1 Введение.

Список литературы

[1] Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Б.Х. Математический анализ. - Т.1,2.

[2] Фихтенгольц Г.М. Курс математического анализа. - Т. 1,2.

[3] Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. - Т. 1,2.

Дополнительные учебники

[4] Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н. Лекции по математическому анализу.

[5] Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. - Т. 1,2,3.

[6] Никольский С.М. Курс математического анализа. - Т. 1,2.

[7] Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И. Курс математического анализа.

[8] Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. - Т. 1,2.

[9] Камынин Л.И. Курс математического анализа. - Т. 1,2.

[10] Зорич В.А. Математический анализ. - Т. 1,2.

[11] Курант Р. Курс дифференциального и интегрального исчисления. - Т. 1,2.

[12] Рудин У. Основы математического анализа.

Основные задачники

[13] Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу.

[14] Бутузов В.Ф. и др. Математический анализ в вопросах и задачах.

[15] Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А. Задачи и упражнения по математическому анализу. - Т. 1,2.

[16] Кудрявцев Л.Д. и др. Сборник задач по математическому анализу. - Т. 1,2,3.

Дополнительные задачники

[17] Марон И.А. Курс дифференциального и интегрального исчисления в примерах и задачах.

[18] Запорожец Руководство по решению задач курса математического анализа.

[19] Виленкин Н.Я. и др. Задачник по курсу математического анализа. - Т. 1,2.

[20] Очан Ю.С. Сборник задач по математическому анализу.

[21] Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевников Г.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. - Т. 1,2.

1.1 Аксиоматика множества действительных чисел.

Множество всех действительных (вещественных) чисел будет для нас некоторое время основным. Его принято обозначать R. Приведем здесь его основные свойства.

На множестве R по определенным правилам заданы операции *сложения* и *умножения.* Операции сложения и умножения обладают свойствами:

1) $a + b = b + a$ при любых a и b (коммутативность сложения);

$(a + b) + c = a + (b + c)$ при любых $a,\ b$ и c (ассоциативность сложения);

существует единственное число 0 (называемое нулем) такое, что $a + 0 = a$ при любом a;

для любого числа a существует единственное число, обозначаемое $(-a)$, такое, что $a + (-a) = 0$

(говорят, что R наделено структурой *абелевой группы по сложению*)

2) $a \cdot b = b \cdot a$ при любых a и b (коммутативность умножения);

$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ при любых $a,\ b$ и c (ассоциативность умножения);

существует единственное число 1 (называемое единицей) такое, что $a \cdot 1 = a$ при любом a;

для любого числа $a \neq 0$ существует единственное число, обозначаемое $\frac{1}{a}$, такое, что $a \cdot \frac{1}{a} = 1$

(говорят, что на R задана структура *абелевой группы по умножению*)

3) $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ (закон дистрибутивности).

Наличие этих трех групп свойств 1), 2) и 3) означает, что множество R наделено структурой *поля.*

На множестве R задано *отношение порядка*, т.е. для любых двух чисел a и b имеет место одно из трех соотношений: $a > b$, $a < b$ или $a = b$. Эти отношения обладают *свойством транзитивности,* т.е. из $a \leq b$ и $b \leq c$ следует $a \leq c$.

Отношение порядка и операции сложения и умножения связаны между собой следующими свойствами:

а) из $a < b$ следует $a + c < b + c$ при любых a, b и c;

б) из $a < b$ и $c > 0$ следует $ac < bc$.

Последними отметим такие два свойства:

Аксиома Архимеда $\forall a \in R \; \exists n \in N$ такое, что $a \leq n$.

Аксиома отделимости $\forall X \neq \emptyset$ и $\forall Y \neq \emptyset$ таких, что $x \leq y \; \forall x \in X$ и $\forall y \in Y \; \exists c$ такое, что $x \leq c \leq y \; \forall x \in X$ и $\forall y \in Y$.

Здесь использованы кванторы $\forall$ всеобщности и $\exists$ существования.

1.2 Множества и операции над ними.

Обозначим через $\mathcal{M}$ некоторое исходное (универсальное) множество, а через A, B, $C \ldots$ произвольные множества состоящие из элементов $\mathcal{M}$. Если все элементы, из которых состоит A, входят и в B, то A называют *подмножеством* B и пишут $A \subset B$. Если $A \neq \emptyset$ и $A \neq B$, то A называется *собственным* подмножеством, иначе *несобственным.* Множества A и B называются *равными,* если они состоят из одних и тех же элементов, пишут $A = B$. Отметим, что если $A \subset B$ и $B \subset A$, то $A = B$. *Суммой* или *объединением* двух множеств A и B называется множество $C = A \cup B$, состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств A или B. Аналогично определяется сумма любого (конечного или бесконечного) числа множеств.

Умножением или *пересечением* двух множеств A и B называется множество $C = A \cap B$, состоящее из всех элементов, принадлежащих обоим множествам. Аналогично определяется понятие пересечения любого (конечного или бесконечного) числа множеств.

Операции пересечения и объединения множеств коммутативны и ассоциативны:

$$A \cap B = B \cap A, \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C),$$

$$A \cup B = B \cup A, \quad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C).$$

кроме того, они взаимно дистрибутивны

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Разностью множеств A и B называется множество $C = A \setminus B$, состоящее из тех элементов множества A, которые не входят в B. *Симметрической разностью* двух множеств A и B называется множество

$$C = A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Разность $\mathcal{M} \setminus A$ называется *дополнением* множества A и пишут $CA \equiv \mathcal{M} \setminus A$. Очевидно $A \cap CA = \emptyset$. Для операции дополнения справедливы следующие два *принципа двойственности (законы де Моргана)*

$$C(A \cup B) = CA \cap CB, \quad C(A \cap B) = CA \cup CB.$$

В справедливости всех выписанных тождеств можно убедиться, например, при помощи *диаграмм Венна.*

В дальнейшем будут регулярно использоваться следующие числовые множества:

$N = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$ - множество натуральных чисел,

$Z = N \cup \{0\} \cup \{-1, -2, -3, \ldots, -n, \ldots\}$ - множество целых чисел,

$Q = \{\frac{m}{n} \mid m \in Z,\ n \in N,\ \frac{m}{n} = \frac{km}{kn}\ \forall k \in N\}$ - множество рациональных чисел, $R \setminus Q$ - множество иррациональных чисел, для которых справедливы включения $N \subset Z \subset Q \subset R$.

1.3 Принцип минимального элемента. Принцип математической индукции.

Определение. Число a называется *минимумом* множества $A \subset R$ если: а) $a \in A$; б) $a \leq x\ \ \forall x \in A$, пишут $a = \min A$.

Аналогично определяется понятие $\max A$ максимума множества.

Лемма 1 (о единственности минимального элемента). *Если существует $a = \min A$, то a единственно.*

Доказательство. (*от противного*) Пусть существует два числа $a = \min A$ и $b = \min A$ и $a \neq b$, тогда по определению $\min A$ $a \leq b$ и $b \leq a$, а это означает, что $a = b$, т.е. $\min A$ единственнен. **Лемма доказана.**

Справедлива также следующая очевидная

Лемма 2 (принцип минимального элемента). *Любое непустое подмножество множества натуральных чисел N имеет минимальный элемент.*

Докажем теперь теорему имеющую многочисленные применения в математике.

Теорема (принцип математической индукции). *Если $A \subset N$, и A обладает свойствами: а) $1 \in A$, б) если $n \in A$, то $(n+1) \in A$, тогда $A \equiv N$.*

Доказательство. (*от противного*) Пусть существует множество $A \in N$, которое обладает свойствами а) и б), но $A \neq N$, тогда дополнение $CA \equiv N \setminus A \neq \emptyset$ не пусто, а значит по принципу минимального элемента существует $n_0 = \min(CA) \in CA$. В силу условий теоремы $1 \in A$, и поэтому $1 \notin CA$, тогда $n_0 > 1$. Следовательно натуральное число $(n_0 - 1) \in A$ и в силу условия б) теоремы $n_0 \in A$, но $n_0 \in CA$. Полученное противоречие доказывает равенство множеств $A \equiv N$. **Теорема доказана.**

Таким образом, чтобы доказать некоторое утверждение для любого $n \in N$

достаточно показать, во-первых, справедливость этого утверждения при $n = 1$, и, во-вторых, предполагая истинным утверждение для номера n, показать его справедливость для следующего номера $(n+1)$.

Применим метод математической индукции для доказательства неравенства Бернулли и формулы бинома Ньютона.

Теорема (неравенство Бернулли). *Для любого* $x \geq -1$ *и* $\forall n \in N$ *справедливо неравенство* $(1+x)^n \geq 1+nx$.

Доказательство. При $n = 1$ неравенство $(1+x)^1 \geq 1+1\cdot x$ справедливо.

Пусть неравенство Бернулли справедливо для номера n, т.е. $(1+x)^n \geq 1+nx$ при $x \geq -1$, тогда

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n\cdot(1+x) \geq (1+nx)(1+x) = 1+(n+1)x+nx^2 \geq 1+(n+1)x,$$

т.к. $nx^2 \geq 0$. В силу принципа математической индукции неравенство Бернулли доказано. **Теорема доказана.**

Определение. $n! \stackrel{\text{def}}{=} 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n, \;\; 0! \stackrel{\text{def}}{=} 1, \;\; 1! \stackrel{\text{def}}{=} 1$. Целые числа

$$C_n^k \stackrel{\text{def}}{=} \frac{n!}{k!(n-k)!}, \;\; n,\, k \in N, \;\; 0 \leq k \leq n$$

называют *биномиальными коэффициентами* или *числом сочетаний из* n *по* k.

Биномиальные коэффициенты обладают свойствами

$$C_n^k = C_n^{n-k}, \;\; C_n^0 = C_n^n = 1, \;\; C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k \;\text{ при }\; 1 \leq k \leq n,$$

справедливость которых следует непосредственно из определения биномиальных коэффициентов.

Теорема (бином Ньютона). *Для любых двух вещественных чисел* a *и* b *и* $\forall n \in N$ *справедливо равенство*

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \ldots + C_n^{k-1}a^{n-k+1}b^{k-1} +$$
$$+ C_n^k a^{n-k}b^k + \ldots + C_n^{n-1}ab^{n-1} + C_n^n b^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k}b^k.$$

Доказательство. При $n = 1$, $(a+b)^1 = C_1^0 a^1 b^0 + C_1^1 a^0 b^1$ формула справедлива.

Пусть формула справедлива при значении показателя степени n, тогда

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)\cdot(a+b)^n = (a+b)\cdot\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n+1-k} b^k +$$

$$+\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^{k+1} = C_n^0 a^{n+1} + a^n b[C_n^1 + C_n^0] + a^{n-1}b^2[C_n^2 + C_n^1] + \ldots +$$

$$+a^{n+1-k}b^k[C_n^k + C_n^{k-1}] + \ldots + ab^n[C_n^n + C_n^{n-1}] + b^{n+1}C_n^n =$$

$$= C_{n+1}^0 a^{n+1} + C_{n+1}^1 a^n b + C_{n+1}^2 a^{n-1} b^2 + \ldots + C_{n+1}^k a^{n+1-k} b^k + \ldots +$$

$$+C_{n+1}^n ab^n + C_{n+1}^{n+1} b^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k a^{n+1-k} b^k.$$

Теорема доказана.

1.4 Модуль вещественного числа. Целая и дробная части числа. Плотность Q в R.

Определение. *Модулем* вещественного числа a называется неотрицательное вещественное число, обозначаемое символом $|a|$, определяемое по следующему правилу

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0, \\ -a, & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

Для любых двух вещественных чисел a и b справедливы соотношения:

$$|a\cdot b| = |a|\cdot|b|, \quad \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}, \quad |a+b| \leq |a| + |b|, \quad |a|^{2n} = a^{2n}.$$

Определение. *Целой частью* вещественного числа x называется максимальное целое число, обозначаемое $[x]$, не превосходящее x. *Дробной частью* вещественного числа x называется число, обозначаемое $\{x\}$, определяемое равенством $\{x\} = x - [x]$.

Отметим, что $\forall x \in R$ справедливы неравенства

$$[x] \leq x < [x] + 1, \; 0 \leq \{x\} < 1.$$

Теорема (о плотности Q в R). *Любой интервал* $(a;b)$ *содержит число* $q \in Q$.

Доказательство. Пусть $(a;b)$ заданный интервал, т.е. $a < b$, тогда $\frac{1}{b-a} > 0$. По аксиоме Архимеда существует натуральное число $n \in N$ такое, что $\frac{1}{b-a} < n$. Отсюда $b - a > \frac{1}{n} \Rightarrow b > a + \frac{1}{n}$.

Введем число $p = [na]$. Очевидно $p \in Z$ и $p \leq na < p + 1$

$$\frac{p}{n} \leq a < \frac{p+1}{n} = \frac{p}{n} + \frac{1}{n} \leq a + \frac{1}{n} < b,$$

т.е. $a < \frac{p+1}{n} < b$, но $q = \frac{p+1}{n} \in Q$. **Теорема доказана.**

Следствие. *Любое вещественное число* $r \in R$ *можно приблизить числом из* Q *с любой степенью точности.*

1.5 Верхние и нижние грани числовых множеств. Принцип вложенных отрезков.

Определение. Числовое множество A называется *ограниченным сверху (снизу),* если существует вещественное число M (число m) такое, что $\forall x \in A \;\; x \leq M$ ($m \leq x$). При этом число M (число m) называется *верхней гранью (нижней гранью)* множества A.

Теорема (о верхних гранях). *Множество верхних граней ограниченного сверху непустого числового множества имеет минимальный элемент.*

Доказательство. Пусть $A \neq \emptyset$ ограниченное сверху непустое множество, рассмотрим множество его верхних граней B

$$B = \{b \in R \mid a \leq b \;\; \forall a \in A\} \neq \emptyset.$$

Множества A и B удовлетворяют аксиоме отделимости, т.е. $\exists c \in R$ такое, что $a \leq c \leq b \;\; \forall a \in A \;\; \forall b \in B$. Из неравенства $a \leq c \;\; \forall a \in A$ следует включение $c \in B$, но т.к. $c \leq b \;\; \forall b \in B$, то $c = \min B$. **Теорема доказана.**

В силу леммы о единственности минимального элемента (см §3) число $c = \min B$ единственно и его называют *точной верхней гранью* множества A и обозначают

$$\sup A = \min\{b \in R \mid a \leq b \;\; \forall a \in A\}$$

Определение $\sup A$ означает с одной стороны, что $a \le \sup A \quad \forall a \in A$, с другой стороны, что всякое число меньшее чем $\sup A$ уже не является верхней гранью, т.е. $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists a_\varepsilon \in A$ такое, что $\sup A - \varepsilon < a_\varepsilon \le \sup A$, т.е. верхнюю грань можно определить так

Определение. Число $\sup A$ называется *точной верхней гранью* числового множества A, если: а) $a \le \sup A \ \ \forall a \in A$; б) $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists a_\varepsilon \in A$ что $\sup A - \varepsilon < a_\varepsilon \le \sup A$.

Аналогично определяется *точная нижняя грань* множества A

$$\inf A = \max\{b \in R \mid b \le a \ \ \forall a \in A\}$$

или

Определение. Число $\inf A$ называется *точной нижней гранью* числового множества A, если: а) $a \ge \inf A \ \ \forall a \in A$; б) $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists a_\varepsilon \in A$ что $\inf A \le a_\varepsilon < \inf A + \varepsilon$.

Пример. У множества $(a;b]$ $\sup((a;b]) = \max((a;b]) = b$, $\inf((a;b]) = a$, $\min((a;b])$ не существует. Если $X = \left\{\frac{\sqrt{t(t+1)}}{2t+1}, \quad t > 0\right\}$, то записав представление для элементов множества X в виде

$$\frac{\sqrt{t(t+1)}}{2t+1} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{t^2+t}{t^2+t+\frac{1}{4}}} = \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{\frac{1}{4}}{(t+\frac{1}{2})^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{1}{(2t+1)^2}},$$

находим $\sup X = \frac{1}{2}$, $\inf X = 0$, $\max X$ и $\min X$ не существуют.

Теорема (принцип вложенных отрезков). *Для всякой системы вложенных отрезков существует хотя бы одно число принадлежащее всем отрезкам системы.*

Доказательство. Пусть $\{[a_n; b_n]\}$ система вложенных отрезков, т.е. $a_n \le a_{n+1} < b_{n+1} \le b_n$. Рассмотрим множества $A \equiv \{a_n\}$ и $B \equiv \{b_n\}$, A и B удовлетворяют аксиоме отделимости, поэтому существует число $c \in R: \ a_n \le c \le b_n \ \forall n \in N$. **Теорема доказана.**

Следствие. *Если дополнительно потребовать от системы вложенных отрезков стремление к нулю их длин, т.е.* $b_n - a_n \to 0$, *то точка* c *будет единственной.*

Доказательство. (*от противного*) Пусть существуют два числа $c_1 \neq c_2,\ c_1, c_2 \in [a_n; b_n],\ n \in N,\ c_2 > c_1$, но $c_2 - c_1 > 0$, что противоречит условию $b_n - a_n \to 0$. **Следствие доказано.**

1.6 Отображение, образ, прообраз, биекция.

Пусть X и Y некоторые множества из R. Если каждому $x \in X$ по некоторому правилу f ставится в соответствие единственное $y \in Y$, то говорят, что на X задано *отображение (функция),* при этом X называется *областью определения* отображения (функции), а Y - *областью значений.*

Пусть $x \in X$, тогда отвечающий ему элемент $y = f(x) \in Y$ называется *образом элемента* x при отображении f. Соответственно, если $A \subset X,\ A \neq \emptyset$, тогда множество

$$f(A) = \{y \in Y \mid \exists x \in A,\ \ f(x) = y\}$$

называется *образом множества* A при отображении f, т.е. $f(A)$ состоит из всех элементов вида $y = f(x),\ x \in A$.

Пусть $y \in Y$, тогда совокупность всех элементов $x \in X$, образом которых является этот элемент y называется *полным прообразом элемента* y и обозначается $f^{-1}(y)$. Соответственно, если $D \subset Y,\ D \neq \emptyset$, то множество

$$f^{-1}(D) = \{x \in X \mid f(x) \in D\}$$

называется *прообразом множества* D, т.е. $f^{-1}(D)$ состоит из тех элементов $x \in X$, образы которых принадлежат D.

Пример 1. Для отображения $f : R \to R$ действующего по правилу $f(t) = t^3 - t$ имеем $f([-1; 1]) \equiv [-\frac{2}{3\sqrt{3}}; \frac{2}{3\sqrt{3}}],\ f([-\frac{1}{\sqrt{3}}; 0]) \equiv f([-1; 0]) \equiv [0; \frac{2}{3\sqrt{3}}]$, $f^{-1}(0) \equiv \{-1;\ 0;\ 1\},\ f^{-1}(\frac{2}{3\sqrt{3}}) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $f^{-1}([0; \frac{2}{3\sqrt{3}}]) \equiv [-1; 0] \cup \{1\}$.

Определение. Отображение $f : X \to Y$ называется *биекцией (взаимнооднозначным соответствием),* если прообраз любого элемента $y \in Y$ состоит только из одного элемента.

Для всякой биекции всегда существует обратное отображение $g : Y \to X$ обозначаемое $g = f^{-1}$, причем $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$ и $\left(g^{-1}\right)^{-1} = g$.

Пример 2. Отображение $y : R \to [0; +\infty)$ действующее по правилу $y(x) = x^2$ не является биекцией, но действующее по тому же правилу отображение $g : [0; +\infty) \to [0; +\infty)$ является биекцией. Отображение из предыдущего примера 1 $f : R \to R$, действующее по правилу $f(t) = t^3 - t$, также не является биекцией.

Если отображение $g : X \to Y$, а отображение $f : Y \to Z$, то отображение $h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) : X \to Z$ называется *композицией* отображений f и g.

Теорема. *Композиция двух биекций является биекцией.*

1.7 Мощность множества. Счетные множества. Несчетность R. Плотность $(R \setminus Q)$ и R.

Определение. Два множества X и Y называют *равномощными (эквивалентными, имеющими одинаковую мощность)* если между ними можно установить биекцию (взаимнооднозначное соответствие), т.е.

а) любому элементу $x \in X$ соответствует единственный элемент $y \in Y$;

б) любому элементу $y \in Y$ соответствует некоторый элемент $x \in X$;

в) разным элементам множества X соответствуют разные элементы Y.

Пишут $X \sim Y$ или $cardX = cardY$.

Определение. Множество X, эквивалентное множеству натуральных чисел N, называется *счетным.*

Если обозначить через x_n элемент счетного множества X, соответствующий числу $n \in N$, то образуется последовательность, поэтому говорят, что элементы счетного множества можно занумеровать числами натурального ряда. Приведем несколько теорем о счетных множествах.

Теорема 1. *Множество целых чисел счетно.*

Доказательство. Зададим биекцию $f : N \to Z$ по правилу $f(1) = 0$, $f(2n) = n, \ f(2n + 1) = -n$. **Теорема 1 доказана.**

Теорема 2. *Любое бесконечно подмножество счетного множества счетно.*

Доказательство. Доказательство проведем в два этапа. В начале докажем, что любое бесконечное подмножества множества натуральных чисел счетно. Пусть $\mathcal{N} \subset N$ - бесконечное подмножество в N. По принципу минимального элемента существует $n_1 = \min \mathcal{N}$. Рассмотрим множество $\mathcal{N} \setminus \{n_1\}$ в нем существует $n_2 = \min(\mathcal{N} \setminus \{n_1\})$ причем $n_1 < n_2$ и т.д. в результате множество $\mathcal{N}$ можно записать так $\mathcal{N} = \{n_1, n_2, \ldots\}$, где $n_i < n_k$ если $i < k$ (т.е. упорядочить множество $\mathcal{N}$ по возрастанию) и после этого задать биекцию $f : N \to \mathcal{N}$ по правилу $f(i) = n_i$.

Пусть A любое счетное множество (или $cardA = cardN$) и $B \subset A$ - некоторое его бесконечное подмножество, тогда в силу счетности A существует биекция $f : N \to A$, т.е. $f(n) = a_n$ и $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots\}$. Множество B состоит из элементов a_{n_k}, здесь n_k индексы его элементов. Индексы n_k образуют бесконечное подмножество $\mathcal{N} = \{n_k\} \subset N$ множетсва натуральных чисел, поэтому в силу уже доказанного выше существует биекция $g : N \to \mathcal{N}$, действующая по правилу $g(k) = n_k$. Отсюда следует, что композиция $h = f \circ g : N \to A$, действующая по правилу $h(k) = f(g(k)) = a_{n_k}$ является биекцией, как композиция биекций. **Теорема 2 доказана.**

Теорема 3. *Объединение конечного (или счетного) числа счетных множеств счетно.*

Доказательство. Пусть множества $A_1, A_2, A_3, \ldots$ счетные, представим их объединение в виде матрицы

$$\begin{gathered} A_1 \equiv \{a_{11}, a_{12}, a_{13}, \ldots\}, \\ A_2 \equiv \{a_{21}, a_{22}, a_{23}, \ldots\}, \\ A_3 \equiv \{a_{31}, a_{32}, a_{33}, \ldots\}, \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \end{gathered}$$

и будем проводить нумерацию членов такого объединения по диагоналям этой матрицы, а именно, $1 \to a_{11},\ 2 \to a_{21},\ 3 \to a_{12},\ 4 \to a_{31},\ 5 \to a_{22},\ 6 \to a_{13},\ \ldots$, что и означает счетность объединения. **Теорема 3 доказана.**

Теорема 4 (первая теорема Кантора). *Множество Q счетно.*

Доказательство. Множество Q можно представить как объединение счетного числа множеств $Q = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, где $A_1 \equiv Z$, $A_2 \equiv \{\frac{p}{2} \mid p \in Z\}$, $A_n \equiv \{\frac{p}{n} \mid p \in Z\}$, так как $cardA_n = cardZ = cardN$ при любом $n \in N$, то по предыдущей теореме 3 множество Q счетно. **Теорема 4 доказана.**

Теорема 5 (вторая теорема Кантора). *Множество R несчетно.*

Доказательство. (*от противного*) Пусть множество R счетно, т.е. $R \equiv \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$. Рассмотрим отрезок $\Delta_1 = [x_1 + 1; x_1 + 2]$, очевидно $x_1 \notin \Delta_1$. Построим отрезок $\Delta_2 \subset \Delta_1$ такой чтобы $\{x_1, x_2\} \notin \Delta_2$. Построим отрезок $\Delta_3 \subset \Delta_2$ такой чтобы $\{x_1, x_2, x_3\} \notin \Delta_3$ и т.д. В результате получаем систему вложенных отрезков $\{\Delta_i\}$ причем $\{x_1, x_2, \ldots x_i\} \notin \Delta_i$. По принципу вложенных отрезков существует $x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} \Delta_i$ и $x \neq x_i$, $i = 1, 2, 3, \ldots$, т.е. $x \notin R$. Полученное противоречие означает несчетность R. **Теорема 5 доказана.**

Следствие. *Множество иррациональных чисел $R \setminus Q$ несчетно.*

Доказательство. (*от противного*) Пусть $R \setminus Q$ счетно, тогда $R = (R \setminus Q) \cup Q$ счетно, но это противоречит теореме 5 о несчетности R. **Следствие доказано.**

Теорема 6. *Множество R и любой интервал $(a; b)$ равномощны, т.е. интервал $(a; b)$ несчетное множество.*

Доказательство. Интервалы $(a; b)$ и $(-1; 1)$ равномощны и соответствующее биективное отображение может быть, например, линейным

$$x = \frac{2t - a - b}{b - a} : (a; b) \longrightarrow (-1; 1).$$

Отображение

$$f(x) = \frac{x}{1 - |x|} : (-1; 1) \longrightarrow R$$

биективно отображает интервал $(-1; 1)$ на R, далее по теореме о композиции биекций получаем требуемое утверждение. **Теорема 6 доказана.**

Следствие (плотность $R \setminus Q$ в R). *Любой интервал $(a; b)$ содержит иррациональные числа.*

Доказательство. (*от противного*) Пусть некоторый интервал $(a; b)$ содержит только рациональные числа, т.е. $(a;b) \subset Q$, тогда по теореме 2 и первой теореме Кантора множество $(a;b)$ счетно, но это противоречит теореме 6 о несчетности $(a;b)$. **Следствие доказано.**

2 Предел числовой последовательности.

2.1 Понятие предела последовательности. Единственность предела. Линейные свойства предела последовательности.

Определение. Функция, определенная на множестве натуральных чисел N и принимающая числовые значения, называется *числовой последовательностью* или просто *последовательностью*, т.е. $a_n = f(n),\ f: N \to R$.

Определение. (*по Коши*) Число a называется *пределом* числовой последовательности $\{a_n\}$, если $\forall \epsilon > 0\ \exists N_\epsilon \in N$ такой, что $\forall n > N_\epsilon$ выполняется неравенство $|a_n - a| < \epsilon$ или $a - \epsilon < a_n < a + \epsilon$.

Записывается это так $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Последовательность a_n, у которой существует конечный предел a, называется *сходящейся,* иначе *расходящейся.*

Очевидно, постоянная последовательность $a_n = a$ имеет предел и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Пример 1. Доказать равенство $\lim\limits_{n\to\infty} nq^n = 0$, если $|q| < 1$.

Так как $|q| < 1$, то существует $k > 1$ такое, что $|q| = \frac{1}{k}$, тогда с помощью формулы бинома Ньютона получаем

$$k^n = ((k-1)+1)^n \geq C_n^2(k-1)^2 \text{ или } \frac{1}{k^n} \leq \frac{1}{C_n^2(k-1)^2}.$$

Отсюда следует

$$|a_n - a| = n|q|^n = \frac{n}{k^n} = \frac{n}{((k-1)+1)^n} \leq \frac{n}{C_n^2(k-1)^2} = \frac{2}{(n-1)(k-1)^2} < \epsilon$$

при $\forall n > N_\epsilon = [\frac{2}{\epsilon(k-1)^2} + 1] + 1$, что в соответствии с определением предела последовательности и означает доказываемое равенство.

Пример 2. Доказать равенство $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = 0$

В соответствии с определением предела числовой последовательности оценим разность

$$|a_n - a| = \frac{n}{2^n} \overset{n>4}{<} \frac{2^{\frac{n}{2}}}{2^n} = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}} < \epsilon$$

при любом $n > N_\epsilon = [2log_2\frac{1}{\epsilon}] + 1$.

Пример 3. Доказать равенство $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!} = 0$

В соответствии с определением предела числовой последовательности оценим разность

$$|a_n - a| = \frac{2^n}{n!} \overset{n>2}{<} \frac{2^n}{2 \cdot 3^{n-2}} = 2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} < \epsilon$$

при любом $n > N_\epsilon = [2 + log_{\frac{2}{3}}\frac{\epsilon}{2}] + 1$.

Пример 4. Доказать равенство $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0 \;\; a > 1$

В соответствии с определением предела числовой последовательности оценим разность

$$|a_n - a| = \frac{n^k}{a^n} = \left(\frac{n}{a_1^n}\right)^k, \text{ где } a_1 = a^{\frac{1}{k}} > 1$$

$$a_1^n = ((a_1 - 1) + 1)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i (a_1 - 1)^i \geq C_n^2 (a_1 - 1)^2 = \frac{n(n-1)}{2}(a_1 - 1)^2$$

тогда

$$|a_n - a| \leq \left(\frac{2n}{n(n-1)(a_1-1)^2}\right)^k = \left(\frac{2}{(n-1)(a_1-1)^2}\right)^k < \epsilon$$

при любом $n > N_\epsilon = [\frac{2}{(a^{\frac{1}{k}}-1)^2\epsilon^{\frac{1}{k}}} + 1] + 1$.

Пример 5. Доказать равенство $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$

В соответствии с определением предела числовой последовательности оценим разность

$$|a_n - a| = \frac{|a|^n}{n!} = \frac{|a|^n}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot [|a|] \cdot ([|a|] + 1) \cdot \ldots \cdot n} \leq$$

$$\leq \frac{|a|^n}{[|a|]! \cdot ([|a|] + 1)^{n - [|a|]}} = \frac{([|a|] + 1)^{[|a|]}}{[|a|]!} \cdot \left(\frac{|a|}{[|a|] + 1}\right)^n < \epsilon$$

при любом $n > N_\epsilon = [log_{\frac{|a|}{[|a|]+1}}\left(\epsilon \cdot \frac{[|a|]!}{([|a|]+1)^{[|a|]}}\right)] + 1$.

Пример 6. Доказать равенство $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$

Так как $\forall \epsilon > 0 \;\; \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\left(1/\epsilon\right)^n}{n!} = 0$, то $\exists N_\epsilon$ такой, что $\forall n > N_\epsilon$ выполняется неравенство

$$\frac{(\frac{1}{\epsilon})^n}{n!} < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{n!} < \epsilon^n \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} < \epsilon$$

Теорема (о единственности предела). *Сходящаяся последовательность имеет только один предел.*

Доказательство. (от противного) Пусть существует два предела $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ и $\lim_{n\to\infty} a_n = b$, причем $a \neq b$ и $a < b$, тогда для $\epsilon = \frac{b-a}{3} > 0$ $\exists N_1 \in N$ такой, что $\forall n > N_1$ выполняется неравенство $|a_n - a| < \epsilon$ и $\exists N_2 \in N$ такой, что $\forall n > N_2$ выполняется неравенство $|a_n - b| < \epsilon$. Обозначим $N = max\{N_1, N_2\}$, тогда члены последовательности с номерами $n > N$ должны оказаться в непересекающихся интервалах $(a-\epsilon, a+\epsilon)$ и $(b-\epsilon, b+\epsilon)$. Полученное противоречие означает, что $a = b$. **Теорема доказана.**

Замечание. Отбрасывание или добавление конечного числа членов последовательности не меняет ее сходимости или расходимости.

Теорема (линейные свойства предела). *Если существуют пределы* $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ *и* $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, *то существуют пределы последовательностей* $\{ca_n\}$, $\forall c \in R$ *и* $\{a_n \pm b_n\}$, *причем* $\lim_{n\to\infty} ca_n = ca$, $\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$.

Доказательство. В силу свойств модуля справедливо равенство

$$|ca_n - ca| = |c||a_n - a|.$$

Поскольку $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, то $\forall \epsilon > 0$ $\exists N_1 \in N$ такой, что $\forall n > N_1$ выполняется неравенство

$$|a_n - a| < \frac{\epsilon}{|c|},\ c \neq 0,$$

тогда для всех членов последовательности $\{ca_n\}$ с номерами $n > N_1$ справедливо неравенство

$$|a_n - a| < \epsilon,$$

которое, в силу определения предела последовательности, означает равенство $\lim_{n\to\infty} ca_n = ca$.

По свойствам модуля справедливо неравенство

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b|.$$

Поскольку $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ и $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, то $\forall \epsilon > 0$ $\exists N_1 \in N$ такой, что $\forall n > N_1$

выполняется неравенство

$$|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$$

и $\exists N_2 \in N$ такой, что $\forall n > N_2$ выполняется неравенство

$$|b_n - b| < \frac{\epsilon}{2},$$

тогда $\forall n > \max\{N_1, N_2\}$ справедливо неравенство

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| < \epsilon,$$

которое и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$.

Теорема доказана.

2.2 Свойства предела, связанные с неравенствами.

Теорема 1 (о сохранении знака неравенства). *Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ и $a > p$ $(a < q)$, то $\exists N$ такой, что $\forall n > N$ выполняется неравенство $a_n > p$ $(a_n < q)$.*

Доказательство. Пусть $a > p$, тогда для $\epsilon = a - p > 0$ $\exists N$ такой, что $\forall n > N$ выполняется неравенство $|a_n - a| < \epsilon$ или

$$a - \epsilon < a_n < a + \epsilon \Leftrightarrow p < a_n < 2a - p \Rightarrow p < a_n.$$

Теорема 1 доказана.

Теорема 2 (монотонность предела). *Если существуют пределы $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ и $a_n \le b_n$ при $\forall n > N_0$, тогда $a \le b$.*

Доказательство. Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, то $\forall \epsilon > 0$ $\exists N_1 \in N$ такой, что $\forall n > N_1$ выполняется неравенство

$$|a_n - a| < \epsilon \Leftrightarrow a - \epsilon < a_n < a + \epsilon$$

и $\exists N_2 \in N$ такой, что $\forall n > N_2$ выполняется неравенство

$$|b_n - b| < \epsilon \Leftrightarrow b - \epsilon < b_n < b + \epsilon.$$

Пусть $N = \max\{N_0, N_1, N_2\}$, тогда $\forall n > N$

$$a - \epsilon < a_n \le b_n < b + \epsilon \Rightarrow a - \epsilon < b + \epsilon$$

отсюда силу произвольности ϵ получаем требуемое неравенство $a \le b$. Действительно, если $a > b$, то выбрав $\epsilon_1 = \frac{a-b}{3} > 0$ получим неравенство $b + \epsilon_1 < a - \epsilon_1$, противоречащее полученному выше. **Теорема 2 доказана.**

Полагая в этой теореме $a_n = M$, получим

Следствие. *Если существует предел* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ *и* $b_n \ge M$ *при* $\forall n > N_0$, *тогда* $b \ge M$.

Теорема 3 (о двух ограничивающих последовательностях). *Если существуют два предела* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$ *и* $\forall n > N_0$ *выполняется неравенство* $a_n \le b_n \le c_n$, *тогда существует предел* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$.

Доказательство. Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$, то $\forall \epsilon > 0$ $\exists N_1 \in N$ такой, что $\forall n > N_1$ выполняется неравенство

$$|a_n - a| < \epsilon \Leftrightarrow a - \epsilon < a_n < a + \epsilon$$

и $\exists N_2 \in N$ такой, что $\forall n > N_2$ выполняется неравенство

$$|c_n - a| < \epsilon \Leftrightarrow a - \epsilon < c_n < a + \epsilon.$$

Пусть $N = \max\{N_0, N_1, N_2\}$, тогда $\forall n > N$

$$a - \epsilon < a_n \le b_n \le c_n < a + \epsilon \Rightarrow a - \epsilon < b_n < a + \epsilon.$$

Теорема 3 доказана.

Пример 1. Доказать равенство $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1, \ (a > 0)$.

Рассмотрим два случая. Первый случай $a \ge 1$, тогда $\sqrt[n]{a} \ge 1$ и рассмотрим представление $\sqrt[n]{a} = 1 + \beta_n$, где $\beta_n \ge 0$. Отсюда с помощью формулы бинома Ньютона получаем оценку

$$a = (1+\beta_n)^n \ge C_n^2 \beta_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}\beta_n^2 \text{ при } n \ge 2$$

или

$$\beta_n \le \sqrt{\frac{2a}{n(n-1)}}.$$

Таким образом

$$1 \le \sqrt[n]{a} = 1 + \beta_n \le 1 + \sqrt{\frac{2a}{n(n-1)}} \text{ при } n \ge 2.$$

В обозначениях теоремы 3 $a_n = 1$, $b_n = \sqrt[n]{a}$, $c_n = 1 + \sqrt{\frac{2a}{n(n-1)}}$ и поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = 1$, то в силу теоремы о двух ограничивающих последовательностях получаем $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

Второй случай $0 < a < 1$, тогда $a = \frac{1}{k}$ здесь $k \in R_+$ и $k > 1$. Далее рассуждая аналогично, получаем

$$1 \geq \sqrt[n]{a} = \frac{1}{\sqrt[n]{k}} = \frac{1}{1+\beta_n} \geq \frac{1}{1+\sqrt{\frac{2k}{n(n-1)}}}.$$

В обозначениях $c_n = 1$, $b_n = \sqrt[n]{a}$, $a_n = \frac{1}{1+\sqrt{\frac{2k}{n(n-1)}}}$, т.к. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = 1$ получаем $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

Пример 2. Доказать равенство $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Дублированием рассуждений из предыдущего примера получаем

$$1 \leq \sqrt[n]{n} = 1 + \beta_n \leq 1 + \sqrt{\frac{2n}{n(n-1)}} = 1 + \sqrt{\frac{2}{n-1}}$$

т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Пример 3. Доказать равенство $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\log_a n}{n} = 0$, $(a > 1)$.

Из соотношений

$$0 \leq \frac{\log_a n}{n} = \log_a \sqrt[n]{n} \leq \log_a\Bigl(1 + \sqrt{\frac{2}{n-1}}\Bigr)$$

получаем доказываемое равенство $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\log_a n}{n} = 0$.

Пример 4. Доказать равенство $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$.

Из неравенства

$$0 < \frac{n!}{n^n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} \cdots \frac{n-1}{n} < \frac{1}{n}$$

получаем требуемое.

2.3 Необходимое условие сходимости последовательности. Теоремы о пределе произведения и частного сходящихся последовательностей

Определение. Последовательность $\{a_n\}$ называется *ограниченной сверху (снизу)* если существует такое число p (или q), что $\forall n \in N$ $a_n \geq p$ (или $a_n \leq q$).

Последовательность, ограниченная сверху и снизу, называется *ограниченной.*

Теорема (необходимый признак сходимости числовой последовательности). *Если последовательность $\{a_n\}$ сходится, то она ограничена.*

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, тогда для $\epsilon = 1 > 0$ $\exists N_1 \in N$ такой, что $\forall n > N_1$ выполняется неравенство $|a_n - a| < 1$ или $a - 1 < a_n < a + 1$. Обозначим

$$p = \min\{a_1,\, a_2,\, \ldots, a_{N_1-1},\, a-1\},\;\; q = \max\{a_1,\, a_2,\, \ldots, a_{N_1-1},\, a+1\},$$

тогда $\forall n \in N,\ p \le a_n \le q$. **Теорема доказана.**

Пример. Последовательность $a_n = (-1)^n$ является ограниченной и расходящейся.

Теорема (о пределе произведения). *Если последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ сходятся, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, то последовательность $\{a_n \cdot b_n\}$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = a \cdot b$.*

Доказательство. В силу свойств модуля справедливо неравенство

$$|a_n \cdot b_n - a \cdot b| = |(a_n \cdot b_n - a \cdot b_n) + (a \cdot b_n - a \cdot b)| \le |b_n| \cdot |a_n - a| + |a| \cdot |b_n - b|.$$

Поскольку последовательность $\{b_n\}$ сходятся, то в силу необходимого признака сходимости, она ограничена, т.е. существует константа $L > 0$ такая, что $\forall n \in N,\ |b_n| \le L$.

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, то $\forall \epsilon > 0$ $\exists N_1 \in N$ такой, что $\forall n > N_1$ выполняется неравенство

$$|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2L}$$

и $\exists N_2 \in N$ такой, что $\forall n > N_2$ выполняется неравенство

$$|b_n - b| < \frac{\epsilon}{2|a|}\ (\text{при}\, a \ne 0),$$

тогда $\forall n > \max\{N_1, N_2\}$ справедливо неравенство

$$|a_n \cdot b_n - a \cdot b| < \epsilon,$$

которое и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$.

Если $a = 0$, то

$$0 \leq |a_n \cdot b_n - a \cdot b| = |a_n \cdot b_n| = |a_n| \cdot |b_n| < L \cdot |a_n|,$$

далее по правилу двух ограничивающих последовательностей получаем $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = 0$. **Теорема доказана.**

Теорема (об ограниченности обратной последовательности). *Если существует предел последовательности* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ *и* $b_n \neq 0$ $\forall n \in N$ $b \neq 0$,, *то последовательность* $\{\frac{1}{b_n}\}$ *ограничена.*

Доказательство. Так как $b \neq 0$ пусть для определенности $b > 0$, тогда $b > \frac{b}{2} > 0$ и по теореме о сохранении знака неравенства (см. §2.2) $\exists N_1 \in N$ такой, что $\forall n > N_1$ выполняется неравенство $b_n > \frac{b}{2} > 0$, отсюда $0 < \frac{1}{b_n} < \frac{2}{b}$ $\forall n > N_1$. Обозначим

$$p = \min\Big\{\frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2}, \ldots, \frac{1}{b_{N_1}}, 0\Big\}, \;\; q = \max\Big\{\frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2}, \ldots, \frac{1}{b_{N_1}}, \frac{2}{b}\Big\},$$

тогда $\forall n \in N$, $p \leq \frac{1}{b_n} \leq q$. **Теорема доказана.**

Теорема (о пределе частного). *Если последовательности* $\{a_n\}$ *и* $\{b_n\}$ *сходятся, т.е.* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, *причем* $b_n \neq 0$ *и* $b \neq 0$, *то последовательность* $\{\frac{a_n}{b_n}\}$ *сходится и* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$.

Доказательство. В силу свойств модуля справедливо неравенство

$$\Big|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\Big| = \Big|\frac{a_n \cdot b - a \cdot b_n}{b \cdot b_n}\Big| = \frac{|a_n \cdot b - a \cdot b_n|}{|b| \cdot |b_n|} =$$

$$= \frac{|(a_n \cdot b - a \cdot b) + (a \cdot b - a \cdot b_n|}{|b| \cdot |b_n|} \leq \frac{|b| \cdot |a_n - a| + |a| \cdot |b_n - b|}{|b| \cdot |b_n|}.$$

Поскольку $b_n \neq 0$, $b \neq 0$, то в силу теоремы об ограниченности обратной последовательности существует положительная константа $M > 0$ такая, что $\forall n \in N$, $\frac{1}{|b_n|} = |\frac{1}{b_n}| \leq M$. Поэтому

$$\Big|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\Big| \leq M \cdot |a_n - a| + M \cdot \frac{|a|}{|b|} \cdot |b_n - b|.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, то $\forall \epsilon > 0$ $\exists N_1 \in N$ такой, что $\forall n > N_1$ выполняется неравенство

$$|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2M}$$

и $\exists N_2 \in N$ такой, что $\forall n > N_2$ выполняется неравенство

$$|b_n - b| < \frac{|b|}{2M|a|} \cdot \epsilon \text{ (при } a \neq 0),$$

тогда $\forall n > \max\{N_1, N_2\}$ справедливо неравенство

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b} \right| < \epsilon.$$

Таким образом $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$.

Если $a = 0$, то

$$0 \leq \left| \frac{a_n}{b_n} \right| \leq M \cdot |a_n|$$

далее по правилу двух ограничивающих последовательностей получаем требуемое предельное равенство. **Теорема доказана.**

2.4 Теорема Вейерштрасса о пределе монотонной и ограниченной последовательности. Число e. Теорема Штольца.

Определение. Последовательность $\{a_n\}$ называется *неубывающей (невозрастающей)*, если $\forall n \in N$ $a_{n+1} \geq a_n$ $(a_{n+1} \leq a_n)$. Если выполняются строгие неравенства, то последовательность называется *строго возрастающей (строго убывающей)*. Неубывающие и невозрастающие последовательности называются *монотонными*, а строго возрастающие и строго убывающие *строго монотонными.*

Теорема (Вейерштрасса о пределе монотонной последовательности). *Пусть последовательность $\{a_n\}$ обладает свойствами:*

а) $\{a_n\}$ ограничена сверху (снизу);

б) $\exists N$ такой, что $\forall n > N$ $a_{n+1} \geq a_n$ $(a_{n+1} \leq a_n)$,

тогда существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ и $a = \sup A_N$ $(a = \inf A_N)$, где $A_N \equiv \{a_N, a_{N+1}, \ldots\}$.

Доказательство. В силу ограниченности сверху последовательности $\{a_n\}$ существует вещественное число b такое, что $a_n \leq b$, $\forall n \in N$, тогда множество A_N ограничено сверху. По теореме о верхних гранях (см. §1.5) существует $a = \sup A_N$, причем $a_n \leq a$, $\forall n \in N$.

Пусть $\epsilon > 0$ - произвольно, тогда по определению верхней грани числового множества (см. §1.5) существует номер $N_\epsilon \geq N$ такой, что $a - \epsilon < a_{N_\epsilon} \leq a$, поэтому $\forall n \geq N_\epsilon$ справедливо неравенство

$$a - \epsilon < a_{N_\epsilon} \leq a_n \leq a < a + \epsilon.$$

Полученные оценки и означают, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. **Теорема доказана.**

Пример 1 (число e). $\lim\limits_{n\to\infty}\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n = e$, здесь $e = 2,718281828459045\ldots$ иррациональное число, введенное Леонардом Эйлера, называемое иногда числом Непера (неперово число).

Рассмотрим числовую последовательность $a_n = \Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n$. Покажем, что a_n монотонно возрастающая последовательность. Рассмотрим отношение двух последовательных членов этой последовательности

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \Big(1+\frac{1}{n}\Big)\Bigg(\frac{1+\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{n}}\Bigg)^{n+1} = \Big(1+\frac{1}{n}\Big)\Bigg(1-\frac{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{n}}\Bigg)^{n+1} =$$

$$= \Big(1+\frac{1}{n}\Big)\Big(1-\frac{1}{(n+1)^2}\Big)^{n+1}.$$

Воспользуемся неравенством Бернулли (см. §1.3)

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \Big(1+\frac{1}{n}\Big)\Big(1-(n+1)\frac{1}{(n+1)^2}\Big) = 1,$$

т.е. $a_{n+1} \geq a_n > 0$ и $\{a_n\}$ монотонно возрастает.

Аналогично можно убедиться, что числовая последовательность $b_n = \Big(1-\frac{1}{n}\Big)^n$ монотонно возрастает, т.е. $0 < b_2 \leq b_n$ при $n \geq 2$.

Теперь покажем ограниченность $\{a_n\}$

$$a_n = \Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n = \frac{\Big(1-\frac{1}{n^2}\Big)^n}{b_n} \leq \frac{1}{b_2}.$$

В силу теоремы Вейерштрасса последовательность $\{a_n\}$ сходится.

Воспользовавшись неравенством Бернулли (см. §1.3), получим

$$1 \geq b_n \cdot a_n = \Big(1-\frac{1}{n^2}\Big)^n \geq 1 - \frac{n}{n^2} = 1 - \frac{1}{n},$$

откуда следует

$$\lim_{n\to\infty} b_n \cdot a_n = 1,$$

но по теореме о пределе произведения

$$\lim_{n\to\infty} b_n \cdot a_n = b \cdot e,$$

поэтому

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}.$$

В действительности имеет место предельное равенство более общего вида

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n = e^\alpha, \ \ \forall\alpha\in R.$$

Пример 2 (число e). Пусть

$$c_n = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\dots+\frac{1}{n!},$$

тогда $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = e$.

Действительно $\{c_n\}$ - монотонно возрастает и

$$c_n < 1+1++\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}} = 3-\frac{1}{2^{n-1}} < 3$$

ограничена сверху. Следовательно по теореме Вейерштрасса существует $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = c$.

Далее по формуле бинома Ньютона (см. §1.3)

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+C_n^1\cdot\frac{1}{n}+C_n^2\cdot\frac{1}{n^2}+C_n^3\cdot\frac{1}{n^3}+\ldots+C_n^n\cdot\frac{1}{n^n} =$$

$$= 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\ldots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

очевидно $a_n \le c_n$, поэтому по теореме о монотонности предела (см. §2.2) $e \le c$.

С другой стороны для любого фиксированного $k\in N$ при $n \ge k$ имеем неравенство

$$a_n \ge 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\ldots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right).$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $n\to\infty$, получим $e \ge c_k$. Отсюда, после повторного предельного перехода при $k\to\infty$ имеем $e \ge c$. Поэтому $c = e$.

Пример 3 (итерационная формула Герона). Рассмотрим последовательность $x_{n+1} = \frac{1}{2}\Big(x_n + \frac{a}{x_n}\Big)$, где $a > 0,\ x_1 > 0$.

Покажем, что $\{x_n\}$ убывающая, ограниченная снизу последовательность.

Рассмотрим разность

$$x_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{1}{2}\Big(x_n + \frac{a}{x_n}\Big) - \sqrt{a} = \frac{x_n^2 + a - 2x_n\sqrt{a}}{2x_n} = \frac{(x_n - \sqrt{a})^2}{2x_n} > 0,$$

т.е. $x_{n+1} > \sqrt{a}$ и ограниченность снизу доказана, причем $x_{n+1}^2 > a$. Заметим, что если $x_{n+1} = \sqrt{a}$, то последовательность $\{x_n\}$ стационарна и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{a}$.

Рассмотрим еще одну разность

$$x_n - x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2}\Big(x_n + \frac{a}{x_n}\Big) = \frac{2x_n^2 - x_n^2 - a}{2x_n} = \frac{x_n^2 - a}{2x_n} > 0,$$

отсюда следует $x_n > x_{n+1}$ - т.е. $\{x_n\}$ строго убывающая последовательность и по теореме Вейерштрасса является сходящейся. Обозначим ее предел через x_0 и перейдем к пределу при $n \to \infty$ в исходном рекуррентном соотношении, тогда

$$x_0 = \frac{1}{2}\Big(x_0 + \frac{a}{x_0}\Big)$$

$$2x_0 = x_0 + \frac{a}{x_0}$$

$$x_0 - \frac{a}{x_0} = 0$$

$$x_0^2 = a \Rightarrow x_0 = \sqrt{a}.$$

Итак, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{a}$.

При вычислении квадратного корня из положительного числа по итерационной формуле Герона число верных десятичных знаков быстро растет, причем, если в процессе вычисления на каком-то этапе будет допущена ошибка, то в дальнейшем этот сбой автоматически корректируется, т.е. мы рассмотрели пример саморегулирующегося итерационного процесса.

Теорема (Штольца). *Пусть для числовых последовательностей* $\{a_n\}$ *и* $\{b_n\}$ *выполнены условия:*

а) $b_{n+1} > b_n > 0$, *т.е.* $\{b_n\}$ *монотонно возрастает;*

б) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$;

в) существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=l$,
тогда существует предел отношения $\frac{a_n}{b_n}$ *и справедливо равенство*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=l.$$

Доказательство. Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=l$, то $\forall\epsilon>0\ \exists N_\epsilon\in N$ такой, что $\forall n>N_\epsilon$ справедливо неравенство

$$l-\frac{\epsilon}{2}<\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}<l+\frac{\epsilon}{2},$$

в силу условия а) теоремы $b_{n+1}-b_n>0$, поэтому $\forall n>N_\epsilon$

$$\Big(l-\frac{\epsilon}{2}\Big)(b_{n+1}-b_n)<a_{n+1}-a_n<\Big(l+\frac{\epsilon}{2}\Big)(b_{n+1}-b_n),$$

т.е. имеем $(n-N_\epsilon)$ неравенств

$$\Big(l-\frac{\epsilon}{2}\Big)(b_{n+1}-b_n)<a_{n+1}-a_n<\Big(l+\frac{\epsilon}{2}\Big)(b_{n+1}-b_n),$$

$$\Big(l-\frac{\epsilon}{2}\Big)(b_n-b_{n-1})<a_n-a_{n-1}<\Big(l+\frac{\epsilon}{2}\Big)(b_n-b_{n-1}),$$

$$\dots\ \dots\ \dots$$

$$\Big(l-\frac{\epsilon}{2}\Big)(b_{N_\epsilon+1}-b_{N_\epsilon})<a_{N_\epsilon+1}-a_{N_\epsilon}<\Big(l+\frac{\epsilon}{2}\Big)(b_{N_\epsilon+1}-b_{N_\epsilon}),$$

сложим все эти неравенства почленно

$$\Big(l-\frac{\epsilon}{2}\Big)(b_{n+1}-b_{N_\epsilon})<a_{n+1}-a_{N_\epsilon}<\Big(l+\frac{\epsilon}{2}\Big)(b_{n+1}-b_{N_\epsilon}).$$

Так как все $b_n>0$, то

$$\Big(l-\frac{\epsilon}{2}\Big)\Big(1-\frac{b_{N_\epsilon}}{b_{n+1}}\Big)<\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}-\frac{a_{N_\epsilon}}{b_{n+1}}<\Big(l+\frac{\epsilon}{2}\Big)\Big(1-\frac{b_{N_\epsilon}}{b_{n+1}}\Big)$$

или

$$\frac{a_{N_\epsilon}-lb_{N_\epsilon}}{b_{n+1}}-\frac{\epsilon}{2}\cdot\frac{b_{n+1}-b_{N_\epsilon}}{b_{n+1}}<\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}-l<\frac{a_{N_\epsilon}-lb_{N_\epsilon}}{b_{n+1}}+\frac{\epsilon}{2}\cdot\frac{b_{n+1}-b_{N_\epsilon}}{b_{n+1}}.$$

Из первого условия теоремы следует $0<\frac{b_{n+1}-b_{N_\epsilon}}{b_{n+1}}<1$, поэтому

$$\frac{a_{N_\epsilon}-lb_{N_\epsilon}}{b_{n+1}}-\frac{\epsilon}{2}<\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}-l<\frac{a_{N_\epsilon}-lb_{N_\epsilon}}{b_{n+1}}+\frac{\epsilon}{2}.$$

Из второго условия теоремы следует

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{N_\epsilon}-lb_{N_\epsilon}}{b_{n+1}}=0,$$

т.е. $\forall\epsilon>0\ \exists N_1\in N$ такой, что $\forall n>N_1$ справедливо неравенство

$$-\frac{\epsilon}{2}<\frac{a_{N_\epsilon}-lb_{N_\epsilon}}{b_{n+1}}<\frac{\epsilon}{2}.$$

Введем обозначение $N=\max(N_1,\,N_\epsilon)$, тогда $\forall n>N$

$$-\epsilon=-\frac{\epsilon}{2}-\frac{\epsilon}{2}<\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}-l<\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon.$$

Последнее наблюдение представляет собой развернутую запись предельного равенства

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=l.$$

Теорема Штольца доказана.

С помощью теоремы Штольца вычислим следующие пределы.

Пример 4. При любом натуральном k вычислить предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}}.$$

В обозначениях теоремы Штольца

$$a_n=1^k+2^k+\cdots+n^k,\ \ b_n=n^{k+1},$$

тогда выполнены все условия теоремы Штольца и значит

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^k}{(n+1)^{k+1}-n^{k+1}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^k}{n\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^{k+1}-n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^k}{n\Big(1+(k+1)\frac{1}{n}+\sum\limits_{i=2}^{k+1}C_{k+1}^i\frac{1}{n^i}\Big)-n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^k}{n+(k+1)+\sum\limits_{i=2}^{k+1}C_{k+1}^i\frac{1}{n^{i-1}}-n}=\frac{1}{k+1}.$$

Пример 5. При любом натуральном k вычислить предел

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\frac{1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^k}-\frac{n}{k+1}\Big).$$

Поскольку

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\frac{1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^k}-\frac{n}{k+1}\Big)=\lim_{n\to\infty}\frac{(k+1)(1^k+2^k+\cdots+n^k)-n^{k+1}}{(k+1)\cdot n^k}$$

положим

$$a_n=(k+1)(1^k+2^k+\cdots+n^k)-n^{k+1},\ \ b_n=(k+1)\cdot n^k,$$

тогда по теореме Штольца

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\frac{1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^k}-\frac{n}{k+1}\Big)=\lim_{n\to\infty}\frac{(k+1)(n+1)^k-(n+1)^{k+1}+n^{k+1}}{(k+1)\cdot((n+1)^k-n^k)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(k+1)\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^k-n\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^{k+1}+n}{(k+1)\cdot\Big(\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^k-1\Big)}.$$

Но

$$(k+1)\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^k-n\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^{k+1}+n=(k+1)\Big(1+k\frac{1}{n}+\sum_{i=2}^{k}C_k^i\frac{1}{n^i}\Big)-$$

$$-n\Big(1+(k+1)\frac{1}{n}+\frac{(k+1)k}{2}\cdot\frac{1}{n^2}+\sum_{i=3}^{k+1}C_{k+1}^i\frac{1}{n^i}\Big)+n=$$

$$=\frac{(k+1)k}{n}+(k+1)\sum_{i=2}^{k}C_k^i\frac{1}{n^i}-\frac{(k+1)k}{2n}+\sum_{i=3}^{k+1}C_{k+1}^i\frac{1}{n^{i-1}}=$$

$$=\frac{(k+1)k}{2n}+\sum_{i=2}^{k}\Big((k+1)C_k^i+C_{k+1}^{i+1}\Big)\frac{1}{n^i}$$

и

$$(k+1)\cdot\Big(\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^k-1\Big)=(k+1)\cdot\Big(1+k\frac{1}{n}+\sum_{i=2}^{k}C_k^i\frac{1}{n^i}-1\Big)=$$

$$=\frac{(k+1)k}{n}+(k+1)\sum_{i=2}^{k}C_k^i\frac{1}{n^i},$$

поэтому

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\frac{1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^k}-\frac{n}{k+1}\Big)=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(k+1)k}{2n}+\sum\limits_{i=2}^{k}\Big((k+1)C_k^i+C_{k+1}^{i+1}\Big)\frac{1}{n^i}}{\frac{(k+1)k}{n}+(k+1)\sum\limits_{i=2}^{k}C_k^i\frac{1}{n^i}}=\frac{1}{2}.$$

Пример 6. При любом натуральном k вычислить предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^k + 3^k + \cdots + (2n-1)^k}{n^{k+1}}.$$

В обозначениях теоремы Штольца

$$a_n = 1^k + 3^k + \cdots + (2n-1)^k, \quad b_n = n^{k+1},$$

тогда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^k + 3^k + \cdots + (2n-1)^k}{n^{k+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)^k}{(n+1)^{k+1} - n^{k+1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2^k \cdot \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^k}{n\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{k+1} - 1\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^k \cdot \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^k}{n\left(\left(1 + (k+1)\frac{1}{n} + \sum\limits_{i=2}^{k+1} C_{k+1}^i \frac{1}{n^i}\right) - 1\right)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2^k \cdot \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^k}{(k+1) + \sum\limits_{i=2}^{k+1} C_{k+1}^i \frac{1}{n^{i-1}}} = \frac{2^k}{k+1}.$$

2.5 Подпоследовательности. Частичные пределы последовательности. Теорема Больцано-Вейерштрасса

Пусть дана некоторая последовательность $\{a_n\}$, наряду с ней рассмотрим возрастающую последовательность целых положительных чисел $k_1 < k_2 < \ldots < k_n < \ldots$, в результате получаем новую последовательность $\{a_{k_n}\}$, которую принято называть *подпоследовательностью* исходной последовательности $\{a_n\}$, очевидно $k_n \geq n$. Если подпоследовательность $\{a_{k_n}\}$ сходится, то ее предел называют *частичным пределом* последовательности $\{a_n\}$.

Теорема. *Если последовательность $\{a_n\}$ сходится к пределу a, то и любая ее подпоследовательность $\{a_{k_n}\}$ сходится к тому же пределу a.*

Доказательство. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, то $\forall \epsilon > 0\ \exists N_\epsilon$ такой, что $\forall n > N_\epsilon$ выполняется неравенство $|a_n - a| < \epsilon$. Так как $k_n \geq n$, то $\forall k_n \geq k_{N_\epsilon} > N_\epsilon$ справедливо неравенство $|a_{k_n} - a| < \epsilon$, а это означает $\lim\limits_{k_n\to\infty} a_{k_n} = a$.

Теорема доказана.

Пример. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1\pm\frac{k}{n}\right)^n$, $k\in N$. Рассмотри числовую последовательность $a_n=\left(1\pm\frac{k}{n}\right)^n$. Так же, как в примере 1 из §2.4, можно убедиться, что это монотонно возрастающая и ограниченная сверху последовательность, поэтому в силу теоремы Вейерштрасса последовательность $\{a_n\}$ сходится. Рассмотрим подпоследовательность $a_{km}=\left(1\pm\frac{1}{m}\right)^{km}$, $m\in N$. Отсюда по теореме о пределе произведения получаем

$$\lim_{m\to\infty}a_{km}=\left(\lim_{m\to\infty}\left(1\pm\frac{1}{m}\right)^m\right)^k=e^{\pm k},$$

поэтому в соответствии с только что доказанной теоремой $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=e^{\pm k}$.

Воспользуемся полученным результатом для вычисления следующего предела

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+4}{n-5}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{4}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{5}{n}\right)^n}=\frac{e^4}{e^{-5}}=e^9.$$

Теорема (Больцано-Вейерштрасса). *Из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.*

Доказательство. Пусть $\{a_n\}$ - ограниченная последовательность, т.е. $\forall n\in N$ $p\le a_n\le q$. Разделим отрезок $[p,q]$ на две равные части, в одной из них окажется бесконечно много членов последовательности $\{a_n\}$, обозначим его $[p_1,q_1]\subset[p,q]$ и выберем первый член последовательности a_{k_1} попавший в $[p_1,q_1]$. Разделим $[p_1,q_1]$ пополам, в одну из частей попадает бесконечно много членов последовательности $\{a_n\}$, обозначим ее $[p_2,q_2]\subset[p_1,q_1]$ и выберем член a_{k_2}, попавший в $[p_2,q_2]$ и имеющий номер $k_2>k_1$, таким образом мы выберем второй член подпоследовательности и т.д. В результате мы имеем последовательность вложенных отрезков $[p_n,q_n]$ причем $q_n-p_n=\frac{q-p}{2^n}\to 0$ при $n\to\infty$. В силу следствия из принципа вложенных отрезков (см. §1.5) существует единственная точка $c\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[p_n,q_n]$. Поскольку $a_{k_n}\in[p_n,q_n]$, то

$$|a_{k_n}-c|\le|q_n-p_n|=\frac{q-p}{2^n}<\epsilon$$

при $\forall n>N_\epsilon=\left[\log_2\frac{q-p}{\epsilon}\right]+1$, т.е. подпоследовательность $\{a_{k_n}\}$ сходится к числу c.

Теорема Больцано-Вейерштрасса доказана.

2.6 Критерий Коши сходимости числовых последовательностей.

Определение. Числовая последовательность $\{a_n\}$ называется *фундаментальной*, если $\forall\epsilon > 0\ \exists N_\epsilon$ такой, что $\forall n > N_\epsilon$ и $\forall p \in N$ выполняется неравенство $|a_n - a_{n+p}| < \epsilon$.

Теорема (критерий Коши). *Для того чтобы числовая последовательность $\{a_n\}$ сходилась, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть числовая последовательность $\{a_n\}$ сходится, т.е. существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ или $\forall\epsilon > 0\ \exists N_\epsilon$ такой, что $\forall n > N_\epsilon$ выполняется неравенство $|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$, очевидно, что тогда и $\forall p \in N$ член последовательности $\{a_{n+p}\}$ при $\forall n > N_\epsilon$ удовлетворяет неравенству $|a_{n+p} - a| < \frac{\epsilon}{2}$. Отсюда для таких n и p получаем неравенство

$$|a_n - a_{n+p}| \le |a_n - a| + |a_{n+p} - a| < \epsilon,$$

означающее фундаментальность последовательности $\{a_n\}$.

Достаточность. Пусть числовая последовательность $\{a_n\}$ фундаментальна, т.е. $\forall\epsilon > 0\ \exists N_\epsilon$ такой, что $\forall n > N_\epsilon$ и $\forall p \in N$ выполняется неравенство

$$|a_n - a_{n+p}| < \frac{\epsilon}{2} \Leftrightarrow a_n - \frac{\epsilon}{2} < a_{n+p} < a_n + \frac{\epsilon}{2}.$$

Зафиксируем некоторый номер $N_1 > N_\epsilon$, тогда $\forall p \in N$

$$a_{N_1} - \frac{\epsilon}{2} < a_{N_1+p} < a_{N_1} + \frac{\epsilon}{2},$$

а это означает, что последовательность $\{a_n\}$ ограничена, т.е. $m \le a_n \le M$, где

$$m = \min\{a_1,\, a_2,\, \dots, a_{N_1}, a_{N_1} - \frac{\epsilon}{2}\},\ \ M = \max\{a_1,\, a_2,\, \dots, a_{N_1}, a_{N_1} + \frac{\epsilon}{2}\}.$$

В силу теоремы Больцано-Вейерштрасса у последовательности $\{a_n\}$ существует сходящая подпоследовательность $\{a_{k_n}\}$, т.е. существует $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n} = a$

или $\forall\epsilon > 0$ $\exists M_\epsilon$ такой, что $\forall k_n > M_\epsilon$ выполняется неравенство $|a_{k_n} - a| < \frac{\epsilon}{2}$. Обозначим $N = \max(N_\epsilon, M_\epsilon)$, тогда $\forall n > N$ и $\forall k_n > N$ справедливо неравенство

$$|a_n - a| \le |a_n - a_{k_n}| + |a_{k_n} - a| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Критерий Коши доказан.

Теорема (критерий Коши расходимости числовой последовательности). *Для расходимости числовой последовательности $\{a_n\}$, необходимо и достаточно, чтобы она не была фундаментальной, т.е. $\exists\epsilon > 0$ такое, что $\forall N$ найдутся номера $n > N$ и $m > N$ такие, что $|a_n - a_m| \ge \epsilon$.*

Пример 1. Доказать расходимость последовательности $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$.

Составим и оценим разность

$$a_{2m} - a_m = \underbrace{\frac{1}{m+1} + \dots + \frac{1}{2m}}_{m-\text{слагаемых}} > \underbrace{\frac{1}{2m} + \dots + \frac{1}{2m}}_{m-\text{слагаемых}} = \frac{1}{2} = \epsilon_0 > 0,$$

таким образом $\exists\ \epsilon_0 = \frac{1}{2}$ такое, что $\forall N$ для номеров $m > N$ и $2m > N$ справедливо неравенство $a_{2m} - a_m > \frac{1}{2}$, что в силу критерия Коши и означает расходимость последовательности $\{a_n\}$.

Пример 2 (уравнение Иоганна Кеплера(1571-1630)). Рассмотрим уравнение Кеплера движения планет по эллиптической орбите

$$E - e\sin E = y,\ (0 < e < 1 - \text{эксцентриситет орбиты}).$$

Зададим рекуррентную последовательность

$$E_0 = y,\ E_1 = y + e\sin E_0,\ \dots,\ E_n = y + e\sin E_{n-1}.$$

Покажем, что эта последовательность $\{E_n\}$: а) сходится; б) ее предел $\xi = \lim\limits_{n\to\infty} E_n$ является решением уравнения Кеплера; в) ξ является единственным решением уравнения Кеплера.

Для доказательства сходимости воспользуемся критерием Коши. Рассмотрим разность

$$|E_{n+p} - E_n| = e|\sin E_{n+p-1} - \sin E_{n-1}| =$$

$$= e \cdot |2 \cdot \sin \frac{E_{n+p-1} - E_{n-1}}{2} \cdot \cos \frac{E_{n+p-1} + E_{n-1}}{2}| \leq$$

$$\leq e \cdot 2 \cdot \left| \frac{E_{n+p-1} - E_{n-1}}{2} \right| = e \cdot |E_{n+p-1} - E_{n-1}| \leq \underbrace{\ldots\ldots\ldots}_{(n-1)-\text{раз}} \leq$$

$$\leq e^n |E_p - E_0| = e^n |E_p - y| = e^{n+1} |\sin E_{p-1}| \leq e^{n+1}.$$

Для любого $\epsilon > 0$ неравенство $e^{n+1} < \epsilon$ выполняется при всех $n > N_\epsilon = [\log_e \epsilon]$, а значит при всех таких n и $\forall p \in N$ выполняется неравенство $|E_{n+p} - E_n| < \epsilon$, означающее фундаментальность последовательности $\{E_n\}$, а значит и ее сходимость.

Обозначим предел через $\xi = \lim\limits_{n\to\infty} E_n$ и осуществим предельный переход в рекуррентном соотношении для последовательности $\{E_n\}$, тогда

$$\xi - e \cdot \sin \xi = y,$$

т.е. ξ действительно является решением уравнения Кеплера. Предельное равенство $\lim\limits_{n\to\infty} \sin E_n = \sin \xi$ следует из неравенства

$$0 \leq |\sin E_n - \sin \xi| \leq |E_n - \xi|$$

и теоремы о двух ограничивающих последовательностях (см. теорему 3 из §2.2).

Покажем единственность этого решения методом от противного. Пусть ξ_1 какое-либо другое решение $\xi \neq \xi_1$ уравнения Кеплера

$$\xi_1 - e \cdot \sin \xi_1 = y,$$

тогда

$$\xi - \xi_1 = e \cdot (\sin \xi - \sin \xi_1)$$

$$|\xi - \xi_1| = e \cdot |\sin \xi - \sin \xi_1| \leq e \cdot |\xi - \xi_1|,$$

но если $\xi \neq \xi_1$, то $|\xi - \xi_1| > 0$ и получаем неравенство $1 \leq e$, противоречащее условиям задачи (ее физическому смыслу).

Решение ξ можно найти методом последовательных приближений с любой наперед заданной степенью точности. Действительно, т.к.

$$E_n = y + e \sin E_{n-1}, \;\; \xi = y + e \cdot \sin \xi,$$

то

$$|E_n - \xi| = e \cdot |\sin E_{n-1} - \sin \xi| \le e \cdot |E_{n-1} - \xi| \le \underbrace{\ldots\ldots\ldots}_{(n-1)-\text{раз}} \le$$

$$\le e^n \cdot |E_0 - \xi| = e^n \cdot |y - \xi| = e^n \cdot |e \sin \xi| \le e^{n+1}.$$

Отсюда получаем, что для обеспечения точности приближения $\epsilon > 0$ необходимо осуществить $N_\epsilon = [\log_e \epsilon]$ итераций.

2.7 Бесконечно большие и бесконечно малые последовательности.

Определение. Числовая последовательность $\{a_n\}$ называется *неограниченной*, если для любого положительного числа $M > 0$ найдется такой член последовательности a_n, что выполняется неравенство $|a_n| > M$.

Определение. Числовая последовательность $\{a_n\}$ называется *бесконечно большой*, если $\forall M > 0$ $\exists N_M$ такой, что $\forall n > N_M$ выполняется неравенство $|a_n| > M$.

Всякая бесконечно большая последовательность является неограниченной, но не наоборот. Например последовательность $\{1;\ \frac{1}{2};\ 2;\ \frac{1}{3};\ 3;\ \frac{1}{4};\ 4;\ \ldots,\ \frac{1}{n};\ n;\ \ldots\}$ неограничена, но не является бесконечно большой.

Определение. Числовая последовательность $\{a_n\}$ называется *бесконечно маленькой*, если $\forall \epsilon > 0$ $\exists N_\epsilon$ такой, что $\forall n > N_\epsilon$ выполняется неравенство $|a_n| < \epsilon$.

Очевидно, что для бесконечно маленькой последовательности справедливо предельное равенство $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, т.е. $\{a_n\}$ - сходящаяся последовательность, а значит, в силу необходимого признака сходимости числовых последовательностей, ограничена (см. §2.3). Бесконечно малые последовательности обладают не только всем набором арифметических свойств, но и справедлива следующая

Теорема. *Если числовая последовательность $\{a_n\}$ ограничена, а последовательность $\{\alpha_n\}$ бесконечно малая, то их произведение $\{a_n \cdot \alpha_n\}$ - бесконечно малая.*

Справедливость этого утверждения следует из неравенства

$$0 \le |a_n \cdot \alpha_n| = |a_n| \cdot |\alpha_n| \le M \cdot |\alpha_n|$$

и теоремы о двух ограничивающих последовательностях (см. теорему 3 из §2.2).

Теорема (о специальном представлении членов сходящейся последовательности). *Если числовая последовательность $\{a_n\}$ сходится (т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$), то существует такая бесконечно малая последовательность $\{\alpha_n\}$ (т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$), что $a_n = a + \alpha_n$.*

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, т.е. $\forall \epsilon > 0\ \exists N_\epsilon$ такой, что $\forall n > N_\epsilon$ выполняется неравенство $|a_n - a| < \epsilon$, но это означает, что числовая последовательность $\alpha_n = a_n - a$ является бесконечно малой и, следовательно, $a_n = a + \alpha_n$. **Теорема доказана.**

Теорема. *Числовая последовательность $\{a_n\}$ является бесконечно большой, при $a_n \neq 0$, тогда и только тогда, когда числовая последовательность $\{\frac{1}{a_n}\}$ является бесконечно малой.*

Доказательство. Пусть $\{a_n\}$ бесконечно большая и $a_n \neq 0$, тогда $\forall M > 0\ \exists N_M$ такой, что $\forall n > N_M$ выполняется неравенство $|a_n| > M$ или $0 < |\frac{1}{a_n}| < \frac{1}{M}$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$.

Пусть $\{\frac{1}{a_n}\}$ бесконечно малая, т.е. $\forall \epsilon > 0\ \exists N_\epsilon$ такой, что $\forall n > N_\epsilon$ выполняется неравенство $|\frac{1}{a_n}| < \epsilon$ или $|a_n| > \frac{1}{\epsilon}$, т.е. $\{a_n\}$ бесконечно большая. **Теорема доказана.**

Пример. В §2.1 и §2.2 были доказаны предельные равенства

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log_a n}{n^k} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0, \quad a > 1,\ k > 0,$$

означающие, что последовательности $\frac{\log_a n}{n^k}$, $\frac{n^k}{a^n}$, $\frac{a^n}{n!}$, $\frac{n!}{n^n}$ являются бесконечно малыми, тогда обратные к ним $\frac{n^k}{\log_a n}$, $\frac{a^n}{n^k}$, $\frac{n!}{a^n}$, $\frac{n^n}{n!}$ являются бесконечно большими. Последовательности $\log_a n$, n^k, a^n, $n!$, n^n тоже являются бесконечно большими, но имеют разный порядок роста, что принято записывать следующим образом $\log_a n \ll n^k \ll a^n \ll n! \ll n^n$, здесь знак $\ll$ означает бесконечно большую более высокого порядка роста.

3 Предел функции. Непрерывность функции.

3.1 Понятие предела функции в точке. Односторонние пределы.

Определение (*по Гейне*). Число b называется *пределом* функции $y = f(x)$ в точке a, если для любой числовой последовательности $x_n \to a, \ x_n \neq a$, соответствующая числовая последовательность $f(x_n) \to b$.

Определение. (*по Коши*) Число b называется *пределом* функции $y = f(x)$ в точке a, если $\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta_\epsilon > 0$ такое, что $\forall x: \ 0 < |x - a| < \delta_\epsilon$ выполняется неравенство $|f(x) - b| < \epsilon$ или $b - \epsilon < f(x) < b + \epsilon$.

Записывается это так $b = \lim\limits_{x \to a} f(x)$.

Теорема. *Понятия предела функции по Гейне и по Коши эквивалентны.*

Доказательство. Пусть $b = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ по Коши, тогда $\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta_\epsilon > 0$ такое, что $\forall x: \ 0 < |x - a| < \delta_\epsilon$ выполняется неравенство $|f(x) - b| < \epsilon$. Поэтому для любой последовательности $x_n \to a, \ x_n \neq a$ для $\delta_\epsilon > 0 \ \exists N_{\delta_\epsilon}$ такой, что $\forall n > N_{\delta_\epsilon}$ выполняется неравенство $0 < |x_n - a| < \delta_\epsilon$, но для таких x_n (в силу определения Коши) справедливо неравенство $|f(x) - b| < \epsilon$, которое и означает, что $b = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ по Гейне.

Пусть $b = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ по Гейне. Предположим, что b не является $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ по Коши, это означает что $\exists \epsilon > 0$ и $\forall \delta > 0$ найдется $x: \ 0 < |x - a| < \delta$ такое, что выполняется неравенство $|f(x) - b| \geq \epsilon$. Рассмотрим последовательность $\delta_n = \frac{1}{n}$, для каждого δ_n найдется $x_n: \ 0 < |x_n - a| < \delta_n$ такое, что справедливо неравенство $|f(x_n) - b| \geq \epsilon$. Поскольку числовая последовательность $x_n \to a, \ x_n \neq a$, то в силу определения предела функции по Гейне $f(x_n) \to b$. Однако выше мы получили семейство неравенств $|f(x_n) - b| \geq \epsilon$, означающее $f(x_n) \not\to b$. Полученное противоречие означает, что $b = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ по Коши. **Теорема доказана.**

Определение предела функции по Гейне удобно применять при доказательстве отсутствия предела. Поясним сказанное на примерах.

Пример 1. Для функции Дирихле

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x - \text{рационально} \\ 0, & x - \text{иррационально} \end{cases}$$

при любом $a \in R$ не существует $\lim\limits_{x \to a} D(x)$. Действительно рассмотрим две последовательности $x_n \to a,\ x_n \neq a,\ x_n-$ рациональные и $y_n \to a,\ y_n \neq a,\ y_n-$ ирррациональные. По теоремам о плотности Q в R и $R \backslash Q$ в R (см. §1.4 и §1.7) такие последовательности всегда существуют. Тогда $D(x_n) = 1 \to 1$ и $D(y_n) = 0 \to 0$, что в соответствии с определением предела функции по Гейне и означает отсутствие предела.

Пример 2. Не существует предела $\lim\limits_{x \to 0} \sin \frac{1}{x}$.

Действительно, рассмотрим последовательности $x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}$ и $y_n = \frac{1}{-\frac{\pi}{2} + 2\pi n}$, тогда $\sin \frac{1}{x_n} = 1 \to 1$ и $\sin \frac{1}{y_n} = -1 \to -1$, что и доказывает отсутствие предела.

Пример 3. Доказать, что $\lim\limits_{x \to 0} \left(x \sin \frac{1}{x} \right) = 0$.

Действительно для любой числовой последовательности $x_n \to 0,\ x_n \neq 0$, соответствующая числовая последовательность $x_n \sin \frac{1}{x_n} \to 0$ по теореме о пределе произведения бесконечно малой и ограниченной последовательностей (см. §2.7).

Определение (*по Гейне***).** Число b называется *правым (левым) пределом* функции $y = f(x)$ в точке a, если для любой числовой последовательности $x_n \to a+,\ x_n > a$ $(x_n \to a-,\ x_n < a)$ соответствующая числовая последовательность $f(x_n) \to b$.

Определение. (*по Коши*) Число b называется *правым (левым) пределом* функции $y = f(x)$ в точке a, если $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta_\epsilon > 0$ такое, что $\forall x :\ 0 < x - a < \delta_\epsilon$ $(0 < a - x < \delta_\epsilon)$ выполнено неравенство $|f(x) - b| < \epsilon$.

Обозначают эти пределы так $f(a + 0) = \lim\limits_{x \to a+} f(x) = b$ и $f(a - 0) = \lim\limits_{x \to a-} f(x) = b$.

Очевидно, если существует $b = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ (еще его называют двусторонним), то существуют и равны односторонние пределы, причем

$$b = \lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a-} f(x).$$

Обратное утверждение сформулируем в виде теоремы

Теорема. *Если у функции $y = f(x)$ существуют в точке a оба односторонних предела и они равны, то у функции $y = f(x)$ существует в точке a двусторонний предел и он равен общему значению односторонних пределов.*

Доказательство. Пусть $b = \lim\limits_{x\to a+} f(x) = \lim\limits_{x\to a-} f(x)$, тогда $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta_\epsilon > 0$ такое, что $\forall x:\ 0 < x - a < \delta_\epsilon$ выполнено неравенство $|f(x) - b| < \epsilon$ и $\forall x:\ 0 < a - x < \delta_\epsilon$ выполнено неравенство $|f(x) - b| < \epsilon$. Для указанных x справедливо неравенство $0 < |x - a| < \delta_\epsilon$ и $x \neq a$ причем $|f(x) - b| < \epsilon$. Но это означает $b = \lim\limits_{x\to a} f(x)$ по Коши. **Теорема доказана.**

Аналогично можно ввести понятия пределов при $x \to \infty$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$ и получить для них соответствующие утверждения.

3.2 Свойства предела функции.

Теорема (арифметические свойства предела функции). *Если существуют пределы $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c$, то $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = b \pm c$, $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = b\cdot c$, $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{c}$ $(g(x) \neq 0,\ c \neq 0)$.*

Доказательство. Так как $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c$, то для любой числовой последовательности $x_n \to a$, $x_n \neq a$, соответствующие числовые последовательности $f(x_n) \to b$ и $g(x_n) \to c$, тогда в силу арифметических свойств предела числовой последовательности $f(x_n) \pm g(x_n) \to b \pm c$, $f(x_n)\cdot g(x_n) \to b\cdot c$, $\frac{f(x_n)}{g(x_n)} \to \frac{b}{c}$, что в соответствии с определением предела функции по Гейне и означает требуемые предельные равенства. **Теорема доказана.**

Теорема (о сохранении знака неравенства). *Если существует предел $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ и $b > p$ $(b < q)$, то $\exists\delta$-окрестность точки $a:\ 0 < |x - a| < \delta$ такая, что $\forall x$ из этой окрестности $0 < |x - a| < \delta$ выполняется неравенство $f(x) > p$ $(f(x) < q)$.*

Доказательство. Пусть $b > p$, тогда для $\epsilon = b - p > 0$ $\exists \delta_\epsilon > 0$ такое, что $\forall x :\ 0 < |x - a| < \delta_\epsilon$ выполняется неравенство $|f(x) - b| < \epsilon$ или $p = b - \epsilon < f(x) < b + \epsilon = 2b - p$, т.е. $f(x) > p$. **Теорема доказана.**

Теорема (монотонность предела). *Если существуют пределы* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ *и* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c$ *и в некоторой* δ_0*-окрестность точки* $a:\ 0 < |x - a| < \delta_0$ *выполняется неравенство* $f(x) \le g(x)$, *то* $b \le c$.

Доказательство. Так как $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c$, то $\forall \epsilon > 0$ $\exists \delta_1 > 0$ такое, что $\forall x :\ 0 < |x - a| < \delta_1$ выполняется неравенство $b - \epsilon < f(x) < b + \epsilon$ и $\exists \delta_2 > 0$ такое, что $\forall x :\ 0 < |x - a| < \delta_2$ выполняется неравенство $- \epsilon < g(x) < c + \epsilon$, тогда если $\delta = \min\{\delta_0,\, \delta_1,\, \delta_2\}$, то $\forall x :\ 0 < |x - a| < \delta$ выполняется тройное неравенство $b-\epsilon < f(x) \le g(x) < c+\epsilon$, т.е. $b-\epsilon < c+\epsilon$. Отсюда в силу произвольности $\epsilon > 0$ получаем $b \le c$. Действительно, если бы это было не так, т.е. $b > c$, то $\epsilon_0 = b - c > 0$ и выбирая $\epsilon = \frac{\epsilon_0}{3}$ получим ложное неравенство $b - \frac{\epsilon_0}{3} < c + \frac{\epsilon_0}{3}$. **Теорема доказана.**

Следствие. *Если существует предел* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ *и в некоторой* δ_0*-окрестность точки* $a:\ 0 < |x-a| < \delta_0$ *выполняется неравенство* $f(x) \le m$, *то* $b \le m$.

Для доказательства необходимо положить в условиях теоремы $g(x) = m$.

Теорема (о двух ограничивающих функциях). *Если существуют пределы* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = b$ *и в некоторой* δ_0*-окрестность точки* $a:\ 0 < |x - a| < \delta_0$ *выполняется неравенство* $f(x) \le h(x) \le g(x)$, *то существует* $\lim\limits_{x\to a} h(x) = b$.

Доказательство. Так как $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = b$, то $\forall \epsilon > 0$ $\exists \delta_1 > 0$ такое, что $\forall x :\ 0 < |x - a| < \delta_1$ выполняется неравенство $b - \epsilon < f(x) < b + \epsilon$ и $\exists \delta_2 > 0$ такое, что $\forall x :\ 0 < |x - a| < \delta_2$ выполняется неравенство $b - \epsilon < g(x) < b + \epsilon$, тогда если $\delta = \min\{\delta_0,\, \delta_1,\, \delta_2\}$, то $\forall x :\ 0 < |x - a| < \delta$ выполняется неравенство $b - \epsilon < f(x) \le h(x) \le g(x) < b + \epsilon$, которое и означает $\lim\limits_{x\to a} h(x) = b$. **Теорема доказана.**

Теорема (о пределе сложной функции). *Пусть* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = y_0$, *причем в некоторой* δ*-окрестность точки* $x_0:\ 0 < |x - x_0| < \delta$ *выполняется* *неравенство* $g(x) \neq y_0$, $\lim\limits_{y \to y_0} f(y) = l$, *тогда* $\lim\limits_{x \to x_0} f(g(x)) = l$.

Доказательство. Так как $\lim\limits_{y \to y_0} f(y) = l$, то $\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta_1 > 0$ такое, что $\forall y :$ $0 < |y - y_0| < \delta_1$ выполняется неравенство $|f(y) - l| < \epsilon$. Для $\delta_1 > 0 \ \exists \delta_2 > 0$ такое, что $\forall x : \ 0 < |x - x_0| < \delta_2$ выполняется неравенство $0 < |g(x) - y_0| < \delta_1$. Пусть теперь $\delta_3 = \min\{\delta, \ \delta_2\}$, тогда $\forall x : \ 0 < |x - x_0| < \delta_3$ справедливо неравенство $0 < |f(g(x)) - l| < \epsilon$, т.е. $\lim\limits_{x \to x_0} f(g(x)) = l$. **Теорема доказана.**

Пример. В этой теореме условие $g(x) \neq y_0$ является существенным, что показывает следующий контрпример. Пусть

$$f(y) = \begin{cases} 1, & y = 0, \\ 0, & y \neq 0 \end{cases}$$

и $g(x) \equiv 0$, тогда если $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, то $\lim\limits_{y \to y_0 = 0} f(y) = 0 = l$, однако $\lim\limits_{x \to x_0 = 0} f(g(x)) = 1$, т.е. $l \neq 1$. Здесь $g(x) \equiv 0 \overset{!}{=} y_0 = 0$.

3.3 Критерий Коши существования предела функции.

Теорема (критерий Коши). *Для того чтобы функция* $y = f(x)$ *имела в точке* a *конечный предел, необходимо и достаточно, чтобы* $\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta_\epsilon > 0$ *такое, что* $\forall x', \, x'' : \ 0 < |x' - a| < \delta_\epsilon$ *и* $0 < |x'' - a| < \delta_\epsilon$ *выполнялось бы неравенство* $|f(x') - f(x'')| < \epsilon$ *(условие Коши).*

Доказательство. *Необходимость.* Воспользуемся определением предела функции по Коши. Пусть существует конечный предел $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, тогда $\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta_\epsilon > 0$ такое, что $\forall x', \, x'' : \ 0 < |x' - a| < \delta_\epsilon$ и $0 < |x'' - a| < \delta_\epsilon$ выполняются неравенства $|f(x') - b| < \frac{\epsilon}{2}$ и $|f(x'') - b| < \frac{\epsilon}{2}$. Отсюда, для указанных x' и x'', получаем $|f(x') - f(x'')| \leq |f(x') - b| + |f(x'') - b| < \epsilon$.

Достаточность. Воспользуемся определением предела функции по Гейне. Пусть выполнено условие Коши. Рассмотрим произвольную последовательность $x_n \to a$, $x_n \neq a$, тогда для $\delta_\epsilon > 0 \ \exists N_{\delta_\epsilon}$ такое, что $\forall n > N_{\delta_\epsilon}$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \delta_\epsilon$ и соответственно $\forall p \in N$ выполняется неравенство $|x_{n+p} - a| < \delta_\epsilon$. Отсюда для числовой последовательности $\{f(x_n)\}$ получаем $|f(x_n) - f(x_{n+p})| < \epsilon$, т.е. $\{f(x_n)\}$ - фундаментальная последовательность и значит существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = b$.

Покажем, что этот предел не зависит от выбора последовательности $x_n \to a,\ x_n \neq a$. Пусть $y_n \to a,\ y_n \neq a$ другая такая последовательность, тогда новая последовательность $\{x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, \ldots\} \to a$ и для этой последовательности соответствующая последовательность значений

$$\{f(x_1), f(y_1), f(x_2), f(y_2), f(x_3), f(y_3), \ldots\}$$

является фундаментальной, а значит сходящейся, поэтому ее подпоследовательности $\{f(x_n)\}$ и $\{f(y_n)\}$ имеют одинаковые пределы.

Теорема доказана.

Теорема (критерий Коши). *Для того чтобы функция $y = f(x)$ имела конечный предел $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$, необходимо и достаточно, чтобы $\forall \epsilon > 0\ \exists C_\epsilon > 0$ такое, что $\forall x', x''$ таких что $x' > C_\epsilon$ и $x'' > C_\epsilon$ выполнялось бы неравенство $|f(x') - f(x'')| < \epsilon$ (условие Коши).*

3.4 Замечательные пределы.

Теорема. *Справедливы следующие соотношения*

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$.

Доказательство. а) Рассмотрим случай $x \to +\infty$, тогда $[x] \leq x < [x]+1$ и

$$\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x < \left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}.$$

Но $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$, тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = e$, поэтому $\forall \epsilon > 0\ \exists N_1$ такое, что $\forall n > N_1$ выполняется неравенство

$$e - \epsilon < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n < e + \epsilon$$

и $\exists N_2$ такое, что $\forall n > N_2$ выполняется неравенство

$$e - \epsilon < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} < e + \epsilon.$$

Пусть $N = \max\{N_1,\, N_2\}$, тогда $\forall n > N$ выполняется неравенство

$$e - \epsilon < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} < e + \epsilon.$$

Если теперь $x > N$, то $[x] \geq N$ и значит при $\forall x > N+1$ имеем

$$e - \epsilon < \left(1 + \frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} < \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1} < e + \epsilon,$$

т.е. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$.

Пусть теперь $x \to -\infty$, тогда поскольку

$$e = \lim_{y\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{y-1}\right)^{y} = \lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y}{y-1}\right)^{y} = \lim_{y\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{y}\right)^{-y},$$

т.е. $f(y) = \left(1 - \frac{1}{y}\right)^{-y} \to e$ при $y \to +\infty$.

Положим $y = g(x) = -x$, при $x \to -\infty$ $y = g(x) \to +\infty$, поэтому по теореме о пределе сложной функции (см. §2.3) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(g(x)) = e$, но

$$f(g(x)) = \left(1 - \frac{1}{-x}\right)^{-(-x)} = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x}.$$

б) Поскольку $\lim\limits_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y = e$, то полагаем $f(y) = \left(1+\frac{1}{y}\right)^y \to e$ при $y \to \infty$ и введем новую переменную $y = g(x) = \frac{1}{x}$, тогда при $x \to 0$ $y \to \infty$ и по теореме о пределе сложной функции $\lim\limits_{x\to 0} f(g(x)) = e$, но

$$f(g(x)) = \left(1 + \frac{1}{\frac{1}{x}}\right)^{\frac{1}{x}} = \left(1 + x\right)^{\frac{1}{x}}.$$

в) Поскольку $\lim\limits_{y\to e}\ln y = 1$, то полагаем $f(y) = \ln y \to 1$ при $y \to e$. Введем новую переменную $y = g(x) = \left(1+x\right)^{\frac{1}{x}} \to e$ при $x \to 0$, тогда $\lim\limits_{x\to 0} f(g(x)) = 1$, но

$$f(g(x)) = \ln\left(1 + x\right)^{\frac{1}{x}} = \frac{\ln(1+x)}{x}.$$

г) Поскольку $\lim\limits_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{y} = 1$, то полагаем $f(y) = \frac{\ln(1+y)}{y} \to 1$ при $y \to 0$. Введем новую переменную $y = g(x) = e^x - 1 \to 0$ при $x \to 0$, тогда

$\lim\limits_{x\to 0} f(g(x)) = 1$, но

$$f(g(x)) = \frac{\ln(1+e^x-1)}{e^x-1} = \frac{x}{e^x-1}.$$

д) При $0 < x < \frac{\pi}{2}$ $\quad 0 < \sin x < x < \operatorname{tg} x$, при $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ $\quad \operatorname{tg} x < x < \sin x < 0$, отсюда при $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$ $\quad 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$. По теореме о двух ограничивающих функциях (см. §3.2) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$.

Теорема доказана.

Следствие. *Справедливы следующие соотношения*

а) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$;
б) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$;
в) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$;
г) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = -\frac{1}{2}$.

Доказательство. а) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x}\right) = 1$.

б) Поскольку $\lim\limits_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} = 1$, то полагаем $f(y) = \frac{\sin y}{y} \to 1$ при $y \to 0$. Введем новую переменную $y = g(x) = \arcsin x \to 0$ при $x \to 0$, поэтому $\lim\limits_{x\to 0} f(g(x)) = 1$, но

$$f(g(x)) = \frac{\sin(\arcsin x)}{\arcsin x} = \frac{x}{\arcsin x}.$$

в) Поскольку $\lim\limits_{y\to 0} \frac{\operatorname{tg} y}{y} = 1$, то полагаем $f(y) = \frac{\operatorname{tg} y}{y} \to 1$ при $y \to 0$. Введем новую переменную $y = g(x) = \operatorname{arctg} x \to 0$ при $x \to 0$, поэтому $\lim\limits_{x\to 0} f(g(x)) = 1$, но

$$f(g(x)) = \frac{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)}{\operatorname{arctg} x} = \frac{x}{\operatorname{arctg} x}.$$

г) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{-2\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = -\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{2}\left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 = -\frac{1}{2}$.

Следствие доказано.

3.5 Бесконечно большие и бесконечно малые функции. Сравнение функций. $O-$символика. Эквивалентные функции.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется *бесконечно большой (бесконечно малой)* при $x \to a$ если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ $\;(\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0)$.

Бесконечно большие и бесконечно малые функции обладают свойствами, аналогичными свойствам бесконечно малых и бесконечно больших последовательностей. В частности справедлива следующая

Теорема (о специальном представлении). *Если существует конечный предел* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, *то в окрестности точки* a *справедливо представление* $f(x) = b + \alpha(x)$, *где* $\alpha(x)$ *бесконечно малая при* $x \to a$.

Пусть $g(x) \neq 0$ при $\forall x:\ 0 < |x - a| < \delta$ и существует предел $k = \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, тогда

а) если $k = 0$, то пишут $f(x) = \circ(g(x))$ при $x \to a$, если при этом $g(x)$ бесконечно малая при $x \to a$, то $f(x)$ называют *бесконечно малой более высокого порядка малости*, чем $g(x)$;

б) если $k = 1$, то пишут $f(x) \sim g(x)$ при $x \to a$ и функции $f(x)$ и $g(x)$ называют *эквивалентными* при $x \to a$, отметим, что эквивалентность обладает свойством транзитивности;

в) если k - конечно, но $k \neq 0$ и $k \neq 1$, то пишут $f(x) = \bigcirc(g(x))$ при $x \to a$ и функции $f(x)$ и $g(x)$ называют функциями *одного порядка* при $x \to a$;

г) если $k = \infty$ и $g(x)$ - бесконечно большая при $x \to a$, то $f(x)$ называется *бесконечно большой более высокого порядка*, чем $g(x)$.

Если функция $f(x)$-бесконечно малая при $x \to a$, т.е. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{1} = 0$, то в соответствии с введенными обозначениями $f(x) = \circ(1)$.

Пример 1. В соответствии с замечательными пределами (см. §3.4) при $x \to 0$ имеет место следующий ряд эквивалентностей

$$x \sim \sin x \sim \operatorname{tg} x \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1 \sim \arcsin x \sim \operatorname{arctg} x,$$

$$\frac{2(1-\cos x)}{x^2} \sim 1.$$

Из тех же замечательных пределов получаем

$$\lim_{x\to 0}\Big(\frac{\sin x}{x} - 1\Big) = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x} = 0,$$

т.е. при $x \to 0$

$$\sin x - x = \circ(x) \ \text{ или } \ \sin x = x + \circ(x).$$

Аналогично рассуждая, получим другие специальные представления:

$$\operatorname{tg} x = x + \circ(x),$$

$$\ln(1+x) = x + \circ(x),$$

$$\arcsin x = x + \circ(x),$$

$$\operatorname{arctg} x = x + \circ(x),$$

$$e^x = 1 + x + \circ(x),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \circ(x^2),$$

которые можно использовать при вычислении пределов.

Пример 2. Вычислить предел

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{\alpha \ln(1+x)} - 1}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^{\alpha(x+\circ(x))} - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1 + \alpha x + \circ(x) - 1}{x} = \lim_{x\to 0}(\alpha + \circ(1)) = \alpha.$$

Таким образом

$$\lim_{x\to 0}\Big(\frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} - \alpha\Big) = 0$$

или

$$(1+x)^\alpha - 1 - \alpha x = \circ(x)$$

а значит

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \circ(x).$$

Пример 3. Вычислить предел

$$\lim_{n\to\infty}\Big(1 + \frac{x}{n}\Big)^n = \lim_{n\to\infty} e^{n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} e^{n\left(\frac{x}{n}+\circ\left(\frac{x}{n}\right)\right)} = \lim_{n\to\infty} e^{x+\circ(x)} = e^x.$$

3.6 Понятие непрерывности функции в точке (на множестве). Простейшие свойства непрерывных функций. Непрерывность элементарных функций. Точки разрыва и их классификация.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной в точке* a, если

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \ \ (\text{т.е.} a \in D(f)(!!!)).$$

Используя определения предела функции по Гейне и по Коши, можно сформулировать понятия непрерывности следующим образом.

Определение.(*по Гейне*) Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной в точке* a, если для любой числовой последовательности $x_n \to a$, соответствующая числовая последовательность $f(x_n) \to f(a)$.

Определение.(*по Коши*) Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной в точке* a, если $\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta_\epsilon > 0$ такое, что $\forall x : \ |x - a| < \delta_\epsilon$ выполняется неравенство $|f(x) - f(a)| < \epsilon$ или $f(a) - \epsilon < f(x) < f(a) + \epsilon$.

Перепишем предельное равенство из определения непрерывности функции в точке следующим образом

$$\lim_{x-a\to 0}(f(x) - f(a)) = 0,$$

разность $\Delta x = x - a$ называется *приращением аргумента*, а разность $\Delta f = f(a + \Delta x) - f(a)$ - *приращением функции*. В этих обозначениях предельное равенство переписывается так

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta f = 0,$$

а определение непрерывности функции $y = f(x)$ в точке a можно теперь сформулировать следующим образом (на языке приращений)

Определение. Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной в точке* a, если бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции.

Пример. Исследовать на непрерывность в точке $x = 0$ функцию

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot \cos\frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Рассмотрим приращение функции в точке $x = 0$ $\ \Delta f = \Delta x \cdot \cos\frac{1}{\Delta x}$, $\ \Delta f$ представляет собой произведение двух множителей, один из которых является бесконечно малой при $\Delta x \to 0$, а другой - ограниченная функция $|\cos\frac{1}{\Delta x}| \leq 1$, т.е. Δf есть бесконечно малая при $\Delta x \to 0$, а значит функция непрерывна в точке $x = 0$.

Точки, в которых функция непрерывна, называются *точками непрерывности.* Естественно можно определить непрерывность функции в точке $x = a$ слева (справа) следующим образом

$$f(a-0) = \lim_{x \to a-0} f(x) = f(a) \ \ (f(a+0) = \lim_{x \to a+0} f(x) = f(a)).$$

Если функция $y = f(x)$ непрерывна в каждой точке некоторого множества, то функция называется *непрерывной на этом множестве.* В частности, если функция непрерывна в каждой точке интервала (a, b), непрерывна справа в точке a, непрерывна слева в точке b, то функцию называют *непрерывной на отрезке* $[a, b]$.

Перечислим некоторые свойства непрерывных функций.

1. Непосредственно из теорем об арифметических свойствах предела функции получаем теоремы о непрерывности суммы, произведения и частного двух функций. Из теоремы о пределе сложной функции вытекает утверждение о непрерывности сложной функции.

2. (локальная ограниченность непрерывной функции) Если функция $y = f(x)$ непрерывна в точке $a \in D(f)$, то существует δ-окрестность точки a, в которой функция $y = f(x)$ ограничена. Чтобы в этом убедиться достаточно расписать определение непрерывности по Коши, тогда числа $f(a)-\epsilon$ и $f(a)+\epsilon$ будут ограничивать функцию $y = f(x)$ снизу и сверху в δ-окрестность точки a.

3. (сохранение знака) Если функция $y = f(x)$ непрерывна в точке a и $f(a) > 0$ ($f(a) < 0$), то существует δ-окрестность точки a, в которой функция $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$). Для проверки этого свойства достаточно выбрать $0 < \epsilon < f(a)$, затем расписать определение непрерывности по Коши в точке, тогда число $f(a) - \epsilon > 0$ ограничивает $f(x)$ снизу в δ-окрестность точки a и значит $f(x) > 0$. Если $f(a) < 0$, то выбираем $0 < \epsilon < -f(a)$ и расписываем определение непрерывности, тогда $f(a)+\epsilon < 0$ ограничивает $f(x)$ сверху, т.е. $f(x) < 0$.

4. (непрерывность абсолютной величины) Если функция $y = f(x)$ непре-

рывна в точке a, то функция $y = |f(x)|$ непрерывна в точке a. Доказательство следует из цепочки неравенств

$$0 < |\Delta|f|| = ||f(x)| - |f(a)|| \leq |f(x) - f(a)| = |\Delta f|.$$

Если теперь $x \to a$, т.е. $\Delta x = x - a \to 0$, то $|\Delta f| \to 0$, а значит $\Delta|f| \to 0$, что и означает непрерывность в точке a функции $y = |f(x)|$, записанной на языке приращений.

5. (непрерывность обратной функции) Если функция $y = f(x)$ строго возрастает (убывает) на отрезке $[a, b]$, непрерывна на этом отрезке, тогда существует обратная функция $x = g(y)$ строго возрастающая (убывающая) и непрерывная на отрезке $[f(a), f(b)]$ ($[f(b), f(a)]$).

6. Все элементарные функции непрерывны на своей области определения.

а) Многочлены $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$. Функция $y = f(x) = x$ непрерывна в любой точке x_0, т.к.

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = x_0 + \Delta x - x_0 = \Delta x.$$

Если теперь $\Delta x \to 0$, то $\Delta y \to 0$. Тогда по теореме о непрерывности произведения получаем непрерывность любой степени x^k, далее по теореме о непрерывности суммы получаем непрерывность любого многочлена $P(x)$.

б) Рациональные функции $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ непрерывны, как частное двух непрерывных функций.

в) Показательная функция $y = a^x,\ a > 0,\ a \neq 1$. При $\Delta x \to 0$

$$\Delta y = a^{x_0 + \Delta x} - a^{x_0} = a^{x_0}(a^{\Delta x} - 1) = a^{x_0}(e^{\Delta x \ln a} - 1) =$$

$$= a^{x_0}(1 + \ln a \cdot \Delta x + \circ(\Delta x) - 1) = a^{x_0}(\ln a + \circ(1))\Delta x \to 0,$$

т.е. любая показательная функция непрерывна в любой точке x_0.

г) Логарифмическая функция $y = \log_a x$ - непрерывна, как функция обратная к непрерывной $y = a^x$.

д) Степенная функция $y = x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ непрерывна, как композиция непрерывных функций.

е) Все тригонометрические функции непрерывны. Действительно, для функции $y = \sin x$ имеем неравенство

$$|\Delta y| = |\sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0| = |2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos\Big(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\Big)| \leq 2 \cdot \frac{\Delta x}{2} \cdot 1 = \Delta x.$$

Отсюда при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$, т.е. $y = \sin x$ непрерывная функция. Точно также проверяется непрерывность функции $y = \cos x$. Соответственно функции $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$ непрерывны как частное непрерывных функций.

ж) Все обратные тригонометрические функции непрерывны как обратные к непрерывным функциям.

Пример (уравнение Кеплера). Существует единственная непрерывная функция $x = x(y)$, $y \in R$ удовлетворяющая уравнению Кеплера

$$x - \epsilon \sin x = y, \quad 0 < \epsilon < 1.$$

В §2.6 было показано, что $\forall y$ существует единственное x удовлетворяющее уравнению Кеплера. Этим было доказано существование функции $x = x(y)$. Докажем ее непрерывность. Рассмотрим функцию

$$y = x - \epsilon \sin x : R \to R.$$

Эта функция непрерывна. Покажем ее монотонное возрастание, пусть $x_1 > x_2$, тогда

$$\begin{aligned} y_1 - y_2 &= (x_1 - x_2) - \epsilon(\sin x_1 - \sin x_2) = \\ &= (x_1 - x_2) - 2\epsilon \sin \frac{x_1 - x_2}{2} \cos \frac{x_1 + x_2}{2}. \end{aligned}$$

Так как

$$|2\epsilon \sin \frac{x_1 - x_2}{2} \cos \frac{x_1 + x_2}{2}| \leq 2 \cdot \epsilon \cdot \frac{|x_1 - x_2|}{2} = \epsilon \cdot (x_1 - x_2),$$

то

$$-\epsilon \cdot (x_1 - x_2) \leq 2\epsilon \sin \frac{x_1 - x_2}{2} \cos \frac{x_1 + x_2}{2} \leq \epsilon \cdot (x_1 - x_2)$$

$$\epsilon \cdot (x_1 - x_2) \geq -2\epsilon \sin \frac{x_1 - x_2}{2} \cos \frac{x_1 + x_2}{2} \geq -\epsilon \cdot (x_1 - x_2)$$

поэтому

$$y_1 - y_2 = (x_1 - x_2) - \epsilon \cdot (x_1 - x_2) = (1 - \epsilon)(x_1 - x_2) > 0$$

или $y_1 > y_2$. Отсюда по теореме о непрерывности обратной функции $x = x(y)$ непрерывна.

Точки, в которых функция не обладает свойством непрерывности, называются точками разрыва функции, т.е. $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq f(a)$.

Пусть $x = a$ точка разрыва функции $y = f(x)$, рассмотрим величины

$$f(a-0) = \lim_{x\to a-0} f(x) \;\; f(a+0) = \lim_{x\to a+0} f(x).$$

Если $f(a-0) = f(a+0)$ - конечно, то $x = a$ называется *устранимой точкой* разрыва.

Если $f(a-0) \neq f(a+0)$ и эти величины конечны, то $x = a$ называется *точкой разрыва первого рода*, величину $f(a+0)-f(a-0)$ называют скачком функции $y = f(x)$ в точке $x = a$.

Если хотя бы одна из величин $f(a-0)$ или $f(a+0)$ не существует, то $x = a$ называется *точкой разрыва второго рода.*

Пример 1. Функция Дирихле $D(x)$ в каждой точке своей области определения имеет разрыв второго рода (см. §3.1). Функция $y = x \cdot D(x)$ непрерывна в точке $x = 0$ и имеет разрывы второго рода во всех остальных точках области определения.

Пример 2. Функция

$$f(x) = \begin{cases} |x|, & x - \text{любое нецелое число}, \\ 0, & x \in Z \end{cases}$$

в точках $x \in Z\setminus\{0\}$ имеет устранимые разрывы и непрерывна во всех остальных точках своей области определения.

Пример 3. Функции $y = e^{\frac{1}{x}},\; y = \frac{1}{x},\; y = \sin\frac{1}{x}$ имеют в точке $x = 0$ разрыв второго рода. Функции $y = \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}},\; y = \frac{\sin x}{|x|},\; y = signx$ имеют в точке $x = 0$ разрыв первого рода. Функции

$$y = \begin{cases} x-2, & x \neq 0, \\ 2, & x = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad y = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

имеют в точке $x = 0$ устранимый разрыв.

Теорема (о точках разрыва монотонной на отрезке функции). *Если функция $y = f(x)$ определена и монотонна на отрезке $[a,b]$, то она может иметь на этом отрезке разрывы только первого рода.*

Доказательство. Проведем для случая неубывающей на $[a,b]$ функции $y = f(x)$ (т.е. $\forall x',\ x'' \in [a,b]$ таких, что $x' < x''$ выполняется неравенство $f(x') \leq f(x'')$.) Пусть $x_0 \in [a,b]$ - произвольная точка, введем величины

$$l_1 = \inf_{x_0 < x \leq b} f(x) \quad l_2 = \sup_{a \leq x < x_0} f(x).$$

Покажем, что $l_1 = \lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = f(x_0 + 0)$, $\ l_2 = \lim\limits_{x \to x_0-} f(x) = f(x_0 - 0)$. Так как $l_1 = \inf\limits_{x_0 < x \leq b} f(x)$, то в соответствии с определением нижней грани числового множества (см. §1.5) имеем:

а) $\forall x > x_0$ выполняется неравенство $f(x) \geq l_1$;

б) $\forall \epsilon > 0$ существует $x_1 > x_0$ такое, что $f(x_1) < l_1 + \epsilon$.

Поскольку $y = f(x)$ неубывающая функция на $[a,b]$, то $\forall x$ таких, что $x_0 < x \leq x_1$ выполняются неравенства $l_1 \leq f(x) \leq f(x_1) < l_1 + \epsilon$ и $f(x_0) \leq f(x)$, т.е. $l_1 = \lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = f(x_0 + 0)$ и в силу монотонности предела $f(x_0) \leq l_1$. Аналогично доказывается неравенство $l_2 \leq f(x_0)$. Отсюда следует, что величина $l_1 - l_2 \geq 0$ конечна, т.е. x_0 может быть только точкой разрыва первого рода или устранимой. **Теорема доказана.**

Теорема (критерий непрерывности монотонной функции). *Если функция $y = f(x)$ определена и монотонна на отрезке $[a,b]$, тогда для непрерывности $y = f(x)$ на $[a,b]$ необходимо и достаточно, чтобы $\forall l \in [f(a), f(b)]$ (или$[f(b), f(a)]$) нашлась точка $x_0 \in [a,b]$ такая, что $f(x_0) = l$.*

3.7 Глобальные свойства функций непрерывных на отрезке (теоремы Вейерштрасса и Больцано-Коши).

Теорема (Вейерштрасса). *Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ ($f(x) \in C[a,b]$), то $f(x)$ ограничена на $[a,b]$ и достигает на $[a,b]$ свои верхнюю и нижнюю грани.*

Доказательство. Пусть $R(f) \equiv \{f(x) : x \in [a,b]\}$ - множество значений функции $y = f(x)$ на $[a,b]$, обозначим через $M = \sup R(f) = \sup\limits_{a \le x \le b} f(x)$ верхнюю грань множества $R(f)$, тогда в силу определения верхней грани числового множества (см. §1.5) существует последовательность $a_n \to M,\ a_n \in R(f)$, а значит существует последовательность $x_n \in [a,b]$ таких, что $a_n = f(x_n)$. Поскольку все числа $x_n \in [a,b]$, то последовательность $\{x_n\}$ ограничена и в соответствии с теоремой Больцано-Вейерштрасса (см. §2.5) из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $x_{n_k} \to x_0$. По теореме о монотонности предела числовой последовательности (см. §2.2) $x_0 \in [a,b]$, поэтому согласно определению непрерывности функции в точке (по Гейне)

$$f(x_0) = \lim_{x_{n_k} \to x_0} f(x_{n_k}) = \lim_{n_k \to \infty} a_{n_k} = \lim_{n \to \infty} a_n = M.$$

Итак, $f(x)$ достигает свою верхнюю грань M в точке x_0, а значит $M = \sup f(x)$ конечная величина и соответственно $f(x)$ ограничена сверху на $[a,b]$. Проводя аналогичные рассуждения для нижней грани $m = \inf\limits_{a \le x \le b} f(x)$, получим ограниченность снизу. **Теорема доказана.**

Теорема (Больцано-Коши). *Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ $(f(x) \in C[a,b])$ и $f(a) \ne f(b)$, то $\forall C$, заключенного между $f(a)$ и $f(b)$, существует точка $\xi \in [a,b]$ такая, что $f(\xi) = C$.*

Доказательство. Пусть $A = f(a),\ B = f(b)$ и $A < C < B$. Разделим отрезок $[a,b]$ пополам точкой x_0, либо $f(x_0) = C$ и тогда $\xi = x_0$, либо $f(x_0) \ne C$, тогда на концах одного из новых отрезков функция $f(x)$ принимает значения, лежащие по разные стороны от числа C. Обозначим этот отрезок $[a_1,b_1],\ f(a_1) < C < f(b_1)$. Вновь разделим отрезок $[a_1,b_1]$ пополам точкой x_1 и т.д. В результате построим систему вложенных отрезков $[a_{n+1},b_{n+1}] \subset [a_n,b_n]$ по длине стремящейся к нулю, причем $f(a_n) < C < f(b_n)$. Пусть $\xi = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} [a_n,b_n]$, тогда $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \xi$ и в силу непрерывности функции $f(x)$ справедливы равенства $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = \lim\limits_{n\to\infty} f(b_n) = f(\xi)$ причем $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) \le C \le \lim\limits_{n\to\infty} f(b_n)$, т.е. $C = f(\xi)$. **Теорема доказана.**

Следствие. *Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и принимает на его концах значения разных знаков (т.е. $f(a) \cdot f(b) < 0$), тогда существует точка $\xi \in (a, b)$ такая, что $f(\xi) = 0$.*

Пример. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $a = x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$, тогда существует точка $\xi \in [a, b]$ такая, что

$$f(\xi) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}.$$

Действительно, пусть

$$m = \min(f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)),\ M = \max(f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)),$$

тогда

$$f(x_i) = m = \frac{n \cdot m}{n} \leq C = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n} \leq \frac{n \cdot M}{n} = M = f(x_j)$$

по теореме Больцано-Коши на отрезке с концами x_i и x_j найдется точка ξ такая, что $C = f(\xi)$.

3.8 Понятие равномерной непрерывности функции.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется *равномерно непрерывной* на множестве A, если $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta_\epsilon > 0$ такое, что $\forall x'$, $x'' \in A$, удовлетворяющих условию $|x' - x''| < \delta_\epsilon$ выполняется неравенство $|f(x') - f(x'')| < \epsilon$.

Очевидно, если функция равномерно непрерывна, то она и просто непрерывна на множестве A, обратное вообще говоря не верно, но справедлива следующая теорема

Теорема (Г. Кантора). *Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, (т.е. $f(x) \in C[a, b]$), то она равномерно непрерывна на этом отрезке.*

Доказательство. От противного. Пусть $f(x) \in C[a, b]$, но $f(x)$ не является равномерно непрерывной на $[a, b]$, т.е. $\exists \epsilon_0 > 0$ что $\forall \delta > 0$ найдутся x', $x'' \in [a, b]$ такие, что $|x' - x''| < \delta$, но $|f(x') - f(x'')| \geq \epsilon_0$.

Рассмотрим последовательность $\delta_n = \frac{1}{n} > 0$, тогда для $\epsilon_0 > 0$ найдутся пары x'_n, $x''_n \in [a, b]$ такие, что $|x'_n - x''_n| < \delta_n$ и $|f(x'_n) - f(x''_n)| \geq \epsilon_0$.

Числовая последовательность $\{x'_n\}$ ограничена ($a \le x'_n \le b$), тогда по теореме Больцано-Вейерштрасса (см. §2.5) из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $x'_n \to \xi$, причем $\xi \in [a, b]$. Соответствующая подпоследовательность $\{x''_n\}$ также сходится к ξ, что следует из неравенства

$$|x''_{n_k} - \xi| \le |x''_{n_k} - x'_{n_k}| + |x'_{n_k} - \xi| \le \frac{1}{n_k} + |x'_{n_k} - \xi|.$$

Поскольку функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то по определению непрерывности функции (по Гейне)$f(x'_{n_k}) \to f(\xi)$ и $f(x''_{n_k}) \to f(\xi)$, т.е. $f(x'_{n_k}) - f(x''_{n_k}) \to 0$, а значит для $\epsilon_0 > 0$ $\exists N_{\epsilon_0}$ такой, что $\forall n_k > N_{\epsilon_0}$ выполняется неравенство $|f(x'_{n_k}) - f(x''_{n_k})| < \epsilon_0$, но это противоречит выше полученному неравенству. **Теорема доказана.**

Пример 1. Функции $y = \cos\frac{1}{x}$ и $y = \sin\frac{1}{x}$ равномерно непрерывны на любом отрезке $[\delta, 1]$ при $\delta > 0$ и не являются равномерно непрерывными на $(0, 1]$. Действительно, для функции $y = \cos\frac{1}{x}$ рассмотрим две последовательности значений аргумента $x_n = \frac{1}{\pi+2\pi n}$, $y_m = \frac{1}{2\pi m}$, $x_n \to 0$ и $y_m \to 0$ поэтому $\forall\delta > 0$ при достаточно больших m и n выполняется неравенство $|x_n - y_m| < \delta$, но

$$\cos\frac{1}{y_m} - \cos\frac{1}{x_n} = 1 - (-1) = 2 = \epsilon_0 > 0.$$

Пример 2. Функция $y = x^2$ не является равномерно непрерывной на R, хотя по теореме Кантора является таковой на любом отрезке $[a, b]$. Действительно, рассмотрим последовательности $x_n = n + \frac{1}{n}$ и $y_n = n$. Очевидно $y_n \to \infty$, $x_n \to \infty$ и $x_n - y_n = \frac{1}{n} \to 0$, поэтому $\forall\delta > 0$ при достаточно больших n выполняется неравенство $x_n - y_n = \frac{1}{n} < \delta$, но

$$x_n^2 - y_n^2 = \left(n + \frac{1}{n}\right)^2 - n^2 = 2 + \frac{1}{n^2} > 2 = \epsilon_0 > 0.$$

Пример 3. Функция $y = \sqrt{x}$ равномерно непрерывна на луче $x > 1$. Действительно

$$|\sqrt{x'} - \sqrt{x''}| = \frac{|x' - x''|}{\sqrt{x'} + \sqrt{x''}} < \frac{|x' - x''|}{2},$$

отсюда $\forall\epsilon > 0$ существует $\delta_\epsilon = 2\epsilon > 0$ такое, что $\forall x' > 1$ $x'' > 1$ из неравенства $|x' - x''| < \delta_\epsilon$ следует $|\sqrt{x'} - \sqrt{x''}| < \epsilon$.

3.9 Свойства замкнутых и открытых множеств. Компакт. Функции непрерывные на компакте.

Точка x_0 называется *предельной* для множества $A \subset R$, если во всякой окрестности точки x_0 содержится бесконечно много точек множества A, при этом сама точка x_0 может как принадлежать множеству A, так и не принадлежать ему.

Определение. Множество $A \subset R$ называется *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки.

Определение. Множество $A \subset R$ называется *открытым*, если каждая его точка содержится в A вместе с некоторой своей $\delta-$окрестностью. В этом случае точку называют *внутренней точкой* множества A, соответственно открытое множество состоит только из внутренних точек.

Пример. Множества $[a, b]$, $[a, +\infty)$ - замкнутые, а множества (a, b), $(a, +\infty)$, $(-\infty, b)$ - открытые.

Теорема 1. *а) Если A - замкнутое множество, то $A_1 = R \setminus A$ - открытое.*

б) Если A - открытое множество, то $A_1 = R \setminus A$ - замкнутое.

Доказательство. а) От противного. Пусть $A_1 = R \setminus A$ не является открытым множеством, т.е. какая-то из его точек $x_0 \in A_1$ не является внутренней. Это значит, что во всякой δ-окрестности точки x_0 есть хотя бы одна точка из A (отличная от x_0), а следовательно таких точек бесконечно много. Это в свою очередь означает, что x_0 предельная точка для A и в силу замкнутости A, $x_0 \in A$, но $x_0 \in A_1 = R \setminus A$. Полученное противоречие означает открытость множества A_1.

б) От противного. Пусть множество $A_1 = R \setminus A$ не содержит хотя бы одну из своих предельных точек x_0, тогда $x_0 \in A$. Но все точки множества A внутренние, поэтому существует δ-окрестность точки x_0 целиком состоящая из точек множества A, т.е. там нет точек множества $A_1 = R \setminus A$, но это противоречит предельности точки x_0, поэтому $x_0 \in A_1$ и значит множество A_1 замкнуто. **Теорема 1 доказана.**

Теорема 2. *а) Любое объединение открытых множеств открыто, конечное пересечение открытых множеств открыто.*

б) Любое пересечение замкнутых множеств замкнуто, конечное объединение замкнутых множеств замкнуто.

Доказательство. а) Пусть $x_0 \in \bigcup\limits_{\alpha} A_\alpha,\ A_\alpha$ - открытые множества, тогда существует индекс α_0 такой, что $x_0 \in A_{\alpha_0}$. В силу открытости множества A_{α_0} существует δ-окрестность точки x_0 целиком лежащая в A_{α_0}, тогда эта окрестность целиком входит в объединение $\bigcup\limits_{\alpha} A_\alpha$, т.е. всякая точка $x_0 \in \bigcup\limits_{\alpha} A_\alpha$ внутренняя, а значит объединение $\bigcup\limits_{\alpha} A_\alpha$ - открытое множество.

Пусть теперь $x_0 \in \bigcap\limits_{\alpha=1}^{n} A_\alpha,\ A_\alpha$ - открытые множества, тогда существуют δ_α-окрестности точки x_0 целиком лежащие в A_α, т.е. $(x_0 - \delta_\alpha, x_0 + \delta_\alpha) \subset A_\alpha$. Пусть $\delta = \min\limits_{\alpha=1,\ldots,n} \delta_\alpha$, тогда δ-окрестность $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset \bigcap\limits_{\alpha=1}^{n} A_\alpha$ - целиком входит в пересечение, т.е. всякая точка $x_0 \in \bigcap\limits_{\alpha=1}^{n} A_\alpha$ внутренняя, а значит множество $\bigcap\limits_{\alpha=1}^{n} A_\alpha$ - открытое.

б) Пусть A_α - замкнутые множества, тогда $R \setminus A_\alpha$ - открытые. Следовательно $\bigcup\limits_{\alpha}(R \setminus A_\alpha)$ открытое множество, а значит $R \setminus \bigcup\limits_{\alpha}(R \setminus A_\alpha)$ замкнуто, но в силу законов двойственности де Моргана (см. §1.2) $R \setminus \bigcup\limits_{\alpha}(R \setminus A_\alpha) = \bigcap\limits_{\alpha}(R \setminus (R \setminus A_\alpha)) = \bigcap\limits_{\alpha} A_\alpha$.

Аналогично проверяется другое утверждение этой части теоремы. **Теорема 2 доказана.**

Пример. Множество

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(-1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right)}_{\text{открытые множества}} \equiv [-1, 1]$$

замкнуто. Множество

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left[-1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right]}_{\text{замкнутые множества}} \equiv (-1, 1)$$

открыто.

Определение. Замкнутое и ограниченное множество $A \subset R$ называется *компактным.*

Определение. Пусть заданы множество $A \subset R$ и система множеств $\{B_\alpha\}$. Говорят, что $\{B_\alpha\}$ является *покрытием* A, если $\forall x \in A\ \exists B_{\alpha'} \in \{B_\alpha\}$ такое, что $x \in B_{\alpha'}$.

Следующее утверждение обычно принимают за определение компакта.

Лемма (Бореля). *Из любого покрытия компакта открытыми множествами можно выделить конечное подпокрытие.*

Доказательство. От противного. Пусть A - компактное множество (т.е. замкнуто и ограничено), тогда существует отрезок $A \subset [a, b]$, но из некоторого его открытого покрытия $\{B_\alpha\}$ нельзя выделить конечное подпокрытие. Пусть точка x_0 делит $[a, b]$ пополам, обозначим через $[a_1, b_1]$ ту из его половин, в которой множество $A \bigcap [a_1, b_1]$ не допускает выделения конечного подпокрытия из $\{B_\alpha\}$. Пусть точка x_1 делит $[a_1, b_1]$ пополам, обозначим через $[a_2, b_2]$ ту из его частей, в которой множество $A \bigcap [a_2, b_2]$ не допускает выделения конечного подпокрытия из $\{B_\alpha\}$ и т.д. Построим систему вложенных отрезков $[a_n, b_n]$ по длине стремящейся к нулю (т.к. $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \to 0$), тогда в силу принципа вложенных отрезков (см. §1.5) существует единственная точка $x_0 \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$. Эта точка x_0 является предельной для множества A, т.к., во-первых, по построению всякое множество $A \bigcap [a_n, b_n]$ содержит бесконечное количество элементов множества A, а, во-вторых, $\forall \delta > 0$ δ-окрестность $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ точки x_0 содержит в себе целиком все отрезки $[a_n, b_n]$ с номерами n такими, что $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} < \delta$. В силу замкнутости множества $x_0 \in A$. Но всякая точка множества A покрыта некоторым открытым множеством из $\{B_\alpha\}$, поэтому существует $B_{\alpha'}$ такое, что $x_0 \in B_{\alpha'}$. Однако, в силу открытости $B_{\alpha'}$ существует δ-окрестность точки x_0 такая, что $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset B_{\alpha'}$. Но это означает, что $B_{\alpha'}$ покрывает все отрезки $[a_n, b_n]$ длины $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} < \delta$, а значит и множества $A \bigcap [a_n, b_n]$, т.е. у множеств $A \bigcap [a_n, b_n]$ существует конечное подпокрытие. Полученное противоречие завершает доказательство леммы. **Лемма Бореля доказана.**

Теорема (обобщенная Кантора). *Функция непрерывная на компакте, равномерно непрерывна на нем.*

Доказательство. В силу непрерывности функции для любого $\epsilon > 0$ для каждой точки x компакта существует δ_x-окрестность такая, что $|f(x)-f(x')| < \frac{\epsilon}{2}$ при $|x-x'| < \delta_x$. Накроем каждую точку x компакта своей $\frac{\delta_x}{2}$-окрестностью. Эти $\frac{\delta_x}{2}$-окрестности составляют открытое покрытие компакта и в силу леммы Бореля из нее можно выделить конечное подпокрытие из $\frac{\delta_{x_1}}{2}, \ldots, \frac{\delta_{x_n}}{2}$-окрестностей. Пусть $\delta_\epsilon = \min(\frac{\delta_{x_1}}{2}, \ldots, \frac{\delta_{x_n}}{2})$, если x' и x'' две произвольные точки компакта такие, что $|x - x'| < \delta_\epsilon$, то x' принадлежит одной из выделенных $\frac{\delta_{x_i}}{2}$-окрестностей, поэтому

$$|x'' - x_i| \leq |x'' - x'| + |x' - x_i| < \delta_\epsilon + \frac{\delta_{x_i}}{2} < \frac{\delta_{x_i}}{2} + \frac{\delta_{x_i}}{2} = \delta_{x_i},$$

но тогда $|f(x'') - f(x_i)| < \frac{\epsilon}{2}$, отсюда получаем

$$|f(x') - f(x'')| \leq |f(x') - f(x_i)| + |f(x_i) - f(x'')| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

что и означает равномерную непрерывность функции на компакте. **Обобщенная теорема Кантора доказана.**

4 Дифференциальное исчисление функций одной переменной.

4.1 Понятия дифференцируемости функции в точке, производной, дифференциала.

Пусть функция $y = f(x)$ определена в точке x и некоторой ее окрестности и пусть величина Δx такова, что $x + \Delta x$ также принадлежит области определения функции $y = f(x)$, тогда имеет смысл разность (приращение функции в точке x)

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Определение. *Производной* функции $y = f(x)$ в точке x называется предел отношение (разностного) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, если он существует.

Для этого предела принято использовать следующие обозначения: $f'(x)$ введено Лагранжем, $\frac{df}{dt}$ введено Лейбницем, $D_x f$ введено Коши.

Замечание 1. Если $\Delta x \to 0+$ или $\Delta x \to 0-$, то в пределе получим правую и левую производные $f'(x+0)$ и $f'(x-0)$. Очевидно, если существует $f'(x)$ (двусторонняя производная), то существуют и односторонние $f'(x+0)$ и $f'(x-0)$, причем $f'(x+0) = f'(x-0) = f'(x)$. Обратно, если существуют односторонние производные $f'(x+0)$ и $f'(x-0)$ и они равны между собой, то существует двусторонняя производная равная общему значению односторонних. Если существуют односторонние производные $f'(x+0)$ и $f'(x-0)$ причем $f'(x+0) \neq f'(x-0)$, то не существует $f'(x)$. Например, для функции $f(x) = |x|,\ f'(0+0) = 1$ и $f'(0-0) = -1$.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется *дифференцируемой в точке* x, если (полное) приращение Δy этой функции в точке x, отвечающее приращению аргумента Δx, может быть представлено в виде

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x,$$

где A - некоторое число, не зависящее от Δx (но зависящее вообще говоря от x), $\alpha(\Delta x)$ - функция от Δx, бесконечно малая при $\Delta x \to 0$.

Второе слагаемое в определении дифференцируемости функции в точке x можно переписать (см. §3.5) в виде $\alpha(\Delta x) \cdot \Delta x = \circ(\Delta x)$, т.е. полное приращение Δy можно представить следующим образом

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + \circ(\Delta x).$$

Теорема. *Для того чтобы функция $y = f(x)$ была дифференцируемой в точке x, необходимо и достаточно, чтобы в этой точке существовала ее производная $f'(x)$.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x, тогда в этой точке полное приращение Δy представимо в виде

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x,$$

где A - конечно и не зависит от Δx, тогда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x),$$

отсюда $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=A$, но левая часть этого равенства представляет собой $f'(x)$, т.е. производная функции $f(x)$ существует, конечна и $f'(x)=A$.

Достаточность. Пусть существует (конечная) производная $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)$, тогда для разностного отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x\to 0$ справедливо специальное представление (см. §3.5)

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)+\alpha(\Delta x),$$

где $\alpha(\Delta x)$ - бесконечно малая при $\Delta x\to 0$, т.е.

$$\Delta y=f'(x)\cdot\Delta x+\alpha(\Delta x)\cdot\Delta x,$$

а значит функция $y=f(x)$ дифференцируема в точке x, при этом $f'(x)=A$. **Теорема доказана.**

Таким образом, для функции одной переменной дифференцируемость в точке эквивалентна существованию в этой точке (конечной) производной $f'(x)$.

Теорема. *Если функция $y=f(x)$ дифференцируема в точке x, то она непрерывна в этой точке.*

Доказательство. Так как функция $y=f(x)$ дифференцируема в точке x, то

$$\Delta y=A\cdot\Delta x+\alpha(\Delta x)\cdot\Delta x,$$

отсюда следует $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$, что в соответствии с определением непрерывности на языке приращений (см. §3.6) и означает требуемое. **Теорема доказана.**

Замечание 2. Обратное утверждение неверно, что иллюстрирует пример функции $y=|x|$ *непрерывной в точке ноль и не дифференцируемой в этой точке.* Таким образом, непрерывность - необходимое, но не достаточное условие дифференцируемости.

Замечание 3. Выражение для полного приращения Δy в определении дифференцируемости функции представляет собой сумму двух слагаемых, первое из которых $A\cdot\Delta x$ линейное относительно Δx называется *главной* *частью* полного приращения Δy дифференцируемой функции или *дифференциалом функции,* для нее существует специальное обозначение

$$dy = A \cdot \Delta x = f'(x) \cdot \Delta x.$$

Очевидно в общем случае (для зависимой переменной) $dy \neq \Delta y$, но если $y = x$, то $\Delta x = \Delta y = dy = dx$, таким образом для независимой переменной $\Delta x = dx$, откуда и получаем общепринятую форму записи дифференциала функции $dy = f'(x)dx$.

4.2 Уравнение касательной к графику функции. Геометрический смысл производной и дифференциала. Механический смысл производной.

Пусть Γ - дуга графика некоторой функции $y = f(x)$, M_0 - точка графика, M_0N - секущая графика. Устремим точку N к M_0 вдоль графика функции (в предположении непрерывности функции $y = f(x)$). По мере приближения N к M_0 секущая M_0N стремится к некоторому предельному положению M_0T, это предельное положение секущей при стремлении N к M_0 вдоль графика $y = f(x)$ называется *касательной* к графику функции $y = f(x)$ в точке M_0. Пусть $M_0(x_0, y_0)$, φ - угол наклона секущей M_0N к положительному направлению оси Ox, $N(x_0 + \Delta x, y + \Delta y)$, $|BN| = \Delta y$, $|M_0B| = \Delta x$, тогда $\operatorname{tg}\varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x}$, отсюда получаем

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\theta,$$

где θ - угол наклона касательной к положительному направлению оси Ox. Поскольку предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, если он существует, является производной функции $y = f(x)$ в точке x_0, то

$$y'(x_0) = \operatorname{tg}\theta = k_{\text{кас}}.$$

Таким образом, угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0 равен значению производной в точке касания x_0. В этом и состоит *геометрический смысл производной.*

Поскольку

$$dy = f'(x_0)dx = \Delta x \operatorname{tg}\theta,$$

то dy - приращение ординаты касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0, соответствующее приращению аргумента Δx. В этом и состоит *геометрический смысл дифференциала.*

Уравнение касательной в точке M_0 будем искать в виде

$$y = kx + b.$$

Так как касательная проходит через точку $M_0(x_0, y_0)$, то координаты этой точки должны удовлетворять уравнению касательной

$$y_0 = kx_0 + b,$$

тогда

$$b = y_0 - kx_0 = f(x_0) - kx_0$$

и следовательно

$$y = kx + b = k(x - x_0) + f(x_0).$$

Поскольку $k = f'(x_0)$, то отсюда получаем окончательный вид уравнения касательной

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

к графику функции $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0; f(x_0))$.

Замечание. Если функция $s = s(t)$ описывает путь, пройденный точкой за время t, то разность $\Delta s = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)$ - есть путь пройденный за время от t_0 до $(t_0 + \Delta t)$, тогда разностное отношение $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ есть средняя скорость точки за время $[t_0,\, t_0 + \Delta t]$. Следовательно, предельное значение $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$ - мгновенная скорость точки в момент времени t_0. В этом состоит *механический смысл производной.*

4.3 Дифференцирование сложной и обратной функций. Инвариантность формы первого дифференциала.

Теорема (дифференцирование сложной функции). *Пусть функция $x = \varphi(t)$ дифференцируема в точке t_0, причем $x_0 = \varphi(t_0)$, функция $y = f(x)$*

дифференцируема в точке x_0, *тогда сложная функция* $y = g(t) = f(\varphi(t))$ *дифференцируема в точке* t_0, *причем*

$$g'(t_0) = f'(x_0) \cdot \varphi'(t_0).$$

Теорема (дифференцирование обратной функции). Пусть функция $y = f(x)$ определена, непрерывна и монотонно возрастает (убывает) на отрезке $[a; b]$, тогда она имеет на отрезке $[f(a); f(b)]$ $([f(b); f(a)])$ обратную функцию $x = g(y)$. Пусть $x_0 \in (a; b)$ - внутренняя точка отрезка $[a; b]$, $y_0 = f(x_0)$ - внутренняя точка отрезка $[f(a); f(b)]$ $([f(b); f(a)])$. Если $y = f(x)$ имеет в точке x_0 производную $f'(x_0) \neq 0$, то обратная функция $x = g(y)$ имеет в точке y_0 производную $g'(y_0)$, причем

$$g'(y_0) = \operatorname{tg} \phi = \operatorname{tg}\Big(\frac{\pi}{2} - \varphi\Big) = \operatorname{ctg} \varphi = \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi} = \frac{1}{f'(x_0)},$$

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Пример. Функция $x = x(y)$, являющаяся решением уравнения Кеплера $x - \epsilon \cdot \sin x = y,\ 0 < \epsilon < 1$, дифференцируема и в силу теоремы о дифференцируемости обратной функции

$$x'(y) = \frac{1}{1 - \epsilon \cdot \cos x(y)}.$$

Теорема (об инвариантности формы первого дифференциала). Если вместо дифференциала независимой переменной x в формулу для дифференциала dy функции $y = f(x)$ подставить дифференциал некоторой функции $x = \varphi(t)$, то получим равенство вида

$$dy = df(x)|_{x=\varphi(t)} = f'(x)dx|_{x=\varphi(t)} = f'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt,$$

которое является дифференциалом сложной функции

$$df(\varphi(t)) = (f(\varphi(t)))'_t dt.$$

4.4 Правила дифференцирования.

Теорема. *Если функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в точке x, то $\forall c \in R$ справедливы следующие равенства:*

1) $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$;

2) $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$;

3) $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$;

4) $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}, \ \ g(x) \neq 0.$

Доказательство. 1) Так как

$$\frac{\Delta(cf(x))}{\Delta x} = \frac{cf(x+\Delta x) - cf(x))}{\Delta x} = c\frac{\Delta f}{\Delta x},$$

тогда если существует предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$, то существует предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta(cf(x))}{\Delta x}$.

2) Поскольку

$$\frac{\Delta(f(x) \pm g(x))}{\Delta x} = \frac{(f(x+\Delta x) \pm g(x+\Delta x)) - (f(x) \pm g(x))}{\Delta x} =$$

$$= \frac{\Delta f(x) \pm \Delta g(x)}{\Delta x},$$

тогда если существуют пределы $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$ и $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g}{\Delta x}$, то существует и предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta(f(x) \pm g(x))}{\Delta x}$.

3) Составим разностное отношение

$$\frac{\Delta(f(x) \cdot g(x))}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) \cdot g(x+\Delta x) - f(x) \cdot g(x)}{\Delta x} =$$

$$= \frac{(f(x+\Delta x) - f(x)) \cdot g(x+\Delta x) + f(x) \cdot (g(x+\Delta x) - g(x))}{\Delta x} =$$

$$= g(x+\Delta x) \cdot \frac{\Delta f}{\Delta x} + f(x) \cdot \frac{\Delta g}{\Delta x}.$$

Так как $g(x)$ дифференцируема в точке x, то $g(x)$ непрерывна в точке x (см. §4.1), т.е. $g(x+\Delta x) \to g(x)$ при $\Delta x \to 0$, поэтому если существуют пределы $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$ и $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g}{\Delta x}$, то существует и предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta(f(x) \cdot g(x))}{\Delta x}$.

4) Имеем

$$\frac{\Delta\left(\frac{f}{g}\right)}{\Delta x} = \frac{\frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x+\Delta x)}{\Delta x \cdot g(x) \cdot g(x+\Delta x)} =$$

$$= \frac{1}{g(x)\cdot g(x+\Delta x)} \cdot \Big(\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \cdot g(x) - f(x) \cdot \frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x} \Big) \xrightarrow{\Delta x \to 0}$$

$$\xrightarrow{\Delta x \to 0} \frac{1}{g^2(x)} (f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)).$$

Следствие 1. *Обобщением правила 2 является следующая формула дифференцирования произведения*

$$(f_1(x)\cdot \ldots \cdot f_n(x))' = \sum_{k=1}^{n} f_1(x) \cdot \ldots \cdot f_k'(x) \cdot \ldots \cdot f_n(x).$$

Следствие 2. *Правила нахождения дифференциалов*

1) $d(f \pm g) = df \pm dg;$

2) $d(f \cdot g) = df \cdot g + f \cdot dg;$

3) $d\Big(\frac{f}{g}\Big) = \frac{df \cdot g - f \cdot dg}{g^2}.$

4.5 Производные и дифференциалы высших порядков. Формула Лейбница.

Если функция $y = f(x)$ имеет производную на некотором множестве A, то на этом же множестве определена функция $y' = f'(x)$. В случае, когда эта последняя функция сама имеет производную, тогда такая производная называется второй производной функции $y = f(x)$ и обозначается $f''(x)$ или $f^{(2)}(x)$. Аналогично, если уже найдена n-я производная $f^{(n)}(x)$, то $(n+1)$-я производная может быть найдена по правилу $f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)}(x))'$. Функции, имеющие на множестве A n производных, называются n раз дифференцируемыми на этом множестве. Если при этом функция и все ее производные до n-го порядка включительно непрерывны на множестве A, то говорят, что функция принадлежит классу $C^n(A)$ (если $A = [a; b]$, то пишут $C^n[a; b]$).

Для вычисления n-ой производной от произведения 2-х функций полезно использовать следующую формулу Лейбница.

Теорема (формула Лейбница).

$$(u \cdot v)^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} C_n^i u^{(n-i)} \cdot v^{(i)} =$$

$$= u^{(n)} \cdot v + C_n^1 u^{(n-1)} \cdot v' + C_n^2 u^{(n-2)} \cdot v^{(2)} + C_n^3 u^{(n-3)} \cdot v^{(3)} + \ldots + u \cdot v^{(n)}$$

Доказательство. Доказательство проведем методом математической индукции.

При $n = 1$

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v' = C_1^0 u' \cdot v + C_1^1 u \cdot v'$$

формула Лейбница справедлива.

Пусть формула справедлива при $n = k$, тогда при $n = k + 1$, с учетом свойства биномиальных коэффициентов $C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$ (см. §1.3), имеем

$$(u \cdot v)^{(k+1)} = ((u \cdot v)^{(k)})' = u^{(k+1)} \cdot v + (C_k^0 + C_k^1) \cdot u^{(k)} \cdot v' +$$

$$+(C_k^1 + C_k^2) \cdot u^{(k-1)} \cdot v'' + (C_k^2 + C_k^3) \cdot u^{(k-2)} \cdot v''' + \ldots + u \cdot v^{(k+1)} =$$

$$= C_{k+1}^0 u^{(k+1)} \cdot v + C_{k+1}^1 u^{(k)} \cdot v' + C_{k+1}^2 u^{(k-1)} \cdot v'' + C_{k+1}^3 u^{(k-2)} \cdot v''' + \ldots +$$

$$+C_{k+1}^{k+1} u \cdot v^{(k+1)} = \sum_{i=0}^{k+1} C_{k+1}^i u^{(k+1-i)} \cdot v^{(i)}$$

Теорема доказана.

В §4.1 была получена формула для первого дифференциала функции

$$dy = f'(x)dx,$$

где dx дифференциал независимой переменной $dx = \Delta x$. Дифференциал dy сам является функцией от x, поэтому можно поставить задачу о нахождении дифференциала $d(dy)$, который называется вторым дифференциалом функции $y = f(x)$ и обозначается d^2y. Вычислим его

$$d^2y = d(f'(x)dx) = (f'(x)dx)'dx = f''(x)dx^2 + f'(x)(dx)'dx$$

Поскольку x независимая переменная, то $dx = \Delta x$ приращение аргумента не зависящее от x, поэтому $(dx)' = 0$, а значит

$$d^2y = f''(x)dx^2.$$

Далее индукцией по n можно получить формулу

$$d^ny = f^{(n)}(x)dx^n,$$

если x независимая переменная.

Если x является функцией некоторой третьей переменной t, т.е. $x = \varphi(t)$, тогда

$$dy = df(x)|_{x=\varphi(t)} = f'(x)dx|_{x=\varphi(t)} = f'_{\varphi}(\varphi(t)) \cdot d\varphi(t) = f'_{\varphi}(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt,$$

$$d^2y = (f'_{\varphi}(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt)'dt = (f''_{\varphi\varphi}(\varphi(t)) \cdot (\varphi'(t))^2 + f'_{\varphi}(\varphi(t)) \cdot \varphi''(t))dt^2 =$$

$$= f''_{xx}dx^2 + f'_x d^2x \neq f''_{xx}dx^2,$$

таким образом свойство инвариантности для второго дифференциала (равно как и для всех последующих) уже не имеет места.

4.6 Основные теоремы дифференциального исчисления (теоремы Ролля, Лагранжа и Коши о средних значениях).

Теорема (М. Ролля). *Если функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, дифференцируема на $(a;b)$ и $f(a) = f(b)$, то существует хотя бы одна точка $c \in (a;b)$ такая, что $f'(c) = 0$.*

Доказательство. Пусть m и M соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $y = f(x)$ на $[a;b]$. Возможны два случая.

1. $M = m$, тогда функция $y = f(x)$ постоянна на $[a;b]$, а производная постоянной равна нулю, т.е. $f'(x) = 0$ при всех $x \in [a;b]$.

2. $M \neq m$. Пусть, для определенности $f(a) \neq M$, тогда в соответствии с теоремой Вейерштрасса (см. §3.7) существует точка $c \in (a;b)$ такая, что $f(c) = M$. Рассмотрим некоторое приращение Δx такое, чтобы $c + \Delta x \in [a;b]$, тогда $f(c + \Delta x) - f(c) \leq 0$. Следовательно, при $\Delta x > 0$ отношение $\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x} \leq 0$ неположительно, при $\Delta x < 0$ отношение $\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x} \geq 0$ неотрицательно. Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$ в этих отношениях, получим по следствию из теоремы о монотонности предела функции (см. §3.2) $f'(c-0) \geq 0$ при $\Delta x < 0$ (левая производная) и $f'(c+0) \leq 0$ при $\Delta x > 0$ (правая производная). Существование этих пределов следует из дифференцируемости функции $y = f(x)$ во всех внутренних точках интервала $(a;b)$. Из дифференцируемости функции в точке c следует равенство производных $f'(c) = f'(c-0) = f'(c+0)$ (см.

§4.1), откуда и получаем, что $f'(c)=0$. **Теорема М. Ролля доказана.**

Геометрический смысл теоремы М. Ролля состоит в том, что для любой функции непрерывной на отрезке $[a;b]$, принимающей на его концах равные значения и дифференцируемой на $(a;b)$ найдется такая точка на графике функции $y=f(x)$ (вообще говоря не одна), касательная к которому в этой точке параллельна оси Ox.

Теорема (Лагранжа). *Если функция $y=f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, дифференцируема на $(a;b)$, то существует хотя бы одна точка $c\in(a;b)$ такая, что*

$$f(b)-f(a)=f'(c)\cdot(b-a)$$

(формула Лагранжа конечных приращений).

Доказательство. Рассмотрим две точки $A(a;f(a))$ и $B(b;f(b))$, лежащие на графике функции $y=f(x)$. Составим уравнение прямой, проходящей через эти точки, исходя из общего уравнения прямой $y=k\cdot x+l$. Подберем значения параметров k и l так, чтобы координаты точек A и B удовлетворяли уравнению прямой

$$\begin{cases} f(a)=k\cdot a+l, \\ f(b)=k\cdot b+l. \end{cases}$$

Решив эту систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными относительно k и l, получим

$$\begin{cases} l=\frac{b\cdot f(a)-a\cdot f(b)}{b-a}, \\ k=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}, \end{cases}$$

т.е.

$$y=f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot(x-a)$$

искомое уравнение прямой.

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(x)=f(x)-\Big(f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot(x-a)\Big).$$

Как разность двух функций непрерывных на отрезке $[a;b]$ и дифференцируемых на интервале $(a;b)$, функция $F(x)$ непрерывна на $[a;b]$ и дифференцируема на $(a;b)$. Так как $F(a)=F(b)=0$, то для функции $F(x)$ выполнены условия теоремы М. Ролля, поэтому существует точка $c \in (a;b)$ такая, что $F'(c) = 0$, т.е.

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \text{ или } f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Отсюда следует $f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$. **Теорема Лагранжа доказана.**

Геометрический смысл теоремы Лагранжа состоит в следующем: отношение $k = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ есть тангенс угла наклона прямой (секущей) AB к положительному направлению оси Ox, а $f'(c)$ - тангенс угла наклона касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$ в точке $(c; f(c))$, т.е. на интервале $(a;b)$ существует хотя бы одна точка c, в которой касательная параллельна прямой AB. Отметим, что условия теоремы Лагранжа не обеспечивают единственности точки c, что показывает следующий пример. Пусть $y = x^3$, $[a;b] = [-2;2]$, тогда по теореме Лагранжа

$$3 \cdot c^2 = \frac{2^3 - (-2)^3}{2 - (-2)} \Rightarrow 3c^2 = 4 \Rightarrow c_{1,2} = \pm\frac{2}{\sqrt{3}} \in [-2;2].$$

Теорема (Коши). *Если функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ непрерывны на $[a;b]$, дифференцируемы на $(a;b)$, причем $g'(x) \neq 0$ при всех $x \in (a;b)$, то существует хотя бы одна точка $c \in (a;b)$ такая, что*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a)).$$

Функция $F(x)$ непрерывна на $[a;b]$, дифференцируема на $(a;b)$, причем $F(a) = F(b) = 0$. Поэтому в силу теоремы М. Ролля существует точка $c \in (a;b)$ такая, что $F'(c) = 0$. Отсюда получаем требуемое. **Теорема Коши доказана.**

4.7 Неравенства Юнга, Гельдера, Минковского.

Теорема (неравенство Юнга). *Если $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\alpha + \beta = 1$, то $\forall x > 0$ выполняется неравенство $x^\alpha \leq \alpha \cdot x + \beta$.*

Доказательство. Рассмотрим функцию $f(t) = t^\alpha - \alpha t - \beta$, в силу условий теоремы $f(1) = 1 - \alpha - \beta$, функция $f(t)$ определена на $[0; +\infty)$ и дифференцируема на $(0; +\infty)$. Применим к $f(t)$ на отрезке $[1; x]$ теорему Лагранжа

$$x^\alpha - \alpha x - \beta - 1 + \alpha + \beta = \alpha(c_x^{\alpha-1} - 1)(x - 1), \ \ 1 < c_x < x$$

или

$$x^\alpha - \alpha x - \beta = \alpha(c_x^{\alpha-1} - 1)(x - 1).$$

Если $x \geq 1$, то при $0 < \alpha < 1$, $c_x^{\alpha-1} \leq 1$, т.е. $c_x^{\alpha-1} - 1 \leq 0$ и $x - 1 \geq 0$, откуда следует

$$x^\alpha - \alpha x - \beta = \alpha(c_x^{\alpha-1} - 1)(x - 1) \leq 0$$

или

$$x^\alpha \leq \alpha x + \beta \ \text{ при } \ x \geq 1.$$

Если $0 < x \leq 1$, то применяя теорему Лагранжа к $f(t)$ на отрезке $[x; 1]$, $x \leq 1$, имеем

$$1 - \alpha - \beta - x^\alpha + \alpha x + \beta = \alpha(c_x^{\alpha-1} - 1)(1 - x), \ \ x < c_x < 1,$$

$$x^\alpha - \alpha x - \beta = \alpha(c_x^{\alpha-1} - 1)(x - 1).$$

В данных условиях $x - 1 \leq 0$, $c_x^{\alpha-1} \geq 1$, тогда

$$x^\alpha - \alpha x - \beta \leq 0 \ \text{ или } \ x^\alpha \leq \alpha x + \beta \ \text{ при } \ 0 < x \leq 1.$$

Теорема доказана.

Следствие (неравенство Гельдера). Положим в неравенстве Юнга $x = \frac{a}{b} > 0$, где $a > 0$, $b > 0$, тогда имеем неравенство

$$\left(\frac{a}{b}\right)^\alpha \leq \alpha \cdot \frac{a}{b} + \beta$$

или

$$a^\alpha \cdot b^{1-\alpha} \leq \alpha a + \beta b,$$

$$a^\alpha \cdot b^\beta \leq \alpha a + \beta b.$$

Пусть $\bar{u} = (u_1, \ldots, u_n)$, $\bar{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ – n-мерные вектора, $u_i \geq 0$, $v_i \geq 0$, тогда для чисел

$$a_i = \frac{u_i^{\frac{1}{\alpha}}}{\sum\limits_{j=1}^{n} u_j^{\frac{1}{\alpha}}} \geq 0, \quad b_i = \frac{v_i^{\frac{1}{\alpha}}}{\sum\limits_{j=1}^{n} v_j^{\frac{1}{\alpha}}} \geq 0$$

имеем

$$a_i^{\alpha} \cdot b_i^{\beta} \leq \alpha a_i + \beta b_i$$

просуммируем эти неравенства по i от 1 до n

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^{\alpha} \cdot b_i^{\beta} \leq \alpha \sum_{i=1}^{n} a_i + \beta \sum_{i=1}^{n} b_i = \alpha + \beta = 1,$$

т.е.

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{u_i}{\left(\sum\limits_{j=1}^{n} u_j^{\frac{1}{\alpha}}\right)^{\alpha}} \cdot \frac{v_i}{\left(\sum\limits_{j=1}^{n} v_j^{\frac{1}{\beta}}\right)^{\beta}} \leq 1$$

или

$$\sum_{i=1}^{n} u_i \cdot v_i \leq \left(\sum_{j=1}^{n} u_j^{\frac{1}{\alpha}}\right)^{\alpha} \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} v_j^{\frac{1}{\beta}}\right)^{\beta},$$

полученное неравенство называется неравенством Гельдера.

Введем обозначения

$$\alpha = \frac{1}{p}, \quad \beta = \frac{1}{q}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad \text{тогда} \quad p = \frac{1}{\alpha}, \quad q = \frac{1}{\beta}$$

и в этих обозначениях неравенство Гельдера приобретает следующий общепринятый вид

$$\sum_{i=1}^{n} u_i \cdot v_i \leq \left(\sum_{j=1}^{n} u_j^{p}\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} v_j^{q}\right)^{\frac{1}{q}}, \;\; u_i \geq 0, \;\; v_i \geq 0, \;\; \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Теорема (неравенство Минковского). *Если выполнены условия* $p > 1$, $u_i \geq 0, v_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, n$, *тогда*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (u_i + v_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} u_i^{p}\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} v_i^{p}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Доказательство. Для числа $p > 1$ подберем число $q > 1$ такое, чтобы $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ или $p + q = pq$, тогда

$$\sum_{i=1}^{n}(u_i+v_i)^p = \sum_{i=1}^{n}(u_i+v_i)\cdot(u_i+v_i)^{p-1} = \sum_{i=1}^{n} u_i\cdot(u_i+v_i)^{p-1}+\sum_{i=1}^{n} v_i\cdot(u_i+v_i)^{p-1}.$$

В силу неравенства Гельдера с $\alpha = \frac{1}{p}$, $\beta = \frac{1}{q}$ получаем

$$\sum_{i=1}^{n}(u_i+v_i)^p \leq \left(\sum_{i=1}^{n} u_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}(u_i+v_i)^{q(p-1)}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\sum_{i=1}^{n} v_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}(u_i+v_i)^{q(p-1)}\right)^{\frac{1}{q}}$$

Но $p = pq - q = q(p-1)$, поэтому

$$\sum_{i=1}^{n}(u_i + v_i)^p \leq \left(\sum_{i=1}^{n} u_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n}(u_i + v_i)^p\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{i=1}^{n} v_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n}(u_i + v_i)^p\right)^{\frac{1}{q}}$$

отсюда

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(u_i + v_i)^p\right)^{1-\frac{1}{q}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} u_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} v_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

или

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(u_i + v_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} u_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} v_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Теорема доказана.

4.8 Признаки монотонности функции. Точки экстремума. Необходимые и достаточные условия экстремума.

Теорема (достаточные условия монотонности). *Если функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на $[a;b]$, дифференцируема на интервале $(a;b)$, производная $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$ на $(a;b)$, тогда функция $y = f(x)$ возрастает (убывает) на $[a;b]$.*

Доказательство. Пусть x_1, $x_2 \in [a;b]$, причем $x_1 < x_2$, тогда по формуле Лагранжа конечных приращений

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)\cdot(x_2 - x_1),\ x_1 < c < x_2.$$

Так как $x_2 - x_1 > 0$, то при $f'(c) > 0$

$$f(x_2) - f(x_1) > 0 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$$

т.е. функция $y = f(x)$ возрастает на $[a; b]$. Аналогично доказывается второе утверждение. **Теорема доказана.**

Теорема. *Для того чтобы функция $y = f(x)$ имела на $[a; b]$, постоянное значение необходимо и достаточно, чтобы в каждой точке этого отрезка ее производная была равна нулю.*

Доказательство.*Необходимость.* Если $f(x) \equiv \ \forall x \in [a; b]$, то $f'(x) \equiv 0$.

Достаточность. Пусть $f'(x) = 0 \ \forall x \in [a; b]$, зафиксируем $x_1 \in [a; b]$ и $x_1 \neq x_2$, тогда $f(x_2) - f(x_1) = f'(c) \cdot (x_2 - x_1)$ и т.к. $f'(c) = 0$, то $f(x_2) = f(x_1)$ и в силу произвольности x_2 получаем $f(x) \equiv Const = f(x_1)$. **Теорема доказана.**

Пусть $c \in (a; b)$, точка c называется точкой *строгого локального максимума (строгого локального минимума)* если существует такая $\delta-$окрестность точки c $(c - \delta; c + \delta) \subset [a; b]$, что $\forall x \in (c - \delta; c + \delta)$ имеет место неравенство $f(x) < f(c)$ $(f(x) > f(c))$. Термины "локальный минимум"и "локальный максимум"принято объединять термином *локальный экстремум.*

Теорема (П.Ферма, необходимое условие экстремума). *Если в точке $x = c$ дифференцируемая функция $y = f(x)$ имеет экстремум, то первая производная функции в точке $x = c$ равна нулю.*

Доказательство. Пусть $x = c$ точка локального максимума, тогда существует $\delta-$окрестность точки c, в которой $\forall x \in (c-\delta; c+\delta)$ имеет место неравенство $f(x) < f(c)$. Такие x можно представить в виде $x = c \pm h, \ 0 < h < \delta$. Составим разностные отношения

$$\frac{f(c-h) - f(c)}{-h} > 0 \quad \frac{f(c+h) - f(c)}{h} < 0.$$

Переходя к пределу при $h \to 0+$ в этих отношениях, по следствию из теоремы о монотонности предела функции (см. §3.2) получим $f'(0 - 0) \geq 0$ и $f'(0 + 0) \leq 0$. Так как функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке c, то (см. §4.1) $f'(c) = f'(0 - 0) = f'(0 + 0)$, отсюда $f'(c) = 0$. **Теорема доказана.**

Теорема Ферма дает необходимое, но не достаточное условие наличия экстремума. Например, функция $y = x^3$ не имеет экстремума в точке $x = 0$, однако $y'(0) = 0$.

Теорема Ферма существования экстремума доказана для дифференцируемых функций, однако функция $y = |x|$ не дифференцируема в точке $x = 0$ и имеет в этой точке локальный минимум. Поэтому при нахождении экстремумов функции надо искать их не только в *стационарных точках* (т.е. точках где $f'(x) = 0$), но и в точках, где производная не существует или обращается в бесконечность.

Как следствие из теоремы о достаточных условиях монотонности функции, получаем теорему о достаточных условиях экстремума функции.

Теорема (первое достаточное условие экстремума). *Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности стационарной точки x_0 (т.е. $f'(x_0) = 0$), тогда:*

1. если $f'(x_0) > 0$ слева от x_0 и $f'(x_0) < 0$ справа от x_0, тогда x_0 - точка локального максимума;

2. если $f'(x_0) < 0$ слева от x_0 и $f'(x_0) > 0$ справа от x_0, тогда x_0 - точка локального минимума;

3. если $f'(x)$ слева и справа от x_0 имеет один знак, то x_0 не является точкой экстремума.

Теорема (второе достаточное условие экстремума). *Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности стационарной точки x_0 (т.е. $f'(x_0) = 0$) и в точке x_0 существует вторая производная $f''(x_0)$, тогда:*

1. если $f''(x_0) < 0$, то x_0 - точка локального максимума;

2. если $f''(x_0) > 0$, то x_0 - точка локального минимума.

Доказательство. Так как $f''(x_0) < 0$, то $f'(x)$ убывает в точке x_0, и в силу условия $f'(x_0) = 0$, $f'(x)$ меняет знак в точке x_0 с плюса на минус, т.е. x_0 - точка локального максимума. Вторая часть теоремы доказывается точно также. **Теорема доказана.**

4.9 Выпуклость и точки перегиба. Асимптоты.

График функции $y = f(x)$ называется *выпуклым вверх (выпуклым вниз)* на интервале $(a; b)$, если он на этом интервале целиком расположен ниже касательной (выше касательной) проведенной в любой точке графика.

Теорема (достаточное условие выпуклости). *Если* $f''(x) > 0$ $(f''(x) < 0)$ *на интервале* $(a; b)$, *то график функции* $y = f(x)$ *является выпуклым вниз (выпуклым вверх) на* $(a; b)$.

Доказательство. Пусть для функции $y = f(x)$ $f''(x) > 0$ $\forall x \in (a; b)$ и точка $M(x_0, y_0)$ лежит на графике функции $y = f(x)$. Напишем уравнение касательной, проходящей через точку $M(x_0, y_0)$

$$Y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0), \;\; y_0 = f(x_0),$$

здесь $(x; Y)$ координаты текущей точки касательной. Вычтем это равенство из равенства $y = f(x)$, получим

$$y - Y = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0).$$

Далее для определенности рассматриваем случай $x > x_0$. По теореме Лагранжа о среднем найдется точка $c \in (x_0; x)$ такая, что

$$y - Y = f'(c)(x - x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = (f'(c) - f'(x_0)) \cdot (x - x_0).$$

Применив еще раз теорему Лагранжа, получим

$$y - Y = f''(c_1) \cdot (c - x_0) \cdot (x - x_0), \;\; c_1 \in (x_0; c).$$

Если $f''(c_1) > 0$, то $y > Y$, т.е. справа от x_0 график функции $y = f(x)$ находится выше касательной.

При $x < x_0$ аналогично получаем

$$y - Y = -f'(c)(x_0 - x) - f'(x_0)(x - x_0) = (f'(x_0) - f'(c)) \cdot (x - x_0) \;\; c \in (x; x_0)$$

$$y - Y = f''(c_1) \cdot (x_0 - c) \cdot (x_0 - x), \;\; c_1 \in (c; x_0).$$

Если $f''(c_1) > 0$, то $y > Y$, т.е. слева от x_0 график функции $y = f(x)$ находится выше касательной, т.е. на интервале $(a; b)$ график функции $y = f(x)$ лежит выше касательной и значит выпуклый вниз. **Теорема доказана.**

Точкой перегиба графика функции $y = f(x)$ называется такая точка, в которой меняется направление выпуклости.

Следствие (первое достаточное условие перегиба). *Если при переходе через точку x_0 вторая производная $f''(x)$ меняет свой знак, то точка $(x_0; f(x_0))$ является точкой перегиба графика функции $y = f(x)$.*

Следствие (необходимое условие перегиба). *Если точка $(x_0; f(x_0))$ является точкой перегиба графика функции $y = f(x)$, то $f''(x_0) = 0$.*

Например, функция $y = x^4$ не имеет перегиба в нуле, однако $y'' = 12x^2|_{x=0} = 0$.

Теорема (второе достаточное условие перегиба). *Пусть функция $y = f(x)$ трижды дифференцируема на интервале $(a; b)$, $x_0 \in (a; b)$, $f''(x_0) = 0$ и $f'''(x_0) \neq 0$, тогда x_0 - точка перегиба.*

Доказательство. Если $f'''(x_0) \neq 0$, то либо $f'''(x_0) > 0$, либо $f'''(x_0) < 0$, тогда $f''(x)$ в точке x_0 либо монотонно возрастает, либо монотонно убывает и в силу условия $f''(x_0) = 0$ меняет свой знак, а значит согласно первому достаточному условию перегиба получаем требуемое утверждение. **Теорема доказана.**

Прямую $x = a$ называют *вертикальной асимптотой* графика функции $y = f(x)$, если хотя бы один из пределов (односторонних)

$$\lim_{x \to a-0} f(x) \text{ или } \lim_{x \to a+0} f(x)$$

является бесконечным.

Прямую $y = kx + b$ называют *наклонной асимптотой* при $x \to \pm\infty$ графика функции $y = f(x)$, если

$$\lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - (kx + b)) = 0.$$

В силу определения наклонной асимптоты

$$\lim_{x \to \pm\infty} (\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x}) = 0,$$

т.е.

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}.$$

Отсюда получаем

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - kx).$$

При $k = 0$ и $b \neq 0$ наклонная асимптота окажется горизонтальной.

Пример. График функции $y = \frac{x^2-3x-2}{x+1}$ имеет вертикальную асимптоту $x = -1$ и наклонную $y = x - 4$.

4.10 Правило Лопиталя.

Теорема (первое правило Лопиталя). *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют условиям:*

1) $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы на интервале $(a;b)$;

2) $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = \lim\limits_{x\to a+} g(x) = 0$;

3) $g'(x) \neq 0 \ \ \forall x \in (a;b)$;

4) существует предел $k = \lim\limits_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (конечный или бесконечный), тогда существует предел отношения $\frac{f(x)}{g(x)}$ и справедливо равенство

$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = k.$$

Доказательство. Доопределим функции $f(x)$ и $g(x)$ в точке a по непрерывности справа $f(a) = g(a) = 0$, тогда получим пару функций, для которых на любом отрезке $[a;x] \subset [a;b]$ применима теорема Коши (см. §4.6), т.е. $\exists c = c(x) \in (a;x)$ такая, что

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c(x))}{g(c(x))},$$

т.к. при $x \to a+ \quad c = c(x) \to a+$, то

$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+} \frac{f'(c(x))}{g(c(x))} = k.$$

Теорема доказана.

Замечание. Аналогично доказывается утверждение для левостороннего предела $x \to a-$ и соответственно первое правило Лопиталя справедливо и для двусторонних пределов. Необходимо только выполнение всех условий теоремы в двусторонней окрестности точки a. Утверждение теоремы справедливо также и для стремления $x \to \pm\infty$.

Теорема (второе правило Лопиталя). *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют условиям:*

1) $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы на интервале $(a;b)$;

2) $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = \lim\limits_{x\to a+} g(x) = \infty$;

3) $g'(x) \neq 0 \ \ \forall x \in (a;b)$;

4) существует предел $k = \lim\limits_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (конечный или бесконечный), тогда существует предел отношения $\frac{f(x)}{g(x)}$ и справедливо равенство

$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = k.$$

Доказательство. Пусть $x_n \to a+$ произвольная монотонная последовательность, тогда начиная с некоторого номера последовательность $g(x_n) \to +\infty$ монотонно (если $g(x_n) \to -\infty$ надо рассмотреть последовательность $\{-g(x_n)\}$). Построим последовательность $\frac{f(x_{n+1})-f(x_n)}{g(x_{n+1})-g(x_n)}$, которая в силу теоремы Коши (см. §4.6) представима в виде

$$\frac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{g(x_{n+1}) - g(x_n)} = \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)}, \text{ где } a < x_{n+1} < c_n x_n.$$

В силу условия 4 теоремы при $n \to +\infty$ ($c_n \to a+$) существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{g(x_{n+1}) - g(x_n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)} = k,$$

поэтому по теореме Штольца (см. §2.4) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = k$, а значит в силу определения предела функции по Гейне получаем требуемое утверждение. **Теорема доказана.**

4.11 Формула Тейлора.

Пусть функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 n производных, необходимо найти многочлен $P_n(x)$ степени не выше n такой, что

$$f(x_0) = P_n(x_0),\ f'(x_0) = P_n'(x_0), \ldots, f^{(n)}(x_0) = P_n^{(n)}(x_0).$$

Будем искать этот многочлен в виде

$$P_n(x) = A_0 + A_1 \cdot (x - x_0) + A_2 \cdot (x - x_0)^2 + \ldots + A_n \cdot (x - x_0)^n.$$

Из условия $f(x_0) = P_n(x_0)$ получаем $A_0 = f(x_0)$, из условия $f'(x_0) = P_n'(x_0)$ получаем $A_1 = f'(x_0)$, из условия $f''(x_0) = P_n''(x_0)$ следует $A_2 = \frac{1}{2!} f''(x_0)$ и т.д. $A_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0),\ k = 0,\, 1,\, \ldots,\, n$. Таким образом

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n,$$

этот многочлен называется *многочленом Тейлора n-го порядка.*

Рассмотрим разность $r_n(x) = f(x) - P_n(x)$. Очевидно $r_n(x_0) = r_n'(x_0) = \ldots = r_n^{(n)}(x_0) = 0$. Отсюда найдем предел отношения $\alpha_n(x) = r_n(x)/(x - x_0)^n$ при $x \to x_0$

$$\lim_{x \to x_0} \alpha_n(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{r_n(x)}{(x - x_0)^n} = \frac{0}{0} = \lim_{x \to x_0} \frac{r_n'(x)}{n(x - x_0)^{n-1}} = \frac{0}{0} =$$

$$= \ldots = \lim_{x \to x_0} \frac{r_n^{(n)}(x)}{n!} = 0,$$

т.е. (см. §3.5) $\alpha_n(x)$ бесконечно малая при $x \to x_0$ и $r_n(x) = \alpha_n(x) \cdot (x - x_0)^n$, а значит $r_n(x) = \circ((x - x_0)^n)$ при $x \to x_0$.

Итак, справедлива следующая

Теорема. *Если функция $y = f(x)$ определена на интервале $(a; b)$, имеет в точке $x_0 \in (a; b)$ производные до n-го порядка включительно, тогда при $x \to x_0$*

$$f(x) = P_n(x) + r_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \circ((x - x_0)^n).$$

Полученная формула называется *формулой Тейлора n-го порядка с остаточным членом в форме Пеано.*

Замечание 1. (*обобщение формулы для первого дифференциала*) Если ввести обозначения $x - x_0 = \Delta x,\ \Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, тогда формула Тейлора принимает вид

$$\Delta y = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(\Delta x)^k + \circ((\Delta x)^n), \text{ при } \Delta x \to 0.$$

Замечание 2. Если $x_0 = 0$, то получаем частный случай формулы Тейлора, называемой *формулой Маклорена*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \circ(x^n), \text{ при } x \to 0.$$

Следствие (единственность многочлена Тейлора). *Никакой многочлен степени меньшей или равной n, отличной от многочлена Тейлора n-го порядка, не может приближать данную функцию с точностью до $\circ((x-x_0)^n)$ при $x \to x_0$.*

Доказательство. Пусть некоторый многочлен $Q_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k$ таков, что $f(x) = Q_n(x) + \circ((x-x_0)^n)$ при $x \to x_0$, тогда в силу доказанной теоремы

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \circ((x-x_0)^n) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k + \circ((x-x_0)^n).$$

Если в этом равенстве перейти к пределу при $x \to x_0$, получим $a_0 = f(x_0)$. Отбросив члены с номером $k = 0$ и поделив равенство на $(x-x_0)$, получим

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^{k-1} + \circ((x-x_0)^{n-1}) = \sum_{k=1}^{n} a_k (x-x_0)^{k-1} + \circ((x-x_0)^{n-1}).$$

Переходя в этом новом равенстве к пределу при $x \to x_0$, получим $a_1 = \frac{f'(x_0)}{1!}$ и т.д. $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$. **Следствие доказано.**

Теорема (формула Тейлора с остаточным членом общего вида или в форме Шлемильха-Роша). *Пусть функция $y = f(x)$ имеет в некоторой окрестности $(a;b)$ точки x_0 производные до $(n+1)$-го порядка, $x \in (a;b)$, $p > 0$, тогда существует $c \in (x_0;x)$ (или $c \in (x;x_0)$) такая, что справедлива формула*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \left(\frac{x-x_0}{x-c}\right)^p \cdot \frac{(x-c)^{n+1}}{p \cdot n!} \cdot f^{(n+1)}(c).$$

Доказательство. Введем для многочлена Тейлора из правой части доказываемого равенства следующее обозначение

$$\varphi(x, x_0) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

и составим разностное отношение

$$R_{n+1}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f(x)-\varphi(x, x_0)}{(x-x_0)^p}, \ (\text{при}\, x > x_0),$$

которое можно переписать в виде

$$f(x) - \varphi(x, x_0) - (x-x_0)^p \cdot R_{n+1}(x) = 0.$$

Рассмотрим функцию

$$\phi(t) = f(x) - \varphi(x, t) - (x-t)^p \cdot R_{n+1}(x),$$

определенную на $t \in [x_0; x]$. Эта функция обладает свойствами:

а) $\phi(t)$ - определена, дифференцируема по t (а значит и непрерывна) на $(x_0; x)$;

б) $\phi(x_0) = \phi(x) = 0$,

т.е. для $\phi(t)$ выполнены все условия теоремы Ролля (§4.6), следовательно существует $c \in (x_0; x)$ такая, что $\phi'(c) = 0$. Выпишем это равенство в развернутом виде

$$\phi'(t) = -f'(t) - \sum_{k=1}^{n} \Big(\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k - \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1}\Big) + p\cdot(x-t)^{p-1}\cdot R_{n+1}(x) =$$

$$= p\cdot(x-t)^{p-1}\cdot R_{n+1}(x) - f'(t) - \Big[\Big(\frac{f^{(2)}(t)}{1!}(x-t) - \frac{f'(t)}{0!}\Big) +$$

$$+ \Big(\frac{f^{(3)}(t)}{2!}(x-t)^2 - \frac{f^{(2)}(t)}{1!}(x-t)\Big) + \Big(\frac{f^{(4)}(t)}{3!}(x-t)^3 - \frac{f^{(3)}(t)}{2!}(x-t)^2\Big) +$$

$$+ \cdots + \Big(\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n - \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}\Big)\Big] =$$

$$= p\cdot(x-t)^{p-1}\cdot R_{n+1}(x) - \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n.$$

Отсюда

$$\phi'(c) = p\cdot(x-c)^{p-1}\cdot R_{n+1}(x) - \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n = 0$$

или

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{p \cdot n!}(x-c)^{n-p+1}.$$

Из разностного отношения для $R_{n+1}(x)$ вытекает представление

$$f(x) = \varphi(x, x_0) + (x - x_0)^p \cdot R_{n+1}(x) =$$

$$= \varphi(x, x_0) + \left(\frac{x - x_0}{x - c}\right)^p \cdot \frac{(x-c)^{n+1}}{p \cdot n!} \cdot f^{(n+1)}(c).$$

Аналогично рассматривается случай $x < x_0$. **Теорема доказана.**

Замечание 3. Если $p = n + 1$, то представление для остаточного члена вида

$$\left(\frac{x - x_0}{x - c}\right)^p \cdot \frac{(x-c)^{n+1}}{p \cdot n!} \cdot f^{(n+1)}(c)\Big|_{p=n+1} = f^{(n+1)}(c) \cdot \frac{(x-c)^{n+1}}{(n+1)!}$$

называется остаточным членом *в форме Лагранжа.*

Замечание 4. Если $p = 1,\ c = x_0 + \theta(x - x_0),\ 0 < \theta < 1$, то представление для остаточного члена приобретает вид

$$\frac{x - x_0}{x - c} \cdot \frac{(x-c)^{n+1}}{1 \cdot n!} \cdot f^{(n+1)}(c)\Big|_{c = x_0 + \theta(x - x_0)} =$$

$$= \frac{x - x_0}{(x - x_0)(1 - \theta)} \cdot \frac{(x - x_0)^{n+1}(1-\theta)^{n+1}}{n!} \cdot f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0)) =$$

$$= (x - x_0)^{n+1}(1 - \theta)^n \cdot \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{n!},$$

который называют записью остаточного члена *в форме Коши.*

Теорема (третье достаточное условие экстремума). *Пусть функция $y = f(x)$ имеет в некоторой окрестности точки x_0 производные до $2n$-го порядка причем*

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(2n-1)}(x_0) = 0,\ f^{(2n)}(x_0) \neq 0,$$

тогда:

а) если $f^{(2n)}(x_0) < 0$, то x_0 - точка локального максимума;

б) если $f^{(2n)}(x_0) > 0$, то x_0 - точка локального минимума.

Доказательство. При $n = 1$ получаем второе достаточное условие экстремума, при $n > 1$ производную $f'(x)$ выразим по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа

$$f'(x) = f'(x_0) + \frac{f''(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(2n-2)}(x_0)}{(2n-3)!}(x - x_0)^{2n-3} +$$

$$+\frac{f^{(2n-1)}(c)}{(2n-2)!}(x - x_0)^{2n-2} = \frac{f^{(2n-1)}(c)}{(2n-2)!}(x - x_0)^{2n-2}$$

Если $f^{(2n)}(x_0) < 0$, то $f^{(2n-1)}(x)$ - убывает и при переходе x через x_0 (тогда c тоже переходит через x_0) меняет свой знак с плюса на минус и точно также будет менять свой знак $f'(x)$, что в силу первого достаточного условия экстремума и означает утверждение теоремы. Вторая часть теоремы доказывается также. **Теорема доказана.**

Теорема (третье достаточное условие перегиба). *Пусть функция $y = f(x)$ имеет в некоторой окрестности точки x_0 производные до $(2n+1)$-го порядка причем*

$$f''(x_0) = f^{(3)}(x_0) = \cdots = f^{(2n)}(x_0) = 0,\ f^{(2n+1)}(x_0) \neq 0,$$

тогда x_0 - точка перегиба.

Доказательство. Как и в предыдущей теореме разложим вторую производную по формуле Тейлора

$$f''(x) = \frac{f^{(2n)}(c)}{(2n-2)!}(x - x_0)^{2n-2}.$$

Так как $f^{(2n+1)}(x_0) \neq 0$, то $f^{(2n)}(x)$ при переходе аргумента через x_0 меняет свой знак, а значит будет менять свой знак вторая производная, что в силу первого достаточного условия перегиба и означает утверждение теоремы. **Теорема доказана.**

Пример 1. Разложение по формуле Маклорена некоторых элементарных функций

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + +\frac{x^n}{n!} + \circ(x^n),\ x \in R,$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \circ(x^{2n+2}),\ x \in R,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \circ(x^{2n+1}),\ x \in R,$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 +$$

$$+ \dots + \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + \circ(x^n),\ |x| < 1,$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \circ(x^n),\ -1 < x \le 1,$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \circ(x^{2n+2}),\ |x| \le 1,$$

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2x + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + \dots + \frac{2x^{2n+1}}{2n+1} + \circ(x^{2n+2}),\ 0 \le x < 1,$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \circ(x^{2n+1}),\ x \in R,$$

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \circ(x^{2n+2}),\ x \in R,$$

$$\arcsin x = x + \frac{1!!}{2!!}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{3!!}{4!!}\cdot\frac{x^5}{5} + \dots + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \circ(x^{2n+2}),$$

$$|x| \le 1.$$

Пример 2. Ряд Тейлора не всегда представляет породившую его функцию, так для функции

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-\frac{1}{x^2}), & x \ne 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

$f^{(k)}(0) = 0\ \forall k \in N$, т.е. ее ряд Маклорена тождественно нулевой, хотя $f(x) \ne 0$.

Пример 3. Вычисление значений функций $\sin x$ и $\cos x$. Значения функций $\sin x$ и $\cos x$ при $x \in [0; \frac{\pi}{4}]$ полностью определяют значения этих функций при остальных x, поэтому ограничимся вычислениями при этих значениях аргумента. Для $\sin x$ остаточный член в форме Лагранжа в формуле Маклорена имеет вид

$$R_{2n+3}(x) = \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}\sin\Big(c + (n+1)\pi + \frac{\pi}{2}\Big),$$

т.е. $\forall x \in [0; \frac{\pi}{4}]$ справедливо неравенство

$$|R_{2n+3}(x)| \leq \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2n+3}}{(2n+3)!} < \frac{(0,8)^{2n+3}}{(2n+3)!}.$$

Для $\cos x$

$$|R_{2n+2}(x)| \leq \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2n+2}}{(2n+2)!} < \frac{(0,8)^{2n+2}}{(2n+2)!}.$$

Поэтому, чтобы обеспечить при вычислении $\sin x$ точность 10^{-8} достаточно выбрать n таким, чтобы удовлетворить неравенству

$$\frac{(0,8)^{2n+3}}{(2n+3)!} < 10^{-8},$$

которое выполняется уже при $n = 3$, т.е.

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \frac{x^9}{362880}.$$

Чтобы обеспечить при вычислении $\cos x$ точность 10^{-7} достаточно удовлетворить неравенству

$$\frac{(0,8)^{2n+2}}{(2n+2)!} < 10^{-7},$$

которое выполняется уже при $n = 3$, т.е.

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \frac{x^8}{40320}.$$

Пример 4. Вычисление значений функции $\ln x$. Любое число $x > 0$ единственным образом представимо в виде $x = 2^\alpha \cdot M$, $\alpha \in Z$, $\frac{1}{2} \leq M < 1$, тогда $\ln x = \alpha \cdot \ln 2 + \ln M$, где $\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$. Число M в свою очередь можно представить в виде

$$M = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1+\beta}{1-\beta}, \text{ где } \beta = \frac{M\sqrt{2}-1}{M\sqrt{2}+1} \overset{\frac{1}{2} \leq M < 1}{\Rightarrow} |\beta| < 0,172$$

и значит

$$\ln x = \left(\alpha - \frac{1}{2}\right) \ln 2 + \ln \frac{1+\beta}{1-\beta}.$$

Число $\sqrt{2}$ можно найти по итерационной формуле Герона (см. §2.4 пример 3). Для функции $\ln \frac{1+\beta}{1-\beta}$ остаточный член в форме Лагранжа имеет вид

$$R_{2n+3}(\beta) = \frac{\beta^{2n+3}}{2n+3}\left[\frac{1}{(1+c)^{2n+3}} + \frac{1}{(1-c)^{2n+3}}\right], \ |c| < \beta.$$

Далее для определенности $\beta > 0$, тогда

$$|R_{2n+3}(\beta)| \leq \frac{0,172^{2n+3}}{2n+3}\Big[1 + \frac{1}{(1-0,172)^{2n+3}}\Big] \leq \frac{0,172^{2n+3} + 0,208^{2n+3}}{2n+3} < 10^{-7}$$

при $n = 3$, т.е.

$$\ln x = \Big(\alpha - \frac{1}{2}\Big)\ln 2 + 2\Big(\beta + \frac{\beta^3}{3} + \frac{\beta^5}{5} + \frac{\beta^7}{7}\Big).$$

4.12 Производная в некоторых задачах экономического анализа. (Предельный анализ в экономике.)