}{m!} & \text{dacă } x \geq 0, \\ 0 & \text{dacă } x < 0. \end{cases}$$

Să se arate că $P(0 < X < 2(m+1)) \geq \frac{m}{m+1}$.

Soluţie Să remarcăm la început că evenimentul $(0 < X < 2(m+1))$ este echivalent cu evenimentul $(\mid X - (m+1) \mid < m+1)$. Avem:

$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) d(x) = \frac{1}{m!} \int_0^{\infty} x^{m+1} e^{-x} dx = \frac{1}{m!}\, \Gamma(m+2) = m+1$, unde $\Gamma(a) = \int_0^{\infty} x^{a-1} e^{-x} dx$ este funcţia lui Euler de speţa a doua.

$M(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) d(x) = \frac{1}{m!} \int_0^{\infty} x^{m+2} e^{-x} dx = \frac{1}{m!}\ \Gamma(m+3) = \frac{1}{m!} \cdot (m+2)! = (m+1)(m+2)$.

Aplicăm acum (3.2.2) şi obţinem

$P(0 < X < 2(m+1)) = P(\mid X - (m+1) \mid < m+1) \geq 1 - \frac{D^2(X)}{(m+1)^2} = 1 - \frac{m+1}{(m+1)^2} = \frac{m}{m+1}$.

3.3 Covarianţă, coeficient de corelaţie

Definiţia 3.3.1. Fiind date variabilele aleatoare X şi Y se numeşte *covarianţă (corelaţie)* dintre X şi Y caracteristica numerică notată $C(X, Y)$ definită prin:

$C(X, Y) = M[(X - M(X)) \cdot (Y - M(Y))]$.

Observaţia 3.3.1. Dacă $X = Y$ avem:
$C(X,X) = M[(X - M(X))^2] = D^2(X)$.

Propoziţie 3.3.1. *Covarianţa dintre X şi Y se poate calcula cu formula:*
$C(X,Y) = M(XY) - M(X)M(Y)$.

Demonstraţie. Din definiţia covarianţei avem succesiv:
$C(X,Y) = M[XY - M(Y)X - M(X)Y + M(X)M(Y)] = M(XY) - 2M(X)M(Y) + M(X)M(Y) = M(XY) - M(X)M(Y)$. □

Propoziţie 3.3.2. *Dacă variabilele aleatoare X şi Y sunt independente, atunci $C(X,Y) = 0$.*

Demonstraţie. În acaz avem:
$C(X,Y) = M(XY) - M(X)M(Y) = M(X)M(Y) - M(X)M(Y) = 0$. □

Propoziţie 3.3.3. *Fiind date variabilele aleatoare X_i, $i = \overline{1,n}$ avem:*
$D^2(\sum_{i=1}^n X_i) = \sum_{i=1}^n D^2(X_i) + 2\sum_{1\le i<j\le n} C(X_i, X_j)$.

Demonstraţie. $D^2(\sum_{i=1}^n X_i) = M\left([\sum_{i=1}^n (X_i - M(X_i))]^2 \right) =$

$$\sum_{i=1}^{n} M\left[(X_i - M(X_i))^2\right] + 2\sum_{1\le i<j\le n} M\left[(X_i - M(X_i))(X_j - M(X_j))\right] =$$

$\sum_{i=1}^n D^2(X_i) + 2\sum_{1\le i<j\le n} C(X_i, X_j)$. □

Definiţia 3.3.2. Se numeşte *coeficientul de corelaţie* dintre variabilele aleatoare X, Y caracteristica numerică
$r(X,Y) = \frac{C(X,Y)}{\sqrt{D^2(X)}\sqrt{D^2(Y)}}$.

Observaţia 3.3.2. Din definiţia coeficientului de corelaţie rezultă că $r(X,Y) = r(Y,X)$, iar dacă variabilele aleatoare X şi Y sunt independente, atunci $r(X,Y) = 0$.

Observaţia 3.3.3. Dacă variabilele aleatoare X şi Y sunt discrete şi au repartiţia comună

$X\backslash Y$	y_1	$\dots$	y_j	$\dots$	y_m	$P(X=x_i)$
x_1	p_{11}	$\dots$	p_{1j}	$\dots$	p_{1m}	p_1
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
x_i	p_{i1}	$\dots$	p_{ij}	$\dots$	p_{im}	p_i
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
x_n	p_{n1}	$\dots$	p_{nj}	$\dots$	p_{nm}	p_n
$P(Y=y_j)$	q_1	$\dots$	q_j	$\dots$	q_m	$\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} p_{ij}=1$

atunci

$$r(X,Y)=\frac{1}{\sqrt{D^2(X)}\sqrt{D^2(Y)}}\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} p_{ij}(x_i-M(X))(y_j-M(Y)).$$

Dacă X şi Y sunt variabile aleatoare de tip continuu şi f este densitatea de probabilitate a vectorului aleator (X,Y), atunci

$$r(X,Y)=\frac{1}{\sqrt{D^2(X)}\sqrt{D^2(Y)}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-M(X))(y-M(Y))f(x,y)dxdy.$$

Definiţia 3.3.3. Două variabilele aleatoare X şi Y spunem că sunt *necorelate* dacă $r(X,Y)=0$.

Observaţia 3.3.4. Din Propoziţia 3.3.2 rezultă că două variabilele aleatoare independente sunt necorelate. Dacă X şi Y sunt necorelate nu rezultă însă că sunt necorelate. Vom ilustra aceasta pe un exemplu. Fie vectorul aleator (X,Y) cu distribuţia

$X\backslash Y$	0	1
-1	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$
0	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$
1	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$

Ţinând cont de formulele $\sum_j p_{ij} = p_i,\ \sum_i p_{ij} = q_j$ rezultă că distribuţiile variabilelor aleatoare sunt

$$X : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix},\ Y : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

şi de aici distribuţia variabilei aleatoare XY:

$XY : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{2}{9} & \frac{5}{9} & \frac{2}{9} \end{pmatrix}$. Se obţin uşor $M(X) = 0,\ M(Y) = \frac{2}{3},\ M(XY) = 0$. Rezultă că

$C(X,Y) = M(XY) - M(X)M(Y) = 0$, deci $r(X,Y) = 0$.

Pe de altă parte se observă că $Y = X^2$, deci X şi Y nu sunt independente.

Propoziţie 3.3.4. *Coeficientul de corelaţie dintre două variabile aleatoare X şi Y verifică inegalitatea* $\mid r(X,Y) \mid \leq 1$.

Demonstraţie. Considerăm variabilele aleatoare $Z = t(X - M(X)) + (Y - M(Y)),\ t \in \mathbb{R}$. Deoarece $M(Z^2) \geq 0$, rezultă efectuând calculele:

$$t^2 D^2(X) + 2tC(X,Y) + D^2(Y) \geq 0 \ \ \forall t \in \mathbb{R},$$

deci $[C(X,Y)]^2 - D^2(X)D^2(Y) \leq 0$ sau $\frac{[C(X,Y)]^2}{D^2(X)D^2(Y)} \leq 1$, adică $\mid r(X,Y) \mid \leq 1$. □

Propoziţie 3.3.5. *Condiţia necesară şi suficientă ca $r(X,Y) \in \{-1, 1\}$ este să existe $a, b \in \mathbb{R},\ a \neq 0$ astfel încât $Y = aX + b$*

Demonstraţie. Arătăm mai întâi suficienţa. Dacă $Y = aX + b$ putem scrie succesiv:

$r(X,Y) = r(x, aX + b) = \frac{C(X, aX+b)}{\sqrt{D^2(X)}\sqrt{D^2(aX+b)}} =$
$\frac{M[X(aX+b)] - M(X)M(aX+b)}{\sqrt{D^2(X)}\sqrt{a^2 D^2(X)}} = \frac{aM(X^2) + bM(X) - a(M(X))^2 - bM(X)}{|a|D^2(X)}$
$= \frac{a[M(X^2) - (M(X))^2]}{|a|D^2(X)} \in \{-1, 1\}$.

Pentru demonstrarea necesităţii definim două noi variabile aleatoare

$$X' = \frac{X - M(X)}{\sqrt{D^2(X)}}, \quad Y' = \frac{Y - M(Y)}{\sqrt{D^2(Y)}}$$

numite variabilele normate reduse, pentru X, respectiv pentru Y. Să presupunem de exemplu că $r(X,Y) = 1$. Avem

$M(X'Y') = \frac{M[(X-M(X))(Y-M(Y))]}{\sqrt{D^2(X)}\sqrt{D^2(Y)}} = r(X,Y) = 1$,

$M\left[(X' - Y')^2\right] = M(X'^2) - 2M(X'Y') + M(Y'^2) = 1 + 1 - 2 = 0.$

Rezultă că $X' - Y' = 0$, adică $\frac{X-M(X)}{\sqrt{D^2(X)}} = \frac{Y-M(Y)}{\sqrt{D^2(Y)}}$. Notând $a = \frac{\sqrt{D^2(X)}}{\sqrt{D^2(Y)}}$, $b = M(Y) - \frac{\sqrt{D^2(X)}}{\sqrt{D^2(Y)}}$ se obţine $Y = aX + b$. $\square$

Exemplul 3.3.1. Fie X şi Y două variabile aleatoare cu repartiţiile:

$$X : \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \; Y : \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Dacă $P(X = -1, Y = -1) = \lambda, \;\; \lambda \in [0,1]$, să se determine:

(a) repartiţia variabilei aleatoare bidimensionale $Z = (X,Y)$;

(b) coeficientul de corelaţie $r(X,Y)$;

(c) valorile lui λ pentru care X şi Y sunt necorelate şi în acest caz să se cerceteze independenţa variabilelor aleatoare X şi Y.

Soluţie (a) Repartiţia variabilei aleatoare bidimensionale $Z = (X,Y)$ este

$X\backslash Y$	-1	2
-1	λ	$\frac{1}{2} - \lambda$
1	$\frac{2}{3} - \lambda$	$\lambda - \frac{1}{6}$

(b) Variabila aleatoare XY are repartiţia

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 2 \\ \frac{1}{2} - \lambda & \frac{2}{3} - \lambda & \lambda & \lambda - \frac{1}{6} \end{pmatrix},$$

deci $M(XY) = -2(\frac{1}{2} - \lambda) + (-1)(\frac{2}{3} - \lambda) + 1 \cdot \lambda + 2(\lambda - \frac{1}{6}) = 6\lambda - 2$. $M(X) = 0, M(Y) = 0, D^2(X) = 1, D^2(Y) = 2$. Rezultă că $r(X,Y) = \frac{6\lambda - 2}{\sqrt{2}}$.

(c) Din $r(X,Y) = 0$ rezultă $\lambda = \frac{1}{3}$, deci pentru $\lambda = \frac{1}{3}$ variabilele aleatoare X şi Y sunt necorelate. În acest caz repartiţia variabilei aleatoare bidimensionale $Z = (X, Y)$ este

$X\backslash Y$	-1	2
-1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

Deoarece $p_{ij} = p_i q_j \quad \forall i, j \in \{1, 2\}$ rezultă că pentru $\lambda = \frac{1}{3}$ variabilele aleatoare X şi Y sunt independente.

3.4 Funcţia caracteristică

Înainte de a defini această noţiune precizăm că o variabilă aleatoare complexă pe câmpul de probabilitate (Ω, Σ, P) este o variabilă aleatoare de forma $Z = X + iY$ unde X şi Y sunt variabile aleatoare reale definite pe câmpul precizat. Dacă valorile medii ale variabilelor aleatoare X şi Y există, atunci valoarea medie a variabilei aleatoare complexe $Z = X + iY$ se defineşte:

$$M(Z) = M(X) + iM(Y).$$

Definiţia 3.4.1. Numim *funcţia caracteristică* asociată unei variabile aleatoare X, funcţia complexă de variabilă reală notată ϕ_X sau, când nu există pericolul confuziei, ϕ definită prin $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

$$\phi(t) = M(e^{itX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x).$$

Observaţia 3.4.1. Deoarece $|e^{itx}| = 1$ pentru orice $t, x \in \mathbb{R}$ şi $\int_{-\infty}^{\infty} dF(x)$ $= 1$ rezultă că integrala improprie din definiţia funcţiei caracteristice este absolut convergentă, deci orice variabilă aleatoare posedă funcţie caracteristică.

Observaţia 3.4.2. Din definiţie rezultă că în cazul când X este o variabilă aleatoare de tip discret având distribuţia $\begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix}_{i \in I}$ funcţia sa caracteristică se determină cu formula

$$\phi(t) = \sum_{i \in I} e^{itx} p_i,$$

iar daca X este o variabilă aleatoare de tip continuu având densitatea de probabilitate f,

$$\phi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x) dx.$$

Propoziţie 3.4.1. *Dacă ϕ este funcţia caracteristică asociată unei variabile aleatoare X, atunci $|\phi(t)| \leq 1, \forall t \in \mathbb{R}$ si $\phi(0) = 1$.*

Demonstraţie. Din definiţie rezultă că

$$|\phi(t)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |e^{itx}| dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dF(x) = 1.$$

$\square$

Propoziţie 3.4.2. *Dacă între variabilele aleatoare X şi Y există relaţia $Y = aX + b$, atunci*

$$\phi_Y(t) = e^{ibt} \phi_X(at).$$

Demonstraţie. Avem succesiv

$$\phi_Y(t) = M(e^{itY}) = M(e^{it(aX+b)}) = M(e^{ibt} e^{iatX}) = e^{ibt} M(e^{iatX}) = e^{ibt} \phi_X(at).$$

$\square$

Propoziţie 3.4.3. *Dacă variabilele aleatoare $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sunt independente, atunci variabila aleatoare $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ va avea funcţia caracteristică*

$$\phi_X(t) = \phi_{X_1}(t)\phi_{X_2}(t)\ldots\phi_{X_n}(t).$$

Demonstraţie. Avem

$$\phi_X(t) = M(e^{it(X_1+X_2+\cdots+X_n)}) = M(e^{itX_1}e^{itX_2}\ldots e^{itX_n}) =$$

$$M(e^{itX_1})M(e^{itX_2})\ldots M(e^{itX_n}) = \phi_{X_1}(t)\phi_{X_2}(t)\ldots\phi_{X_n}(t).$$

□

Propoziţie 3.4.4. *Dacă momentul de ordinul n al unei variabile aleatoare X există, atunci funcţia sa caracteristică este de n ori derivabilă şi momentul său de ordinul n se poate calcula cu formula*

$$\alpha_n(X) = \frac{1}{i^n}\,\phi^{(n)}(0). \tag{3.4.1}$$

Demonstraţie. Derivând formal de n ori formula $\phi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}dF(x)$ obţinem

$$\phi^{(n)}(t) = i^n \int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{itx} dF(x). \tag{3.4.2}$$

Integrala din membrul drept este convergentă deoarece, existând momentul de ordinul n, $\int_{-\infty}^{\infty} \mid x^n \mid dF(x) < \infty$ şi

$$\mid \int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{itx} dF(x) \mid \leq \int_{-\infty}^{\infty} \mid x^n \mid dF(x) < \infty.$$

Dacă se ia in (3.4.2) $t = 0$ se obţine

$$\phi^{(n)}(0) = i^n \int_{-\infty}^{\infty} x^n dF(x) = i^n \alpha_n(X).$$

□

Exemplul 3.4.1. Fie X o variabilă aleatoare de tip discret cu distribuţia $\begin{pmatrix} k \\ e^{-2}\ \frac{2^k}{k!} \end{pmatrix}_{k\geq 0}$. Să se determine:

(a)Funcţia caracteristică a lui X.

(b) Valoarea medie şi dispersia lui X.

Soluţie. (a)

$$\phi(t) = e^{-2} \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk}\, \frac{2^k}{k!} = e^{-2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2e^{it})^k}{k!} = e^{-2}\ e^{2e^{it}} = e^{2(e^{it}-1)}.$$

(b) Să calculăm $M(X)$ şi $M(X^2)$ cu ajutorul funcţiei caracteristice. Avem

$\phi'(t) = 2e^{it}\ i\ e^{2(e^{it}-1)},\ \ \phi'(0) = 2i;$

$\phi''(t) = 2i^2 e^{it}\ e^{2(e^{it}-1)} + 4i^2 e^{2it}\ e^{2(e^{it}-1)},\ \ \phi''(0) = 6i^2 = -6.$

Rezultă că

$M(X) = \frac{\phi'(o)}{i} = 2,$

$M(X^2) = \frac{\phi''(o)}{i^2} = 6,\ \ D^2(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = 2.$

Exemplul 3.4.2. Fie X o variabilă aleatoare de tip continuu cu densitatea de probabilitate $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|},\ x \in \mathbb{R}$. Să se determine:

(a)Funcţia caracteristică a lui X.

(b) Valoarea medie şi dispersia lui X.

Soluţie. (a) $\phi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx-|x|}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} e^{(it+1)x}dx$ $+\frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} e^{(it-1)x}dx = \frac{1}{2}\frac{1}{it+1}e^{(it+1)x}|_{\infty}^{0} + \frac{1}{2}\frac{1}{it-1}e^{(it-1)x}|_{0}^{\infty}.$

Avem $\lim_{x\to-\infty} e^{(it+1)x} = \lim_{x\to-\infty} e^{x}(\cos itx + i\sin itx) = 0$, deoarece $\lim_{x\to-\infty} e^{x} = 0$ şi funcţiile trigonometrice cos şi sin sunt mărginite. Analog se obţine că $\lim_{x\to\infty} e^{(it-1)x} = 0$, Aşadar

$$\phi(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{it+1} - \frac{1}{it-1}\right) = \frac{1}{1+t^2}.$$

(b) $\phi'(t) = \frac{-2t}{1+t^2}$, deci $M(X) = \frac{\phi'(0)}{i} = 0$.

Derivând încă o dată şi luând $t = 0$ se obţine $\phi''(0) = -2$. Rezultă $M(X^2) = \frac{\phi''(0)}{i^2} = 2$ şi apoi $D^2(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = 2$.

3.5 Probleme

1. Fie X o variabilă aleatoare discretă având distribuţia $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{pmatrix}$. Să se determine p_1, p_2, p_3 dacă $M(x) = 0,1$ şi $M(X^2) = 0,9$.

2. Se dau trei urne: prima conţine o bilă albă şi o bilă neagră, a doua conţine două bile albe şi şapte negre, iar a treia o bilă albă şi trei negre. Din prima urnă se extrage o bilă care se introduce în cea de-a doua urnă, după care se extrage o bilă din urna a doua şi se introduce în cea de-a treia urnă şi, în sfârşit se extrage o bilă din cea de-a treia urnă. Se cer valoarea medie şi dispersia numărului de bile albe apărute în cele trei extrageri.

3. O urnă conţine n bile numerotate de la 1 la n. Fie X cel mai mare număr obţinut în 3 extracţii efectuate succesiv, cu întoarcerea bilei extase. Să se calculeze valoarea medie şi dispersia lui X.

4. Fie A şi B două evenimente, astfel încât $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B \mid A) = \frac{1}{2}$, $P(A \mid B) = \frac{1}{4}$. Definim variabilele aleatoare X şi Y: $X = 1$ sau $X = 0$ după cum se realizează sau nu evenimentul A; $Y = 1$ sau $Y = 0$ după cum se realizează sau nu evenimentul B. Să se calculeze valoarea medie şi dispersia lui X, respectiv Y şi coeficientul de corelaţie dintre X şi Y.

5. Fie f densitatea de probabilitate a unei variabile aleatoare continue X. Să se determine valoarea medie şi dispersia lui X în fiecare din următoarele cazuri:

(a) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} & , \text{ dacă } \ x \in (-a, a), \quad a > 0 \\ 0 & , \text{ dacă } \ x \notin (-a, a); \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} \ln \frac{1}{x} & \text{dacă } x \in (0,1) \\ 0 & \text{dacă } x \notin (0,1); \end{cases}$

(c) $f(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{3}}\left(1 + \frac{x^2}{3}\right)^{-1}$;

(d) $f(x) = \frac{8}{3\pi\sqrt{3}}\left(1 + \frac{x^2}{3}\right)^{-3}$.

6. Fie X o variabilă aleatore de tip continuu având densitatea de probabilitate f. Să se arate că

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x - A)^2 f(x) dx$$

este minimă pentru $A = M(X)$.

7. Densitatea de probabilitate a unei variabile aleatoare continue este

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{|x|}{2}\right) & , \text{ dacă } x \in [-2,2], \\ 0 & , \text{ dacă } x \notin [-2,2]. \end{cases}$$

Să se determine:

(i) valoarea medie şi dispersia lui X;

(ii) funţia caracteristică a lui X.

Aceleaşi chestiuni pentru $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{2a}\, e^{-\frac{|x-a|}{a}},\ x \in \mathbb{R},\ a > 0$, respectiv pentru

$$f(x) = \begin{cases} \sin 2x & \text{dacă } x \in [0, \frac{\pi}{2}], \\ 0 & \text{dacă } x \notin [0, \frac{\pi}{2}]. \end{cases}$$

8. Densitatea de probabilitate a unei variabile aleatoare continue este

$$f(x) = \begin{cases} ae^{-2x} & \text{dacă } x > 0, \\ 0 \ \text{dacă } x \le 0. \end{cases}$$

Să se determine:

(i) constanta a;

(ii) funcţia de repartiţie a variabilei aleatoare X;

(iii) valoarea medie şi dispersia lui X;

(iv) funţia caracteristică a lui X.

9. Fie f densitatea de probabilitate a unui vector aleator de tip continuu (X, Y). Să se determine densitatea de probabilitate, valoarea medie, dispersia şi funcţia caracteristică a lui X în fiecare din următoarele cazuri:

(a)

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}\sin(x+y) & \text{dacă } x, y \in (0, \frac{\pi}{2}) \\ 0 & \text{în rest ;} \end{cases}$$

(b)

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-(x+y)} & \text{dacă } x, y > 0 \\ 0 & \text{în rest .} \end{cases}$$

10. Fie vectorul aleator (X, Y) cu densitatea de probabilitate

$$f(x, y) = \begin{cases} ae^{-2x} & \text{dacă } 0 < x < y < 1 \\ 0 & \text{în rest .} \end{cases}$$

Să se determine:

(i) constanta a;

(ii) funcţia de repartiţie a variabilei aleatoare X;

(iii) valoarea medie şi dispersia lui X.

11. Aplicând inegalitatea lui Cebâsev să se gasească limita inferioară a probabilităţii $P\left(\mid \frac{X}{n} - \frac{1}{2} \mid < \frac{1}{100}\right)$, unde X reprezintă numărul de apariţii ale feţei cu 5 puncte în 100.000 de aruncări ale unui zar.

12. Se aruncă o monedă de n ori. Cât de mare trebuie să fie n pentru ca probabilitatea $P\left(\mid \frac{X}{10^5} - \frac{1}{2} \mid < \frac{1}{100}\right)$ să fie cel puţin 0,99 dacă X reprezintă numărul de apariţii ale unei feţe aleasă dinainte?

13. Fie X şi Y două variabile aleatoare pentru care $M(X) = -2, M(Y) = 4$, $D^2(X) = 4, D^2(Y) = 9$, $r(X, Y = -0,5$. Să se calculeze valoarea medie a variabilei aleatoare $Z = 3X^2 - 2XY + Y^2 - 3$.

14. Variabilele aleatoare X şi Y au repartiţiile:

$$X : \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ \frac{1}{10} & \frac{5}{10} & \frac{1}{10} & \frac{3}{10} \end{pmatrix}$$

şi respectiv

$$Y : \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ \frac{1}{10} & \frac{5}{10} & \frac{1}{10} & \frac{3}{10} \end{pmatrix}$$

Să se determine:

(a) dispersiile variabilelor aleatoare X şi Y;

(b) corelaţia dintre cele două variabile aleatoare;

(c) coeficientul de corelaţie;

(d) $D^2(X + Y)$.

15. Variabilele aleatoare independente X şi Y au repartiţiile

$$X : \begin{pmatrix} -0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \; Y : \begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Să se determine:

(a) repartiţia variabilei aleatoare bidimensionale $Z = (X, Y)$;

(b) coeficientul de corelaţie dintre X şi Y.

16. Se dau două urne U_1 şi U_2 care conţin a bile albe şi b bile negre, respectiv α bile albe şi β bile negre. Din urna U_1 se scoate o bilă şi se pune în urna U_2. Din urna U_2 efectuăm apoi 3 extrageri succesive, punând de

fiecare dată bila înapoi în urnă. Să se determine funcţia caracteristică corespunzătoare numărului de bile albe obţinute în cele patru extrageri.

Capitolul 4

Variabile aleatoare uzuale

4.1 Variabile aleatoare de tip discret

(a) Variabila aleatoare binomială

Definiţia 4.1.1. Spunem că o variabilă aleatoare discretă X urmează o lege *binomială* cu parametrii n şi p $(n \in \mathbb{N},\ \ p \in (0,1))$ dacă are distribuţia

$$\begin{pmatrix} k \\ C_n^k p^k q^{n-k} \end{pmatrix}_{0 \leq k \leq n}.$$

Propoziţie 4.1.1. *Dacă X este o variabilă aleatoare binomială cu parametrii n şi p, atunci valoarea sa medie este $M(X) = np$, iar dispersia $D^2(X) = npq$.*

Demonstraţie. Valoarea medie se obţine astfel

$$M(X) = \sum_{k=0}^{n} k C_n^k p^k q^{n-k} = nq^n \sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} \left(\frac{p}{q}\right)^k =$$

$$nq^n \frac{p}{q} \sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} \left(\frac{p}{q}\right)^{k-1} = npq^{n-1}\left(1 + \frac{p}{q}\right)^{n-1} = np.$$

Pentru a calcula dispersia, vom folosi formula $D^2(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$, iar pentru calculul lui $M(X^2)$ putem utiliza funcţia caracteristică a variabilei aleatoare X:

$$\phi(t) == \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} e^{ikt} = q^n \left(1 + \frac{p}{q} e^{it}\right)^n = \left(pe^{it} + q\right)^n .$$

Derivând de două ori (lăsăm calculele pe seama cititorului) se obţine

$$\phi''(t) = n(n-1)(pe^{it} + q)^{n-2} p^2 i^2 e^{2it} + n(pe^{it} + q)^{n-1} p i^2 e^{it}.$$

Tinând cont de formula (3.4.1) se obţine

$$M(X^2) = -\phi''(0) = n^2p^2 + np - np^2.$$

Rezultă că

$$D^2(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = (n^2p^2 + np - np^2) - n^2p^2$$

$$= np - np^2 = np(1-p) = npq.$$

□

Observaţia 4.1.1. Calculul valorii medii şi a dispersiei unei variabile aleatoare binomiale X se poate face şi astfel. Se consideră n variabile aleatoare independente având distribuţiile $X_i : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}$. Avem $M(X_i) = p$ şi $D^2(X_i) = M(X_i^2) - [M(X_i)]^2 = p - p^2 = pq$.

Atunci $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ şi $M(X) = M(X_1) + M(X_2) + \cdots + M(X_n) = p + p + \cdots + p = np$, Variabilele aleatoare X_i fiind independente, avem $D^2(X) = D^2(X_1) + D^2(X_2) + \cdots + D^2(X_n) = npq$.

Exemplul 4.1.1. Se aruncă două zaruri de 360 de ori. Să se determine o limită inferioară pentru probabilitatea $P(\mid X - 60 \mid < 100)$, unde X reprezintă numărul dublelor apărute.

Soluţie. Probabilitatea ca la o aruncare să apară o dublă este $p = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$. Probabilitate $P(X = k)$, deci ca în cele 360 de aruncări exact de k ori să apară o dublă ($0 \leq k \leq 360$), se calculează cu schema binomială

$P(X = k) = C_{360}^{k} \left(\frac{1}{6}\right)^{k} \left(\frac{5}{6}\right)^{360-k}$

Variabila aleatoare X este aşadar binomială, având distribuţia

$$\begin{pmatrix} k \\ C_{360}^{k} \left(\frac{1}{6}\right)^{k} \left(\frac{5}{6}\right)^{360-k} \end{pmatrix}_{0 \leq k \leq 360}.$$

Rezultă că $M(X) = np = 360\ \frac{1}{6} = 60$, $D^2(X) = npq = 60\ \frac{5}{6} = 50$. Aplicând inegalitatea lui Cebâşev, în varianta (3.2.2), pentru $L = 100$, se obţine

$P(\mid X - 60 \mid < 100) \geq 1 - \frac{50}{10000} = \frac{199}{200}$.

(b) Variabila aleatoare Poisson

Definiţia 4.1.2. Spunem că o variabilă aleatoare discretă X urmează *legea lui Poisson* (sau ca este o variabilă aleatoare Poisson) de parametru λ ($\lambda \in \mathbb{R}$) dacă are distribuţia

$$\begin{pmatrix} k \\ \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \end{pmatrix}_{k \in \mathbb{N}}.$$

Deoarece $\lim_{n \to \infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = 0$, legea lui Poisson se mai numeşte legea evenimentelor rare.

Propoziţie 4.1.2. *Dacă X este o variabilă aleatoare Poisson de parametru λ, atunci valoarea sa medie este $M(X) = \lambda$, dispersia $D^2(X) = \lambda$, iar funcţia caracteristică $\phi(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}$.*

Demonstraţie. Avem

$$M(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda.$$

$$M(X^2) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} =$$

$$= \lambda e^{-\lambda} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \right)' = \lambda e^{-\lambda} \left(\lambda e^{\lambda}\right)' = \lambda(\lambda+1).$$

Rezultă că $D^2(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = \lambda(\lambda+1) - \lambda^2 = \lambda$.

În sfârşit,

$$\phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{ikt} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^{it})^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda e^{it}} = e^{\lambda(e^{it}-1)}.$$

□

Propoziţie 4.1.3. *Fie X_1, X_2 două variabile aleatoare independente, fiecare dintre ele urmând o lege Poisson cu parametrul λ_1, respectiv λ_2. Atunci suma lor X_1+X_2 urmează de asemenea o lege Poisson cu parametrul $\lambda_1 + \lambda_2$.*

Demonstraţie. Deoarece variabilele aleatoare X_1, X_2 sunt independente, pentru orice $k \in \mathbb{N}$ avem

$$P(X_1 + X_2 = k) = \sum_{i=0}^{k} P((X_1 = i) \cap (X_2 = k-i)) =$$

$$\sum_{i=0}^{k} P(X_1 = i) P(X_2 = k-i) = \sum_{i=0}^{k} \frac{\lambda_1^i}{i!}\, e^{-\lambda_1} \cdot \frac{\lambda_2^{k-i}}{(k-i)!}\, e^{-\lambda_2} =$$

$$\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!} \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!(k-i)!}\, \lambda_1^i \lambda_2^{k-i} = \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!}\, \lambda_2^k \sum_{i=0}^{k} C_k^i \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^i =$$

$$= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!}\, \lambda_2^k \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} + 1\right)^k = \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!}\, (\lambda_1 + \lambda_2)^k.$$

□

Propoziţie 4.1.4. *Fie* $\{X_n\}_{n\geq 1}$ *un şir de variabile aleatoare binomiale având distribuţiile* $X_n : \begin{pmatrix} k \\ C_n^k p_n^k \, q_n^{n-k} \end{pmatrix}_{0\leq k\leq n}$ *Dacă* $\lim_{n\to\infty} np_n = \lambda$ *atunci, pentru* n *suficient de mare putem aproxima variabila aleatoare binomială* X_n *cu variabila aleatoare Poisson de parametru* λ.

Demonstraţie. Notăm cu $\lambda_n = np_n$. Avem $p_n = \frac{\lambda_n}{n}$, $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda$.

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n = k) = \lim_{n\to\infty} C_n^k p_n^k \, q_n^{n-k} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \left(\frac{\lambda_n}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k} = \frac{1}{k!} \lim_{n\to\infty} \lambda_n^k \cdot$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} \cdot \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k} = \frac{1}{k!} \, \lambda^k \cdot 1 \cdot e^{-\lambda} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

□

(c) Variabila aleatoare hipergeometrică

Definiţia 4.1.3. Spunem că o variabilă aleatoare discretă X urmează *legea hipergeometrică* dacă are distribuţia

$$\begin{pmatrix} k \\ \frac{C_a^k C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n} \end{pmatrix} \quad a, b \in \mathbb{N},\ n \leq a + b.$$

Punând condiţiile de existenţă ale combinărilor, $0 \leq k \leq a, 0 \leq n - k \leq b$ se deduce că valorile pe care le poate lua X satisfac $\max(0, n-b) \leq k \leq \min(n, a)$.

Lema 4.1.5. *Dacă* a, b, n *sunt întregi pozitivi astfel incât* $n \leq a + b$, *atunci are loc relaţia lui Vandermonde*

$$\sum_k C_a^k C_b^{n-k} = C_{a+b}^n, \tag{4.1.1}$$

indicele de sumare k *luând toate valorile întregi care satisfac* $\max(0, n - b) \leq k \leq \min(n, a)$.

Demonstraţie. Relaţia dorită se obţine prin identificarea coeficienţilor lui x^n din identitatea

$$(1+x)^{a+b} = (1+x)^a (1+x)^b.$$

□

Propoziţie 4.1.6. *Valoarea medie şi dispersia unei variabile aleatoare hipergeometrice sunt* $M(X) = np, D^2(X) = npq\ \frac{a+b-n}{a+b-1}$, *unde* $p = \frac{a}{a+b}$, $q = \frac{b}{a+b}$.

Demonstraţie. Valoarea medie se obţine astfel

$$M(X) = \sum_k k \frac{C_a^k C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n} = \frac{a}{C_{a+b}^n} \sum_k C_{a-1}^{k-1} C_b^{n-k} = \frac{a}{C_{a+b}^n} C_{a+b-1}^{n-1} =$$

$\frac{an}{a+b} = np$ (s-a avut în vedere formula (4.1.1)).

Pentru calculul dispersiei determinăm mai întâi $M(X^2)$.

$$M(X^2) = \sum_k k^2 \frac{C_a^k C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n} = \sum_k k(k-1) \frac{C_a^k C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n} + \sum_k k \frac{C_a^k C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n}$$

$$= \frac{a(a-1)}{C_{a+b}^n} \sum_k C_{a-2}^{k-2} C_b^{n-k} + M(X) = \frac{a(a-1)}{C_{a+b}^n}\ C_{a+b-2}^{n-2}$$

$$+ \frac{na}{a+b} = n(n-1)\frac{a(a-1)}{(a+b)(a+b-1)} + \frac{na}{a+b}$$

(si de aceasta data s-a avut in vedere formula lui Vandermonde).

Efectuând calculele obţinem

$D^2(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 =$

$$n(n-1)\frac{a(a-1)}{(a+b)(a+b-1)} + \frac{na}{a+b} - \frac{n^2 a^2}{(a+b)^2} = npq\frac{a+b-n}{a+b-1}.$$

□

(d) Variabila aleatoare geometrică

Definiţia 4.1.4. O variabilă aleatoare discretă X urmează *legea geometrică* dacă are distribuţia

$$\begin{pmatrix} k \\ pq^{k-1} \end{pmatrix}_{k\geq 1}.$$

Observaţia 4.1.2. Un exemplu tipic de variabilă aleatoare geometrică este legat de schema geometrică.

Considerăm un experiment aleator şi A un eveniment asociat acestui experiment. Experimentul se repetă independent (în aceleaşi condiţii) până la apariţia pentru prima oară a evenimentului A. Variabila aleatoare X care exprimă numărul probelor efectuate până la realizarea pentru prima dată a lui A este o variabilă aleatoare geometrică.

Propoziţie 4.1.7. *Valoarea medie şi dispersia unei variabile aleatoare geometrice sunt* $M(X) = \frac{1}{p}$, $D^2(X) = \frac{q}{p^2}$.

Demonstraţie. Valoarea medie se obţine astfel

$$M(X) = \sum_{k=1}^{\infty} kpq^{k-1} = p(1 + q + q^2 + \dots + q^n + \dots)' =$$

$$p\left(q\frac{1}{1-q}\right)' = p\frac{1-q+q}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}.$$

Pentru calculul dispersiei determinăm în prealabil $M(X^2)$.

$$M(X^2) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2pq^{k-1} = p\left(q\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1}\right)' = p\left(q\frac{1}{(1-q)^2}\right)'$$

$$= p\frac{1+q}{p^3} = \frac{1+q}{p^2}.$$

Rezultă că

$$D^2(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = \frac{1+q}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{q}{p^2}.$$

□

Exemplul 4.1.2. Se fac trageri asupra unei ţinte până când aceasta este doborâtă. Pentru doborârea sa este suficientă o tragere reuşită. La fiecare tragere în parte probabilitatea de succes este $\frac{1}{3}$. Se cer valoarea medie şi dispersia numărului de trageri.

Soluţie. Fie X numărul de trageri necesare. Distribuţia variabilei aleatoare X este

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & k & \dots \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3^2} & \frac{2^2}{3^2} & \dots & \frac{2^{k-1}}{3^k} & \dots \end{pmatrix},$$

deci X este o variabilă aleatoare geometrică, cu $p = \frac{1}{3}$. Conform Propoziţiei 4.1.7, $M(X) = \frac{1}{p} = 3$, $D^2(X) = \frac{q}{p^2} = 6$.

(e) Variabila aleatoare binomială negativă

Definiţia 4.1.5. O variabilă aleatoare discretă X urmează o lege de probabilitate *binomială cu exponent negativ* dacă are distribuţia

$$\begin{pmatrix} k \\ C_{k-1}^{n-1}\, p^n\, q^{k-n} \end{pmatrix}_{k \geq n}.$$

Observaţia 4.1.3. Fie A un eveniment asociat unui experiment aleator cu $P(A) = p$. Se repetă experimentul, în mod independent, pâna când evenimentul A se realizează a n-a oară şi apoi procesul se opreşte. Variabila aleatoare X care reprezintă numarul probelor efectuate este o variabilă aleatoare binomială negativă.

Lema 4.1.8. *Pentru* $|\, x \,| < 1$ *şi* $n \in \mathbb{N}^*$ *are loc identitatea următoare, numită identitatea lui Abel:*

$$(1-x)^{-n} = \sum_{k=n}^{\infty} C_{k-1}^{n-1}\; x^{k-n}.$$

Demonstraţie. Fie funcţia $f : (-1,1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{(1-x)^n}$.

Ne interesează $f^{(n)}(0)$. Avem

$f'(x) = \frac{n}{(1-x)^{n+1}}, \quad f'(0) = n,$

$f''(x) = \frac{n(n+1)}{(1-x)^{n+2}}, \quad f''(0) = n(n+1).$

Prin inducţie matematică se demonstrează că $f^{(i)}(x) = \frac{n(n+1)\ldots(n+i-1)}{(1-x)^{n+i}}$ şi de aici $f^{(i)}(0) = n(n+1)\ldots(n+i-1)$.

Dezvoltând funcţia după formula lui Mc Laurin, obţinem

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(0)}{i!}\; x^i = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{n(n+1)\ldots(n+i-1)}{i!}\; x^i = \sum_{i=0}^{\infty} C_{n+i-1}^{n-1}\; x^i.$$

Făcând substituţia $n + i = k$ obţinem

$(1-x)^{-n} = \sum_{k=n}^{\infty} C_{k-1}^{n-1}\; x^{k-n}.$ □

Propoziţie 4.1.9. *Dacă* X *este o variabilă aleatoare binomială negativă, atunci* $M(X) = \frac{n}{p}$, $D^2(X) = \frac{nq}{p^2}$.

Demonstraţie. Avem

$$M(X) = \sum_{k=n}^{\infty} k\; C_{k-1}^{n-1}\; p^n\; q^{k-n} = p^n q^{-n+1} \sum_{k=n}^{\infty} k\; C_{k-1}^{n-1} q^{k-1} =$$

$$= p^n q^{-n+1} \left(\sum_{k=n}^{\infty} C_{k-1}^{n-1} q^k \right)' = p^n q^{-n+1} \left(q^n \sum_{k=n}^{\infty} C_{k-1}^{n-1} q^{k-n} \right)' =$$

$$= p^n q^{-n+1} \left(q^n \frac{1}{(1-q)^n} \right)' = p^n q^{-n+1} \frac{n q^{n-1}}{(1-q)^{n+1}} = \frac{n}{p}.$$

$$M(X^2) = \sum_{k=n}^{\infty} k^2\, C_{k-1}^{n-1}\, p^n\, q^{k-n} = p^n q^{-n+2} \sum_{k=n}^{\infty} k^2\, C_{k-1}^{n-1} q^{k-2} =$$

$$= p^n q^{-n+2} \left[q \left(\sum_{k=n}^{\infty} C_{k-1}^{n-1} q^k \right)' \right]' = p^n q^{-n+2} \left[q \frac{nq^{n-1}}{(1-q)^{n+1}} \right]'.$$

Lăsăm în seama cititorilor continuarea calculului precedent. Se obţine $M(X^2) = \frac{n^2+nq}{p^2}$ şi de aici, utilizând formula $D^2(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$, se găseşte $D^2(X) = \frac{nq}{p^2}$. □

4.2 Variabile aleatoare de tip continuu

Definiţia 4.2.1. O variabilă aleatoare continuă X urmează o *repartiţie uniformă* pe intervalul $[a, b]$, $a < b$ dacă are densitatea de probabilitate

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{dacă } \ x \in [a, b], \\ 0 & \text{dacă } \ x \notin [a, b]. \end{cases}$$

Propoziţie 4.2.1. *Dacă X este o variabilă aleatore uniformă, atunci funcţia sa de repartiţie este dată de*

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \textit{dacă } \ x \in (-\infty, a], \\ \frac{x-a}{b-a}\ , & \textit{dacă } \ x \in (a, b], \\ 1 & \textit{dacă } \ x \in (b, \infty). \end{cases}$$

Demonstraţie. Dacă avem în vedere definiţia funcţiei de repartiţie, $F(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ obţinem:

- dacă $x \in (\infty, a]$, $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0$;
- dacă $x \in (a, b]$, $F(x) = \int_{-\infty}^{0} dt + \int_{a}^{x} \frac{1}{b-a}\, dt = \frac{x-a}{b-a}$;
- dacă $x \in (b, \infty)$ $F(x) = \int_{-\infty}^{0} dt + \int_{a}^{b} \frac{1}{b-a}\, dt + \int_{b}^{x} 0dt = 1$. □

Propoziţie 4.2.2. *Valoarea medie şi dispersia unei variabile aleatoare uniforme sunt* $M(X) = \frac{a+b}{2}$, $D^2(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$.

Demonstraţie. Avem

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b xdx = \frac{1}{b-a}\frac{b^2-a^2}{2} = \frac{a+b}{2}$$

şi

$$M(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b x^2 dx = \frac{1}{b-a}\frac{b^3-a^3}{3} = \frac{a^2+ab+b^2}{3},$$

iar prin intermediul relaţiei $D^2(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$ obţinem $D^2(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$. □

Definiţia 4.2.2. O variabilă aleatoare continuă X urmează *legea normală* de parametri m, σ ($m \in \mathbb{R}, \sigma > 0$) dacă are densitatea de probabilitate

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Propoziţie 4.2.3. *Valoarea medie şi dispersia unei variabile aleatoare normale sunt* $M(X) = m,\ D^2(X) = \sigma^2$.

Demonstraţie. $M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}dx.$

Facând schimbarea de variabilă $\frac{x-m}{\sigma\sqrt{2}=t}$ putem continua

$$M(X) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(\sigma\sqrt{2}t+m)e^{-t^2}dt = \frac{\sigma\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} te^{-t^2}dt + \frac{m}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}dt.$$

Prima integrală din suma precedentă este zero deoarece funcţia de sub integrală este impară. Ţinând cont de paritatea functiei e^{-t^2} şi de formula lui Euler-Gauss-Poisson

$$\int_0^{\infty} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

se obţine $M(X) = \frac{m}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\pi} = m$. La fel

$$D^2(X) = \int_{-\infty}^{\infty}(x - M(X))^2 f(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(x-m)^2 e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}dx.$$

Făcând şi de această dată substituţia $\frac{x-m}{\sigma\sqrt{2}} = t$ obţinem

$$D^2(X) = \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-t^2} dt = \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} t(-e^{-t^2})' dt =$$

$$\frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} (-te^{-t^2})|_0^{\infty} + \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sigma^2.$$

□

Definiţia 4.2.3. O variabilă aleatoare continuă X urmează o *repartiţie Gamma* de parametri $a, b (a > 0, b > 0)$ dacă densitatea sa de probabilitate este

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(a)b^a} \, x^{a-1} e^{-\frac{x}{b}} & \text{dacă } \ x > 0, \\ 0 & \text{dacă } \ x \leq 0. \end{cases}$$

unde $\Gamma(a) = \int_0^{\infty} x^{a-1} e^{-x} dx$ este funcţia lui Euler de speţa a II-a.

Reamintim, fără demonstraţie, câteva proprietăţi ale functiei Γ.

Lema 4.2.4. *(i)* $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$*;*

(ii) $\Gamma(n+1) = n! \ \ \forall n \in \mathbb{N}$*;*

(iii) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$*.*

Propoziţie 4.2.5. *Dacă X este o variabilă aleatoare care urmează o repartiţie Gamma de parametri a, b atunci $M(X) = ab, D^2(X) = ab^2$.*

Demonstraţie. Avem $M(X) = \frac{1}{\Gamma(a)b^a} \int_0^{\infty} x^a e^{-\frac{x}{b}} dx$.

Făcând schimbarea de variabilă $\frac{x}{a} = t$, putem continua

$$M(X) = \frac{1}{\Gamma(a)b^a} \int_0^{\infty} b^a t^a e^{-t} b dt = \frac{1}{\Gamma(a)b^a} b^{a+1} \int_0^{\infty} t^a e^{-t} dt$$

$$= b \, \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a)} = ab.$$

Apoi, $M(X^2) = \frac{1}{\Gamma(a)b^a} \int_0^{\infty} x^{a+1} e^{-\frac{x}{b}} dx$ şi făcând incă o dată schimbarea de variabilă $\frac{x}{a} = t$ avem

$$M(X^2) = \frac{1}{\Gamma(a)b^a}\, b^{a+2}\Gamma(a+2) = a(a+1)b^2.$$

Utilizănd formula $D^2(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$ obţinem $D^2(X) = ab^2$. □

Definiţia 4.2.4. O variabilă aleatoare continuă X urmează o *repartiţie Beta* de parametri a, b ($a > 0, b > 0$) dacă densitatea sa de probabilitate este

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{B(a,b)}\, x^{a-1}(1-x)^{b-1} & \text{dacă } x \in [0,1], \\ 0 & \text{dacă } x \notin [0,1]. \end{cases}$$

unde $B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$ este functia lui Euler de speta a I-a.

Reamintim că

Lema 4.2.6. *Pentru $a, b > 0$, are loc $B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$.*

Propoziţie 4.2.7. *Dacă X este o variabilă care urmează o repartiţie Beta de parametri a, b atunci $M(X) = \frac{a}{a+b}$, $D^2(X) = \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$.*

Demonstraţie. Avem

$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx = \frac{1}{B(a,b)} \int_0^1 x^a(1-x)^{b-1}dx =$

$$\frac{1}{B(a,b)}B(a+1,b) = \frac{\frac{\Gamma(a+1)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b+1)}}{\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}} = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a+b+1)} \cdot \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a)} = \frac{a}{a+b}.$$

$$M(X^2) = \frac{1}{B(a,b)} \int_0^1 x^{a+1}(1-x)^{b-1}dx = \frac{1}{B(a,b)}B(a+2,b) =$$

$$\frac{\Gamma(a+2)}{\Gamma(a)} \cdot \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a+b+2)} = \frac{a(a+1)}{(a+b)(a+b+1)}.$$

Folosind relaţia $D^2(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$ se obţine, după efectuarea calculelor, $D^2(X) = \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$. □

Definiţia 4.2.5. O variabilă aleatoare continuă X urmează o *repartiţie Student cu n grade de libertate* dacă are densitatea de probabilitate

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}.$$

Propoziţie 4.2.8. *Dacă X este o variabilă Student cu n grade de libertate, atunci $M(X)=0, D^2(X)=\frac{n}{n-2}$.*

Demonstraţie. Funcţia $xf(x)$ fiind impară rezultă că

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = 0.$$

$$D^2(X) = M(X^2) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_{-\infty}^{\infty} x^2\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} dx$$

$$= \frac{2\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_{0}^{\infty} x^2\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} dx.$$

Dacă se face schimbarea de variabilă $y=\frac{x^2}{n}$, avem $x=\sqrt{n\pi}$, $dx = \frac{ndy}{2\sqrt{n\pi}}$ şi integrala de mai sus primeşte forma

$$D^2(X) = \frac{2\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_{0}^{\infty} ny(1+y)^{-\frac{n+1}{2}}\frac{ndy}{2\sqrt{ny}}$$

$$= \frac{n\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_{0}^{\infty} y^{\frac{1}{2}}(1+y)^{-\frac{n+1}{2}}dy.$$

Efectuăm o nouă schimbare de variabilă şi anume $\frac{y}{1+y}=t$, de unde $y=\frac{t}{1-t},\ 1+y=\frac{1}{1-t},\ dy=\frac{t}{(1-t)^2}dt.$

$$D^2(X) = \frac{n\,\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_{0}^{1} \frac{t^{\frac{1}{2}}}{(1-t)^{\frac{1}{2}}}\cdot(1-t)^{-\frac{n+1}{2}}\frac{t}{(1-t)^2}dt =$$

$$\frac{n\,\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_{0}^{1} t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{n}{2}-2}dt = \frac{n\,\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\,B\left(\frac{3}{2},\frac{n}{2}-1\right)$$

$$= \frac{n\,\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}.$$

Deoarece $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right) = \frac{1}{2}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ si $\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} = \frac{1}{\frac{n}{2}-1}$, rezultă

$$D^2(X) = \frac{n}{\sqrt{\pi}}\,\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\frac{1}{\frac{n}{2}-1} = \frac{n}{n-2}.$$

□

4.3 Probleme

1. Un baschetbalist înscrie un coş cu probabilitatea $p = 0,75$ la o aruncare. Să se determine valoarea medie şi dispersia numărului de coşuri înscrise în 10 aruncări.

2. Un manual se editează într-un tiraj de 150 000 de exemplare. Probabilitatea ca un manual să fie respins, fiind tipărit necorespunzător, este 0,0002. Să se determine valoarea medie şi dispersia numărului de manuale respinse.

3. Doi parteneri cu forţă egală boxează 12 runde. Să se calculeze valoarea medie şi dispersia variabilei aleatoare care reprezintă numărul de runde câştigate de unul din boxeri.

4. O urnă conţine 30 de bile albe şi 10 bile negre. Se fac 200 de extrageri din urnă punând după fiecare extragere bila înapoi în urnă. Se cere o margine inferioară pentru probabilitatea ca numărul de bile albe în cele 200 de extrageri să fie cuprins între 100 şi 120.

5. O persoană cumpără pe rând loz în plic sperând să obţină un bilet câştigător. Ştiind că un bilet este câştigător cu probabilitatea $p = 0,1$ şi notând cu X, respectiv cu Y numărul biletelor cumpărate până la obţinerea pentru prima oară, respectiv pentru a patra oară a unui loz câştigător să se determine valorile medii şi dispersiile lui X şi Y.

6. Dacă $X_1, \ldots, X_n$ sunt n variabile aleatoare independente uniforme pe $[0,1]$ să se arate că variabila aleatoare $X = X_1 + \cdots + X_n$ are densitatea de probabilitate

$$f(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{dacă } x < 0, \\ \frac{1}{(n-1)!}\left[x^{n-1} - C_n^1(x-1)^{n-1} + \cdots + (-1)^k C_n^k (x-k)^{n-1}\right] \\ \ \text{dacă } \ 0 \leq k \leq x \leq k+1 \leq n, \\ 0 \quad \text{dacă } \ n < x. \end{cases}$$

7. Să se arate că funcţia caracteristică a unei variabile aleatoare normală de parametri m, σ este $\phi(t) = e^{itm - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$.

8. Să se determine funcţia caracteristică a unei variabile aleatoare uniforme pe intervalul $[a, b]$.

9. Să se determine coeficientul de corelaţie al variabilelor aleatoare $aX + bY$ şi $aX - bY$, dacă X şi Y sunt variabile aleatore independente, fiecare urmând aceiaşi lege normală de parametri m, σ şi $a, b \in \mathbb{R}^*$.

10. Să se determine densitatea de probabilitate a variabilei aleatoare $Y = e^X$ unde variabila aleatoare X urmează o lege normală de parametri m şi σ

Bibliografie

[1] M. Balaj, A. Ban, *Curs de Matematică Aplicată*, Editura Uiv. Oradea, 1996.

[2] P. Blaga, A. Muresan *Matematici Aplicate în Economie*, Transilvania Press, Cluj-Napoca, 1996.

[3] G. Ciucu, *Elemente de Teoria Probabilităţilor si Statistică Matematică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1963.

[4] M. Dumitrescu, D. Florea, C. Tudor, *Probleme de Teoria Probabilităţilor şi Statistică Matematică*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1985.

[5] G, Mihoc, G. Ciucu si V. Craiu, *Teoria Probabilităţilor şi Statistică Matematică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1976.

[6] R Trandafir, *Introducere în Teoria Probabilităţilor*, Editura Albatros, Bucureşti, 1979.