(1)

Pro sestavení rovnic uvažuji $q \to 1$
$r \to 2$
$s \to 3$

$$X_1 = aX_2 + bX_3$$
$$X_2 = \varepsilon + bX_3 + cX_1$$
$$X_3 = bX_1 + cX_3$$ [pravidlo $pX + q \Rightarrow p^*q$]

$$X_3 = c^*bX_1$$ [dosazení do X_2]

$$X_2 = \varepsilon + bc^*bX_1 + cX_1$$
$$X_2 = \varepsilon + (bc^*b + c)X_1$$ [dosazení X_2 a X_3 do X_1]

$$X_1 = a(\varepsilon + [bc^*b + c]X_1) + bc^*bX_1$$
$$X_1 = a + ([a + \varepsilon]bc^*b + ac)X_1$$ [pravidlo $pX + q \Rightarrow p^*q$]
$$X_1 = ([a + \varepsilon]bc^*b + ac)^*a$$

Regulární výraz ekvivalentní automatu M_3 je roven výsledku X_1.

② Důkaz neregularity jazyka L_1 pomocí Pumping lemma, předpokládám, že jazyk L_1 je regulární (důkaz sporem).

$L_1 \in \mathcal{L}_2 \iff$

$\exists p > 0 : \forall w \in \Sigma^* : |w| \geq p \wedge w \in L_1 \Rightarrow$

$(\exists x, y, z \in \Sigma^* : w = xyz \wedge y \neq \varepsilon \wedge |xy| \leq p \wedge \forall i \geq 0 : xy^iz \in L_1)$

Zvolím slovo $w = c^3 b^p a^{p+1}$. $w \in L_1$, $|w| \geq p$

Dle PL pro každé rozdělení slova w nastane alespoň jedna z následujících možností:

a) $\{c\} \in y$
   Pro $i = 0$ porušíme podmínku $\#c(w) > 2$.

b) $\{b\} \in y$
   Pro $i > 2$ porušíme podmínku $\#_a(w) > \#_b(w)$.

Pro libovolné rozdělení může dojít k vypumpování mimo L_1.

Dle PL tedy $L_1 \notin \mathcal{L}_2$.

(3) Definuji pomocnou funkci f, která značí, že řetězec w začíná znakem k:

$$f(k,w) \Leftrightarrow \exists\, xy \in \Sigma^* : x = k,\ xy = w$$

$$k \in \Sigma,\ w \in \Sigma^*$$

Sestrojím relaci pravé kongruence:

$$\begin{aligned} u \sim v \Leftrightarrow\ & [f(1,u) \land f(1,v) \land \#_a(v) \bmod 2 = 1 \land \#_a(u) \bmod 2 = 1] \lor \\ & [f(0,u) \land f(0,v) \land \#_a(v) \bmod 2 = 0 \land \#_a(v) \bmod 2 = 0] \lor \\ & [f(1,u) \land f(1,v) \land \#_a(v) \bmod 2 = 0 \land \#_a(u) \bmod 2 = 0] \lor \\ & [f(0,u) \land f(0,v) \land \#_a(v) \bmod 2 = 1 \land \#_a(u) \bmod 2 = 1] \lor \\ & (u = \varepsilon \land v = \varepsilon) \lor \\ & [f(a,u) \land f(a,v) \lor f(b,u) \land f(b,v) \lor \#_{0,1}(u) > 1 \land \#_{0,1}(v) > 1] \end{aligned}$$

Jazyk L_2 je sjednocením prvních dvou tříd rozkladu $\Sigma^*/\sim$:

$$\{1w \mid w \in \{a,b\}^* \land \#_a(w) \bmod 2 = 1\} \cup$$
$$\{0w \mid w \in \{a,b\}^* \land \#_a(w) \bmod 2 = 0\} = L_2$$

Dle MN věty je tedy tento jazyk regulární.

$L_2 \in \mathcal{L}_3$

(4) $G_3 = (\{S, X, Y, A, B, C\}, \{a, b, c, \#\}, P, S)$

Množina P obsahuje následující pravidla:

$$S \to X \mid Y$$
$$X \to aXb \mid AX \mid XB \mid \#$$
$$Y \to aYc \mid AY \mid YC \mid \#$$
$$A \to b \mid c$$
$$B \to a \mid c$$
$$C \to a \mid b$$

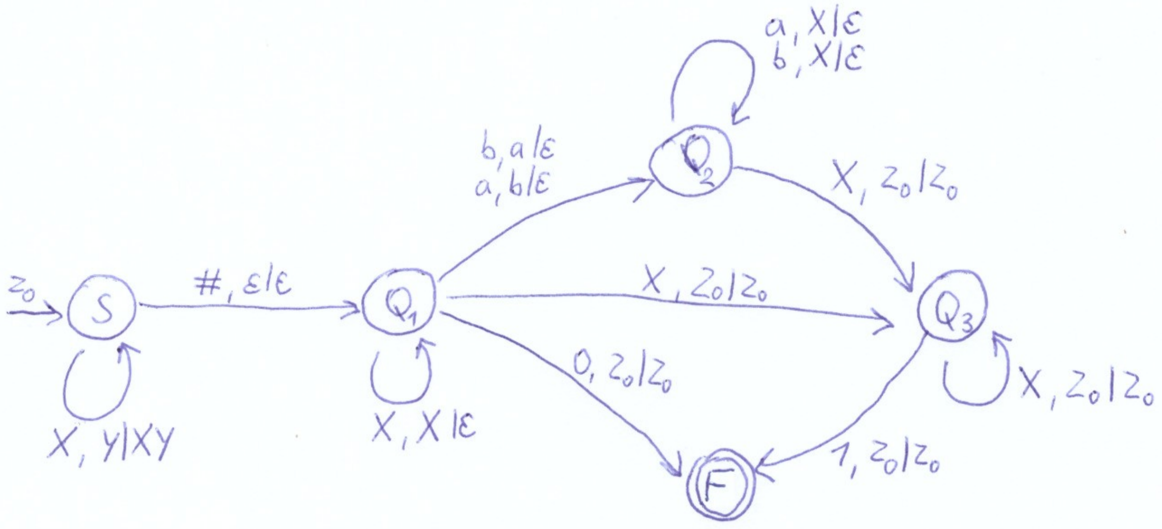
$P_3 = (\{q\}, \{a, b, c, \#\}, \{a, b, c, \#, S, X, Y, A, B, C\}, \delta, q, S, \emptyset)$

Zobrazení δ je definováno následovně:

$$\delta(q, \varepsilon, S) = \{(q, X), (q, Y)\}$$
$$\delta(q, \varepsilon, X) = \{(q, aXb), (q, AX), (q, XB), (q, \#)\}$$
$$\delta(q, \varepsilon, Y) = \{(q, aYc), (q, AY), (q, YC), (q, \#)\}$$
$$\delta(q, \varepsilon, A) = \{(q, b), (q, c)\}$$
$$\delta(q, \varepsilon, B) = \{(q, a), (q, c)\}$$
$$\delta(q, \varepsilon, C) = \{(q, a), (q, b)\}$$
$$\delta(q, k, k) = \{(q, \varepsilon)\} \quad \forall k \in \{a, b, c, \#\}$$

⑤ $P_4 = (\{S, Q_1, Q_2, Q_3, F\}, \{a, b, \#, 0, 1\}, \{a, b, z_0\}, \delta, z_0, F)$

zobrazení δ je definováno následujícím diagramem. Vrchol zásobníku v pravidlech přechodů uvažuji na pravé straně.



$X \in \{a, b\}$

$Y \in \{a, b, z_0\}$