Первые четыре главы, а именно:

1 Введение.

2 Предел числовой последовательности.

3 Предел функции. Непрерывность функции.

4 Дифференциальное исчисление функций одной переменной.

включены в первую часть курса.

5 Интегральное исчисление функций одной переменной.

5.1 Понятия первообразной и неопределенного интеграла. Свойства неопределенного интеграла.

Пусть функция $y = f(x)$ определена на интервале $(a; b)$. Дифференцируемая функция $y = F(x)$ называется *первообразной* функции $y = f(x)$ на $(a; b)$, если во всех точках интервала $F'(x) = f(x)$.

Очевидно, если $F(x)$ первообразная для функции $y = f(x)$, то $F(x) + c$ при любом $c \in R$ также является первообразной для $y = f(x)$. Обратно, если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ - две первообразные для функции $y = f(x)$ на $(a; b)$, т.е. $F_1'(x) = F_2'(x) = f(x)$ во всех точках интервала $(a; b)$, то $(F_1(x) - F_2(x))' = 0$ или $F_1(x) = F_2(x) + c$ при любом $c \in R$. Таким образом, если $F(x)$ является некоторой первообразной для функции $y = f(x)$ на $(a; b)$, то всякая функция вида $F(x) + c$ также является первообразной, и наоборот всякая первообразная функции $y = f(x)$ представима в виде $F(x) + c$.

Определение. Совокупность всех первообразных функции $y = f(x)$, определенных на интервале $(a; b)$, называется *неопределенным интегралом* от функции $y = f(x)$ на этом интервале и обозначается через

$$\int f(x)dx.$$

Принято писать
$$\int f(x)dx = F(x) + c.$$

Неопределенный интеграл обладает следующими свойствами.

Непосредственно из определения неопределенного интеграла следуют свойства

Свойство 1. $(\int f(x)dx)' = f(x)$.

Свойство 2. $d(\int f(x)dx) = (\int f(x)dx)'dx = f(x)dx$.

Свойство 3. $\int dF(x) = \int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x) + c$.

Свойство 4 (линейность неопределенного интеграла). Для любого $\alpha \in R$

а) $\int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)dx$

б) $\int (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$

Действительно, если $F(x)$ первообразная для функции $f(x)$, то
$$\alpha \int f(x)dx = \alpha(F(x) + c) = \alpha F(x) + c_1 = \int \alpha f(x)dx,$$
т.к. $(\alpha F(x))' = \alpha f(x)$.

Если $F_1(x)$ первообразная для функции $f_1(x)$ и $F_2(x)$ первообразная для функции $f_2(x)$, то $(F_1(x) \pm F_2(x))' = f_1(x) \pm f_2(x)$, поэтому
$$\int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx = (F_1(x) + c_1) \pm (F_2(x) + c_2) =$$
$$= (F_1(x) \pm F_2(x)) + (c_1 \pm c_2) = \int (f_1(x) \pm f_2(x))dx.$$

5.2 Основные методы интегрирования (замена переменных, интегрирование по частям).

Теорема 1. *Пусть функция $f(x)$ определена на интервале $(a; b)$, функция $\varphi(t)$ определена и дифференцируема на интервале $(c; d)$, причем $\varphi(t) : (c; d) \to (a; b)$, функция $F(x)$ первообразная для $f(x)$ на интервале $(a; b)$, тогда $F(\varphi(t))$ является первообразной для $f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$ на интервале $(c; d)$ и поэтому*
$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + c.$$

Доказательство. Очевидно по правилу дифференцирования сложных функций имеем

$$(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$$

отсюда и следует утверждение теоремы. **Теорема доказана.**

Пример 1.

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}dx = \left\{ \begin{array}{c} x = a\sin t \\ dx = a\cos t dt \\ t = \arcsin\frac{x}{a} \end{array} \right\} = \int \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t} \cdot a\cos t dt =$$

$$= a^2 \int cos^2 t dt = \frac{a^2}{2}\int (1+\cos 2t)dt = \frac{a^2}{2}\cdot t + \frac{a^2}{4}\sin 2t + c =$$

$$= \frac{a^2}{2}(t + \sin t\cos t) + c = \frac{a^2}{2}\Big(\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{a}\cos\Big(\arcsin\frac{x}{a}\Big)\Big) + c =$$

$$= \frac{a^2}{2}\Big(\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{a}\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\Big) + c = \frac{a^2}{2}\Big(\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{a^2}\sqrt{a^2 - x^2}\Big) + c$$

Пример 2.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2+x^2)^3}} = \left\{ \begin{array}{c} x = a\,\mathrm{tg}\, t \\ dx = \frac{a}{\cos^2 t}dt \\ t = \mathrm{arctg}\,\frac{x}{a} \end{array} \right\} = \int \frac{\cos^3 t}{a^3}\cdot\frac{adt}{\cos^2 t} =$$

$$= \frac{1}{a^2}\sin t + c = \frac{1}{a^2}\sin\Big(\mathrm{arctg}\,\frac{x}{a}\Big) + c = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}} + c,$$

поскольку

$$\sin t = \frac{\mathrm{tg}\, t}{\sqrt{1 + tg^2 t}} \;\Rightarrow\; \sin\Big(\mathrm{arctg}\,\frac{x}{a}\Big) = \frac{\frac{x}{a}}{\sqrt{1 + (\frac{x}{a})^2}} = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}}.$$

Теорема 2. *Пусть функции* $u(x)$, $v(x)$ *определены и дифференцируемы на интервале* $(a;b)$, *существует интеграл* $\int vdu$, *тогда существует интеграл* $\int udv$ *и справедливо равенство*

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Доказательство. Найдем дифференциал произведения функций (uv)

$$d(uv) = du \cdot v + u \cdot dv.$$

Отсюда получаем

$$udv = d(uv) - vdu. \tag{$*$}$$

По свойству 3 неопределенного интеграла

$$\int d(uv) = uv + c,$$

отсюда в силу условий теоремы и свойства линейности неопределенного интеграла существует интеграл от правой части равенства (*), поэтому существует интеграл от левой части равенства (*) и

$$\int udv = \int d(uv) - \int vdu = uv - \int vdu.$$

Теорема доказана.

Пример 3.

$$\int x \ln x dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = \ln x & dv = xdx \\ du = \frac{dx}{x} & v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right\} = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int xdx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + c$$

Пример 4.

$$I = \int e^x \sin x dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = e^x & dv = \sin x dx \\ du = e^x dx & v = -\cos x \end{array} \right\} = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx$$

$$\int e^x \cos x dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = e^x & dv = \cos x dx \\ du = e^x dx & v = \sin x \end{array} \right\} = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx$$

Отсюда получаем для интеграла I уравнение

$$I = -e^x \cos x + e^x \sin x - I,$$

решая которое находим

$$I = \int e^x \sin x dx == \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + c.$$

5.3 Понятие определенного интеграла.

Пусть функция $y = f(x)$ определена на некотором отрезке $[a; b]$. Разобьем этот отрезок на частичные отрезки точками $T: a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n_T} = b$, величину

$$\delta_T = \max_{i=1,\ldots,n_T} \Delta x_i = \max_{i=1,\ldots,n_T} |x_i - x_{i-1}|$$

называют *мелкостью разбиения* T. На каждом из частичных отрезков (внутри или на его концах) выберем по точке $\xi_i \in [x_{i-1}; x_i]$ и составим сумму

$$S(f(x); T; \xi) = \sum_{i=1}^{n_T} f(\xi_i)\Delta x_i,\ \Delta x_i = x_i - x_{i-1},$$

которую называют *интегральной суммой Римана* для функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$. Очевидно эта сумма зависит не только от функции $f(x)$, но и от способа разбиения T и выбора точек ξ. Процесс, состоящий в неограниченном увеличении числа точек разбиения и стремлении к нулю длин всех без исключения частичных отрезков разбиения принято обозначать так: $\delta_T \to 0$. Естественно при таком процессе будут каким-то образом меняться и интегральные суммы Римана $S(f(x); T; \xi)$.

Определение. *(по Коши)* Говорят, что интегральные суммы Римана $S(f(x); T; \xi)$ для функции $f(x)$ имеют конечный предел I при $\delta_T \to 0$, если $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta_\epsilon > 0$ такое, что для любого разбиения T, мелкость которого $\delta_T < \delta_\epsilon$, и для любого выбора точек ξ выполняется неравенство

$$|S(f(x); T; \xi) - I| < \epsilon.$$

Определение. *(по Гейне)* Говорят, что интегральные суммы Римана $S(f(x); T; \xi)$ для функции $f(x)$ имеют конечный предел I при $\delta_T \to 0$, если для любой последовательности разбиений T_n, такой что $\delta_{T_n} \to 0$, и при любых выборах точек ξ_n существует предел последовательности $S(f(x); T_n; \xi_n)$ и он равен I.

Таким образом, если этот предел существует, то он зависит только от функции $f(x)$ и отрезка $[a; b]$ и не зависит ни от способа разбиения T, ни от выбора точек ξ.

Число I называется *определенным (римановым) интегралом* функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ и обозначается

$$I = \int\limits_a^b f(x)dx,$$

при этом функцию $f(x)$ называют *интегрируемой на отрезке* $[a;b]$. При заданных a и b определенный интеграл I является числом, а числа a и b называются *нижним* и *верхним пределами интегрирования.*

Замечание 1. *(необходимое условие интегрируемости)* Естественно возникает вопрос: при каких условиях интегральная сумма имеет конечный предел, т.е. при каких условиях для данной функции существует ее определенный интеграл на данном отрезке? Таким *необходимым условием* является ограниченность функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$. Действительно, если функция $f(x)$ не ограничена на отрезке $[a;b]$, то она неограничена на некотором частичном отрезке, а значит на этом частичном отрезке точку ξ_i можно выбрать таким образом, что соответствующее слагаемое $f(\xi_i)\Delta x_i$ будет сколь угодно большим (неограниченным), следовательно будет неограниченной вся интегральная сумма $S(f(x);T;\xi)$.

Отметим, что ограниченность *не является достаточным условием* интегрируемости и соответствующий контрпример доставляет функция Дирихле (см. §3.1). Действительно, если выбирать все $\xi_i \in Q$ рациональными, то $S(D(x);T;\xi) = b - a$, а если выбрать все $\xi_i \in R \setminus Q$ иррациональными, то $S(D(x);T;\xi) = 0$, таким образом результат вычисления предела интегральных сумм Римана $S(D(x);T;\xi)$ при $\delta_T \to 0$ зависит от выбора точек ξ_i, что и означает неинтегрируемость функции Дирихле по Риману на любому отрезке $[a;b]$.

Замечание 2. *(геометрический смысл определенного интеграла)* Пусть $f(x) \geq 0$ при $x \in [a;b]$, тогда сумма $S(f(x);T;\xi)$ представляет собой площадь ступенчатой фигуры, приближающей площадь криволинейной трапеции, ограниченной осью абсцисс, прямыми $x = a,\ x = b$ и графиком функции

$y = f(x)$. Такое приближение тем точнее, чем меньше мелкость разбиения. Следовательно численное значение определенного интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ равно площади такой трапеции.

5.4 Суммы и интегралы Дарбу. Критерий интегрируемости Римана.

Введем обозначения

$$m_i = \inf_{[x_{i-1};x_i]} f(x), \quad M_i = \sup_{[x_{i-1};x_i]} f(x)$$

и составим две интегральные суммы

$$s(f(x);T) = \sum_{i=1}^{n_T} m_i \Delta x_i, \quad S(f(x);T) = \sum_{i=1}^{n_T} M_i \Delta x_i,$$

называемые *нижней и верхней интегральными суммами Дарбу* функции $f(x)$, очевидно $\forall \xi$

$$s(f(x);T) \le S(f(x);T;\xi) \le S(f(x);T).$$

Отметим некоторые свойства сумм Дарбу.

Свойство 1. *Если к имеющимся точкам разбиения T отрезка $[a;b]$ добавить новые точки деления, то нижняя сумма Дарбу $s(f(x);T)$ может только не уменьшиться, а верхняя $S(f(x);T)$ только не увеличится.*

Доказательство. Пусть к разбиению T добавилась одна точка x' и она попала в отрезок $[x_{i-1};x_i]$, полученное новое разбиение обозначим T'. Пусть s и s' - нижние суммы, S и S' - верхние суммы Дарбу соответствующие разбиениям T и T'. Очевидно суммы s и s' отличаются лишь членами, соответствующими отрезку $[x_{i-1};x_i]$. В сумму s входит слагаемое $m_i\Delta x_i$, а в сумму s' - два слагаемых $m_i'\Delta x_i'$ и $m_i''\Delta x_i''$, где $\Delta x_i' = x' - x_{i-1}$, $\Delta x_i'' = x_i - x'$, $m_i' = \inf\limits_{[x_{i-1};x']} f(x)$, $m_i'' = \inf\limits_{[x';x_i]} f(x)$. Поскольку $m_i \le m_i'$, $m_i \le m_i''$ и $\Delta x_i' + \Delta x_i'' = \Delta x_i$, то $m_i'\Delta x_i' + m_i''\Delta x_i'' \ge m_i\Delta x_i$ и значит $s' \ge s$. Если к разбиению T добавилось несколько точек, то последовательно вводя их по одной получим это же неравенство. Аналогично доказывается другое неравенство $S' \le S$. **Свойство 1 доказано.**

Свойство 2. *Нижняя сумма s любого разбиения T не превосходит верхней суммы S' любого другого разбиения T'.*

Доказательство. Рассмотри третье разбиение $T'' = T' \cup T$, состоящее из всех точек, входящих как в T, так и в T'. Причем T'' можно получить как из T, так и из T' путем добавления конечного числа точек деления. Если s'' и S'' - соответственно нижняя и верхняя суммы Дарбу для разбиения T'', то согласно первому свойству сумм Дарбу $s \leq s'' \leq S'' \leq S$. **Свойство 2 доказано.**

Свойство 3. *Множества значений всех верхних и нижних сумм Дарбу ограничены.*

Доказательство. Пусть $m = \inf\limits_{[a;b]} f(x)$, $M = \sup\limits_{[a;b]} f(x)$ и T - произвольное разбиение отрезка $[a;b]$, тогда

$$m \sum_{i=1}^{n_T} \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n_T} m_i \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n_T} M_i \Delta x_i \leq M \sum_{i=1}^{n_T} \Delta x_i,$$

т.е. $m(b-a) \leq s \leq S \leq M(b-a)$. **Свойство 3 доказано.**

Таким образом, множество $\{s\}$ всех нижних сумм Дарбу ограничено сверху (например любой верхней суммой), а множество $\{S\}$ всех верхних сумм ограничено снизу. Следовательно, множество $\{s\}$ имеет точную верхнюю грань $I_* = \sup s$, а множество $\{S\}$ точную нижнюю грань $I^* = \inf S$, причем для любых верхней и нижней интегральных сумм s и S выполняется неравенство $s \leq I_* \leq I^* \leq S$ или $0 \leq I^* - I_* \leq S - s$.

Числа I_* и I^* называются *верхним и нижним интегралами Дарбу.*

Теорема (необходимое и достаточное условие интегрируемости). *Для существования определенного интеграла необходимо и достаточно, чтобы* $\forall \epsilon > 0$ $\exists \delta_\epsilon > 0$ *такое, что для любого разбиения* T, *мелкость которого* $\delta_T < \delta_\epsilon$, *выполняется неравенство* $|S_T - s_T| < \epsilon$, *т.е.* $\lim\limits_{\delta_T \to 0} (S_T - s_T) = 0$.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть существует $I = \int\limits_a^b f(x)dx$, тогда $\forall \epsilon > 0$ $\exists \delta_\epsilon > 0$ такое, что для любого разбиения T, мелкость которого $\delta_T < \delta_\epsilon$, и $\forall \xi$ выполняется неравенство $|S(f(x);T;\xi) - I| < \epsilon$ или $I - \epsilon < S(f(x);T;\xi) <$

$I+\epsilon$. В силу произвольности выбора точек ξ и свойства монотонности предела имеем

$$I-\epsilon \leq S_T \leq I+\epsilon \text{ и } I-\epsilon \leq s_T \leq I+\epsilon$$

отсюда $I-\epsilon \leq s_T \leq S_T \leq I+\epsilon$, т.е. $\lim\limits_{\delta_T \to 0} S_T = \lim\limits_{\delta_T \to 0} s_T = I$ и значит $\lim\limits_{\delta_T \to 0}(S_T - s_T) = 0$.

Достаточность. Пусть $\lim\limits_{\delta_T \to 0}(S_T - s_T) = 0$, тогда в силу неравенства $s_T \leq I_* \leq I^* \leq S_T$ получаем $I_* = I^*$. Обозначим их общее значение через $I = I_* = I^*$, тогда из неравенства $s_T \leq I \leq S_T$ получаем $0 \leq I - s_T \leq S_T - s_T$ и $0 \leq S_T - I \leq S_T - s_T$, а значит $\lim\limits_{\delta_T \to 0}(S_T - I) = \lim\limits_{\delta_T \to 0}(I - s_T) = 0$, т.е. $I = \lim\limits_{\delta_T \to 0} S_T = \lim\limits_{\delta_T \to 0} s_T$. Поскольку $s_T \leq S(f(x);T;\xi) \leq S_T$, то получаем $\lim\limits_{\delta_T \to 0} S(f(x);T;\xi) = I$, т.е. существует предел интегральных сумм Римана, а значит существует $\int\limits_a^b f(x)dx$. **Теорема доказана.**

5.5 Классы функций, интегрируемых по Риману.

Теорема 1. *Если функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, то она интегрируема на этом отрезке.*

Доказательство. Так как функция $= f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, то в силу теоремы Кантора (см. §3.8) она равномерно непрерывна на этом отрезке, т.е. $\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta_\epsilon > 0$ такое, что для любых $x', x'' \in [a;b]$ таких, что $|x' - x''| < \delta_\epsilon$ выполняется неравенство $|f(x') - f(x'')| < \frac{\epsilon}{b-a}$. Тогда для любого разбиения T отрезка $[a;b]$, мелкость которого $\delta_T < \delta_\epsilon$, выполняется неравенство

$$0 \leq S - s = \sum_{i=1}^{n_T}(M_i - m_i)\Delta x_i < \frac{\epsilon}{b-a}\sum_{i=1}^{n_T}\Delta x_i = \frac{\epsilon}{b-a}(b-a) = \epsilon,$$

т.е. $\lim\limits_{\delta_T \to 0}(S_T - s_T) = 0$, а значит функция $y = f(x)$ интегрируема. **Теорема доказана.**

Теорема 2. *Если функция $y = f(x)$ монотонна и ограничена на $[a;b]$, то она интегрируема на этом отрезке.*

Доказательство. Пусть для определенности $y = f(x)$ неубывающая функция, тогда $f(b) - f(a) > 0$ и для любого $\epsilon > 0$ рассмотрим разбиение T

мелкость которого $\delta_T < \frac{\epsilon}{f(b)-f(a)}$, тогда для такого разбиения

$$0 \le S - s = \sum_{i=1}^{n_T}(M_i - m_i)\Delta x_i < \frac{\epsilon}{f(b)-f(a)}\sum_{i=1}^{n_T}(M_i - m_i) =$$

$$= \frac{\epsilon}{f(b)-f(a)}\sum_{i=1}^{n_T}(f(x_i) - f(x_{i-1})) = \frac{\epsilon}{f(b)-f(a)}(f(b)-f(a)) = \epsilon,$$

т.е. $\lim\limits_{\delta_T\to 0}(S_T - s_T) = 0$. **Теорема доказана.**

5.6 Свойства определенного интеграла.

1. $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx.$

Доказательство. Пусть T разбиение отрезка $[a;b]$, причем $b = x_0 > x_1 > x_2 > \ldots > x_n = a$, тогда для i-го отрезка разбиения $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} < 0$, а значит $S(f(x);T;\xi)$ меняет свой знак при сохранении значений $f(\xi_i)$.

2. $\int\limits_a^a f(x)dx = 0, \quad \int\limits_a^b dx = b - a.$

Доказательство. В первом случае все $\Delta x_i = 0$, а во втором для любого разбиения T отрезка $[a;b]$ и для любого выбора ξ_i имеем

$$\int_a^b dx = \sum_{i=1}^{n_T} 1\cdot(x_i - x_{i-1}) = (b-a).$$

3. Если функция $f(x)$ интегрируема на $[a;b]$, то $\forall k \in R$

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx.$$

Доказательство. Очевидно, для любого разбиения T отрезка $[a;b]$ и для любого выбора ξ_i имеет место равенство $S(kf(x);T;\xi) = kS(f(x);T;\xi)$, поэтому если функция $f(x)$ интегрируема на $[a;b]$, то

$$\int_a^b kf(x)dx = \lim_{\delta_T\to 0} S(kf(x);T;\xi) = k\lim_{\delta_T\to 0} S(f(x);T;\xi) = k\int_a^b f(x)dx.$$

4. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a;b]$, то

$$\int\limits_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int\limits_a^b f(x)dx \pm \int\limits_a^b g(x)dx.$$

Доказательство. Для любого разбиения T отрезка $[a;b]$ и для любого выбора ξ_i справедливо равенство $S(f(x) \pm g(x);T;\xi) = S(f(x);T;\xi) \pm S(g(x);T;\xi)$, поэтому если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a;b]$, то

$$\int\limits_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \lim_{\delta_T \to 0} S(f(x) \pm g(x);T;\xi) =$$

$$= \lim_{\delta_T \to 0} (S(f(x);T;\xi) \pm S(g(x);T;\xi)) = \int\limits_a^b f(x)dx \pm \int\limits_a^b g(x)dx.$$

5. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a;b]$, то $f(x) \cdot g(x)$ также интегрируема на $[a;b]$.

Доказательство. Справедливость этого утверждения следует из очевидного равенства

$$f(x) \cdot g(x) = \frac{1}{4}((f(x) + g(x))^2 - (f(x) - g(x))^2)$$

и следующей вспомогательной леммы

Лемма. *Если функция $f(x)$ интегрируема на $[a;b]$, то функция $f^2(x)$ также интегрируема на этом отрезке.*

Сформулированная лемма является простым следствием из теоремы об интегрируемости сложной функции см. следующий §5.7.

6. Если функция $f(x)$ интегрируема на $[a;b]$, то она интегрируема на любом отрезке $[c;d] \subset [a;b]$.

Доказательство. Пусть $\epsilon > 0$ произвольно, T некоторое разбиение отрезка $[a;b]$, тогда $S_T - s_T < \epsilon$ при $\delta_T < \delta_\epsilon$. Рассмотрим разбиение $T_1 = T \cup \{c, d\}$, тогда

$$s_T \le s_1 \le S_1 \le S_T, \quad \text{т.е. } S_1 - s_1 \le S_T - s_T < \epsilon.$$

Рассмотрим разбиение отрезка $[c; d]$ точками разбиения T_1, тогда для $\overline{S}$ и $\overline{s}$ на $[c; d]$ справедливы неравенства

$$0 < \overline{S} - \overline{s} \leq S_1 - s_1 \leq S_T - s_T < \epsilon,$$

т.е. $\lim\limits_{\delta_T \to 0}(\overline{S} - \overline{s}) = 0$.

7. (*свойство аддитивности*) Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезках $[a; c]$ и $[c; b]$, то она интегрируема на отрезке $[a; b]$, причем

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx.$$

Доказательство. Сначала покажем интегрируемость на отрезке $[a; b]$. Пусть $\epsilon > 0$ произвольно, T_1 - разбиение отрезка $[a; c]$ мелкости $\delta_{T_1} < \delta_\epsilon$, тогда $S_1 - s_1 < \frac{\epsilon}{2}$, T_2 - разбиение отрезка $[c; b]$ мелкости $\delta_{T_2} < \delta_\epsilon$, тогда $S_2 - s_2 < \frac{\epsilon}{2}$. Рассмотрим разбиение отрезка $[a; b]$ вида $T = T_1 \cup T_2$, тогда $\delta_T < \delta_\epsilon$ и $S - s = (S_1 + S_2) - (s_1 + s_2) < \epsilon$, т.е. $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a; b]$.

Теперь докажем интегральное равенство. Пусть T - разбиение отрезка $[a; b]$, в котором c является точкой разбиения, тогда

$$S(f(x); T; \xi) = \sum{}' f(\xi_i)\Delta x_i + \sum{}'' f(\xi_i)\Delta x_i,$$

где в $\sum'$ осуществляется суммирование по частичным отрезкам из $[a; c]$, а в $\sum''$ - по частичным отрезкам из $[c; b]$. Переходя здесь к пределу при $\delta_T \to 0$, получим требуемое интегральное равенство.

8. Если функция $f(x)$ интегрируема на $[a; b]$ и $f(x) \geq 0$, то $\int\limits_a^b f(x)dx \geq 0$.

Доказательство. Для любого разбиения T и при любом выборе точек ξ_i $S(f(x); T; \xi) \geq 0$, откуда и следует доказываемое неравенство.

Из свойства 8 вытекает следующее утверждение

Следствие. *Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a; b]$ и $f(x) \geq g(x)$, то $\int\limits_a^b f(x)dx \geq \int\limits_a^b g(x)dx$.*

9. Если функция $f(x)$ интегрируема на $[a; b]$, то функция $|f(x)|$ также интегрируема на $[a; b]$ и $|\int\limits_a^b f(x)dx| \leq \int\limits_a^b |f(x)|dx$.

Доказательство. Интегрируемость функции $|f(x)|$ является следствием из теоремы об интегрируемости сложной функции см. следующий §5.7. Проинтегрировав неравенство $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ по отрезку $[a;b]$, в силу следствия из свойства 8 получаем требуемое неравенство.

5.7 Критерий Лебега интегрируемости функции по Риману.

1. Для формулировки этого критерия потребуется понятие *множества имеющего лебеговскую меру ноль.* Записывается это так: $\mu(A) = 0$.

Определение. Множество $A \subset R$ имеет *лебеговскую меру ноль,* если $\forall \epsilon > 0$ существует конечное или счетное покрытие множества A интервалами с общей длиной, не превосходящей ϵ (т.е. $\forall \epsilon > 0$ существует система интервалов $\{I_n\} \equiv \{I_1, I_2, \dots, I_n, \dots\}$ с длинами $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n, \dots$ таких, что $A \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} I_n$ и $\forall n \in N$ $s_n = \delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_n < \epsilon$.)

Лемма 1. *Любое не более чем счетное множество точек $\{x_n\} \in R$ имеет лебеговскую меру ноль.*

Доказательство. Точки такого множества можно покрыть интервалами с центрами в этих точках и длинами $\delta_1 = \frac{\epsilon}{2}, \delta_2 = \frac{\epsilon}{2^2}, \dots, \delta_n = \frac{\epsilon}{2^n}, \dots$. Тогда $s_n = \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2^2} + \ldots + \frac{\epsilon}{2^n} = \epsilon(1 - \frac{1}{2^n}) < \epsilon$. **Лемма 1 доказана.**

Лемма 2. *Пусть $B \subset A$ и $\mu(A) = 0$, тогда $\mu(B) = 0$.*

Справедливость леммы 2 следует из того очевидного факта, что всякое покрытие множества A также является покрытием множества B.

2. Далее потребуется еще одно понятие это - *колебание функции в точке.* Для его формулировки введем в рассмотрение систему промежутков на $[a;b]$, а именно, если $x_0 \in (a;b)$ - внутренняя точка $[a;b]$, $I_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap [a;b]$, если $x_0 = a$, $I_\delta(x_0) = I_\delta(a) = [a, a + \delta)$, если $x_0 = b$, $I_\delta(x_0) = I_\delta(b) = (b - \delta, b]$.

Пусть $f(x)$ ограничена на $[a;b]$, т.е. выполнено необходимое условие интегрируемости.

Определение. *Колебание функции $f(x)$ в точке x_0* называется величина

$$\omega(x_0) = \omega_f(x_0) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{\delta>0} \sup_{x,y\in I_\delta(x_0)} (f(x)-f(y)) = \inf_{\delta>0}(M_\delta(x_0)-m_\delta(x_0)),$$

где

$$M_\delta(x_0) = \sup_{I_\delta(x_0)} f(x), \quad m_\delta(x_0) = \inf_{I_\delta(x_0)} f(x).$$

Лемма 3. *Функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда колебание функции $f(x)$ в точке x_0 равно нулю, т.е. $\omega_f(x_0) = 0$.*

Доказательство. *Необходимость.* От противного. Пусть $f(x)$ непрерывна в точке x_0, но $\omega_f(x_0) = \alpha > 0$, тогда в соответствии с определением точной нижней грани числового множества (см. §1.5) для любой последовательности чисел $\delta_n > 0,\ \delta_n \to 0$ и соответствующей ей последовательности промежутков $I_{\delta_n}(x_0)$ выполняются неравенства

$$\sup_{x,y\in I_{\delta_n}(x_0)} (f(x)-f(y)) = M_{\delta_n}(x_0) - m_{\delta_n}(x_0) \geq \alpha > \frac{\alpha}{2} > 0.$$

Отсюда в соответствии с определением точной верхней грани числового множества (см. §1.5) найдутся пары точек $x_n, y_n \in I_{\delta_n}(x_0)$ такие, что

$$f(x_n) - f(y_n) > \frac{\alpha}{2} > 0.$$

Поскольку длина промежутка $I_{\delta_n}(x_0)$ стремится к нулю при $n \to \infty$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = x_0$. Переходя к пределу при $n \to \infty$ в последнем неравенстве, в силу непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0, получаем

$$f(x_0) - f(x_0) = 0 \geq \frac{\alpha}{2} > 0,$$

или $\alpha = 0$, т.е. $\omega_f(x_0) = 0$.

Достаточность. Если $\omega_f(x_0) = 0$, тогда $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta_\epsilon > 0$ такое, что

$$0 \leq \sup_{x,y\in I_{\delta_\epsilon}(x_0)} (f(x)-f(y)) < \epsilon$$

или $\forall x, y \in I_{\delta_\epsilon}(x_0)$

$$|f(x)-f(y)| < \epsilon.$$

Полагая в этом неравенстве $y = x_0$, получим $|f(x)-f(x_0)| < \epsilon$, т.е. имеем развернутую форму записи определения непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0 (см. §3.6). **Лемма 3 доказана.**

3. Теперь сформулируем и докажем критерий Лебега.

Теорема (критерий Лебега-1). *Для того, чтобы ограниченная на отрезке $[a;b]$ функция $f(x)$ была интегрируемой на нем, необходимо и достаточно, чтобы множество D - точек разрыва этой функции имело лебеговскую меру ноль (т.е. $\mu(D)=0$).*

Доказательство. *Необходимость.* От противного. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$, но множество D не является множеством лебеговской меры ноль, т.е. $\exists \epsilon_0>0$ такое, что $\forall\ \{I_n\},\ D\subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} I_n\ \exists n_0\in N$ что $\delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_{n_0}\geq\epsilon_0$ (естественно n_0 зависит от системы интервалов $\{I_n\}$).

Пусть T - произвольное разбиение $[a;b]$ точками x_k (их конечное число). Из множества частичных отрезков разбиения выделим те из них, внутри которых есть точки множества D (такие всегда есть, т.к. если бы их не было, то все точки множества D оказались бы среди точек разбиения x_k и значит их было бы конечное количество, а тогда по лемме 1 $\mu(D)=0$). На каждом таком частичном отрезке разность $M_i-m_i\geq\alpha>0$ (если $\alpha=0$, то $M_i=m_i$ что означает постоянство функции на частичном отрезке, а значит ее непрерывность на этом отрезке, т.е. отсутствие в нем точек разрыва), где α - некоторое число и сумма длин этих частичных отрезков не меньше ϵ_0, причем такие частичные отрезки содержат все множество D за исключением быть может конечного числа его точек, оказавшихся точками разбиения T. (Если бы сумма длин таких частичных отрезков оказалась бы меньше ϵ_0, то это означало бы существование покрытия множествам D конечной системой интервалов с суммой длин меньше ϵ_0, что противоречит предположению.) Тогда для разбиения T справедливо неравенство $S_T-s_T\geq\alpha\cdot\epsilon_0>0$, а значит $\lim\limits_{\delta_T\to 0}(S_T-s_T)\geq\alpha\cdot\epsilon_0$, что в силу критерия Римана (см. §5.4) и означает неинтегрируемость функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$. Полученное противоречие означает, что необходимость утверждения теоремы доказана.

Достаточность. Пусть множество D имеет лебеговскую меру ноль. Введем обозначения $\epsilon>0,\ M=\sup\limits_{[a;b]}|f(x)|,\ \delta=\frac{\epsilon}{4M},\ \alpha=\frac{\epsilon}{2(b-a)}$. Поскольку множество D имеет меру ноль, то его можно покрыть системой интервалов $I \equiv \{I_n\}$ имеющих суммарную длину меньше δ, тогда на множестве $A \equiv [a;b] \setminus \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} I_n$ функция $f(x)$ непрерывна, поэтому по лемме 3 $\forall x_0 \in A$ $\omega_f(x_0) = 0$, а значит существует интервал $I(x_0)$, покрывающий x_0, на котором $M(x_0) - m(x_0) < \alpha$. В результате получена система интервалов $J \equiv \{I(x_0)\}$ покрывающая множество A. Тогда объединенная система интервалов $I \cup J$ покрывает весь отрезок $[a;b]$ (компактное множество см. §3.9) и по лемме Бореля (см. §3.9) из этой системы можно выделить конечное подпокрытие. Концы интервалов, вошедших в такое подпокрытие, зададут некоторое разбиение T отрезка $[a;b]$. Составим верхнюю и нижнюю интегральные суммы Дарбу для этого разбиения и рассмотрим их разность $S_T - s_T = \sum\limits_{n=1}^{n_T}(M_i - m_i)\Delta x_i$. Теперь рассортируем члены этой суммы на 2 группы: к первой группе отнесем те слагаемые, для которых частичный интервал (x_{i-1}, x_i) является интервалом системы I или частью какого-либо интервала системы I, ко второй группе отнесем все остальные слагаемые. Тогда справедливы неравенства

$$0 < S_T - s_T = \sum_1 + \sum_2 < 2M\delta + \alpha \cdot \sum_2 \Delta x_i < 2M\delta + \alpha \cdot (b-a) =$$

$$= 2M \cdot \frac{\epsilon}{4M} + \frac{\epsilon}{2(b-a)} \cdot (b-a) = \epsilon.$$

Тем самым доказано равенство $\inf\limits_T (S_T - s_T) = 0$, что в свою очередь означает справедливость предельного равенства $\lim\limits_{\delta_T \to 0}(S_T - s_T) = 0$. (См. по этому поводу замечание ниже.) **Теорема доказана.**

Замечание. (дополнение к доказательству критерия Лебега-1) Покажем, что из равенства $\inf\limits_T (S_T - s_T) = 0$ следует предельное равенство $\lim\limits_{\delta_T \to 0}(S_T - s_T) = 0$.

Действительно, $\forall \epsilon > 0$ $\exists T_1$ такое, что $S_{T_1} - s_{T_1} < \frac{\epsilon}{2}$, пусть n - количество точек разбиения T_1. Поскольку функция $f(x)$ ограничена на $[a;b]$, т.е. $\exists M > 0$ что $|f(x)| < M$, тогда введем величину $\delta = \frac{\epsilon}{8nM}$ и рассмотрим произвольное разбиение T_2, мелкость которого $\delta_{T_2} < \delta$. Для нового разбиения $T = T_1 \cap T_2$ в силу свойства 2 интегральных сумм Дарбу (см. §5.4) справедливы неравенства $S_T - s_T \le S_{T_1} - s_{T_1} < \frac{\epsilon}{2}$, $S_T - s_T \le S_{T_2} - s_{T_2}$.

Оценим разность $S_{T_2} - s_{T_2}$, поскольку для такой разности справедливо представление

$$S_{T_2} - s_{T_2} = S_T - s_T + ((S_{T_2} - s_{T_2}) - (S_T - s_T)) < \frac{\epsilon}{2} + ((S_{T_2} - s_{T_2}) - (S_T - s_T)),$$

то достаточно оценить выражение в скобках. Разбиение T является измельчением (продолжение) разбиения T_2 путем добавления некоторых точек разбиения T_1, поэтому разности $(S_{T_2} - s_{T_2})$ и $(S_T - s_T)$ отличаются некоторыми слагаемыми, количество которых не превосходит n (количества отрезков разбиения T_1), но длина каждого такого отрезка разбиения $\Delta x_i < \delta_{T_2} < \delta$, поэтому

$$(S_{T_2} - s_{T_2}) - (S_T - s_T) \leq 4Mn\delta,$$

тогда

$$S_{T_2} - s_{T_2} < \frac{\epsilon}{2} + 4Mn \cdot \frac{\epsilon}{8nM} = \epsilon,$$

что и означает справедливость предельного равенства $\lim\limits_{\delta_T \to 0} (S_T - s_T) = 0$.

Применим критерий Лебега к доказательству следующий двух теорем.

Теорема (об интегрируемости сложной функции). *Если функции* $y = g(x)$ *интегрируема на отрезке* $[a; b]$, $m = \inf\limits_{[a;b]} g(x)$, $M = \sup\limits_{[a;b]} g(x)$, $f(x) \in C[m; M]$, *тогда сложная функция* $f(g(x))$ *интегрируема на* $[a; b]$.

Доказательство. Если $g(x)$ непрерывна в точке x_0, то сложная функция $f(g(x))$ непрерывна в точке x_0 по теореме о непрерывности сложной функции (см. §3.6). Поэтому точки разрыва сложной функции $f(g(x))$ могут находиться лишь среди точек разрыва функции $g(x)$. Поскольку $g(x)$ интегрируема на $[a; b]$, то по критерию Лебега-1 мера множества точек разрыва функции $g(x)$ равна нулю, а это означает (см. лемму 2 текущего параграфа), что мера Лебега множества точек разрыва сложной функции $f(g(x))$ так же равна нулю, что в свою очередь (в соответствии с критерием Лебега-1) означает интегрируемость сложной функции. **Теорема доказана.**

Пример. Применим эту теорему для завершения доказательства свойств 5 и 9 определенного интеграла (см. §5.6). Поскольку функции $f_1(x) = x^2$ и $f_2(x) = |x|$ непрерывны на всей числовой оси, то из интегрируемости функции

$g(x)$ на $[a;b]$ следует интегрируемость на этом же отрезке ее квадрата $g^2(x)$ и абсолютной величины $|g(x)|$.

Теорема (об интегрируемости монотонной функции). *Если функции $y = f(x)$ монотонна на $[a;b]$, тогда $y = f(x)$ интегрируема на этом отрезке $[a;b]$.*

Доказательство. По теореме о точках разрыва монотонной функции (см. §3.6) $y = f(x)$ может иметь на отрезке $[a;b]$ только разрывы первого рода. Пусть x_0 - точка разрыва функции $y = f(x)$, $l_1 = \lim\limits_{x \to x_0-} f(x)$, $l_2 = \lim\limits_{x \to x_0+} f(x)$, $l_1 \neq l_2$, поставим точке x_0 в соответствие рациональное число из интервала с концами l_1 и l_2 (такое всегда найдется по теореме о плотности Q в R см. §1.4), но множество Q - счетно (см. первую теорему Кантора §1.7), а значит множество точек разрыва функции $y = f(x)$ не более чем счетно (см. теорему 2 из §1.7), по лемме 1 текущего параграфа это множество имеет меру нуль, что в силу критерия Лебега означает интегрируемость функции $y = f(x)$. **Теорема доказана.**

4. При исследовании на интегрируемость по Риману той или иной функции иногда удобно использовать *критерий Лебега в иной форме.* Для его формулировки введем множество:

$$D(\alpha) = \{x |\, \omega_f(x) \geq \alpha\}.$$

отметим, что это множество замкнуто.

Теорема (критерий Лебега-2). *Для того, чтобы ограниченная на отрезке $[a;b]$ функция $f(x)$ была интегрируемой по Риману на этом отрезке, необходимо и достаточно, чтобы $\forall \alpha > 0$ $\mu(D(\alpha)) = 0$.*

Доказательство. *Необходимость.* Так как функция $f(x)$ интегрируема по Риману, то $\mu(D) = 0$. Но любое $D(\alpha) \subset D$ и в силу леммы 2 $\mu(D(\alpha)) = 0$.

Достаточность. Для множества $D = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} D(\frac{1}{n})$, но $\mu(D(\frac{1}{n})) = 0$, тогда $\mu(D) = 0$ и по критерию Лебега-1 функция $f(x)$ интегрируема по Риману. **Теорема доказана.**

5.8 Связь между определенным и неопределенным интегралами. Формула Ньютона-Лейбница.

Пусть функция $y = f(x)$ интегрируема на $[a; b]$, тогда в силу свойства 6 (см. §5.6) она интегрируема на любом отрезке $[a; t] \subset [a; b]$ при $t < b$, т.е. можно рассмотреть функцию

$$\Phi(t) = \int\limits_a^t f(x)dx,$$

называемую *определенным интегралом с переменным верхним пределом.*

Теорема (о непрерывности интеграла по верхнему пределу). *Если $y = f(x)$ интегрируема на $[a; b]$, тогда $\Phi(t) \in C[a; b]$.*

Доказательство. Для доказательства воспользуемся определением непрерывности на языке приращений (см. §3.6). Пусть $t \in [a; b]$ и $t + \Delta t \in [a; b]$, тогда приращение функции $\Phi(t)$ в точке t имеет вид

$$\Delta\Phi(t) = \Phi(t + \Delta t) - \Phi(t) = \int\limits_t^{t+\Delta t} f(x)dx.$$

Так как $y = f(x)$ интегрируема на $[a; b]$, то в силу необходимого условия интегрируемости (см. §5.3) $|f(x)| \leq C\ \forall x \in [a; b]$ при некотором $C \geq 0$, тогда $0 \leq |\Delta\Phi(t)| \leq C \cdot \Delta t$. Отсюда при $\Delta t \to 0$ получаем в пределе $\Delta\Phi(t) \to 0$, т.е. $\Phi(t) \in C[a; b]$. **Теорема доказана.**

Теорема (о дифференцируемости интеграла по верхнему пределу). *Если $f(t) \in C[a; b]$, то $\Phi'(t) = f(t)$.*

Доказательство. Найдем предел разностного отношения $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\Phi(t)}{\Delta t}$. Для этого оценим разность

$$\Big|\frac{\Delta\Phi(t)}{\Delta t} - f(t)\Big| = \Big|\frac{1}{\Delta t}\int\limits_t^{t+\Delta t} f(x)dx - \frac{1}{\Delta t}\int\limits_t^{t+\Delta t} f(t)dx\Big| \leq \frac{1}{|\Delta t|} \cdot \int\limits_t^{t+\Delta t} |f(x) - f(t)|dx.$$

В силу равномерной непрерывности функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ (см. теорему Кантора §3.8)

$$\Big|\frac{\Delta\Phi(t)}{\Delta t} - f(t)\Big| \leq \frac{1}{|\Delta t|} \cdot \epsilon \cdot |\Delta t| = \epsilon \text{ при } \Delta t < \delta_\epsilon,$$

т.е. $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\Phi(t)}{\Delta t}=f(t)$. **Теорема доказана.**

В силу доказанных теорем, $\Phi(t)$ является первообразной для $f(t)$, т.е. справедливо равенство

$$\Phi(t)=\int\limits_a^t f(x)dx=F(t)+C,$$

где $F(t)$ - некоторая первообразная для $f(t)$ (см. §5.1). Полагая $t=a$, имеем $0=F(a)+C\ \Rightarrow\ C=-F(a)$, т.е.

$$\int\limits_a^t f(x)dx=F(t)-F(a).$$

Отсюда

$$\int\limits_a^b f(x)dx=F(b)-F(a),$$

полученная формула называется *формулой Ньютона-Лейбница* или *основной формулой интегрального исчисления*, другая форма записи этой же формулы

$$\int\limits_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b.$$

5.9 Замена переменных и интегрирование по частям в определенном интеграле.

Теорема 1. *Пусть* $f(x)\in C[a;b]$, $\varphi(t)\in C^1[\alpha,\beta]$, *причем* $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$ *и* $\forall t\in(\alpha,\beta)$ $a<\varphi(t)<b$, *тогда*

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Доказательство. В силу условий теоремы каждый из интегралов, фигурирующих в формуле, существует (см. §5.5). Обозначим через $F(x)$ некоторую первообразную для функции $f(x)$, тогда $F(\varphi(t))$ - первообразная для функции $f(\varphi(t))\varphi'(t)$. В силу формулы Ньютона-Лейбница имеем

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

и

$$\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a),$$

т.е.

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Пусть* $u(x), v(x) \in C^1[a;b]$, *тогда*

$$\int\limits_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b vdu.$$

Доказательство. В силу условий теоремы оба интеграла, фигурирующих в формуле, существуют (см. §5.5), поэтому

$$\int\limits_a^b (uv)'dx = \int\limits_a^b (uv' + u'v)dx = \int\limits_a^b udv + \int\limits_a^b vdu,$$

с другой стороны в силу формулы Ньютона-Лейбница

$$\int\limits_a^b (uv)'dx = uv\Big|_a^b.$$

Теорема 2 доказана.

5.10 Теоремы о среднем для определенного интеграла.

Теорема 1 (первая теорема о среднем). *Пусть функции* $y = f(x)$ *и* $y = g(x)$ *интегрируемы на отрезке* $[a;b]$, $m \le f(x) \le M$, $g(x)$ *- знакопостоянна на* $[a;b]$, *тогда существует число* μ, $m \le \mu \le M$ *такое, что*

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = \mu \cdot \int\limits_a^b g(x)dx.$$

Доказательство. Пусть для определенности $g(x) \geq 0$ $\forall x \in [a;b]$, тогда справедливо двойное неравенство

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x),$$

проинтегрировав которое в пределах от a до b, получим в силу свойства 8 определенного интеграла (см. §5.6)

$$m\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M\int_a^b g(x)dx.$$

Так как $g(x) \geq 0$, то при $g(x) \not\equiv 0$ в силу того же свойства 8

$$\int_a^b g(x)dx > 0.$$

Поделив последнее (двойное) неравенство на $\int_a^b g(x)dx$, получим

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \leq M.$$

Выбрав теперь в качестве μ величину

$$\mu = \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx},$$

получим требуемое равенство. **Теорема 1 доказана.**

Следствие 1. *Если $f(x) \in C[a;b]$, то существует точка $\xi \in [a;b]$ такая, что*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = f(\xi) \text{ } \textit{или} \text{ } \int_a^b f(x)dx = f(\xi)\cdot(b-a).$$

Доказательство. Так как $f(x) \in C[a;b]$, то $f(x)$ достигает на $[a;b]$ свои максимальное M и минимальное m значения (см. теорему Вейерштрасса §3.7), т.е. $m \leq f(x) \leq M$. Повторяя все рассуждения доказанной теоремы с заменой $g(x) \equiv 1$, получим

$$m \leq \frac{\int\limits_a^b f(x)dx}{b-a} \leq M.$$

По теореме Больцано-Коши (см. §3.7) $\exists \xi \in [a;b]$ такое, что

$$\frac{1}{b-a} \int\limits_a^b f(x)dx = f(\xi).$$

Следствие 1 доказано.

Замечание 1. Величину $\frac{1}{b-a} \int\limits_a^b f(x)dx$ называют *средним значением функции* функции $y = f(x)$ на отрезке $[a;b]$, этим о объясняется название теоремы.

Замечание 2. *(геометрический смысл теоремы о среднем)* При $f(x) \geq 0$ величина $\int\limits_a^b f(x)dx$ численно равна площади криволинейной трапеции, ограниченной осью абсцисс, прямыми $x = a,\ x = b$ и графиком функции $y = f(x)$, а произведение $f(\xi) \cdot (b-a)$ численно равно площади прямоугольника со сторонами $f(\xi)$ и $(b-a)$, т.е. по теореме о среднем эти площади равны.

Следствие 2. *Пусть функция* $f(x) \in C[a;b],\ g(x)$ *- интегрируема и знакопостоянна на* $[a;b]$, *тогда* $\exists \xi \in [a;b]$ *такое, что*

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \cdot \int\limits_a^b g(x)dx.$$

Доказательство. Так как $f(x) \in C[a;b]$, то по теореме Вейерштрасса $f(x)$ достигает на $[a;b]$ свои максимальное M и минимальное m значения, т.е. $m \leq f(x) \leq M$. По первой теореме о среднем найдется $\mu,\ m \leq \mu \leq M$ такое, что

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = \mu \cdot \int\limits_a^b g(x)dx,$$

а по теореме Больцано-Коши $\exists \xi \in [a;b]$ такое, что $\mu = f(\xi)$, откуда и получаем требуемое утверждение. **Следствие 2 доказано.**

Теорема 2 (вторая теорема о среднем). *Пусть функции* $y = f(x)$ *и* $y = g(x)$ *интегрируемы на отрезке* $[a;b]$, *функция* $g(x) \geq 0$ *и не убывает на* $[a;b]$, *тогда существует число* $c \in [a;b]$ *такое, что*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(b) \cdot \int_c^b f(x)dx.$$

Доказательство. Пусть T произвольное разбиение отрезка $[a;b]$ мелкости $\delta_T,\ \Delta x_i \leq \delta_T$, составим сумму

$$\sigma(f,g,T) = \sum_{i=1}^{n_T} g(x_i) \cdot \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx,$$

обозначим $M = \sup\limits_{[a;b]} |f(x)|$ (эта величина существует и конечна в силу необходимого условия интегрируемости (см. §5.3)). Составим и оценим разность

$$I = \sigma(f,g,T) - \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

В силу свойства 9 определенного интеграла

$$0 \leq |I| = \Big| \sum_{i=1}^{n_T} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (g(x_i) - g(x))f(x)dx \Big| \leq \sum_{i=1}^{n_T} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |g(x_i) - g(x)||f(x)|dx.$$

Поскольку функция $g(x)$ не убывает, то

$$0 \leq |I| \leq \sum_{i=1}^{n_T} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (g(x_i) - g(x_{i-1}))M dx = M \sum_{i=1}^{n_T} (g(x_i) - g(x_{i-1}))\Delta x_i \leq$$

$$\leq M\delta_T \sum_{i=1}^{n_T} (g(x_i) - g(x_{i-1})) = M(g(b) - g(a))\delta_T.$$

Если $\delta_T \to 0$, то

$$\lim_{\delta_T \to 0} \sigma(f,g,T) = \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

В силу теоремы о непрерывности определенного интеграла с переменным (нижним) пределом (см. §5.8) функция $\Phi(t) = \int\limits_t^b f(x)dx$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, а значит достигает на нем свои максимальное и минимальное значения $\Phi(\alpha) = \min\limits_{[a;b]} \Phi(t),\ \Phi(\beta) = \max\limits_{[a;b]} \Phi(t),\ \alpha,\beta \in [a;b]$, тогда $\forall t \in [a;b]$ справедливо неравенство $\Phi(\alpha) \le \Phi(t) \le \Phi(\beta)$. С помощью введенной функции $\Phi(t)$ получим иное представление для суммы $\sigma(f,g,T)$

$$\sigma(f,g,T) = \sum_{i=1}^{n_T} g(x_i) \cdot \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx = \sum_{i=1}^{n_T} g(x_i) \cdot \Big(\int\limits_{x_{i-1}}^{b} f(x)dx - \int\limits_{x_i}^{b} f(x)dx \Big) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n_T} g(x_i) \cdot \Phi(x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n_T} g(x_i) \cdot \Phi(x_i) =$$

$$= g(x_1)\Phi(a) + \sum_{i=2}^{n_T} g(x_i) \cdot \Phi(x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n_T-1} g(x_i) \cdot \Phi(x_i) - g(b)\Phi(b).$$

Так как $\Phi(b) = 0$, то после изменения пределов суммирования в первой сумме, получаем

$$\sigma(f,g,T) = g(x_1)\Phi(a) + \sum_{i=1}^{n_T-1} g(x_{i+1}) \cdot \Phi(x_i) - \sum_{i=1}^{n_T-1} g(x_i) \cdot \Phi(x_i) =$$

$$= g(x_1)\Phi(a) + \sum_{i=1}^{n_T-1} (g(x_{i+1}) - g(x_i)) \cdot \Phi(x_i).$$

Поскольку $g(x_1) \ge 0,\ g(x_{i+1}) - g(x_i) \ge 0$ и $\Phi(\alpha) \le \Phi(t) \le \Phi(\beta)$, то

$$\Phi(\alpha) \cdot g(b) \le \sigma(f,g,T) \le \Big(g(x_1) + \sum_{i=1}^{n_T-1} (g(x_{i+1}) - g(x_i)) \Big) \cdot \Phi(\beta) = \Phi(\beta) \cdot g(b).$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $\delta_T \to 0$ в силу свойства монотонности операции предельного перехода, получаем

$$\Phi(\alpha) \cdot g(b) \le \int\limits_a^b f(x)g(x)dx \le \Phi(\beta) \cdot g(b)$$

и поскольку $g(b) > 0$

$$\Phi(\alpha) \le \frac{1}{g(b)} \int\limits_a^b f(x)g(x)dx \le \Phi(\beta).$$

Как выше было отмечено $\Phi(t) \in C[a;b]$, поэтому по теореме Больцано-Коши $\exists c \in [a;b]$ такая, что

$$\Phi(c) = \frac{1}{g(b)} \int\limits_a^b f(x)g(x)dx$$

откуда и следует утверждение теоремы. **Теорема 2 доказана.**

Аналогично доказывается следующая теорема

Теорема 2'. *Пусть функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a;b]$, функция $g(x) \geq 0$ и не возрастает на $[a;b]$, тогда существует число $c \in [a;b]$ такое, что*

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = g(a) \cdot \int\limits_a^c f(x)dx.$$

Следствие. *Если функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a;b]$, функция $g(x)$ монотонна на $[a;b]$, тогда существует число $c \in [a;b]$ такое, что*

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = g(a) \cdot \int\limits_a^c f(x)dx + g(b) \cdot \int\limits_c^b f(x)dx.$$

Доказательство. Если $g(x)$ не убывает на $[a;b]$, то функция $g_1(x) = g(x) - g(a) \geq 0$ не убывает на $[a;b]$, тогда по теореме 2 существует число $c \in [a;b]$ такое, что

$$\int\limits_a^b f(x)g_1(x)dx = g_1(b) \cdot \int\limits_c^b f(x)dx.$$

Подставив в эту формулу выражение для $g_1(x)$, получим утверждение следствия.

Если $g(x)$ не возрастает на $[a;b]$, то функция $g_1(x) = g(x) - g(b) \geq 0$ не возрастает на $[a;b]$ и значит к паре функций $f(x)$ и $g_1(x)$ применима теорема 2', откуда и вытекает доказываемая формула. **Следствие доказано.**

Теорема 3 (третья теорема о среднем). *Если* $f(x) \in C[a;b]$, $g(x) \in C^1[a;b]$, $g'(x) \geq 0$ *на* $[a;b]$, *тогда существует число* $c \in [a;b]$ *такое, что*

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = g(a) \cdot \int\limits_a^c f(x)dx + g(b) \cdot \int\limits_c^b f(x)dx.$$

Доказательство. Пусть $\Phi(t) = \int\limits_a^t f(x)dx$, очевидно $\Phi(a) = 0$ и $\Phi(t)$ дифференцируема по t (см. §5.8), причем $\Phi'(t) = f(t)$ (в силу непрерывности $f(x)$, $\Phi(x) \in C^1[a;b]$), поэтому

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = \int\limits_a^b g(x)d\Phi(x) = g(x)\Phi(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b \Phi(x)g'(x)dx.$$

По теореме 1 существует число $c \in [a;b]$ такое, что

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = g(x)\Phi(x)\Big|_a^b - \Phi(c)\int\limits_a^b g'(x)dx = g(b)\Phi(b) - g(a)\Phi(a) -$$

$$-\Phi(c)(g(b) - g(a)) = g(a)(\Phi(c) - \Phi(a)) + g(b)(\Phi(b) - \Phi(c)) =$$

$$= g(a) \cdot \int\limits_a^c f(x)dx + g(b) \cdot \int\limits_c^b f(x)dx.$$

Теорема 3 доказана.

5.11 Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме. Интегральные неравенства.

Теорема (формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме). *Пусть* $n \in N$, $f(x) \in C^{(n+1)}[a;b]$, *тогда* $\forall x \in [a;b]$ *справедлива формула*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{1}{n!}\int\limits_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt.$$

Доказательство. Проведем методом математической индукции. При $n = 0$

$$f(x) = f(a) + \int\limits_a^x f'(t)dt$$

формула представляет собой формулу Ньютона-Лейбница, т.е. при $n = 0$ теорема справедлива.

Пусть формула справедлива при $n = k$, докажем ее при $n = k + 1$. Поскольку по предположению индукции

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \cdots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{1}{k!}\int\limits_a^x f^{(k+1)}(t)(x-t)^k dt,$$

то проинтегрировав по частям остаточный член, получим

$$\frac{1}{k!}\int\limits_a^x f^{(k+1)}(t)(x-t)^k dt = \left\{ \begin{array}{ll} u = f^{(k+1)}(t) & dv = (x-t)^k dt \\ du = f^{(k+2)}(t)dt & v = -\frac{(x-t)^{k+1}}{k+1} \end{array} \right\} =$$

$$\frac{1}{k!}\Big\{ -\frac{(x-t)^{k+1}}{k+1} \cdot f^{(k+1)}(t)\Big|_a^x + \frac{1}{k+1}\int\limits_a^x f^{(k+2)}(t)(x-t)^{k+1}dt \Big\} =$$

$$= \frac{f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!}(x-a)^{k+1} + \frac{1}{(k+1)!}\int\limits_a^x f^{(k+2)}(t)(x-t)^{k+1}dt,$$

что и завершает доказательство. **Теорема доказана.**

Сформулируем и докажем несколько теорем об интегральных неравенствах.

Теорема (неравенство Гельдера). *Пусть* $p > 1,\ q > 1,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,\ y = f(x)$ *и* $y = g(x)$ *- интегрируемы на* $[a; b]$, *тогда справедливо неравенство*

$$\int\limits_a^b |f(x)g(x)|dx \leq \Big(\int\limits_a^b |f(x)|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}} \cdot \Big(\int\limits_a^b |g(x)|^q dx\Big)^{\frac{1}{q}}$$

Доказательство. В §4.7 было доказано неравенство Юнга: $\forall t \geq 0,\ \alpha > 0,\ \beta > 0,\ \alpha + \beta = 1$ выполняется неравенство $t^\alpha \leq \alpha t + \beta$, полагая в котором

$t = \tau^{\frac{1}{\alpha}},\ \tau \geq 0$ получаем другую форму записи $\tau \leq \alpha \cdot \tau^{\frac{1}{\alpha}} + \beta$. Пусть $\tau = |f_1(x)| \cdot |g_1(x)|^{-\frac{1}{p-1}},\ \alpha = \frac{1}{p},\ \beta = \frac{1}{q}$, тогда

$$|f_1(x)| \cdot |g_1(x)|^{-\frac{1}{p-1}} \leq \frac{1}{p}|f_1(x)|^p \cdot |g_1(x)|^{-\frac{p}{p-1}} + \frac{1}{q} =$$

$$= \frac{|f_1(x)|^p}{p} \cdot |g_1(x)|^{-\frac{1}{1-\frac{1}{p}}} + \frac{1}{q} = \frac{|f_1(x)|^p}{p} \cdot |g_1(x)|^{-q} + \frac{1}{q}.$$

Умножим это неравенство на $|g_1(x)|^q \geq 0$,

$$|f_1(x)| \cdot |g_1(x)|^{-\frac{1}{p-1}+q} \leq \frac{|f_1(x)|^p}{p} + \frac{|g_1(x)|^q}{q},$$

однако

$$-\frac{1}{p-1} + q = -\frac{1}{p(1-\frac{1}{p})} + q = -\frac{q}{p} + q = g(1 - \frac{1}{p}) = \frac{q}{q} = 1,$$

поэтому

$$|f_1(x)| \cdot |g_1(x)| \leq \frac{|f_1(x)|^p}{p} + \frac{|g_1(x)|^q}{q}.$$

Положим в этом неравенстве

$$f_1(x) = \frac{f(x)}{\left(\int\limits_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}}, \quad g_1(x) = \frac{g(x)}{\left(\int\limits_a^b |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}},$$

тогда

$$\frac{|f(x)| \cdot |g(x)|}{\left(\int\limits_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int\limits_a^b |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{|f(x)|^p}{p \cdot \int\limits_a^b |f(x)|^p dx} + \frac{|g(x)|^q}{q \cdot \int\limits_a^b |f(x)|^q dx}.$$

Проинтегрировав это неравенство по $[a; b]$, получим

$$\frac{\int\limits_a^b |f(x) \cdot g(x)| dx}{\left(\int\limits_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int\limits_a^b |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

откуда и следует неравенство Гельдера. **Теорема доказана.**

Следствие (неравенство Коши-Буняковского). *Если в условиях доказанной теоремы положить $p = q = 2$, то неравенство Гельдера прини-*

мает следующий вид

$$\int\limits_a^b |f(x)\cdot g(x)|dx \le \sqrt{\int\limits_a^b f^2(x)dx}\cdot\sqrt{\int\limits_a^b g^2(x)dx},$$

называемый неравенством Коши-Буняковского.

Замечание. В условиях доказанной теоремы в силу свойства 9 определенного интеграла справедливо неравенство

$$\Big|\int\limits_a^b f(x)g(x)dx\Big| \le \Big(\int\limits_a^b |f(x)|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}}\cdot\Big(\int\limits_a^b |g(x)|^q dx\Big)^{\frac{1}{q}}$$

Теорема (неравенство Минковского или обобщенное неравенство треугольников). *Если $p \ge 1$, функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ интегрируемы на $[a;b]$, тогда справедливо неравенство*

$$\Big(\int\limits_a^b |f(x)+g(x)|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}} \le \Big(\int\limits_a^b |f(x)|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\int\limits_a^b |g(x)|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Доказательство.

$$\int\limits_a^b |f(x)+g(x)|^p dx = \int\limits_a^b |f(x)+g(x)|^{p-1}\cdot|f(x)+g(x)|dx \le$$

$$\le \int\limits_a^b |f(x)+g(x)|^{p-1}\cdot|f(x)|dx + \int\limits_a^b |f(x)+g(x)|^{p-1}\cdot|g(x)|dx$$

Далее в силу неравенства Гельдера

$$\int\limits_a^b |f(x)+g(x)|^p dx \le \Big(\int\limits_a^b |f(x)+g(x)|^{q(p-1)}dx\Big)^{\frac{1}{q}}\cdot\Big(\int\limits_a^b |f(x)|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}} +$$

$$+\Big(\int\limits_a^b |f(x)+g(x)|^{q(p-1)}dx\Big)^{\frac{1}{q}}\cdot\Big(\int\limits_a^b |g(x)|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}},$$

где $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, т.е. $\frac{1}{q}=1-\frac{1}{p} \Leftrightarrow q=\frac{p}{p-1}$ поэтому

$$\int\limits_a^b |f(x)+g(x)|^p dx \le \Big(\int\limits_a^b |f(x)+g(x)|^p dx\Big)^{\frac{1}{q}}\cdot$$

$$\cdot\Big\{\Big(\int\limits_a^b |f(x)|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\int\limits_a^b |g(x)|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}}\Big\}$$

или

$$\Big(\int\limits_a^b |f(x)+g(x)|^p dx\Big)^{1-\frac{1}{q}} \leq \Big(\int\limits_a^b |f(x)|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\int\limits_a^b |g(x)|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}}$$

что и доказывает неравенство. **Теорема доказана.**

Замечание. Методом математической индукции можно доказать более общие неравенства

$$\Big(\int\limits_a^b |f_1(x)+\dots+f_n(x)|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}} \leq \Big(\int\limits_a^b |f_1(x)|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}} + \dots + \Big(\int\limits_a^b |f_n(x)|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}},$$

$$\sqrt{\Big(\int\limits_a^b f_1(x)dx\Big)^2 + \dots + \Big(\int\limits_a^b f_n(x)dx\Big)^2} \leq \int\limits_a^b \sqrt{f_1^2(x)+\cdots f_n^2(x)}dx,$$

в предположении интегрируемости функций $f_1(x), \dots, f_n(x)$ на отрезке $[a;b]$.

5.12 Понятие несобственных интегралов 1 и 2 рода. Критерий Коши сходимости несобственных интегралов.

При построении определенного интеграла использовались: а) *конечность* (по длине) отрезка $[a;b]$, по которому производится интегрирование; б) *ограниченность* функции $y = f(x)$ на $[a;b]$ (необходимое условие интегрируемости см. §5.3). Обобщение интеграла Римана на случай бесконечного промежутка интегрирования приводит к понятию несобственного интеграла 1-го рода, а на случай неограниченности функции в окрестности некоторых точек к понятию несобственного интеграла 2-го рода.

Пусть функция $y = f(x)$ определена на $[a;+\infty)$ (или на $(-\infty;a]$, или на $(-\infty;+\infty)$) и $\forall A \geq a$ (соответственно $\forall A \leq a$ или $\forall A',\ A'',\ A' \leq A''$) существует интеграл Римана

$$F(A) = \int\limits_a^A f(x)dx\ \Big(F_1(A) = \int\limits_A^a f(x)dx \text{ или } F_2(A', A'') = \int\limits_{A'}^{A''} f(x)dx\Big),$$

т.е. получили функцию от A (или от $A',\ A''$).

Определение. Если существует предел $\lim\limits_{A\to+\infty} F(A)$ (соответственно $\lim\limits_{A\to-\infty} F_1(A)$ или $\lim\limits_{\substack{A''\to+\infty\\ A'\to-\infty}} F_2(A', A'')$), то он называется *несобственным интегралом 1-го рода* от функции $y = f(x)$ и обозначается

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A\to+\infty}\int\limits_a^A f(x)dx$$

$$\Big(\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx = \lim_{A\to-\infty}\int\limits_A^a f(x)dx \text{ или } \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{A''\to+\infty\\ A'\to-\infty}}\int\limits_{A'}^{A''} f(x)dx\Big).$$

Если этот предел конечен, то интеграл называется *сходящимся*, если не существует, то *расходящимся*. Проиллюстрируем сказанное, исследовав на сходимость следующие интегралы.

Пример 1.

$$I_1 = \int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2} = \lim_{A\to+\infty}\int\limits_1^A\frac{dx}{x^2} = \lim_{A\to+\infty}\Big(-\frac{1}{x}\Big)\Big|_1^A = \lim_{A\to+\infty}\Big(-\frac{1}{A}+1\Big) = 1$$

Интеграл I_1 сходится.

Пример 2.

$$I_2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\substack{A''\to+\infty\\ A'\to-\infty}}\int\limits_{A'}^{A''}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\substack{A''\to+\infty\\ A'\to-\infty}}\Big(\operatorname{arctg} x\Big|_{A'}^{A''}\Big) =$$

$$= \lim_{\substack{A''\to+\infty\\ A'\to-\infty}}\Big(\operatorname{arctg} A'' - \operatorname{arctg} A'\Big) = \frac{\pi}{2} - \Big(-\frac{\pi}{2}\Big) = \pi$$

Интеграл I_2 сходится.

Пример 3. Пусть $a > 0$, тогда

$$I_3 = \int\limits_a^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{A\to+\infty}\int\limits_a^A\frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{A\to+\infty}\left\{\begin{array}{ll} -\frac{1}{(\alpha-1)x^{\alpha-1}}\Big|_a^A, & \alpha\neq 1,\\ \ln x\Big|_a^A, & \alpha = 1\end{array}\right\} =$$

$$= \lim_{A\to+\infty}\left\{\begin{array}{ll} \frac{1}{1-\alpha}\Big(\frac{1}{A^{\alpha-1}} - \frac{1}{a^{\alpha-1}}\Big), & \alpha\neq 1,\\ \ln A - \ln a, & \alpha = 1\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{ll} \frac{a^{1-\alpha}}{\alpha-1}, & \alpha > 1,\\ +\infty, & \alpha\leq 1\end{array}\right.$$

Итак, при $\alpha > 1$ интеграл I_3 сходится, а при $\alpha \leq 1$ интеграл I_3 расходится.

Пример 4.

$$I_4 = \int\limits_a^{+\infty} \cos x dx = \lim_{A\to+\infty} \int\limits_a^{A} \cos x dx = \lim_{A\to+\infty} \sin x \Big|_a^A = \lim_{A\to+\infty} (\sin A - \sin a)$$

полученный предел не существует, поэтому интеграл I_4 расходится.

Пример 5.

$$I_5 = \int\limits_a^{+\infty} e^{\alpha x} dx = \lim_{A\to+\infty} \frac{e^{\alpha x}}{\alpha}\Big|_a^A = \lim_{A\to+\infty} \frac{e^{A\alpha} - e^{a\alpha}}{\alpha} = \begin{cases} -\frac{e^{a\alpha}}{\alpha}, & \alpha < 0, \\ +\infty, & \alpha \geq 0 \end{cases}$$

Таким образом, при $\alpha < 0$ интеграл I_5 сходится, при $\alpha \geq 0$ расходится.

Пример 6. Пусть $a > 1$, тогда

$$I_6 = \int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^\alpha x} = \lim_{A\to+\infty} \int\limits_a^{A} \frac{d(\ln x)}{\ln^\alpha x} = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} \ln^{1-\alpha} a, & \alpha > 1, \\ +\infty, & \alpha \leq 1 \end{cases}$$

При $\alpha > 1$ интеграл I_6 сходится, при $\alpha \leq 1$ расходится.

Пусть функция $y = f(x)$ определена на $[a; b)$ (или на $(a; b]$), неограничена при $x \to b-$ (или $x \to a+$), интегрируема (а значит ограничена) на любом отрезке $[a; b-\alpha]$ (или $[a+\alpha; b]$), в этом случае точка b (или a) называется *особой* и определена функция

$$F(\epsilon) = \int\limits_a^{b-\epsilon} f(x)dx \ \left(\text{или } F_1(\epsilon) = \int\limits_{a+\epsilon}^{b} f(x)dx \right)$$

Определение. Если существует предел $\lim\limits_{\epsilon\to0+} F(\epsilon)$ (соответственно $\lim\limits_{\epsilon\to0+} F_1(\epsilon)$), то он называется *несобственным интегралом 2-го рода* от функции $y = f(x)$ по отрезку $[a; b]$ и обозначается

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\epsilon\to0+} \int\limits_a^{b-\epsilon} f(x)dx \ \left(\text{или } \int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\epsilon\to0+} \int\limits_{a+\epsilon}^{b} f(x)dx \right)$$

Если этот предел конечен, то интеграл называется *сходящимся*, если не существует, то *расходящимся*.

Пример 7.

$$I_7 = \int\limits_a^b \frac{dx}{(x-b)^\alpha} = \lim_{\epsilon\to 0+} \int\limits_a^{b-\epsilon} \frac{dx}{(x-b)^\alpha} = \lim_{\epsilon\to 0+} \left\{ \begin{array}{ll} -\frac{1}{(\alpha-1)(x-b)^{\alpha-1}}\Big|_a^{b-\epsilon}, & \alpha \neq 1, \\ \ln|x-b|\Big|_a^{b-\epsilon}, & \alpha = 1 \end{array} \right\} =$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0+} \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{(-\epsilon)^{\alpha-1}} - \frac{1}{(a-b)^{\alpha-1}}\right), & \alpha \neq 1, \\ \ln|\epsilon| - \ln|a-b|, & \alpha = 1 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{\alpha-1}\cdot\frac{1}{(a-b)^{\alpha-1}}, & \alpha < 1, \\ +\infty, & \alpha \geq 1. \end{array} \right.$$

Итак, при $\alpha < 1$ интеграл I_7 сходится, а при $\alpha \geq 1$ интеграл I_7 расходится.

Пример 8.

$$I_8 = \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\epsilon\to 0+} \int\limits_0^{1-\epsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\epsilon\to 0+} \arcsin x\Big|_0^{1-\epsilon} =$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0+} \arcsin(1-\epsilon) = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}.$$

Интеграл I_8 сходится.

В соответствии с критерием Коши существования предела функции (см. §3.3) получаем

Теорема (критерий Коши). *Несобственный интеграл 2-го рода сходится тогда и только тогда, когда* $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta_\epsilon > 0$ *такое, что* $\forall (b-\epsilon'')$ *и* $\forall (b-\epsilon')$ *таких, что* $0 < |(b-\epsilon'') - b| = |\epsilon''| < \delta_\epsilon$ *и* $0 < |(b-\epsilon') - b| = |\epsilon'| < \delta_\epsilon$ *выполняется неравенство*

$$|F(\epsilon'') - F(\epsilon')| = \Big|\int\limits_{b-\epsilon'}^{b-\epsilon''} f(x)dx\Big| < \epsilon.$$

Аналогично для несобственных интегралов 1-го рода

Теорема (критерий Коши). *Несобственный интеграл 1-го рода сходится тогда и только тогда, когда* $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta_\epsilon > 0$ *такое, что* $\forall A_1 > \delta_\epsilon$ *и* $\forall A_2 > \delta_\epsilon$ *выполняется неравенство*

$$|F(A_1) - F(A_2)| = \Big|\int\limits_{A_1}^{A_2} f(x)dx\Big| < \epsilon.$$

Критерий Коши будучи универсальным не очень удобен при решении задач, поэтому возникает необходимость в более простых достаточных критериях.

5.13 Достаточные признаки сходимости несобственных интегралов.

Теорема (признак сравнения в форме неравенств). *Если на луче* $[a;+\infty)$ *выполняется неравенство* $|f(x)| \le g(x)$, *то из сходимости интеграла* $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ *следует сходимость интеграла* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$, *а из расходимости интеграла* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ *расходимость интеграла* $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$.

Доказательство. Выпишем следующую цепочку неравенств при $A_2 > A_1 > a$

$$\Big|\int\limits_{A_1}^{A_2} f(x)dx\Big| \le \int\limits_{A_1}^{A_2} |f(x)|dx \le \int\limits_{A_1}^{A_2} g(x)dx.$$

Если интеграл $\int\limits_a^{\infty} g(x)dx$ сходится, то в силу критерия Коши $\forall\epsilon > 0$ $\exists\delta_\epsilon > 0$ такое, что $\forall A_1 > \delta_\epsilon$ и $\forall A_2 > \delta_\epsilon$ выполняется неравенство

$$\Big|\int\limits_{A_1}^{A_2} f(x)dx\Big| \le \int\limits_{A_1}^{A_2} g(x)dx < \epsilon,$$

т.е. выполняется критерий Коши сходимости интеграла от функции $f(x)$.

Если интеграл $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$ расходится, то в силу критерия Коши $\exists\epsilon_0 > 0$ такое, что $\forall\delta_\epsilon > 0$ найдутся $A_1 > \delta_\epsilon$ и $A_2 > \delta_\epsilon$, для которых выполняется неравенство

$$\epsilon_0 \le \Big|\int\limits_{A_1}^{A_2} f(x)dx\Big| \le \int\limits_{A_1}^{A_2} g(x)dx,$$

т.е. для интеграла $\int\limits_a^{\infty} g(x)dx$ выполняется отрицание критерия Коши сходимости несобственного интеграла от функции $g(x)$. **Теорема доказана.**

Следствие (признак сравнения в предельной форме). *Если существует конечный предел* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\cdot x^\alpha = c > 0$, *то при* $\alpha > 1$ *интеграл*

$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ *сходится, при* $\alpha \le 1$ *интеграл* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ *расходится.*

Доказательство. Рассмотрим вначале случай $\alpha > 1$, тогда из существования предела $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\cdot x^\alpha = c > 0$ следует, что функция $f(x)\cdot x^\alpha$ ограничена при $x \to +\infty$, т.е. $\exists C_0 > 0$ такая, что $0 < f(x)\cdot x^\alpha \le C_0$ при $\forall x \ge A$ (начиная с некоторого $A > 0$), тогда при $x \ge A$ выполняется неравенство

$$0 < f(x) \le \frac{C_0}{x^\alpha}.$$

Но интеграл $\int\limits_a^{+\infty} \frac{C_0}{x^\alpha}dx$ сходится при $\alpha > 1$ (см. пример 3 из предыдущего §5.12), откуда в силу признака сравнения получаем требуемое утверждение.

Пусть $\alpha \le 1$. Так как $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\cdot x^\alpha = c > 0$, то $\exists \epsilon_0 > 0$ такое, что $c-\epsilon_0 > 0$ и для этого $\epsilon_0 > 0$ существует $\delta_{\epsilon_0} > 0$ такое, что $\forall x > \delta_{\epsilon_0}$ выполняется неравенство $|f(x)\cdot x^\alpha - c| < \epsilon_0$ или $c - \epsilon_0 < f(x)\cdot x^\alpha < c + \epsilon_0$, т.е.

$$0 < \frac{c-\epsilon_0}{x^\alpha} < f(x)$$

откуда с учетом примера 3 из предыдущего §5.12 и признака сравнения получаем требуемое утверждение. **Следствие доказано.**

Замечание 1. Такие же утверждения справедливы для несобственных интегралов 2-го рода.

Замечание 2. Случай $c < 0$ рассматривается аналогично.

Пример 1 (интеграл Пуассона). Несобственный интеграл 1-го рода вида

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx$$

называется *интегралом Пуассона* или *Эйлера-Пуассона.* Докажем сходимость этого интеграла. Для этого предварительно докажем справедливость вспомогательного неравенства $e^{x^2} \ge 1 + x^2,\ \forall x \in R$. Действительно, рассмотрим функцию $f(x) = e^{x^2} - x^2,\ x \in R$. Так как $f'(x) = 2x(e^{x^2} - 1)$, то $x = 0$ является точкой глобального минимума функции $f(x)$, поэтому $\forall x \in R$ выполняется неравенство $f(x) \ge f(0)$ или $e^{x^2} - x^2 \ge 1$, т.е. $e^{x^2} \ge 1 + x^2$. Отсюда следует, что $\forall x \in R$ справедливо неравенство

$$e^{-x^2} \le \frac{1}{1+x^2}.$$

Но интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ сходится (см. пример 2 из предыдущего §5.12), поэтому в силу признака сравнения интеграл Пуассона сходится, причем

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Пример 2. Функция $f(x) = x^n \cdot e^{-x^2}$ положительна при $x > 0$. С помощью правила Лопиталя можно проверить, что $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{n+2} \cdot e^{-x^2} = 0$, т.е. $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta_\epsilon > 0$ такое, что $\forall x > \delta_\epsilon$ выполняется неравенство $x^{n+2} \cdot e^{-x^2} < \epsilon$ или $x^n \cdot e^{-x^2} < \frac{\epsilon}{x^2}$ при $x > \delta_\epsilon$. Поскольку несобственный интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\epsilon}{x^2} dx$ сходится (см. пример 1 из предыдущего §5.12), то в силу признака сравнения сходится интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} x^n \cdot e^{-x^2} dx$, $\forall n \in N$, а вместе с ним и интеграл

$$\int\limits_{0}^{+\infty} x^n \cdot e^{-x^2} dx = \int\limits_{0}^{1} x^n \cdot e^{-x^2} dx + \int\limits_{1}^{+\infty} x^n \cdot e^{-x^2} dx.$$

Очевидно в этой сумме первое слагаемое является простым римановским интегралом.

Пример 3 (гамма-функция). Несобственный интеграл 1-го рода вида

$$\Gamma(p) = \int\limits_{0}^{+\infty} x^{p-1} \cdot e^{-x} dx, \quad p > 0$$

называется *гамма-функцией*.

При $p \ge 1$ $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{p-1} \cdot e^{-x} \cdot x^2 = 0$, поэтому при $p \ge 1$ интеграл сходится, см. рассуждения предыдущего примера.

При $0 < p < 1$ интеграл является несобственным по двум причинам: бесконечный предел интегрирования и обращение подинтегральной функции в $+\infty$ при $x \to 0+$, поэтому для исследования вопроса о сходимости разобьем интеграл на два слагаемых

$$\Gamma(p)=\int\limits_0^{+\infty} x^{p-1}\cdot e^{-x}dx=\int\limits_0^{1} x^{p-1}\cdot e^{-x}dx+\int\limits_1^{+\infty} x^{p-1}\cdot e^{-x}dx.$$

Второй интеграл сходится при любом $p>0$, что доказывается дублированием всех рассуждений проведенных в предыдущем примере 2. В первом же интеграле при $x\in[0;1]$ справедливо неравенство

$$x^{p-1}\cdot e^{-x}=\frac{e^{-x}}{x^{1-p}}<\frac{1}{x^{1-p}},$$

но интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^{1-p}}$ сходится при $1-p<1$ или $p>0$ (см. пример 7 из предыдущего §5.12), т.е. функция $\Gamma(p)$ определена при $p>0$ и только для таких p. Причем для нее справедливы равенства:

$$\Gamma(p)=(p-1)!\ \text{ при }\ p\in N,$$

$$\Gamma(p)=p\,\Gamma(p-1),\quad \Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big)=\sqrt{\pi},$$

$$\Gamma(p)\cdot\Gamma(1-p)=\frac{\pi}{\sin p\pi}\ \text{ при }\ 0<p<1.$$

Теорема (признак Дирихле-Абеля). *Пусть выполнены условия:*

а) $f(x)\in C[a;+\infty)$ и имеет ограниченную первообразную на $[a;+\infty)$;

б) $g(x)\in C^1[a;+\infty)$, монотонно убывает на $[a;+\infty)$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$,

тогда несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\cdot g(x)dx$ сходится.

Доказательство. Из условия б) теоремы следует, что при $x\geq a$ выполняются неравенства $g(x)>0$ и $g'(x)<0$, а по условию а) $\exists K>0$ такая, что $|F(x)|\leq K$ (здесь $F(x)$ первообразная для $f(x)$).

Доказательство проведем с использованием критерия Коши. Для этого рассмотрим интеграл

$$\int\limits_{A_1}^{A_2} f(x)\cdot g(x)dx=\left\{\begin{array}{ll} u=g(x) & dv=f(x)dx\\ du=g'(x)dx & v=F(x)\end{array}\right\}=$$

$$=g(x)F(x)\Big|_{A_1}^{A_2}-\int\limits_{A_1}^{A_2} F(x)\cdot g'(x)dx=g(A_2)F(A_2)-g(A_1)F(A_1)-\int\limits_{A_1}^{A_2} F(x)\cdot g'(x)dx,$$

тогда при $A_2 > A_1 > a$ справедлива следующая цепочка неравенств

$$\Big|\int\limits_{A_1}^{A_2} f(x)\cdot g(x)dx\Big| \leq g(A_2)|F(A_2)| + g(A_1)|F(A_1)| + \int\limits_{A_1}^{A_2} |F(x)|\cdot|g'(x)|dx \leq$$

$$\leq K(g(A_2)+g(A_1)) + K\int\limits_{A_1}^{A_2}(-g'(x))dx =$$

$$= K(g(A_2)+g(A_1)) + K(g(A_1)-g(A_2)) = 2Kg(A_1).$$

Так как $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$, то $\forall\epsilon > 0\ \exists\delta_\epsilon > 0$ такое, что $\forall A_1 > \delta_\epsilon$ выполняется неравенство $g(A_1) < \frac{\epsilon}{2K}$, тогда для таких $A_2 > A_1 > \delta_\epsilon$ имеем неравенство

$$\Big|\int\limits_{A_1}^{A_2} f(x)\cdot g(x)dx\Big| < \epsilon,$$

означающее согласно критерию Коши (см. §5.12) сходимость интеграла. **Теорема доказана.**

Пример 4 (интеграл Дирихле). Несобственный интеграл 1-го рода вида

$$D(\beta) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin\beta x}{x}dx$$

называется *интегралом Дирихле*. Не смотря на наличие в знаменателе подинтегральной функции x, точка $x = 0$ не является особой для интеграла, т.к. по первому замечательному пределу (см. §3.4) $\frac{\sin\beta x}{x} \to \beta$ при $x \to 0+$. Полагая далее $f(x) = \sin\beta x$ и $g(x) = \frac{1}{x}$ в силу признака Дирихле-Абеля получаем сходимость этого интеграла, причем

$$D(\beta) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin\beta x}{x}dx = \frac{\pi}{2} sign\,\beta.$$

Сходимость интеграла Дирихле означает, что определена функция вида

$$Si(t) = \int\limits_0^{t} \frac{\sin x}{x}dx$$

называемая *интегральным синусом*.

Пример 5 (интегралы Френеля). В теории дифракции света встречаются два несобственных интеграла 1-го рода вида

$$\int\limits_0^{+\infty} \sin(x^2)dx \quad \text{и} \quad \int\limits_0^{+\infty} \cos(x^2)dx,$$

которые называются *интегралами Френеля.* Докажем их сходимость на примере первого. Разложим интеграл на сумму

$$\int\limits_0^{+\infty} \sin(x^2)dx = \int\limits_0^{1} \sin(x^2)dx + \int\limits_1^{+\infty} \sin(x^2)dx,$$

в которой первое слагаемое является римановским интегралом, а второе представим в виде

$$\int\limits_1^{+\infty} \sin(x^2)dx = \int\limits_1^{+\infty} x\sin(x^2) \cdot \frac{1}{x}\,dx.$$

Полагая теперь $f(x) = x\sin(x^2)$ и $g(x) = \frac{1}{x}$ в силу признака Дирихле-Абеля получаем сходимость интегралов Френеля, причем

$$\int\limits_0^{+\infty} \sin(x^2)dx = \int\limits_0^{+\infty} \cos(x^2)dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Пример 6 (интеграл Лапласа). Несобственный интеграл 1-го рода вида

$$L(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos\alpha x}{1+x^2}dx$$

называется *интегралом Лапласа.* Полагая здесь $f(x) = \cos\alpha x$ и $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$, получаем сходимость этого интеграла, причем

$$L(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos\alpha x}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{2} \cdot e^{-|\alpha|}.$$

5.14 Замена переменных под знаком несобственного интеграла и формула интегрирования по частям. Абсолютная и условная сходимость несобственных интегралов. Главное значение (в смысле Коши) несобственного интеграла.

Теорема (замена переменных). *Пусть выполнены условия:*

а) $f(x) \in C[a; +\infty)$;

б) $g(t) \in C^1[\alpha; +\infty)$, *монотонна,* $g(t) : [\alpha; +\infty) \to [a; +\infty)$ *и* $g(\alpha) = a$, *тогда*

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_\alpha^{+\infty} f(g(t))g'(t)dt.$$

Доказательство.

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A \to +\infty} \int\limits_a^{A} f(x)dx = \lim_{\Lambda \to +\infty} \int\limits_\alpha^{\Lambda} f(g(t))g'(t)dt = \int\limits_\alpha^{+\infty} f(g(t))g'(t)dt$$

здесь $A = g(\Lambda)$. **Теорема доказана.**

Теорема (интегрирование по частям). *Пусть* $v(x)$, $u(x) \in C^1[a; +\infty)$, *существует предел* $L = \lim\limits_{x \to +\infty} (v(x) \cdot u(x)) < +\infty$, *тогда интегралы* $\int\limits_a^{+\infty} u(x)v'(x)dx$ *и* $\int\limits_a^{+\infty} u'(x)v(x)dx$ *сходятся или расходятся одновременно и справедлива формула*

$$\int\limits_a^{+\infty} udv = L - u(a)v(a) - \int\limits_a^{+\infty} vdu.$$

Доказательство.

$$\int\limits_a^{+\infty} udv = \lim_{A \to +\infty} \int\limits_a^{A} udv = \lim_{A \to +\infty} \Big(u(A)v(A) - u(a)v(a) - \int\limits_a^{A} vdu \Big) =$$

$$= L - u(a)v(a) - \int\limits_a^{+\infty} vdu.$$

Теорема доказана.

Определение. Несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ называется

а) *абсолютно сходящимся*, если сходится интеграл $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$;

б) *условно сходящимся*, если интеграл $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$ расходится, а сам интеграл сходится.

Сразу отметим, что в силу неравенства $f(x) \leq |f(x)|$ и признака сравнения из абсолютной сходимости следует сходимость самого интеграла.

Пример. Несобственный интеграл 1-го рода

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx, \quad \alpha > 0$$

в силу оценки

$$\left|\frac{\sin x}{x^\alpha}\right| \leq \frac{1}{x^\alpha}$$

сходится абсолютно при $\alpha > 1$.

В силу признака Дирихле-Абеля данный интеграл сходится при всех $\alpha > 0$. Из неравенства

$$\left|\frac{\sin x}{x^\alpha}\right| \geq \frac{\sin^2 x}{x^\alpha} = \frac{1}{2x^\alpha} - \frac{\cos 2x}{2x^\alpha},$$

расходимости интеграла $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{2x^\alpha} dx$ при $0 < \alpha \leq 1$ и сходимости по признаку Дирихле-Абеля интеграла $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{2x^\alpha} dx$, заключаем, что исходный интеграл при $0 < \alpha \leq 1$ сходится условно.

Определение. Если $f(x)$ определена на R и интегрируема на каждом отрезке прямой, то предел (если он существует) $\lim\limits_{A \to +\infty} \int\limits_{-A}^{A} f(x)dx$ называется *интегралом Коши* от $f(x)$ или *главным значением* несобственного интеграла и обозначается $v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$.

Очевидно для нечетных функций $v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 0$, а для четных $v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2 \int\limits_0^{+\infty} f(x)dx$.

5.15 Функции ограниченной вариации.

Пусть функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[a; b]$. Осуществим разбиение T этого отрезка точками x_i

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n_T - 1} < x_{n_T} = b$$

и составим сумму абсолютных величин приращений функции $y = f(x)$

$$V = \sum_{i=1}^{n_T} |f(x_i) - f(x_{i-1})|.$$

Определение. Если существует постоянная $K > 0$ такая, что для любого разбиения T отрезка $[a; b]$ справедливо неравенство $V \leq K$, то функцию $y = f(x)$ называют *функцией ограниченной вариации.* Верхняя грань значений сумм V по всем разбиениям T называется *полной вариацией* функции $y = f(x)$ и обозначается

$$V_a^b = \sup_T V.$$

Если $y = f(x)$ имеет ограниченную вариацию на $[a; b]$ и этот отрезок поделен на части точкой c, $a < c < b$, то на каждом из отрезков $[a; c]$ и $[c; b]$ функция $y = f(x)$ также имеет ограниченную вариацию. Обратно, если функция $y = f(x)$ имеет ограниченные вариации на отрезках $[a; c]$ и $[c; b]$, то $y = f(x)$ имеет ограниченную вариацию на отрезке $[a; b]$ и справедлива следующая

Теорема (о сумме полных вариаций). *Если функция $y = f(x)$ имеет ограниченную вариацию на $[a; b]$ и $a < c < b$, то $V_a^b = V_a^c + V_c^b$.*

Доказательство. Осуществим разбиения отрезков $[a; c]$ и $[c; b]$

$$T_1 \equiv a = y_0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_{m_{T_1} - 1} < y_{m_{T_1}} = c,$$

$$T_2 \equiv c = z_0 < z_1 < z_2 < \ldots < z_{k_{T_2} - 1} < x_{k_{T_2}} = b$$

и составим соответствующие суммы V_1 и V_2. Объединение точек y_i и z_j в одну совокупность даст некоторое разбиение отрезка $[a; b]$, причем соответствующая этому разбиению сумма имеет вид $V = V_1 + V_2$. Тогда

$$V_a^b = \sup_T V \geq V_1 + V_2$$

(отсюда, в частности, вытекает ограниченность каждой из сумм V_1 и V_2, т.е. ограниченность вариации $y = f(x)$ на обоих отрезках $[a;c]$ и $[c;b]$.) Если выбрать последовательность разбиений T_1 такой, чтобы $V_1 \to V_a^c$, а последовательность разбиений T_2 такой, чтобы $V_2 \to V_c^b$ (что возможно по определению точной верхней грани), тогда из последнего неравенства в пределе (по свойству монотонности предела) получим $V_a^b \geq V_a^c + V_c^b$.

Теперь докажем обратное неравенство. Осуществим разбиение T отрезка $[a;b]$ и составим сумму V. Добавим в разбиение T точку c и составим для нового разбиения $T \cup \{c\}$ новую сумму V_*, тогда

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_r \leq c < x_{r+1} < \ldots < x_{n_T-1} < x_{n_T} = b,$$

$$V = \sum_{i=1}^{n_T} |f(x_i) - f(x_{i-1})|,$$

$$V_* = \sum_{i=1}^{r} |f(x_i) - f(x_{i-1})| + |f(c) - f(x_r)| + |f(x_{r+1}) - f(c)| + \sum_{i=r+2}^{n_T} |f(x_i) - f(x_{i-1})|.$$

Очевидно $V_* \geq V$, т.к. V_* отличается от V на два слагаемых. Но V_* представима в виде суммы $V_1 + V_2$, здесь V_1 и V_2 относятся, соответственно, к отрезкам $[a;c]$ и $[c;b]$, тогда

$$V \leq V_* = V_1 + V_2 \leq \sup_{T_1} V_1 + \sup_{T_2} V_2 = V_a^c + V_c^b.$$

Далее, так же как выше, получаем $V_a^b \leq V_a^c + V_c^b$. Сопоставляя оба полученных неравенства, завершаем доказательство. **Теорема доказана.**

Теорема. *Для того чтобы функция $y = f(x)$ имеет ограниченную вариацию на $[a;b]$, необходимо и достаточно, чтобы она была представима в виде разности двух неубывающих функций.*

Доказательство. *Необходимость.* Введем две функции

$$\varphi(x) = f(a) + V_a^x, \quad \psi(x) = V_a^x - f(x) + f(a),$$

тогда $f(x) = \varphi(x) - \psi(x)$. Но $\varphi(x)$ - неубывающая, поэтому осталось доказать, что $\psi(x)$ не убывает. Пусть x и y две точки из отрезка $[a;b]$, причем $x < y$, тогда

$$\psi(y) = V_a^y - f(y) + f(a) = V_a^x + V_x^y - f(y) + f(a).$$

Отсюда

$$\psi(y) - \psi(x) = V_x^y - (f(y) - f(x)) \geq V_x^y - V_x^y = 0,$$

т.е. $\psi(y) \geq \psi(x)$. (Здесь мы воспользовались неравенством $V_a^b = \sup\limits_T V \geq f(b) - f(a)$ - т.е. рассмотрено разбиение состоящее из двух точек $x_0 = a$ и $x_1 = b$.)

Замечание. Приведенное здесь разложение функции $f(x)$ не является единственно возможным. Если прибавить к функциям $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ произвольную неубывающую функцию, то получим новое разложение для $f(x)$. В частности, прибавляя к $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ достаточно большую положительную константу, можно добиться того, что $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ станут положительными. Можно сделать $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ строго возрастающими.

Достаточность. Доказательство достаточности проведем в два этапа. А именно, покажем, что если $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ неубывающие функции, то, во-первых, $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ имеют ограниченные вариации и, во-вторых, сумма $\varphi(x)+(-\psi(x))$ является функцией ограниченной вариации.

Действительно, если $\varphi(x)$ неубывающая функция, то

$$V = \sum_{i=1}^{n_T} |\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})| = \sum_{i=1}^{n_T} (\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})) = \varphi(b) - \varphi(a),$$

тогда $V_a^b = \sup\limits_T V = \varphi(b) - \varphi(a)$, т.е. $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ имеют ограниченные вариации.

Замечание. Случай невозрастающей функции сводится к рассмотренному простым изменением знаков.

Для некоторого разбиения T и функции $\varphi(x) + (-\psi(x))$ составим сумм V

$$V = \sum_{i=1}^{n_T} |(\varphi(x_i) + (-\psi(x_i))) - (\varphi(x_{i-1}) + (-\psi(x_{i-1})))| \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n_T} (|\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})| + |\psi(x_i))) - \psi(x_{i-1})|) = V_1 + V_2 \leq \sup_T V_1 + \sup_T V_2.$$

Отсюда $\sup\limits_T V \leq \sup\limits_T V_1 + \sup\limits_T V_2$, т.е. функция $\varphi(x) + (-\psi(x))$ имеет ограниченную вариацию. **Теорема доказана.**

Приведем несколько примеров функций ограниченной вариации.

Пример 1. Всякая неубывающая, невозрастающая, возрастающая или убывающая на отрезке $[a;b]$ функция имеет на нем ограниченную вариацию. Доказательство приведено в предыдущей теореме. Например,

$$V_0^{50}(e^x) = e^{50} - e^0 = e^{50} - 1 \quad \text{или} \quad V_1^2(\ln x) = \ln 2.$$

Пример 2. Класс функций, *удовлетворяющих условию Дирихле*. Такое название носят функции $f(x)$, для которых можно разбить отрезок $[a;b]$ на конечное число частей так, чтобы в каждой из них $f(x)$ была монотонной. В силу вышеизложенных теорем всякая такая функция имеет ограниченную вариацию, поскольку имеет ограниченную вариацию на каждом интервале монотонности. Например,

$$V_0^{4\pi}(\cos x) = (V_0^{\pi} + V_{\pi}^{2\pi} + V_{2\pi}^{3\pi} + V_{3\pi}^{4\pi})(\cos x) =$$

$$= (\cos 0 - \cos\pi) + (\cos 2\pi - \cos\pi) + (\cos 2\pi - \cos 3\pi) + (\cos 4\pi - \cos 3\pi) =$$

$$= 2 + 2 + 2 + 2 = 8,$$

$$V_{-1}^1(x - x^3) = \left(V_{-1}^{-\frac{1}{\sqrt{3}}} + V_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} + V_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1}\right)(x - x^3) = \frac{2}{3\sqrt{3}} + \frac{4}{3\sqrt{3}} + \frac{2}{3\sqrt{3}} = \frac{8}{3\sqrt{3}}.$$

Пример 3. Класс функций, *удовлетворяющих условию Липшица* на отрезке $[a;b]$. В этот класс входят функции, для которых существует константа $K > 0$ такая, что $\forall x',\ x'' \in [a;b]$ справедливо неравенство $|f(x'') - f(x')| \le K|x'' - x'|$. Действительно, применяя это неравенство к каждой паре соседних точек разбиения x_i и x_{i-1}, имеем

$$V = \sum_{i=1}^{n_T} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \le \sum_{i=1}^{n_T} K|x_i - x_{i-1}| = K(b-a),$$

т.е. $\sup\limits_T V \le K(b-a)$ и функция имеет ограниченную вариацию.

Пример 4. Дифференцируемые функции, имеющие на отрезке $[a;b]$ ограниченную производную $|f'(x)| \le K$. Действительно по теореме Лагранжа конечных приращений (см. §4.6) $f(x'') - f(x') = f'(\xi)(x'' - x'),\ \xi \in (x', x'')$ сразу получаем, что выполняется условие Липшица. В частности всякая функция класса $C^1[a;b]$ имеет ограниченную вариацию. В качестве иллюстрации к этому примеру рассмотрим функцию

$$\varphi(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{\pi}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Так как

$$\varphi'(0) = \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{\Delta x^2 \sin \frac{\pi}{\Delta x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0+} \Delta x \sin \frac{\pi}{\Delta x} = 0,$$

то

$$\varphi'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{\pi}{x} - \pi \cos \frac{\pi}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Производная $\varphi'(x)$ имеет в нуле разрыв 2-го рода и ограничена на любом симметричном отрезке $[-A;A]$, поэтому функция $\varphi(x)$ имеет ограниченную вариацию на любом таком отрезке.

Пример 5. Приведем пример ограниченной функции, не имеющей ограниченной вариации. Рассмотрим на отрезке $[-1;1]$ функцию

$$\varphi(x) = \begin{cases} x \cos \frac{\pi}{2x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Для разбиения

$$0 < \frac{1}{2n} < \frac{1}{2n-1} < \frac{1}{2n-2} < \ldots < \frac{1}{3} < \frac{1}{2} < 1$$

составим сумму V. Поскольку

$$f\Big(\frac{1}{k}\Big) = \begin{cases} 0, & k - \text{нечетно}, \\ \pm\frac{1}{k}, & k - \text{четно}, \end{cases}$$

то

$$\Big|f(1) - f\Big(\frac{1}{2}\Big)\Big| = \Big|f\Big(\frac{1}{2}\Big) - f\Big(\frac{1}{3}\Big)\Big| = \Big|f\Big(\frac{1}{2}\Big)\Big| = \frac{1}{2},$$

$$\Big|f\Big(\frac{1}{3}\Big) - f\Big(\frac{1}{4}\Big)\Big| = \Big|f\Big(\frac{1}{4}\Big) - f\Big(\frac{1}{5}\Big)\Big| = \Big|f\Big(\frac{1}{4}\Big)\Big| = \frac{1}{4}, \text{ и т.д.}$$

$$\Big|f\Big(\frac{1}{2n-1}\Big) - f\Big(\frac{1}{2n}\Big)\Big| = \Big|f\Big(\frac{1}{2n}\Big) - f(0)\Big| = \Big|f\Big(\frac{1}{2n}\Big)\Big| = \frac{1}{2n},$$

т.е.

$$V = 2\Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{2n}\Big) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n},$$

но $V \to +\infty$, поэтому рассматриваемая функция не имеет ограниченной вариации.

5.16 Определение интеграла Стилтьеса и его свойства.

Пусть на отрезке $[a;b]$ заданы две функции $f(x)$ и $\varphi(x)$. Осуществим разбиение T отрезка $[a;b]$ точками x_i

$$T: \quad a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_{n_T} = b,$$

мелкость которого будем обозначать δ_T (см. §5.3). Выберем в каждом отрезке разбиения точку $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ и составим сумму

$$\sigma(T, \xi, f, \varphi) = \sum_{i=1}^{n_T} f(\xi_i)(\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})),$$

называемую интегральной *суммой Стилтьеса-Римана.*

Определение. Если существует предел $\sigma(T, \xi, f, \varphi)$ при $\delta_T \to 0$ не зависящий от T и выбора точек ξ_i, то этот предел называется *интегралом Стилтьеса функции* $f(x)$ *по функции* $\varphi(x)$ и обозначается

$$\lim_{\delta_T \to 0} \sigma(T, \xi, f, \varphi) = \int_a^b f(x) d\varphi(x).$$

Замечание. Обычный интеграл Римана может рассматриваться как частный случай интеграла Стилтьеса, когда в качестве $\varphi(x) = x$.

Отметим ряд свойств интеграла Стилтьеса.

1. Если функция $f(x)$ интегрируема по функции $\varphi(x)$, то $\forall k, l \in R$ функция $kf(x)$ интегрируема по функции $l\varphi(x)$, причем

$$\int_a^b kf(x) d(l\varphi(x)) = kl \int_a^b f(x) d\varphi(x).$$

2. Если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ интегрируемы по одной и той же функции $\varphi(x)$, то их сумма $f_1(x) + f_2(x)$ также интегрируема по функции $\varphi(x)$, причем

$$\int_a^b (f_1(x) + f_2(x)) d\varphi(x) = \int_a^b f_1(x) d\varphi(x) + \int_a^b f_2(x) d\varphi(x).$$

3. Если функция $f(x)$ интегрируема по каждой из функций $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$, то она интегрируема по их сумме, причем

$$\int\limits_a^b f(x)d[\varphi_1(x)+\varphi_2(x)] = \int\limits_a^b f(x)d\varphi_1(x) + \int\limits_a^b f(x)d\varphi_2(x).$$

Доказываются эти три свойства исходя непосредственно из определения.

Пример 1. Вычислить интеграл Стилтьеса $\int\limits_0^2 x^2 d\varphi(x)$, где

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < 2, \\ 5, & x = 2. \end{cases}$$

Осуществим разбиение отрезка $[0;2]$ на части и составим интегральную сумму Стилтьеса-Римана для функции $f(x) = x^2$ по функции $\varphi(x)$

$$\sigma(T,\xi,f,\varphi) = \sum_{i=1}^{n_T} \xi_i^2(\varphi(x_i)-\varphi(x_{i-1})) = \xi_{n_T}^2(\varphi(2)-\varphi(x_{n_T-1})) = \xi_{n_T}^2\varphi(2) = 5\xi_{n_T}^2.$$

Но $x_{n_T-1} < \xi_{n_T} < x_{n_T} = 2$ и при $\delta_T \to 0$ $\xi_{n_T} \to 2$, поэтому

$$\lim_{\delta_T\to 0} \sigma(T,\xi,f,\varphi) = 5\cdot 2^2 = 20,$$

т.е.

$$\int\limits_0^2 x^2 d\varphi(x) = 20.$$

Пример 2. Вычислить интеграл Стилтьеса $\int\limits_0^3 x^2 d\varphi(x)$, где

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x \le 2, \\ 3, & 2 < x \le 3. \end{cases}$$

Осуществим разбиение отрезка $[0;3]$ точками x_i

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{r-1} \le 2 < x_r < \ldots < x_{n-1} < x_{n_T} = 3,$$

тогда

$$\sigma(T,\xi,f,\varphi) = \sum_{i=1}^{n_T} \xi_i^2(\varphi(x_i)-\varphi(x_{i-1})) = \xi_r^2(\varphi(x_r)-\varphi(x_{r-1})) = \xi_r^2(3-0) = 3\xi_r^2.$$

Так как при $\delta_T \to 0$ $\xi_r \to 2$, то

$$\int\limits_0^3 x^2 d\varphi(x) = \lim_{\delta_T \to 0} \sigma(T, \xi, f, \varphi) = 3 \cdot 4 = 12.$$

4. Если функция $f(x)$ интегрируема по функции $\varphi(x)$, $|f(x)| \le M$ $\forall x \in [a; b]$, V_a^b - полная вариация функции $\varphi(x)$, то

$$\Big|\int\limits_a^b f(x) d\varphi(x)\Big| \le M \cdot V_a^b.$$

5.(*интегрирование по частям*) Если функция $f(x)$ интегрируема по функции $\varphi(x)$, то и обратно функция $\varphi(x)$ интегрируема по функции $f(x)$, причем имеет место тождество

$$\int\limits_a^b \varphi(x) df(x) = f(x)\varphi(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b f(x) d\varphi(x),$$

называемое *формулой интегрирования по частям.*

Доказательство. Осуществим разбиение отрезка $[a; b]$ точками x_i, осуществим выбор точек ξ_i, составим интегральную сумму Стилтьеса-Римана для левого интеграла

$$\sigma(T, \xi, \varphi, f) = \sum_{i=1}^{n_T} \varphi(\xi_i)(f(x_i) - f(x_{i-1}))$$

и осуществим в ней перегруппировку слагаемых относительно значений функции $f(x)$ в узлах x_i, получим

$$\sigma(T, \xi, \varphi, f) = \varphi(\xi_{n_T})f(b) - \varphi(\xi_1)f(a) - \sum_{i=1}^{n_T - 1} f(x_i)(\varphi(\xi_{i+1}) - \varphi(\xi_i)) =$$

$$= \varphi(\xi_{n_T})f(b) - \varphi(\xi_1)f(a) + (f(b)\varphi(b) - f(a)\varphi(a)) -$$

$$-(f(b)\varphi(b) - f(a)\varphi(a)) - \sum_{i=1}^{n_T - 1} f(x_i)(\varphi(\xi_{i+1}) - \varphi(\xi_i)) =$$

$$= f(x)\varphi(x)\Big|_a^b - f(a)(\varphi(\xi_1) - \varphi(a)) -$$

$$-\sum_{i=1}^{n_T-1} f(x_i)(\varphi(\xi_{i+1})-\varphi(\xi_i))-f(b)(\varphi(b)-\varphi(\xi_{n_T}))=$$

$$=f(x)\varphi(x)\Big|_a^b-\sum_{i=0}^{n_T} f(x_i)(\varphi(\xi_{i+1})-\varphi(\xi_i))=f(x)\varphi(x)\Big|_a^b-\sigma(T,\xi,f,\varphi).$$

Так как существует предел

$$\lim_{\delta_T\to 0}\sigma(T,\xi,f,\varphi)=\int\limits_a^b f(x)d\varphi(x),$$

то существует предел и левой части и по определению интеграла Стилтьеса-Римана он равен $\int\limits_a^b \varphi(x)df(x)$, что завершает доказательство формулы интегрирования по частям. **Теорема доказана.**

6.(*аддитивность*) Если функция $f(x)$ интегрируема по функции $\varphi(x)$ на отрезке $[a;b]$ и этот отрезок разделен точкой c на два других ($a<c<b$), то на каждой из частей $[a;c]$ и $[c;b]$ функция $f(x)$ интегрируема по функции $\varphi(x)$, причем

$$\int\limits_a^b f(x)d\varphi(x)=\int\limits_a^c f(x)d\varphi(x)+\int\limits_c^b f(x)d\varphi(x).$$

Обратное утверждение, как показывает следующий пример, вообще говоря не верно, т.е. из существование правой части последнего равенства *не вытекает* существование левой.

Пример 3. Пусть на $[-1;1]$ задана пара функций

$$f(x)=\begin{cases}1, & -1\le x<0,\\ 0, & 0\le x\le 1\end{cases}\quad \text{и}\quad \varphi(x)=\begin{cases}0, & -1\le x\le 0,\\ 1, & 0<x\le 1,\end{cases}$$

тогда

$$\int\limits_{-1}^{0} f(x)d\varphi(x)=0\ \ (\text{т.к. все разности } \varphi(x_{i+1})-\varphi(x_i)=0),$$

$$\int\limits_0^1 f(x)d\varphi(x)=0\ \ (\text{т.к. все }\ f(\xi_i)=0).$$

Однако интеграл $\int\limits_{-1}^{1} f(x)d\varphi(x)$ не существует. Действительно, пусть T разбиение $[-1;1]$ точками x_i

$$T: \quad -1 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_r < 0 < x_{r+1} < x_{n-1} < x_{n_T} = 1,$$

тогда

$$\sigma(T, \xi, f, \varphi) = \sum_{i=1}^{n_T} f(\xi_i)(\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})) =$$
$$= f(\xi_r)(\varphi(x_{r+1}) - \varphi(x_r)) = f(\xi_r)(1-0) = f(\xi_r).$$

Если $0 \leq \xi_r < x_{r+1}$, то при $\delta_T \to 0$, $\xi_r \to 0+$, тогда $f(\xi_r) = 0$ и значит $\lim\limits_{\delta_T \to 0} \sigma(T, \xi, f, \varphi) = 0$. Если $x_r < \xi_r < 0$, то при $\delta_T \to 0$, $\xi_r \to 0-$, тогда $f(\xi_r) = 1$ и значит $\lim\limits_{\delta_T \to 0} \sigma(T, \xi, f, \varphi) = 1$, т.е. $\sigma(T, \xi, f, \varphi)$ не имеет конечного предела и значит интеграл $\int\limits_{-1}^{1} f(x)d\varphi(x)$ не существует.

Полученный "неприятный"результат очевидно связан с тем, что обе функции разрывны в одной точке 0.

Справедливо следующее свойство.

6a. Если существуют интегралы $\int\limits_a^c f(x)d\varphi(x)$ и $\int\limits_c^b f(x)d\varphi(x)$, то для существования интеграла $\int\limits_a^b f(x)d\varphi(x)$ достаточно, чтобы одна из функций $f(x)$ или $\varphi(x)$ была *непрерывна* в точке $x = c$, а другая *ограничена* в некоторой окрестности этой точки.

Доказательство. Рассмотрим два случая. Первый предполагает, что точка c входит в разбиение T, тогда $\sigma(T, \xi, f, \varphi)$ представляет собой сумма аналогичных сумм для отрезков $[a;c]$ и $[c;b]$ и будет стремиться при $\delta_T \to 0$ к сумме интегралов

$$\int\limits_a^c f(x)d\varphi(x) + \int\limits_c^b f(x)d\varphi(x).$$

Пусть точка c не входит в разбиение T и σ некоторая сумма соответствующая этому разбиению. Рассмотрим новое разбиение $T^* = T \cup \{c\}$ и сумму σ^*, которая, как отмечалось выше в первом случае, имеет своим пределом при

$\delta_T \to 0$ сумму интегралов. Если $x_{r-1} < c < x_r$, то суммы σ и σ^* отличаются друг от друга слагаемыми

$$f(\xi_r)(\varphi(x_r) - \varphi(x_{r-1}))$$

в сумме σ и

$$f(\eta_r)(\varphi(c) - \varphi(x_{r-1})) + f(\eta_{r+1})(\varphi(x_r) - \varphi(c))$$

в сумме σ^*, причем $x_{r-1} \le \eta_r \le c \le \eta_{r+1} \le x_r,\ x_{r-1} \le \xi_r \le x_r$, так что

$$\sigma - \sigma^* = f(\xi_r)(\varphi(x_r) - \varphi(x_{r-1})) - f(\eta_r)(\varphi(c) - \varphi(x_{r-1})) - f(\eta_{r+1})(\varphi(x_r) - \varphi(c)).$$

Если $\varphi(x)$ непрерывна в точке c, то при $\delta_T \to 0$

$$|\sigma - \sigma^*| \le |f(\xi_r)||\varphi(x_r) - \varphi(x_{r-1})| +$$

$$+|f(\eta_r)||\varphi(c) - \varphi(x_{r-1})| + |f(\eta_{r+1})||\varphi(x_r) - \varphi(c)| \to 0$$

за счет вторых множителей в каждом из слагаемых.

Если $f(x)$ непрерывна в точке c, то после перегруппировки слагаемых относительно значений функции $\varphi(x)$ в узлах при $\delta_T \to 0$

$$|\sigma - \sigma^*| \le |\varphi(x_r)||f(\xi_r) - f(\eta_{r+1})| +$$

$$+|\varphi(x_{r-1})||f(\eta_r) - f(\xi_r)| + |\varphi(c)||f(\eta_{r+1}) - f(\eta_r)| \to 0.$$

Поэтому

$$\lim_{\delta_T \to 0} \sigma = \lim_{\delta_T \to 0} \sigma^* = \int\limits_a^c f(x)d\varphi(x) + \int\limits_c^b f(x)d\varphi(x).$$

Свойство 6а доказано.

5.17 Существование и вычисление интеграла Стилтьеса.

Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ ограничены на $[a;b]$ и $\varphi(x)$ возрастает. Осуществим разбиение отрезка $[a;b]$ точками x_i, обозначим $m_i = \inf\limits_{[x_{i-1},x_i]} f(x)$ и $M_i = \sup\limits_{[x_{i-1},x_i]} f(x)$ и составим верхнюю и нижнюю интегральные суммы Дарбу-Стилтьеса

$$s = \sum_{i=1}^{n_T} m_i(\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})) \text{ и } S = \sum_{i=1}^{n_T} M_i(\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})).$$

Как и для интеграла Римана эти суммы обладают следующими свойствами (см. §5.4 текущей главы)

Свойство 1. Для любой интегральной суммы Римана-Стилтьеса соответствующей разбиению T справедливо неравенство $s \leq \sigma(T, \xi, f, \varphi) \leq S$.

Свойство 2. Если к точкам разбиения T добавить новые точки разбиения, то верхняя сумма S может лишь не увеличиться, а нижняя s лишь не уменьшиться

Свойство 3. Любая нижняя интегральная сумма Дарбу-Стилтьеса не превосходит любой верхней интегральной суммы Дарбу-Стилтьеса.

Таким образом, множество всех верхних сумм Дарбу-Стилтьеса $\{S\}$ ограничено снизу, а множество всех нижних сумм $\{s\}$ ограничено сверху. Обозначим $l = \sup s,\ L = \inf S$, тогда $l \leq L$.

Теорема (необходимое и достаточное условие интегрируемости). *Для существования интеграла Стилтьеса* $\int\limits_a^b f(x)d\varphi(x)$ *необходимо и достаточно, чтобы* $\lim\limits_{\delta_T \to 0}(S - s) = 0$.

Для доказательства следует продублировать все рассуждения доказательства соответствующей теоремы (критерий Римана) из §5.4 текущей главы.

Теорема 1. *Если* $f(x) \in C[a; b]$, *то* $f(x)$ *интегрируема на* $[a; b]$ *по любой возрастающей функции* $\varphi(x)$.

В справедливости этого утверждения можно убедиться, продублировав все рассуждения доказательства теоремы об интегрируемости по Риману непрерывной на отрезке функции (см. теорему 1 из §5.5).

Теорема 2. *Если* $f(x) \in C[a; b]$, *то* $f(x)$ *интегрируема на* $[a; b]$ *по любой функции ограниченной вариации.*

Действительно всякая функция ограниченной вариации представима в виде разности двух неубывающих функций, по которым в силу теоремы 1 интеграл от $f(x)$ по $[a; b]$ существует, тогда в силу свойства линейности интеграла Римана-Стилтьеса по $\varphi(x)$ получаем требуемое утверждение.

По формуле интегрирования по частям получаем следствие из этой теоремы.

Следствие. *Любая функция ограниченной вариации $\varphi(x)$ интегрируема по функции $f(x) \in C[a;b]$ непрерывной на $[a;b]$.*

Теорема 3. *Если $f(x) \in C[a;b]$, $\varphi(x)$ имеет ограниченную интегрируемую производную на $[a;b]$, то*

$$\int_a^b f(x)d\varphi(x) = \int_a^b f(x)\varphi'(x)dx.$$

Доказательство. Отметим, что римановский интеграл в правой части доказываемого равенства существует в силу свойства 5 определенного интеграла (см. §5.6 текущей главы 5), а интеграл Стилтьеса из левой части существует по теореме 2, поскольку $\varphi(x)$ является функцией ограниченной вариации (см. пример 4 из §5.15). Осуществим разбиение T отрезка $[a;b]$ точками x_i, тогда по теореме Лагранжа о среднем для $\varphi(x)$ на любом частичном отрезке разбиения справедливо равенство

$$\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1}) = \varphi'(\tilde{\eta}_i)(x_i - x_{i-1}), \quad x_{i-1} < \tilde{\eta}_i < x_i.$$

Составим суммы

$$\sigma(T, \tilde{\eta}, f, \varphi) = \sum_{i=1}^{n_T} f(\tilde{\eta}_i)(\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n_T} f(\tilde{\eta}_i) \cdot \varphi'(\tilde{\eta}_i)(x_i - x_{i-1}) = S(f \cdot \varphi', T, \tilde{\eta}),$$

тогда при $\delta_T \to 0$ в силу существования обоих интегралов получаем в пределе интересующее нас равенство. **Теорема 3 доказана.**

Замечание. Теорема остается справедливой и в случае, если на отрезке $[a;b]$ имеется конечное число точек, где производная $\varphi'(x)$ не существует, но $\varphi(x) \in C[a;b]$ (в этих условиях $\varphi(x)$ имеет ограниченную вариацию на $[a;b]$). При доказательстве необходимо включить точки несуществования производной $\varphi'(x)$ в число точек деления отрезка $[a;b]$.

Пример 1.

$$\int\limits_2^4 x^2 d\ln x = \int\limits_2^4 x^2 \frac{dx}{x} = \frac{x^2}{2}\Big|_2^4 = 6,$$

$$\int\limits_0^2 x^2 d(3x^2-2) = \int\limits_0^2 x^2 6x dx = \frac{3}{2}x^4\Big|_0^2 = 24,$$

$$\int\limits_0^\pi \sin^3 x d(\sin x) = 0.$$

Следствие 1. *Если* $f(x) \in C[a;b]$, $\varphi(b) \neq \varphi(b-0)$, *во всех остальных точках отрезка* $[a;b]$ *производная* $\varphi'(x)$ *существует, интегрируема (и значит ограничена), тогда*

$$\int\limits_a^b f(x) d\varphi(x) = \int\limits_a^b f(x)\varphi'(x)dx + f(b)\cdot(\varphi(b) - \varphi(b-0)).$$

Доказательство. Интеграл из левой части равенства существует по теореме 2 (как интеграл от непрерывной функции по функции ограниченной вариации). Введем функцию

$$\varphi^*(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \neq b, \\ \varphi(b-0), & x = b, \end{cases}$$

тогда $\varphi^*(x) \in C[a;b]$ и по теореме 3

$$\int\limits_a^b f(x) d\varphi^*(x) = \int\limits_a^b f(x)\varphi'(x)dx.$$

Осуществим разбиение T отрезка $[a;b]$ и составим интегральную сумму $\sigma(T,\xi,f,\varphi)$

$$\sigma(T,\xi,f,\varphi) = \sum_{i=1}^{n_T} f(\xi_i)(\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n_T-1} f(\xi_i)(\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})) + f(\xi_{n_T})(\varphi(b) - \varphi(x_{n_T-1})) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n_T-1} f(\xi_i)(\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})) +$$
$$+ f(\xi_{n_T})(\varphi(b-0) - \varphi(x_{n_T-1})) + f(\xi_{n_T})(\varphi(b) - \varphi(b-0)) =$$
$$= \sigma(T, \xi, f, \varphi^*) + f(\xi_{n_T})(\varphi(b) - \varphi(b-0)).$$

Но при $\delta_T \to 0$

$$\sigma(T, \xi, f, \varphi^*) \to \int_a^b f(x) d\varphi(x)$$
$$f(\xi_{n_T}) \cdot (\varphi(b) - \varphi(b-0)) \to f(b) \cdot (\varphi(b) - \varphi(b-0)),$$

поэтому существует предел $\sigma(T, \xi, f, \varphi)$ при $\delta_T \to 0$ и справедлива доказываемая формула. **Следствие 1 доказано.**

Следствие 2. *Если* $f(x) \in C[a;b]$, $\varphi(a) \neq \varphi(a+0)$, *во всех остальных точках отрезка* $[a;b]$ *производная* $\varphi'(x)$ *существует, интегрируема (и значит ограничена), тогда*

$$\int_a^b f(x) d\varphi(x) = \int_a^b f(x)\varphi'(x) dx + f(a) \cdot (\varphi(a+0) - \varphi(a)).$$

Доказательство аналогично доказательству следствия 1.

Следствие 3. *Если* $f(x) \in C[a;b]$, $\varphi(c-0) \neq \varphi(c+0)$, $a < c < b$, *во всех остальных точках отрезка* $[a;b]$ *производная* $\varphi'(x)$ *существует, интегрируема (и значит ограничена), тогда*

$$\int_a^b f(x) d\varphi(x) = \Big(\int_a^c + \int_c^b\Big) f(x)\varphi'(x) dx + f(c) \cdot (\varphi(c+0) - \varphi(c-0)).$$

Доказательство. Действительно

$$\int_a^b f(x) d\varphi(x) = \Big(\int_a^c + \int_c^b\Big) f(x) d\varphi =$$

$$= \int_a^c f(x)\varphi'(x) dx + f(c) \cdot (\varphi(c) - \varphi(c-0)) +$$

$$+\int\limits_c^b f(x)\varphi'(x)dx + f(c)\cdot(\varphi(c+0)-\varphi(c)) =$$

$$= \Big(\int\limits_a^c + \int\limits_c^b\Big) f(x)\varphi'(x)dx + f(c)\cdot(\varphi(c+0)-\varphi(c-0)).$$

Таким образом доказано следующее утверждение

Теорема 4. *Если $f(x)\in C[a;b]$, $\varphi(x)$ имеет разрывы первого рода в точках a, b и конечном числе внутренних точек $a<c_1<c_2<\ldots<c_k<b$, а между этими точками производная $\varphi'(x)$ существует, интегрируема (и значит ограничена), то справедлива формула*

$$\int\limits_a^b f(x)d\varphi(x) = \int\limits_a^b f(x)\varphi'(x)dx + f(a)\cdot(\varphi(a+0)-\varphi(a))+$$

$$+\sum_{i=1}^{k} f(c_i)\cdot(\varphi(c_i+0)-\varphi(c_i-0)) + f(b)\cdot(\varphi(b)-\varphi(b-0)).$$

Итак, наличие точек разрыва 1-го рода у функции $\varphi(x)$ хотя и создает "технические"трудности, все же не мешает вычислять интеграл, если только $\varphi(x)$ дифференцируема в остальных точках отрезка $[a;b]$.

Пример 2. Вычислить интеграл Стилтьеса

$$\int\limits_1^6 x^2 d\varphi(x), \quad \text{где} \quad \varphi(x) = \begin{cases} 2, & x=1 \text{ или } x=6, \\ x, & 1<x\le 3, \\ x^2, & 3<x\le 5, \\ x^3, & 5<x<6. \end{cases}$$

Здесь точки разрыва 1, 3, 5 и 6, поэтому последовательно находим

$$\varphi(1+0)-\varphi(1) = 1-2 = -1,$$

$$\varphi(3+0)-\varphi(3-0) = 3^2-3 = 6,$$

$$\varphi(5+0)-\varphi(5-0) = 5^3-5^2 = 125-25 = 100,$$

$$\varphi(6)-\varphi(6-0) = 2-6^3 = -214,$$

$$\varphi'(x) = \begin{cases} 1, & 1 < x \le 3, \\ 2x, & 3 < x \le 5, \\ 3x^2, & 5 < x < 6. \end{cases}$$

Отсюда по теореме 3 получаем

$$\int_1^6 x^2 d\varphi(x) = \int_1^3 x^2 \cdot 1dx + \int_3^5 x^2 \cdot 2xdx + \int_5^6 x^2 \cdot 3x^2 dx +$$

$$+1^2 \cdot (-1) + 3^2 \cdot 6 + 5^2 \cdot 100 + 6^2 \cdot (-214) =$$

$$= \frac{x^3}{3}\Big|_1^3 + \frac{x^4}{2}\Big|_3^5 + \frac{3}{5}x^5\Big|_5^6 -1 + 54 + 2.500 - 7.704 =$$

$$= \left(9 - \frac{1}{3}\right) + \frac{625 - 81}{2} + \frac{3}{5} \cdot (6^5 - 5^5) - 5.151 =$$

$$= 9 - \frac{1}{3} + 272 + \frac{3}{5} \cdot (7.776 - 3.125) - 5.151 =$$

$$= -4.870 - \frac{1}{3} + \frac{3}{5} \cdot 4.651 = -4.870 - \frac{1}{3} + \frac{3}{5} \cdot 4.650 + \frac{3}{5} =$$

$$= -4.870 - \frac{1}{3} + 2.790 + \frac{3}{5} = -2.080 + \frac{3}{5} - \frac{1}{3} = -2.080 + \frac{4}{15} = -2.079\frac{11}{15}.$$

Пример 3. Проверьте, что

$$\int_0^3 x^2 d\varphi(x) = 494\frac{8}{15}, \quad \text{если} \quad \varphi(x) = \begin{cases} x^3, & 0 \le x \le 2, \\ x^4, & 2 < x \le 3. \end{cases}$$

Пример 4. Убедитесь, что

$$\int_1^6 x d\varphi(x) = 148, \quad \text{если} \quad \varphi(x) = \begin{cases} x, & 1 \le x \le 3, \\ x^2, & 3 < x \le 6. \end{cases}$$

Вычислите по формуле теоремы 4 интегралы из примеров 1 и 2 из §5.16.

6 Элементы общей топологии и функционального анализа.

7 Дифференциальное исчисление функций многих переменных.

Предпошлем основным сведениям этой главы ряд определений и фактов теории конечномерных пространств, которые нужны для последующего изложения. *Вектором (точкой)* конечномерного пространства $\mathbf{R}^n$ называют любой упорядоченный набор вида $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, в котором числа $x_i \in \mathbf{R},\ i = 1, \dots, n$ называют *координатами* вектора (точки) $\bar{x}$. *Расстояние* между точками $\bar{x}$ и $\bar{y}$ в $\mathbf{R}^n$ вычисляется по правилу

$$\rho_{\mathbf{R}^n}(\bar{x}, \bar{y}) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (x_j - y_j)^2},$$

очевидно, при $n = 1$, $\rho_{\mathbf{R}^1}(x, y) = |x - y|$. *Окрестностью* (открытой $\delta-$окрестностью) точки $\bar{a}$ в $\mathbf{R}^n$ называется множество

$$\sigma_{\bar{a}}(\delta) \equiv \{\bar{x} : \rho_{\mathbf{R}^n}(\bar{x}, \bar{a}) < \delta\}.$$

Далее, если это не вызывает путаницы, в обозначении расстояния будем опускать индекс $\mathbf{R}^n$. Множество $A \subset \mathbf{R}^n$ называется *открытым* в $\mathbf{R}^n$, если любая его точка является *внутренней*, т.е. содержится в A вместе с некоторой своей $\delta-$окрестностью $\sigma_{\bar{a}}(\delta)$. Точка $\bar{a}$ называется *предельной* для множества $A \subset \mathbf{R}^n$, если любая ее $\delta-$окрестность $\sigma_{\bar{a}}(\delta)$ содержит элементы множества A или (на языке последовательностей) существует последовательность элементов $\{\bar{x}_k\} \in A$ множества A *сходящаяся* к $\bar{a}$ в $\mathbf{R}^n$, т.е. $\rho(\bar{x}_k, \bar{a}) \to 0$ при $k \to \infty$. Множество $A \subset \mathbf{R}^n$ называется *замкнутым* в $\mathbf{R}^n$, если оно содержит все свои предельные точки. Множество $A \subset \mathbf{R}^n$ называется *ограниченным* в $\mathbf{R}^n$, если существует шар конечного радиуса R, содержащий в себе A, т.е. $A \subset \sigma_{\bar{0}}(R)$.

Определение. Множество $K \subset \mathbf{R}^n$ называется *компактным* в $\mathbf{R}^n$, если из любого его открытого покрытия можно выделить конечное подпокрытие. (Определение покрытия см. в §3.9.)

Теорема (критерий компактности в $\mathbf{R}^n$). *Множество $K \subset \mathbf{R}^n$ компактно в $\mathbf{R}^n$ тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено в $\mathbf{R}^n$.*

Определение. Последовательность точек $\{\bar{x}_k\}$ называется *фундаментальной* в $\mathbf{R}^n$, если $\forall \epsilon > 0$ существует номер N_ϵ такой, что $\forall k > N_\epsilon$ и $\forall p \in N$ выполняется неравенство $\rho(\bar{x}_k, \bar{x}_{k+p}) < \epsilon$.

Теорема (полнота $\mathbf{R}^n$). *Последовательность $\{\bar{x}_k\}$ сходится в $\mathbf{R}^n$ тогда и только, тогда когда она фундаментальна в $\mathbf{R}^n$.*

Необходимость этого утверждения доказывается точно так же, как доказывается необходимость критерия Коши сходимости числовой последовательности см. §2.6. Докажем его достаточность. Из фундаментальности последовательности $\{\bar{x}_k\}$ и неравенства

$$|x_j^k - x_j^{k+p}| \leq \rho_{\mathbf{R}^n}(\bar{x}_k, \bar{x}_{k+p}) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n}(x_j^k - x_j^{k+p})^2}$$

следует фундаментальность (а значит и сходимость) числовых последовательностей $\{x_j^k\},\ j = 1, \ldots, n$, тогда последовательность $\{\bar{x}_k\}$ сходится к точке пространства $\bar{a} \in \mathbf{R}^n$, координатами которой являются пределы последовательностей $\{x_j^k\},\ j = 1, \ldots, n$.

Определение. Множество $L \subset \mathbf{R}^n$ называется *связным* в $\mathbf{R}^n$, если при любом разбиении L на два непустых, непересекающихся подмножества L_1 и L_2 они будут иметь общую граничную точку, принадлежащую L, т.е. такую точку $\bar{a}$, что $\bar{a} \in L$ и в любой $\delta-$окрестности этой точки $\sigma_{\bar{a}}(\delta)$ есть как точки множества L_1, так и точки множества L_2, отличные от $\bar{a}$.

Замечание 1. Связные открытые множества называются *областями,* а связные компактные множества – *континуумами.*

Лемма (неравенство Коши-Буняковского для векторов). *Для любых двух векторов $\bar{a}$, $\bar{b} \in \mathbf{R}^n$ справедливо неравенство*

$$|(\bar{a}, \bar{b})| = \left|\sum_{j=1}^{n} a_j b_j\right| \leq \parallel \bar{a} \parallel_{\mathbf{R}^n} \cdot \parallel \bar{b} \parallel_{\mathbf{R}^n} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} a_j^2} \cdot \sqrt{\sum_{j=1}^{n} b_j^2},$$

причем неравенство обращается в равенство тогда и только, когда векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ линейно зависимы (коллинеарны), т.е. существует $\lambda \in R$ такое, что $\bar{b} = \lambda \cdot \bar{a}$.

Действительно, если $\bar{a}$ и $\bar{b}$ линейно независимы, т.е. $\forall \lambda \in R\ \bar{b} - \lambda \cdot \bar{a} \neq 0$, тогда

$$0 < \| \bar{b} - \lambda \cdot \bar{a} \|^2_{\mathbf{R}^n} = \sum_{j=1}^{n} \Big(b_j - \lambda \cdot a_j \Big)^2 =$$

$$= \lambda^2 \sum_{j=1}^{n} a_j^2 - 2\lambda \sum_{j=1}^{n} a_j b_j + \sum_{j=1}^{n} b_j^2 = \lambda^2 \| \bar{a} \|^2_{\mathbf{R}^n} - 2\lambda(\bar{a}, \bar{b}) + \| \bar{b} \|^2_{\mathbf{R}^n} .$$

Поскольку построенный квадратный трехчлен строго положителен $\forall \lambda \in R$, то его дискриминант строго отрицателен, т.е.

$$4(\bar{a}, \bar{b})^2 - 4 \| \bar{a} \|^2_{\mathbf{R}^n} \cdot \| \bar{b} \|^2_{\mathbf{R}^n} < 0$$

или

$$|(\bar{a}, \bar{b})| < \| \bar{a} \|_{\mathbf{R}^n} \cdot \| \bar{b} \|_{\mathbf{R}^n} .$$

Пусть теперь векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ линейно зависимы, т.е. существует $\lambda_0 \in R$ такое, что $\bar{b} = \lambda_0 \cdot \bar{a}$, тогда

$$|(\bar{a}, \bar{b})| = \left| \sum_{j=1}^{n} a_j b_j \right| = |\lambda_0| \sum_{j=1}^{n} a_j^2 = |\lambda_0| \| \bar{a} \|^2_{\mathbf{R}^n} .$$

С другой стороны

$$\| \bar{a} \|_{\mathbf{R}^n} \cdot \| \bar{b} \|_{\mathbf{R}^n} = \| \bar{a} \|_{\mathbf{R}^n} \cdot \| \lambda_0 \cdot \bar{a} \|_{\mathbf{R}^n} = |\lambda_0| \cdot \| \bar{a} \|^2_{\mathbf{R}^n},$$

т.е. $|(\bar{a}, \bar{b})| = \| \bar{a} \|_{\mathbf{R}^n} \cdot \| \bar{b} \|_{\mathbf{R}^n}$. Теперь докажем утверждение в обратную сторону. Пусть для некоторой пары векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ имеет место равенство $|(\bar{a}, \bar{b})| = \| \bar{a} \|_{\mathbf{R}^n} \cdot \| \bar{b} \|_{\mathbf{R}^n}$, тогда квадратное уравнение

$$\| \bar{b} - \lambda \bar{a} \|_{\mathbf{R}^n} = \lambda^2 \| \bar{a} \|^2_{\mathbf{R}^n} - 2\lambda(\bar{a}, \bar{b}) + \| \bar{b} \|^2_{\mathbf{R}^n} = 0$$

имеет единственное решение $\tilde{\lambda} \in R$, т.е. $\| \bar{b} - \tilde{\lambda}\bar{a} \|_{\mathbf{R}^n} = 0$ и следовательно $\bar{b} = \tilde{\lambda}\bar{a}$, что означает линейную зависимость векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

7.1 Непрерывность функции в $\mathbf{R}^n$.

Пусть $\bar{a}$ – некоторая точка пространства $\mathbf{R}^n$, $y = f(\bar{x})$ – числовая функция, определенная в некоторой окрестности точки $\bar{a}$.

Определение. Функция $y = f(\bar{x}) \equiv f(x_1, \ldots, x_n) : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ называется *непрерывной* (по совокупности переменных) в точке $\bar{a} \in \mathbf{R}^n$, если $\forall \epsilon > 0$ существует $\delta_\epsilon > 0$ такое, что для любого $\bar{x}$ удовлетворяющего условию

$$\rho_{\mathbf{R}^n}(\bar{x}, \bar{a}) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (x_j - a_j)^2} < \delta_\epsilon$$

выполняется неравенство

$$\rho_{\mathbf{R}^1}(f(\bar{x}), f(\bar{a})) = |f(\bar{x}) - f(\bar{a})| < \epsilon.$$

Непрерывные числовые функции обладают свойством замкнутости относительно всех арифметических операций. Для числовых непрерывных на компакте функций справедлива теорема Вейерштрасса (см. §3.7), а для непрерывных на связном множестве функций теорема Больцано-Коши (см. там же). Приведем здесь их формулировки.

Теорема (Вейерштрасса). *Пусть числовая функция $y = f(\bar{x}) : K \to \mathbf{R}$ непрерывна на компакте $K \subset \mathbf{R}^n$, тогда она ограничена на этом компакте и существуют точки $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \in K$ такие, что*

$$f(\bar{x}_1) = M = \sup_K f(\bar{x}), \quad f(\bar{x}_2) = m = \inf_K f(\bar{x}).$$

Теорема (Больцано-Коши). *Пусть числовая функция $y = f(\bar{x}) : L \to \mathbf{R}$ непрерывна на связном множестве $L \subset \mathbf{R}^n$, $f(\bar{x}_1) = a$, $f(\bar{x}_2) = b$, $a < b$, $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \in L$, тогда $\forall c \in (a; b)$ существует $\bar{x}_3 \in L$ такая, что $f(\bar{x}_3) = c$.*

Наряду с понятием непрерывности по совокупности переменных рассматривают также непрерывность по отдельным переменным. Выделим одну из координат точки $\bar{a}$ с номером j, $1 \le j \le n$, положим у функции $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ все аргументы кроме j-го равными соответствующим координатам точки $\bar{a}$, тогда получим функцию одной переменной

$$\varphi(x_j) = f(a_1, \ldots, x_j, \ldots, a_n).$$

Определение. Функция $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ называется *непрерывной по пе-*

ременной x_j в точке $\bar{a} \in \mathbf{R}^n$, если соответствующая функция $\varphi(x_j)$ непрерывна в точке $x_j = a_j$.

Можно дать более общее определение *непрерывности по направлению.*

Определение. *Направлением* в $\mathbf{R}^n$ называется любой единичный вектор $\bar{e} \in \mathbf{R}^n$. Множество точек вида $\bar{x} = \bar{a} + t\bar{e}$ называется:

открытым лучом, выходящем из $\bar{a}$ в направлении $\bar{e}$, если $t > 0$;

замкнутым лучом, выходящем из $\bar{a}$ в направлении $\bar{e}$, если $t \geq 0$;

прямой, проходящем через точку $\bar{a}$ в направлении $\bar{e}$, если $t \in R$.

Рассмотрим функцию $\psi(t) = f(\bar{a} + t\bar{e})$.

Определение. Функция $y = f(\bar{x})$ называется *непрерывной в точке* $\bar{a} \in \mathbf{R}^n$ *по направлению* $\bar{e}$, если функция $\psi(t)$ непрерывна в точке $t = 0$.

Замечание. Если функция $y = f(\bar{x})$ непрерывна в точке $\bar{a}$ по совокупности переменных, то функция $y = f(\bar{x})$ непрерывна в этой точке по любому из направлений. Обратное утверждение, вообще говоря, не верно, что показывает следующий пример.

Пример 1. Функция

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 0 \end{cases}$$

непрерывна в точке (0;0) отдельно по x и по y (как отношение двух многочленов, т.е. рациональная функция), но по совокупности переменных и по любому направлению (кроме двух) она разрывна в точке (0;0). Действительно, если устремить точку $(x;y)$ к точке (0;0) по прямой $y = kx,\ k \neq 0$, то

$$f(x,y)\Big|_{y=kx} = \frac{k}{1+k^2} \to \frac{k}{1+k^2} \neq 0 \text{ при } x \to 0,$$

т.е.функция разрывна по всем направлением, кроме (0;1) и (1;0).

Пример 2. Функция

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4}, & x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & x = y = 0 \end{cases}$$

непрерывна в точке (0;0) по всем направлениям. Действительно

$$f(x,y)\Big|_{y=kx} = \frac{k^2x^3}{x^2+k^4x^4} = \frac{k^2x}{1+k^4x^2} \to 0 \text{ при } x \to 0.$$

Однако эта функция не является непрерывной по совокупности переменных. Действительно, рассмотрим значения функции $f(x,y)$ на семействе парабол $x=\alpha y^2,\ \alpha\neq 0$

$$f(x,y)\Big|_{x=\alpha y^2}=\frac{\alpha y^4}{\alpha^2 y^4+y^4}=\frac{\alpha}{\alpha^2+1}\to\frac{\alpha}{\alpha^2+1}\neq 0 \ \text{ при } \ x\to 0.$$

Рассмотрим теперь отображение более общего вида $F:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$. Такому отображению однозначно соответствует m функций $y_j=\varphi_j(\bar{x}),\ j=1,\ldots,m$, представляющих собой координаты точки $\bar{y}=F(\bar{x})$.

Лемма. *Для непрерывности отображения $F:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$ в точке $\bar{a}\in\mathbf{R}^n$ необходимо и достаточно, чтобы все координатные функции $y_j=\varphi_j(\bar{x})$ были бы непрерывны в точке $\bar{a}$.*

Доказательство. Если все координатные функции $y_j=\varphi_j(\bar{x})$ непрерывны в точке $\bar{a}$, то

$$\rho_{\mathbf{R}^m}(F(\bar{x}),F(\bar{a}))=\sqrt{\sum_{j=1}^{m}(\varphi_j(\bar{x})-\varphi_j(\bar{a}))^2}\to 0 \ \text{ при } \ \bar{x}\to\bar{a},$$

т.е. $\bar{y}=F(\bar{x})$ непрерывно в точке $\bar{a}$.

Обратно. Если $\bar{y}=F(\bar{x})$ непрерывно в точке $\bar{a}$, то для любого $k=1,\ldots,m$

$$|\varphi_k(\bar{x})-\varphi_k(\bar{a})|\leq\sqrt{\sum_{j=1}^{m}(\varphi_j(\bar{x})-\varphi_j(\bar{a}))^2}=\rho_{\mathbf{R}^m}(F(\bar{x}),F(\bar{a}))\to 0 \ \text{ при } \ \bar{x}\to\bar{a},$$

т.е. все координатные функции $y_k=\varphi_k(\bar{x})$ непрерывны в точке $\bar{a}$. **Лемма доказана.**

Теорема (о непрерывности сложной функции). *Если отображение $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$ непрерывно в точке $\bar{x}_0\in\mathbf{R}^n$, отображение $g:\mathbf{R}^m\to\mathbf{R}$ непрерывно в точке $\bar{y}_0=f(\bar{x}_0)$, тогда функция $h(\bar{x})=g(f(\bar{x}))$ непрерывна в точке $\bar{x}_0$.*

Определение. Числовая функция $f:A\to R,\ A\subset\mathbf{R}^n$ называется *равномерно непрерывной* на A, если $\forall\epsilon>0\ \exists\delta_\epsilon>0$ такое, что $\forall\bar{x},\bar{y}\in A$ таких, что $\rho_{\mathbf{R}^n}(\bar{x},\bar{y})<\delta_\epsilon$ справедливо неравенство

$$\rho_R(f(\bar{x}),f(\bar{y}))=|f(\bar{x})-f(\bar{y})|<\epsilon.$$

Теорема (Кантора). *Если функция $y = f(\bar{x})$ непрерывна на компакте $K \in \mathbf{R}^n$, то она равномерно непрерывна на этом компакте.*

Доказательство. Пусть $\epsilon > 0$ произвольное, т.к. $y = f(\bar{x})$ непрерывна в каждой точке компакта $K \in \mathbf{R}^n$, то для $\bar{x} \in K$ $\exists \delta_{\bar{x}} > 0$ такое, что $\forall \bar{y} : \rho(\bar{x}, \bar{y}) < \delta_{\bar{x}}$ справедливо неравенство $|f(\bar{x}) - f(\bar{y})| < \frac{\epsilon}{2}$. Семейство окрестностей $\{\sigma_{\bar{x}}(\frac{\delta_{\bar{x}}}{2})\}$ составляет открытое покрытие для K, значит из нее можно выделить конечное подпокрытие $\{\sigma_{\bar{x}_i}(\frac{\delta_{\bar{x}_i}}{2})\},\ i = 1, \ldots, m$. Обозначим $\delta = \min\limits_{i=1,\ldots,m} \frac{\delta_{\bar{x}_i}}{2}$, тогда для любой пары точек $\bar{x}, \bar{y} \in K$ таких, что $\rho(\bar{x}, \bar{y}) < \delta$ одна их них $\bar{x}$ попадает в какую-то из окрестностей $\sigma_{\bar{x}_j}(\frac{\delta_{\bar{x}_j}}{2})$. Покажем, что точка $\bar{y}$ окажется в окрестности $\sigma_{\bar{x}_j}(\delta_{\bar{x}_j})$. Действительно

$$\rho(\bar{x}_j, \bar{y}) \leq \rho(\bar{x}_j, \bar{x}) + \rho(\bar{x}, \bar{y}) < \frac{\delta_{\bar{x}_j}}{2} + \delta \leq \frac{\delta_{\bar{x}_j}}{2} + \frac{\delta_{\bar{x}_j}}{2} = \delta_{\bar{x}_j},$$

поэтому $|f(\bar{x}_j) - f(\bar{y})| < \frac{\epsilon}{2}$, а значит

$$|f(\bar{x}) - f(\bar{y})| \leq |f(\bar{x}) - f(\bar{x}_j)| + |f(\bar{x}_j) - f(\bar{y})| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

что и завершает доказательство. **Теорема Кантора доказана.**

Закончим этот параграф изучением свойств специальных непрерывных функций, называемых *квадратичными формами*. Такое название закреплено за функциями многих переменных вида

$$\Phi(\bar{h}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} h_i h_j.$$

Очевидно $\Phi(\bar{h})$ непрерывна по совокупности переменных. Если $a_{ij} = a_{ji}$, то $\Phi(\bar{h})$ называется *квадратичной формой с симметрической матрицей*. Квадратичная форма $\Phi(\bar{h})$ называется *положительно (отрицательно) определенной*, если $\forall \bar{h} \in \mathbf{R}^n$, $\| \bar{h} \|_{\mathbf{R}^n} \neq 0$ выполняется неравенство $\Phi(\bar{h}) > 0\, (\Phi(\bar{h}) < 0)$, если при этом неравенства окажутся нестрогими, такую форму называют *положительно (отрицательно) полуопределенной*. Если же форма может принимать как положительные, так и отрицательные значения, то такая форма называется *неопределенной*.

Лемма. *Если квадратичная форма $\Phi(\bar{h})$ с симметрической матрицей положительно (отрицательно) определенная, то существует число $C >$*

$0\,(C<0)$ *такое, что* $\forall \bar h \in \mathbf{R}^n$ *выполняется неравенство* $\Phi(\bar h) \geq C\cdot \parallel \bar h \parallel_{\mathbf{R}^n}$ *(соответственно* $\Phi(\bar h) \leq C\cdot \parallel \bar h \parallel_{\mathbf{R}^n}$*).*

Доказательство. Пусть $\Phi(\bar h)$ положительно определенная квадратичная форма. Обозначим через $\parallel A \parallel$ симметрическую матрицу коэффициентов формы, тогда $\forall \bar h \in \mathbf{R}^n$, $\parallel \bar h \parallel_{\mathbf{R}^n} \neq 0$

$$\Phi(\bar h) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}h_j\right)h_i = \sum_{i=1}^{n}\left(A\bar h\right)_i \cdot h_i = (A\bar h, \bar h) > 0.$$

Рассмотрим функцию $f(\bar h) = (A\bar h, \bar h)$ (непрерывную по совокупности переменных) на сфере единичного радиуса пространства $\mathbf{R}^n$, т.е. на множестве $\partial\sigma_{\bar 0}(1) \equiv \{\bar h \in \mathbf{R}^n : \parallel \bar h \parallel_{\mathbf{R}^n} = 1\}$, которое является компактным множеством в $\mathbf{R}^n$, поэтому $f(\bar h)$ достигает на нем свое минимальное значение (по теореме Вейерштрасса) $C > 0$, т.е. $f(\bar h) \geq C > 0$ $\forall \bar h \in \partial\sigma_{\bar 0}(1)$. Но тогда $\forall \bar h \in \mathbf{R}^n$, $\parallel \bar h \parallel_{\mathbf{R}^n} \neq 0$ вектор $\bar y = \frac{\bar h}{\|\bar h\|} \in \partial\sigma_{\bar 0}(1)$, т.е.

$$f(\bar y) = (A\bar y, \bar y) = \left(A\frac{\bar h}{\parallel \bar h \parallel}, \frac{\bar h}{\parallel \bar h \parallel}\right) \geq C$$

или

$$\frac{1}{\parallel \bar h \parallel^2}\cdot (A\bar h, \bar h) \geq C,$$

$$\Phi(\bar h) = (A\bar h, \bar h) \geq C \parallel \bar h \parallel^2 .$$

Лемма доказана.

Приведем здесь без доказательства критерий знакоопределенности квадратичных форм.

Теорема (критерий Сильвестра знакоопределенности симметрической квадратичной формы). *Пусть* $\Phi(\bar h)$ *симметрическая квадратичная форма и* $A_1, A_2, \ldots, A_n = \det \parallel A \parallel$ *- главные миноры ее матрицы, тогда*

1) квадратичная форма $\Phi(\bar h)$ *положительно определена тогда и только тогда, когда* $A_1 > 0,\ A_2 > 0, A_3 > 0,\ \ldots,\ A_n = \det \parallel A \parallel > 0;$

2) квадратичная форма $\Phi(\bar h)$ *отрицательно определена тогда и только тогда, когда* $A_1 < 0,\ A_2 > 0, A_3 < 0, A_4 > 0,\ \ldots$ *(т.е. чередование знаков).*

7.2 Дифференцируемые функции многих переменных. Дифференцирование сложных функций.

Рассмотрим числовую функцию $y = f(\bar{x})$, определенную в некоторой окрестности точки $\bar{a} \in \mathbf{R}^n$. *Приращением (полным приращением) функции* $y = f(\bar{x})$ в точке $\bar{a}$, соответствующим приращению аргумента $\Delta\bar{x} = \bar{x} - \bar{a}$, называется разность

$$\Delta f = f(\bar{x}) - f(\bar{a}) = f(\bar{a} + \Delta\bar{x}) - f(\bar{a}).$$

Замечание 1. Если функция $y = f(\bar{x})$ непрерывна в точке $\bar{a}$, то

$$\lim_{|\Delta\bar{x}|\to 0} |\Delta f| = \lim_{|\Delta\bar{x}|\to 0} |f(\bar{a} + \Delta\bar{x}) - f(\bar{a})| = \lim_{\rho_{\mathbf{R}^n}(\bar{x},\bar{a})\to 0} \rho_R(f(\bar{x}), f(\bar{a})) = 0,$$

т.е. $\Delta f = \circ(1)$ при $|\Delta\bar{x}| \to 0$.

Если приращение Δf функции $y = f(\bar{x})$ в точке $\bar{a}$ можно представить в виде суммы

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} A_i \Delta x_i + \circ(|\Delta\bar{x}|),$$

где A_i - числа, то линейная функция приращений аргументов $\sum\limits_{i=1}^{n} A_i \Delta x_i$ называется *дифференциалом функции* $y = f(\bar{x})$ *в точке* $\bar{a}$ и обозначается

$$dy \equiv df = \sum_{i=1}^{n} A_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} A_i (x_i - a_i).$$

В частности, если $f(\bar{x}) = x_j$, то $df = \Delta x_j = dx_j$ откуда получаем общепринятое обозначение для дифференциала функции

$$df = \sum_{i=1}^{n} A_i dx_i.$$

Если у функции $y = f(\bar{x})$ существует в точке $\bar{a}$ дифференциал в указанном смысле (как линейная или главная часть приращение Δf функции в точке $\bar{a}$), то функцию $y = f(\bar{x})$ называют *дифференцируемой* в точке $\bar{a}$.

Замечание 2. Если функция $y = f(\bar{x})$ дифференцируема в точке $\bar{a}$, то она непрерывна в этой точке. Действительно, в этом случае

$$\lim_{\Delta\to 0} \Delta f = \lim_{\Delta\to 0} \Big(\sum_{i=1}^{n} A_i \Delta x_i + \circ(|\Delta\bar{x}|) \Big) = 0,$$

что и означает непрерывность функции $y = f(\bar{x})$ в точке $\bar{a}$.

Теорема (необходимое условие дифференцируемости функции многих переменных). *Если функция $y = f(\bar{x})$ дифференцируема в точке $\bar{a}$, то все функции $\varphi_j(x_j) = f(a_1, \ldots, x_j, \ldots, a_n),\ j = 1, \ldots, n$, дифференцируемы в точках a_j, причем $A_j = \varphi_j'(a_j)$.*

Доказательство. Зафиксируем в выражении для полного приращения функции $y = f(\bar{x})$ в точке $\bar{a}$ значения независимых переменных $x_i = a_i,\ i \neq j$, тогда

$$\Delta f = f(\bar{a} + \Delta\bar{x}) - f(\bar{a}) = A_j \Delta x_j + \circ(|\Delta x_j|)$$

т.к. $|\Delta\bar{x}| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} \Delta x_i^2} = |\Delta x_j|$. С другой стороны, в тех же предположениях

$$\Delta f = f(\bar{a} + \Delta\bar{x}) - f(\bar{a}) = \varphi_j(a_j + \Delta x_j) - \varphi_j(a_j),$$

т.е.

$$\varphi_j(a_j + \Delta x_j) - \varphi_j(a_j) = A_j \Delta x_j + \circ(|\Delta x_j|),$$

что в соответствии с определением дифференцируемости функции одной переменной (см. §4.1) означает равенство $A_j = \varphi_j'(a_j)$. **Теорема доказана.**

Производная функции $\varphi_j(x_j)$ в точке a_j, если она существует, называется *частной производной функции $y = f(\bar{x})$ в точке $\bar{a}$ по переменной x_j* и обозначается

$$\frac{\partial f(\bar{a})}{\partial x_j} = \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_j}\Big|_{\bar{x}=\bar{a}} = \varphi_j'(a_j) = \lim_{\Delta x_j \to 0} \frac{\varphi_j(a_j + \Delta x_j) - \varphi_j(a_j)}{\Delta x_j} =$$

$$= \lim_{\Delta x_j \to 0} \frac{f(a_1, \ldots, a_j + \Delta x_j, \ldots, a_n) - f(a_1, \ldots, a_n)}{\Delta x_j}.$$

В этом случае дифференциал функции $y = f(\bar{x})$ в точке $\bar{a}$ можно записать в виде

$$df(\bar{x})\Big|_{\bar{x}=\bar{a}} = \frac{\partial f(\bar{a})}{\partial x_1}\Delta x_1 + \ldots + \frac{\partial f(\bar{a})}{\partial x_n}\Delta x_n = \frac{\partial f(\bar{a})}{\partial x_1}dx_1 + \ldots + \frac{\partial f(\bar{a})}{\partial x_n}dx_n.$$

Таким образом, существование всех частных производных функции $y = f(\bar{x})$ в точке $\bar{a}$ является необходимым условием дифференцируемости в точке $\bar{a}$ самой функции.

Теорема (первое достаточное условие дифференцируемости функции многих переменных). *Пусть в некоторой окрестности точки $\bar{a}$ существуют все частные производные первого порядка функции $y = f(\bar{x})$ и эти частные производные непрерывны (по совокупности переменных) в точке $\bar{a}$, тогда сама функция $y = f(\bar{x})$ дифференцируема в точке $\bar{a}$.*

Доказательство. Представим полное приращение функции $y = f(\bar{x})$ в точке $\bar{a}$ в следующем виде

$$\Delta f = f(\bar{a} + \Delta\bar{x}) - f(\bar{a}) = f(a_1 + \Delta x_1, \ldots, a_n + \Delta x_n) - f(a_1, \ldots, a_n) =$$
$$= (f(a_1 + \Delta x_1, a_2 + \Delta x_2, \ldots, a_n + \Delta x_n) - f(a_1, a_2 + \Delta x_2, \ldots, a_n + \Delta x_n)) +$$
$$+ (f(a_1, a_2 + \Delta x_2, \ldots, a_n + \Delta x_n) - f(a_1, a_2, \ldots, a_n + \Delta x_n)) + \ldots +$$
$$+ (f(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n + \Delta x_n) - f(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n)).$$

К каждой из выписанных разностей можно применить теорему Лагранжа о среднем (см. §4.6), поскольку в рассматриваемой окрестности точки $\bar{a}$ функция $y = f(\bar{x})$ имеет непрерывные частные производные. Получим

$$\Delta f = \frac{\partial f(a_1 + \theta_1 \Delta x_1, a_2 + \Delta x_2, \ldots, a_n + \Delta x_n)}{\partial x_1} \Delta x_1 +$$
$$+ \frac{\partial f(a_1, a_2 + \theta_2 \Delta x_2, \ldots, a_n + \Delta x_n)}{\partial x_1} \Delta x_2 + \ldots +$$
$$+ \frac{\partial f(a_1, a_2, \ldots, a_n + \theta_n \Delta x_n)}{\partial x_1} \Delta x_n,$$

где все $0 < \theta_i < 1,\ i = 1, \ldots, n$. Так как все частные производные непрерывны в точке $\bar{a}$, то

$$\lim_{|\Delta\bar{x}| \to 0} \frac{\partial f(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, a_i + \theta_i \Delta x_i, \ldots, a_n + \Delta x_n)}{\partial x_i} = \frac{\partial f(\bar{a})}{\partial x_i}.$$

Поэтому для значений частных производных в промежуточных точках справедливо представление

$$\frac{\partial f(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, a_i + \theta_i \Delta x_i, \ldots, a_n + \Delta x_n)}{\partial x_i} = \frac{\partial f(\bar{a})}{\partial x_i} + \alpha_i(\Delta\bar{x}),$$

где $\lim\limits_{|\Delta\bar{x}| \to 0} \alpha_i(\Delta\bar{x}) = 0$. Следовательно

$$\Delta f = \frac{\partial f(\bar{a})}{\partial x_1} \Delta x_1 + \ldots + \frac{\partial f(\bar{a})}{\partial x_n} \Delta x_n + (\alpha_1(\Delta\bar{x}) \Delta x_1 + \ldots + \alpha_n(\Delta\bar{x}) \Delta x_n).$$

Поскольку в силу неравенства Коши-Буняковского для векторов

$$0 \le |\alpha_1(\Delta\bar{x})\Delta x_1 + \ldots + \alpha_n(\Delta\bar{x})\Delta x_n| \le$$
$$\le \sqrt{\alpha_1^2(\Delta\bar{x}) + \ldots + \alpha_n^2(\Delta\bar{x})} \cdot \sqrt{\Delta^2 x_1 + \ldots + \Delta^2 x_n} = \beta(\Delta\bar{x}) \cdot |\Delta\bar{x}| = \circ(|\Delta\bar{x}|),$$

т.к. $\beta(\Delta\bar{x}) = \sqrt{\alpha_1^2(\Delta\bar{x}) + \ldots + \alpha_n^2(\Delta\bar{x})}$ - бесконечно малая при $|\Delta\bar{x}| \to 0$, как сумма конечного числа бесконечно малых. Из этих оценок вытекает окончательное представление для полного приращения функции $y = f(\bar{x})$ в окрестности точки $\bar{a}$

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\bar{a})}{\partial x_i} \Delta x_i + \circ(|\Delta\bar{x}|) = df(\bar{a}) + \circ(|\Delta\bar{x}|).$$

Теорема доказана.

Пример 1. Рассмотрим функцию

$$f(x,y) = \begin{cases} 2x + 3y + \frac{4xy^3}{x^2+y^4}, & x^2 + y^4 \ne 0, \\ 0, & x^2 + y^4 = 0. \end{cases}$$

Эта функция непрерывна в точке (0;0). Действительно

$$\lim_{(x;y)\to(0;0)} f(x,y) = \lim_{(x;y)\to(0;0)} \left(2x + 3y + \frac{4xy^3}{x^2+y^4}\right) =$$
$$= \left\{ \begin{array}{l} x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi, \\ (x;y) \to (0;0) \Leftrightarrow \rho \to 0 \end{array} \right\} =$$
$$= \lim_{\rho\to 0} \rho\left(2\cos\varphi + 3\sin\varphi + \frac{4\rho\cos\varphi\sin^3\varphi}{\cos^2\varphi + \rho^2\sin^4\varphi}\right) = 0 = f(0;0).$$

Частные производные у этой функции существуют как при $x^2 + y^4 \ne 0$, так и в точке (0;0) (по определению):

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{2\Delta x - 0}{\Delta x} = 2 = \frac{\partial f(0,0)}{\partial x},$$
$$\lim_{\Delta y\to 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{3\Delta y - 0}{\Delta y} = 3 = \frac{\partial f(0,0)}{\partial y}.$$

Исследуем теперь эту функцию на дифференцируемость в точке (0;0). Полное приращение имеет вид

$$f(\Delta x, \Delta y) - f(0,0) = 2\Delta x + 3\Delta y + \frac{4\Delta x(\Delta y)^3}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^4},$$

линейная часть $2\Delta x + 3\Delta y$, нелинейная часть (остаток)

$$\alpha(\Delta x, \Delta y) = \frac{4\Delta x(\Delta y)^3}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^4}.$$

Проверим удовлетворяет ли остаток $\alpha(\Delta x, \Delta y)$ предельному равенству

$$\lim_{|\Delta\bar{x}|\to 0} \frac{\alpha(\Delta x, \Delta y)}{|\Delta\bar{x}|} = 0.$$

$$\frac{|\alpha(\Delta x, \Delta y)|}{|\Delta\bar{x}|} = \frac{4\Delta x(\Delta y)^3}{((\Delta x)^2 + (\Delta y)^4)\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}\Big|_{\Delta x = (\Delta y)^2} =$$

$$= \frac{4(\Delta y)^5}{2(\Delta y)^4|\Delta y|\sqrt{1 + (\Delta y)^2}} = \frac{2}{\sqrt{1 + (\Delta y)^2}} \xrightarrow{\Delta y \to 0} 2 \neq 0.$$

Следовательно, функция не дифференцируема в точке (0;0).

Пример 2. Рассмотрим функцию

$$f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}.$$

Эта функция непрерывна в точке (0;0). В этой точке у нее существуют первые частные производные по обеим переменным, что видно из следующих вычислений

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\sqrt[3]{(\Delta x)^3}}{\Delta x} = 1 = \frac{\partial f(0, 0)}{\partial x}.$$

Исследуем на дифференцируемость. Полное приращение

$$\Delta f = \sqrt[3]{(\Delta x)^3 + (\Delta y)^3}$$

не содержит линейных слагаемых вообще. Проверим, существует ли предел $\lim\limits_{|\Delta\bar{x}|\to 0} \frac{\Delta f}{|\Delta\bar{x}|}$.

$$\frac{\Delta f}{|\Delta\bar{x}|} = \frac{\sqrt[3]{(\Delta x)^3 + (\Delta y)^3}}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}\Big|_{\Delta y = k\Delta x} = \frac{\sqrt[3]{1 + k^3}}{\sqrt{1 + k^2}} \xrightarrow{\Delta x \to 0} l \neq 0.$$

Функция не дифференцируема в точке (0;0).

Теорема (дифференцирование сложной функции). *Пусть отображение $\varphi(\bar{x}) = (\varphi_1(\bar{x}), \ldots, \varphi_m(\bar{x})) : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ определено в некоторой δ-окрестности точки $\bar{a} \in \mathbf{R}^n$, $\sigma_{\bar{a}}(\delta)$, причем образ этой δ-окрестности*

$\varphi(\sigma_{\bar{a}}(\delta)) \subset \sigma_{\bar{b}}(\epsilon)$ вложен в ϵ-окрестность $\sigma_{\bar{b}}(\epsilon)$ точки $\bar{b} \in \mathbf{R}^m$, $\bar{b} = \varphi(\bar{a})$ и все координатные функции $y_i = \varphi_i(\bar{x})$, $i = 1, \ldots, m$ дифференцируемы в точке $\bar{a}$. Пусть в ϵ-окрестности точки $\bar{b}$ определена числовая функция $z = f(\bar{y})$, которая дифференцируема в точке $\bar{b}$, тогда сложная функция $z = h(\bar{x}) = f(\varphi(\bar{x}))$ дифференцируема в точке $\bar{a}$, причем справедливы равенства

$$\frac{\partial h(\bar{a})}{\partial x_j} = \frac{\partial f(\bar{b})}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial \varphi_1(\bar{a})}{\partial x_j} + \ldots + \frac{\partial f(\bar{b})}{\partial y_m} \cdot \frac{\partial \varphi_m(\bar{a})}{\partial x_j},\ j = 1, \ldots, n.$$

Доказательство. Придадим аргументу $\bar{x}$ в точке $\bar{a}$ приращение $\Delta\bar{x}$. Этому приращению соответствуют приращения Δy_i координатных функций $y_i = \varphi_i(\bar{x})$, $i = 1, \ldots, m$ в точке $\bar{a}$. Вектору приращений $\Delta\bar{y} = (\Delta y_1, \ldots, \Delta y_m)$ в свою очередь соответствует приращение Δf функции $z = f(\bar{y})$ в точке $\bar{b}$. Поскольку функция $z = f(\bar{y})$ дифференцируема в точке $\bar{b}$, то ее полное приращение Δf можно записать в виде

$$\Delta f = \frac{\partial f(\bar{b})}{\partial y_1}\Delta y_1 + \ldots + \frac{\partial f(\bar{b})}{\partial y_m}\Delta y_m + \circ(|\Delta\bar{y}|).$$

В силу дифференцируемости координатных функций $y_i = \varphi_i(\bar{x})$, $i = 1, \ldots, m$ в точке $\bar{a}$ приращения Δy_i можно записать в следующем виде

$$\Delta y_i = \frac{\partial \varphi_i(\bar{a})}{\partial x_1}\Delta x_1 + \ldots + \frac{\partial \varphi_i(\bar{a})}{\partial x_n}\Delta x_n + \circ(|\Delta\bar{x}|).$$

Подставим выражения для Δy_i в представление для Δf и приведем подобные слагаемые относительно Δx_i, получим

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f(\bar{b})}{\partial y_i}\Delta y_i + \circ(\sqrt{(\Delta y_1)^2 + \ldots + (\Delta y_m)^2}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f(\bar{b})}{\partial y_i}\Big(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i(\bar{a})}{\partial x_j}\Delta x_j\Big) + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f(\bar{b})}{\partial y_i} \cdot \circ(|\Delta\bar{x}|) +$$

$$+ \circ(\sqrt{(\Delta y_1)^2 + \ldots + (\Delta y_m)^2}) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\Big(\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f(\bar{b})}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial \varphi_i(\bar{a})}{\partial x_j}\Big)\Delta x_j + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f(\bar{b})}{\partial y_i} \cdot \circ(|\Delta\bar{x}|) +$$

$$+\circ\,(\sqrt{(\Delta y_1)^2+\ldots+(\Delta y_m)^2}).$$

Поскольку $\frac{\partial f(\bar b)}{\partial y_i}$ - некоторые числа, то в силу свойств $\circ$-малых

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f(\bar b)}{\partial y_i}\cdot\circ(|\Delta\bar x|)=\circ(|\Delta\bar x|).$$

Далее для величин Δy_i в силу неравенства Коши-Буняковского для векторов справедлива оценка

$$0\le|\Delta y_i|\le\Big|\frac{\partial\varphi_i(\bar a)}{\partial x_1}\Delta x_1+\ldots+\frac{\partial\varphi_i(\bar a)}{\partial x_n}\Delta x_n\Big|+\Big|\circ(|\Delta\bar x|)\Big|\le$$

$$\le\sqrt{\Big(\frac{\partial\varphi_i(\bar a)}{\partial x_1}\Big)^2+\ldots+\Big(\frac{\partial\varphi_i(\bar a)}{\partial x_n}\Big)^2}\sqrt{(\Delta x_1)^2+\ldots+(\Delta x_n)^2}+\Big|\circ(|\Delta\bar x|)\Big|=$$

$$=K_i|\Delta\bar x|+|\beta_i(|\Delta\bar x|)|\cdot|\Delta\bar x|=(K_i+|\beta_i(|\Delta\bar x|)|)|\Delta\bar x|,$$

здесь $\beta_i(|\Delta\bar x|)$ - бесконечно малая при $|\Delta\bar x|\to0$. Поэтому

$$0\le(\Delta y_i)^2\le(K_i+|\beta_i(|\Delta\bar x|)|)^2|\Delta\bar x|^2,$$

тогда

$$0\le\sqrt{(\Delta y_1)^2+\ldots+(\Delta y_m)^2}\le\sqrt{\sum_{i=1}^{m}(K_i+|\beta_i(|\Delta\bar x|)|)^2}\cdot|\Delta\bar x|$$

и значит

$$\circ(\sqrt{(\Delta y_1)^2+\ldots+(\Delta y_m)^2})=\circ(|\Delta\bar x|).$$

Таким образом, приращение Δf приведено к виду

$$\Delta f=\sum_{j=1}^{n}\Big(\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f(\bar b)}{\partial y_i}\cdot\frac{\partial\varphi_i(\bar a)}{\partial x_j}\Big)\Delta x_j+\circ(|\Delta\bar x|),$$

что и завершает доказательство теоремы, т.к. такое представление означает дифференцируемость сложной функции $z=h(\bar x)=f(\varphi(\bar x))$, а выражения $\sum\limits_{i=1}^{m}\frac{\partial f(\bar b)}{\partial y_i}\cdot\frac{\partial\varphi_i(\bar a)}{\partial x_j}$ являются частными производными сложной функции по x_j.

Теорема доказана.

Замечание (инвариантность формы первого дифференциала). Если в выражении для первого дифференциала функции $z=f(\bar y)$ $\quad dz=$

$\sum\limits_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial y_i} dy_i$ вместо дифференциалов dy_i подставить дифференциалы функций $y_i = \varphi_i(\bar{x})$ $dy_i = \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} dx_j$, то получим выражение

$$dz = \sum_{j=1}^{n} \Big(\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \Big) dx_j,$$

представляющее дифференциал сложной функции $z = f(g(\bar{x}))$, т.е. форма первого дифференциала не изменилась при замене независимых переменных зависимыми.

Теорема (правила дифференцирования). *Справедливы следующие формулы*

$$d(cu) = cdu, \forall c \in R; \ d(u \pm v) = du \pm dv; \ d(uv) = vdu + udv; \ d\Big(\frac{u}{v}\Big) = \frac{vdu - udv}{v^2}.$$

Доказательство. Для доказательства воспользуемся свойством инвариантности первого дифференциала. Проверим справедливость последнего равенства. Пусть $z = \frac{u}{v}$, где u и v независимые переменные, тогда

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv = \frac{1}{v} du - \frac{u}{v^2} dv = \frac{vdu - udv}{v^2}.$$

В силу инвариантности формы первого дифференциала выражение для dz будет дифференциалом для $\frac{u}{v}$ и в случае, если u и v сами будут дифференцируемыми функциями других переменных.

Теорема доказана.

7.3 Производная по направлению. Градиент. Элементы дифференциальной геометрии.

Производная по направлению. Градиент. Пусть в $\mathbf{R}^n$ задано некоторое направление $\bar{l} = (l_1, \ldots, l_n)$, $|\bar{l}| = 1$, $\bar{k}_1, \ldots, \bar{k}_n$ – единичные векторы (орты) осей координат $Ox_1, \ldots, Ox_n$, тогда если α_i угол между векторами $\bar{l}$ и $\bar{k}_i$, то $l_i = (\bar{l}, \bar{k}_i) = |\bar{l}| \cdot |\bar{k}_i| \cdot \cos \alpha_i = \cos \alpha_i$. Поэтому числа $l_i = \cos \alpha_i$ принято называть *направляющими косинусами* вектора (направления) $\bar{l}$.

Пусть числовая функция $y = f(\bar{x})$ дифференцируема в точке $\bar{a} = \bar{x}$, рассмотрим сложную функцию $h(t) = f(\bar{a}+t\bar{l})$ одной переменной t. По теореме о дифференцировании сложной функции из предыдущего параграфа для производной функции $h(t)$ в точке $t = 0$ справедливо равенство

$$h'(0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\bar{a})}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial x_i(0)}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\bar{a})}{\partial x_i} \cdot \cos\alpha_i,$$

т.к. здесь $x_i = a_i + t\cos\alpha_i$.

Определение. Величину $h'(0)$ принято называть *производной по направлению* $\bar{l}$ *функции* $y = f(\bar{x})$ *в точке* $\bar{a}$ и обозначают $\frac{\partial f}{\partial \bar{l}} = h'(0)$.

Определение. Вектор вида $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$ называют *градиентом функции* $y = f(\bar{x})$ и обозначают

$$\nabla f = grad\, f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right).$$

Таким образом, для производной по направлению $\bar{l}$ получаем следующее представление

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{l}} = (grad\, f, \bar{l}) = (\nabla f, \bar{l}).$$

Формальный символ $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$ называют оператором "набла".

Из неравенства Коши-Буняковского для векторов вытекает оценка для модуля производной по направлению

$$\left|\frac{\partial f}{\partial \bar{l}}\right| \leq \| \bar{l} \|_{\mathbf{R}^n} \cdot \| grad\, f \|_{\mathbf{R}^n} = |\bar{l}| \cdot |grad\, f| = |grad\, f|,$$

причем неравенство обратится в равенство, если векторы $\bar{l}$ и $grad\, f$ окажутся коллинеарными. Отсюда вытекают следующие естественные свойства производной по направлению.

1. Производная функции $y = f(\bar{x})$ в точке $\bar{a}$ по направлению определяемому $grad\, f$ (в этой точке) является максимальной по сравнению с производной в точке $\bar{a}$ по любому другому направлению и равна $|grad\, f|$, т.е. длине вектора $grad\, f$ в точке $\bar{a}$.

2. Минимальное значение производной функции $y = f(\bar{x})$ в точке $\bar{a}$ по направлению равно $-|grad\, f|$ и достигается при дифференцировании по направлению противоположному к направлению вектора $grad\, f$.

3. Производная функции $y = f(\bar{x})$ по направлению $\bar{l}$ в точке $\bar{a}$ равна нулю, если в этой точке $grad\, f = 0$ или $\bar{l} \perp grad\, f$.

Геометрический смысл дифференциала. Касательные и нормальный векторы поверхности. В этом пункте будем рассматривать функции зависящие от двух переменных. Поверхностью P в пространстве $\mathbf{R}^3$ называется *график всякой непрерывной функции* $z = f(x, y)$, заданной в некоторой области $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ (область – связное открытое множество), т.е. поверхность P – это множество точек в $\mathbf{R}^3$ с координатами $(x; y; z) \equiv (x; y; f(x, y))$, где $(x; y) \in \Omega$. Две поверхности $z = f_1(x, y)$ и $z = f_2(x, y)$ называются *касающимися* друг друга в точке $(x_0; y_0; z_0)$, если $z_0 = f_1(x_0, y_0) = f_2(x_0, y_0)$ и $r(x, y) = f_1(x, y) - f_2(x, y) = \circ\left(\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}\right)$ при $(x; y) \to (x_0; y_0)$. Как известно графиком линейной функции $z = kx + ly + m$, где $k, l, m \in R$ является плоскость в $\mathbf{R}^3$.

Теорема (геометрический смысл дифференциала). *Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в ϵ-окрестности точки $\bar{a} = (x_0; y_0)$, дифференцируема в этой точке, $z_0 = f(x_0, y_0)$, тогда плоскость π, заданная уравнением вида*

$$z - z_0 = \frac{\partial f(\bar{a})}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(\bar{a})}{\partial y}(y - y_0)$$

касается поверхности $P:\ z = f(x, y)$ в точке $\bar{a}$.

Доказательство. Уравнение плоскости π перепишем в виде

$$z = g(x, y) = z_0 + \frac{\partial f(\bar{a})}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(\bar{a})}{\partial y}\Delta y,$$

здесь

$$\frac{\partial f(\bar{a})}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(\bar{a})}{\partial y}\Delta y$$

линейная часть по Δx и Δy, т.е. дифференциал функции $z = f(x, y)$ в точке $\bar{a} = (x_0; y_0)$. Поскольку функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке $\bar{a} = (x_0; y_0)$, то

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f(\bar{a})}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(\bar{a})}{\partial y}\Delta y + \circ\left(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}\right),$$

поэтому

$$f(x, y) - g(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(\bar{a})}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(\bar{a})}{\partial y}\Delta y + \circ\left(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}\right) -$$

$$-z_0 - \frac{\partial f(\bar{a})}{\partial x}\Delta x - \frac{\partial f(\bar{a})}{\partial y}\Delta y = \circ\left(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}\right).$$

Полученное равенство в соответствии с определением касания поверхностей и означает утверждение теоремы. **Теорема доказана.**

Пусть в $\mathbf{R}^3$ задана поверхность $z = f(x,y)$, $(x;y)\Omega \subset \mathbf{R}^2$. Рассмотрим на этой поверхности семейства *координатных линий* вида: $(x; y_0; f(x, y_0))$, $(x; y_0) \in \Omega$, y_0 - фиксировано и $(x_0; y; f(x_0, y))$, $(x_0; y) \in \Omega$, x_0 - фиксировано. Тогда вектора $\bar{r}_x = \left(1; 0; \frac{\partial f}{\partial x}\right)$, $\bar{r}_y = \left(0; 1; \frac{\partial f}{\partial y}\right)$ являются касательными к этим координатным линиям. Вектор $\bar{n} = \bar{r}_x \times \bar{r}_y$ называется *нормальным вектором* к поверхности $P: \ z = f(x,y)$. Найдем координаты этого вектора

$$\bar{n} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix} = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}; -\frac{\partial f}{\partial y}; 1\right).$$

Очевидно этот же вектор является нормальным и к касательной плоскости π

$$-\frac{\partial f(\bar{a})}{\partial x}(x - x_0) - \frac{\partial f(\bar{a})}{\partial y}(y - y_0) + z - z_0 = 0.$$

Прямую, проходящую через точку $(x_0; y_0; z_0)$ параллельно нормальному вектору $\bar{n}$, называется *нормалью к поверхности* $P: \ z = f(x,y)$ в точке $(x_0; y_0; z_0)$.

7.4 Частные производные высших порядков.

Пусть числовая функция $y = f(\bar{x})$ имеет в некоторой ϵ-окрестности $\sigma_{\bar{a}}(\epsilon)$ точки $\bar{a}$ все первые частные производные $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $i = 1, \ldots, n$. Эти частные производные сами являются функциями n независимых переменных, поэтому могут иметь в точке $\bar{a}$ частные производные $\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$, $i, j = 1, \ldots, n$, которые называются *вторыми частными производными* исходной функции $y = f(\bar{x})$ и обозначаются $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$, если $i \neq j$, их называют *смешанными производными.* Естественно возникает вопрос о совпадении двух смешанных частных производных $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$, т.е. вопрос о том, на сколько существен порядок дифференцирования. Следующий пример показывает, что в общем случае порядок дифференцирования весьма важен.

Пример. Рассмотрим функцию двух переменных

$$z = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2+y^2 = 0. \end{cases}$$

Найдем частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ этой функции в точке (0;0).

$$\frac{\partial z(0,0)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{z(\Delta x, 0) - z(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = 0,$$

$$\frac{\partial z(0,0)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{z(0, \Delta y) - z(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{0}{\Delta y} = 0,$$

т.е.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \begin{cases} \frac{y(x^4-y^4+4x^2y^2)}{(x^2+y^2)^2}, & x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2+y^2 = 0. \end{cases}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \begin{cases} \frac{x(x^4-y^4-4x^2y^2)}{(x^2+y^2)^2}, & x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2+y^2 = 0. \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 z(0,0)}{\partial y \partial x} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\frac{\partial z(0,\Delta y)}{\partial x} - \frac{\partial z(0,0)}{\partial x}}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{-\frac{(\Delta y)^5}{(\Delta y)^4}}{\Delta y} = -1,$$

$$\frac{\partial^2 z(0,0)}{\partial x \partial y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\partial z(\Delta x,0)}{\partial y} - \frac{\partial z(0,0)}{\partial y}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{(\Delta x)^5}{(\Delta x)^4}}{\Delta x} = 1,$$

итак $\frac{\partial^2 z(0,0)}{\partial y \partial x} \neq \frac{\partial^2 z(0,0)}{\partial x \partial y}$.

Таким образом, естественно возникает вопрос о достаточных условиях, при которых смешанные частные производные совпадают, т.е. когда результат вычисления смешанных частных производных не зависит от порядка дифференцирования. Такие достаточные условия приведены в следующих двух теоремах Шварца и Юнга.

Теорема (Шварца). *Пусть функция $y = f(\bar{x})$ имеет в некоторой ϵ-окрестности $\sigma_{\bar{a}}(\epsilon)$ точки $\bar{a}$ смешанные частные производные второго порядка $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$, причем они непрерывны в точке $\bar{a}$, тогда $\frac{\partial^2 f(\bar{a})}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f(\bar{a})}{\partial x_j \partial x_i}$.*

Доказательство. Рассмотрим пару функций

$$\varphi(x_i) = f(a_1, \ldots, x_i, \ldots, a_j + h, \ldots, a_n) - f(a_1, \ldots, x_i, \ldots, a_j, \ldots, a_n),$$

$$\phi(x_j) = f(a_1, \ldots, a_i + h, \ldots, x_j, \ldots, a_n) - f(a_1, \ldots, a_i, \ldots, x_j, \ldots, a_n).$$

Запишем приращения для этих функций

$$\Delta\varphi = \varphi(a_i + h) - \varphi(a_i) =$$

$$= f(a_1, \ldots, a_i + h, \ldots, a_j + h, \ldots, a_n) - f(a_1, \ldots, a_i + h, \ldots, a_j, \ldots, a_n) -$$

$$- f(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_j + h, \ldots, a_n) + f(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_j, \ldots, a_n)$$

$$\Delta\phi = \phi(a_j + h) - \phi(a_j) =$$

$$= f(a_1, \ldots, a_i + h, \ldots, a_j + h, \ldots, a_n) - f(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_j + h, \ldots, a_n) -$$

$$- f(a_1, \ldots, a_i + h, \ldots, a_j, \ldots, a_n) + f(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_j, \ldots, a_n),$$

т.е. $\Delta\varphi = \Delta\phi$.

По теореме Лагранжа о среднем для приращения функции $\Delta\varphi$ имеем

$$\Delta\varphi = \varphi'(a_i + \theta_1 h)h = \left(\frac{\partial f(a_1, \ldots, a_i + \theta_1 h, \ldots, a_j + h, \ldots, a_n)}{\partial x_i} -\right.$$

$$\left. - \frac{\partial f(a_1, \ldots, a_i + \theta_1 h, \ldots, a_j, \ldots, a_n)}{\partial x_i}\right) h =$$

$$= \frac{\partial^2 f(a_1, \ldots, a_i + \theta_1 h, \ldots, a_j + \theta_2 h, \ldots, a_n)}{\partial x_j \partial x_i} h^2, \quad 0 < \theta_1,\, \theta_2 < 1.$$

Аналогично для приращения функции ϕ справедливо представление

$$\Delta\phi = \phi'(a_j + \theta_3 h)h = \frac{\partial^2 f(a_1, \ldots, a_i + \theta_4 h, \ldots, a_j + \theta_3 h, \ldots, a_n)}{\partial x_i \partial x_j} h^2,$$

$$0 < \theta_3,\, \theta_4 < 1.$$

Отсюда следует равенство

$$\frac{\partial^2 f(a_1, \ldots, a_i + \theta_1 h, \ldots, a_j + \theta_2 h, \ldots, a_n)}{\partial x_j \partial x_i} =$$

$$= \frac{\partial^2 f(a_1, \ldots, a_i + \theta_4 h, \ldots, a_j + \theta_3 h, \ldots, a_n)}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $h \to 0$, в силу непрерывности вторых смешанных частных производных, получаем требуемое равенство.

Теорема Шварца доказана.

Теорема (Юнга). *Пусть функция* $y = f(\bar{x})$ *имеет в некоторой* ϵ*-окрестности* $\sigma_{\bar{a}}(\epsilon)$ *точки* $\bar{a}$ *первые частные производные* $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ *и* $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ *дифференцируемые в самой точке* $\bar{a}$*, тогда* $\frac{\partial^2 f(\bar{a})}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f(\bar{a})}{\partial x_j \partial x_i}$.

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы Шварца, введем в рассмотрение пару функций $\varphi(x_i)$ и $\phi(x_j)$, тогда по теореме Лагранжа о среднем

$$\Delta\varphi = \varphi'(a_i + \theta_1 h)h = \left(\frac{\partial f(a_1, \ldots, a_i + \theta_1 h, \ldots, a_j + h, \ldots, a_n)}{\partial x_i} - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial f(a_1, \ldots, a_i + \theta_1 h, \ldots, a_j, \ldots, a_n)}{\partial x_i}\right) h =$$

$$= \left(\left(\frac{\partial f(a_1, \ldots, a_i + \theta_1 h, \ldots, a_j + h, \ldots, a_n)}{\partial x_i} - \frac{\partial f(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_j, \ldots, a_n)}{\partial x_i}\right) - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{\partial f(a_1, \ldots, a_i + \theta_1 h, \ldots, a_j, \ldots, a_n)}{\partial x_i} - \frac{\partial f(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_j, \ldots, a_n)}{\partial x_i}\right)\right) h.$$

В силу дифференцируемости функции $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ в точке $\bar{a}$ для приращения $\Delta\varphi$ получаем представление

$$\Delta\varphi = \left(\frac{\partial^2 f(\bar{a})}{\partial x_i^2}\theta_1 h + \frac{\partial^2 f(\bar{a})}{\partial x_j \partial x_i} h + \circ\left(\sqrt{(\theta_1 h)^2 + h^2}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial^2 f(\bar{a})}{\partial x_i^2}\theta_1 h + \circ(|h|)\right) h = \frac{\partial^2 f(\bar{a})}{\partial x_j \partial x_i} h^2 + \circ(h^2).$$

Рассуждая аналогично для приращения $\Delta\phi$ получаем представление

$$\Delta\phi = \frac{\partial^2 f(\bar{a})}{\partial x_i \partial x_j} h^2 + \circ(h^2).$$

Из равенства $\Delta\varphi = \Delta\phi$ получаем

$$\frac{\partial^2 f(\bar{a})}{\partial x_j \partial x_i} h^2 + \circ(h^2) = \frac{\partial^2 f(\bar{a})}{\partial x_i \partial x_j} h^2 + \circ(h^2)$$

или

$$\frac{\partial^2 f(\bar{a})}{\partial x_j \partial x_i} + \circ(1) = \frac{\partial^2 f(\bar{a})}{\partial x_i \partial x_j} + \circ(1).$$

Отсюда после предельного перехода при $h \to 0$ получаем утверждение теоремы.

Теорема Юнга доказана.

Определение. Функция $y = f(\bar{x})$ называется *k-раз дифференцируемой* в точке $\bar{a}$, если все ее частные производные $(k-1)$-го порядка дифференцируемы в этой точке.

Теорема (второе достаточное условие дифференцируемости). *Для того чтобы функция $y = f(\bar{x})$ была k-раз дифференцируемой в точке $\bar{a}$ достаточно, чтобы все ее частные производные до порядка k включительно были непрерывны в этой точке.*

Справедливость этого утверждения вытекает из определения дифференцируемости функции многих переменных и первого достаточного условия дифференцируемости (см. §7.2) с последующей индукцией по k.

Следствие (из теоремы Юнга). *Если функция $y = f(\bar{x})$ k-раз дифференцируемой в точке $\bar{a}$, то смешанные частные производные до порядка k включительно не зависят от порядка дифференцирования.*

Доказательство проводится индукцией по k.

7.5 Дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора для функций многих переменных.

Пусть функция $y = f(\bar{x})$ дважды дифференцируема в точке $\bar{a}$, $\bar{h} = (h_1, \ldots, h_n)$ - вектор приращений аргумента в точке $\bar{a}$, тогда для дифференциала функции $y = f(\bar{x})$ в точке $\bar{a}$ имеем представление

$$df(\bar{a}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\bar{a})}{\partial x_i} h_i.$$

Рассмотрим функцию

$$g(\bar{x}) = df(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_i} h_i,$$

эта функция дифференцируема в точке $\bar{a}$, поэтому ее дифференциал в этой точке, соответствующий вектору приращений $\bar{h} = (h_1, \ldots, h_n)$, имеет вид

$$dg(\bar{a}) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_i} h_i \right) \Big|_{\bar{x}=\bar{a}} h_j = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f(\bar{a})}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j.$$

Полученное таким образом выражение называется вторым дифференциалом функции $y = f(\bar{x})$ в точке $\bar{a}$ и обозначается $d^2 f(\bar{a}) \equiv dg(\bar{a})$. Далее вновь можно ввести функцию вида

$$g(\bar{x}) = d^2 f(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j$$

и при выполнении соответствующих условий ввести понятие третьего дифференциала функции $y = f(\bar{x})$ и т.д. Поскольку для независимых переменных приращения совпадают с дифференциалами $h_i = dx_i$, то выражение для второго дифференциала $d^2 f$ и т.д. приобретают следующий вид (общепринятую форму записи)

$$d^2 f(\bar{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j,$$

$$d^k f(\bar{x}) = \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{n} \frac{\partial^k f(\bar{x})}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_k}} dx_{i_1} \ldots dx_{i_k}.$$

Символически это записывают еще и так

$$d^k f(\bar{x}) = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} dx_i \right)^k f(\bar{x}).$$

Замечание 1. Как и для функций одной переменной, дифференциалы второго и последующих порядков не обладают свойством инвариантности. Действительно, если $\bar{x} = \bar{\varphi}(\bar{t})$, то (см. замечание из §7.2)

$$df(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_i} dx_i,$$

$$df(\bar{\varphi}(\bar{t})) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\bar{\varphi}(\bar{t}))}{\partial x_i} d\varphi_i(\bar{t}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\bar{\varphi}(\bar{t}))}{\partial x_i} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i(\bar{t})}{\partial t_j} dt_j =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\bar{\varphi}(\bar{t}))}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi_i(\bar{t})}{\partial t_j} \right) dt_j = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\bar{\varphi}(\bar{t}))}{\partial t_j} dt_j.$$

Отсюда, в соответствии с правилами вычисления дифференциалов (см. §7.2),

$$d^2 f(\bar{\varphi}(\bar{t})) = \sum_{i=1}^{n} \left\{ d\left(\frac{\partial f(\bar{\varphi}(\bar{t}))}{\partial x_i} \right) d\varphi_i(\bar{t}) + \frac{\partial f(\bar{\varphi}(\bar{t}))}{\partial x_i} d^2 \varphi_i(\bar{t}) \right\} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(\bar{\varphi}(\bar{t}))}{\partial x_j \partial x_i} d\varphi_j(\bar{t}) \right) d\varphi_i(\bar{t}) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\bar{\varphi}(\bar{t}))}{\partial x_i} d^2\varphi_i(\bar{t}),$$

т.е.

$$d^2 f(\bar{\varphi}(\bar{t})) \neq \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(\bar{x})}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j \Big|_{\bar{x}=\bar{\varphi}(\bar{t})}.$$

Отметим, что в развернутом виде $d^2 f(\bar{\varphi}(\bar{t}))$ выглядит следующим образом

$$d^2 f(\bar{\varphi}(\bar{t})) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial t_k} \left(\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\bar{\varphi}(\bar{t}))}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi_i(\bar{t}))}{\partial t_j} \right) dt_j \right) dt_k =$$

$$= \sum_{k,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial t_k} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\bar{\varphi}(\bar{t}))}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi_i(\bar{t}))}{\partial t_j} \right) dt_j dt_k.$$

Замечание 2. Если функция $\bar{x} = \bar{\varphi}(\bar{t})$ линейна по $\bar{t}$, т.е.

$$x_i = \varphi_i(\bar{t}) = x_{i0} + x_{i1}t_1 + \ldots + x_{in}t_n,$$

то $d^2\varphi_i(\bar{t}) \equiv 0$ и тогда инвариантность формы второго и последующих дифференциалов обеспечена. Соответственно, если $\bar{x} = \bar{a} + t\bar{e}$, где $\bar{e}$ – некоторое направление в $\mathbf{R}^n$, $t \in R$, то в силу линейности такой функции (а значит и инвариантности формы дифференциала) для сложной функции (одной переменной) $g(t) = f(\bar{a} + t\bar{e})$ имеем

$$d^k f(\bar{a} + t\bar{e})\Big|_{t=0} = d^k g(t)\Big|_{t=0} = g^{(k)}(0)(dt)^k.$$

Замечание 3. При проведении вычислений иногда требуется полная расшифровка выражения для $d^k f(\bar{x})$, которая выглядит следующим образом (для k-раз дифференцируемой функции)

$$d^k f(\bar{x}) = \sum_{i_1+\ldots+i_n=k,\, 0\le i_j\le k} \frac{(i_1 + i_2 + \ldots + i_n)!}{i_1! \cdot i_2! \cdot \ldots \cdot i_n!} \cdot$$

$$\cdot \frac{\partial^k f(\bar{x})}{\partial x_1^{i_1} \partial x_2^{i_2} \ldots \partial x_n^{i_n}} (dx_1)^{i_1} (dx_2)^{i_2} \ldots (dx_n)^{i_n}$$

и доказывается индукцией по k.

Теорема (формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано). *Пусть функция $y = f(\bar{x})$ k раз дифференцируема в точке $\bar{a}$, тогда при*

$\bar{x} \to \bar{a}$ *справедливо представление*

$$f(\bar{x}) = P(\bar{x}) + \circ(|\bar{x} - \bar{a}|^k),$$

где

$$P(\bar{x}) = f(\bar{a}) + df(\bar{a})\Big|_{d\bar{x}=\bar{x}-\bar{a}} + \frac{1}{2!}d^2 f(\bar{a})\Big|_{d\bar{x}=\bar{x}-\bar{a}} + \ldots + \frac{1}{k!}d^k f(\bar{a})\Big|_{d\bar{x}=\bar{x}-\bar{a}}$$

или в развернутом виде

$$P(\bar{x}) = f(\bar{a}) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\bar{a})}{\partial x_i}(x_i - a_i) +$$

$$+ \sum_{l=2}^{k} \sum_{i_1+\ldots+i_n=l,\, 0\le i_j \le l} \frac{1}{i_1! \cdot \ldots \cdot i_n!} \cdot \frac{\partial^l f(\bar{a})}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_n^{i_n}}(x_1 - a_1)^{i_1} \ldots (x_n - a_n)^{i_n}.$$

Доказательство. При $k = 1$ утверждение теоремы представляет собой определение дифференцируемости функции $y = f(\bar{x})$ в точке $\bar{a}$. Покажем справедливость теоремы при $k > 1$. Рассмотрим функцию $r(\bar{x}) = f(\bar{x}) - P(\bar{x})$, очевидно $r(\bar{a}) = \frac{\partial^l r(\bar{a})}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_n^{i_n}} = 0$ при $1 \le l \le k,\ i_1 + \ldots + i_n = l$. Теорема будет доказана, если показать справедливость равенства $r(\bar{x}) = \circ(|\bar{x} - \bar{a}|^k)$ при $\bar{x} \to \bar{a}$, которое докажем методом математической индукции по k. При $k = 1$ утверждение справедливо в силу предыдущего замечания. Предположим, что при $k \le m - 1$ для функции $r(\bar{x})$ из равенств $r(\bar{a}) = \frac{\partial^l r(\bar{a})}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_n^{i_n}} = 0$ при $1 \le l \le k,\ i_1 + \ldots + i_n = l$ следует представление $r(\bar{x}) = \circ(|\bar{x} - \bar{a}|^k)$ при $\bar{x} \to \bar{a}$. Пусть теперь выполнены условия $r(\bar{a}) = \frac{\partial^l r(\bar{a})}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_n^{i_n}} = 0$ при $1 \le l \le m,\ i_1 + \ldots + i_n = l$, тогда

$$r(\bar{x}) = r(\bar{x}) - r(\bar{a}) =$$

$$= r(a_1 + \Delta x_1, a_2 + \Delta x_2, \ldots, a_{n-1} + \Delta x_{n-1}, a_n + \Delta x_n) - r(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n) =$$

$$= \Big(r(a_1 + \Delta x_1, a_2 + \Delta x_2, \ldots, a_{n-1} + \Delta x_{n-1}, a_n + \Delta x_n) -$$

$$- r(a_1 + \Delta x_1, a_2 + \Delta x_2, \ldots, a_{n-1} + \Delta x_{n-1}, a_n) \Big) +$$

$$+ \Big(r(a_1 + \Delta x_1, a_2 + \Delta x_2, \ldots, a_{n-1} + \Delta x_{n-1}, a_n) -$$

$$- r(a_1 + \Delta x_1, a_2 + \Delta x_2, \ldots, a_{n-1}, a_n) \Big) + \ldots +$$

$$+\Big(r(a_1+\Delta x_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n) - r(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n)\Big).$$

К каждому из слагаемых можно применить теорему Лагранжа (см. §4.6) о среднем (по *одной* из переменных, т.к. в силу дифференцируемости в точке $\bar{a}$ в окрестности этой точки определены соответствующие частные производные и мы имеем дело с непрерывностью и дифференцируемостью по каждой из переменных в отдельности), поэтому

$$r(\bar{x}) = \frac{\partial r(a_1+\Delta x_1, a_2+\Delta x_2, \ldots, a_{n-1}+\Delta x_{n-1}, a_n+\theta_n\Delta x_n)}{\partial x_n}\Delta x_n +$$

$$+\frac{\partial r(a_1+\Delta x_1, a_2+\Delta x_2, \ldots, a_{n-1}+\theta_{n-1}\Delta x_{n-1}, a_n)}{\partial x_{n-1}}\Delta x_{n-1} + \ldots +$$

$$+\frac{\partial r(a_1+\theta_1\Delta x_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n)}{\partial x_{n-1}}\Delta x_1.$$

Однако каждая из частных производных, фигурирующих в этом разложении, удовлетворяет предположению индукции, поэтому при $\bar{x} \to \bar{a}$

$$0 \le |r(\bar{x})| \le |\circ(|\bar{x}-\bar{a}|^{m-1})|\Big(|\Delta x_n| + |\Delta x_{n-1}| + \ldots + |\Delta x_1|\Big) \le$$

$$\le |\circ(|\bar{x}-\bar{a}|^{m-1})| \cdot n \cdot |\bar{x}-\bar{a}| = \circ(|\bar{x}-\bar{a}|^m),$$

т.е. $r(\bar{x}) = \circ(|\bar{x}-\bar{a}|^m)$. **Теорема доказана.**

Теорема (формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа). *Пусть числовая функция $y = f(\bar{x})$ в любой точке $\bar{x} \in \sigma_{\bar{a}}(\epsilon)$ некоторой ϵ-окрестности точки $\bar{a}$ $(k+1)$ раз дифференцируема, тогда $\forall \bar{x} \in \sigma_{\bar{a}}(\epsilon)$ существует точка $\bar{c} = \bar{a} + \theta(\bar{x}-\bar{a}),\ 0 < \theta < 1$ (принадлежащая отрезку с концами в точках $\bar{a}$ и $\bar{x}$), такая что*

$$f(\bar{x}) = f(\bar{a}) + \sum_{j=1}^{k} \frac{d^j f(\bar{a})}{j!}\Big|_{d\bar{x}=\bar{x}-\bar{a}} + \frac{d^{k+1} f(\bar{c})}{(k+1)!}\Big|_{d\bar{x}=\bar{x}-\bar{a}}.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $g(t) = f(\bar{a} + t(\bar{x}-\bar{a})),\ t \in [0;1]$, тогда по формуле Тейлора для функции одной переменной (см. §4.11) с остаточным членом в форме Лагранжа имеем

$$g(t) = g(0) + \frac{g'(0)}{1!}t + \ldots + \frac{g^{(k)}(0)}{k!}t^k + \frac{t^{k+1}}{(k+1)!}g^{(k+1)}(\theta),\ \text{здесь } 0 < \theta < t < 1,$$

тогда

$$g(1) = g(0) + \frac{g'(0)}{1!} + \ldots + \frac{g^{(k)}(0)}{k!} + \frac{g^{(k+1)}(\theta)}{(k+1)!}.$$

Отсюда по правилу дифференцирования сложной функции (см. §7.2)

$$f(\bar{x}) = f(\bar{a}) + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\bar{a})}{\partial x_i}(x_i - a_i)}_{\frac{1}{1!} df(\bar{a})\big|_{d\bar{x}=\bar{x}-\bar{a}}} + \ldots + \frac{1}{k!} d^k f(\bar{a})\Big|_{d\bar{x}=\bar{x}-\bar{a}} + \frac{1}{(k+1)!} d^{k+1} f(\bar{c})\Big|_{d\bar{x}=\bar{x}-\bar{a}}.$$

Теорема доказана.

7.6 Локальный экстремум функции многих переменных. Необходимые и достаточные условия экстремума.

Определение. Точка $\bar{a} \in \mathbf{R}^n$ называется точкой *строгого локального максимума* функции $y = f(\bar{x})$, если существует некоторая ϵ-окрестность этой точки $\sigma_{\bar{a}}(\epsilon)$ такая, что для любой точки $\bar{x} \in \sigma_{\bar{a}}(\epsilon)$, $\bar{x} \neq \bar{a}$ справедливо неравенство $f(\bar{x}) < f(\bar{a})$;

если $f(\bar{x}) \leq f(\bar{a})$, то $\bar{a}$ называется точкой *не строгого локального максимума*;

если $f(\bar{x}) > f(\bar{a})$, то $\bar{a}$ называется точкой *строгого локального минимума*;

если $f(\bar{x}) \geq f(\bar{a})$, то $\bar{a}$ называется точкой *не строгого локального минимума.*

Теорема (необходимое условие экстремума). *Если точка $\bar{a}$ - точка локального экстремума (строгого или не строгого) числовой функции $y = f(\bar{x})$ и $y = f(\bar{x})$ дифференцируема в точке $\bar{a}$, то $\frac{\partial f(\bar{a})}{\partial x_i} = 0$, $i = 1, \ldots, n$ (т.е. $grad\, f(\bar{a}) = \bar{0}$).*

Доказательство. Рассмотрим семейство функций одной переменной $g_i(x_i) = f(a_1, \ldots, x_i, \ldots, a_n)$, $i = 1, \ldots, n$, тогда в точке $x_i = a_i$ функция $g_i(x_i)$ имеет локальный экстремум и поэтому в силу необходимого условия экстремума для функций одной переменной (см. т. Ферма §4.8) $g_i'(a_i) = 0$ или $\frac{\partial f(\bar{a})}{\partial x_i} = 0$. **Теорема доказана.**

Точки $\bar{a}$, в которых $grad\, f(\bar{a}) = \bar{0}$, называются *стационарными точками* функции $y = f(\bar{x})$.

Пусть $f : \mathbf{R}^n \to R^1$, $y = f(\bar{x})$ - дважды дифференцируемая в точке $\bar{a}$, тогда по теореме Юнга $\frac{\partial^2 f(\bar{a})}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f(\bar{a})}{\partial x_j \partial x_i}$ и можно построить симметрическую квадратичную форму

$$\Phi(\bar{h}) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(\bar{a})}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j.$$

Теорема (достаточное условие экстремума). *Пусть функция* $y = f(\bar{x})$, $f : \mathbf{R}^n \to R^1$ *дважды дифференцируемая в точке* $\bar{a}$, $\frac{\partial f(\bar{a})}{\partial x_i} = 0$, $i = 1, \ldots, n$, *тогда*

а) если квадратичная форма $\Phi(\bar{h})$ *положительно (отрицательно) определенная, то* $y = f(\bar{x})$ *имеет в точке* $\bar{a}$ *локальный минимум (максимум);*

б) если квадратичная форма $\Phi(\bar{h})$ *неопределенная, то* $y = f(\bar{x})$ *не имеет в точке* $\bar{a}$ *локального экстремума.*

Доказательство. Пусть $y = f(\bar{x})$ удовлетворяет условиям теоремы, тогда по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано имеем при любом $\bar{a} + \bar{h} \in \sigma_{\bar{a}}(\delta)$

$$f(\bar{a} + \bar{h}) = f(\bar{a}) + df(\bar{a})\Big|_{d\bar{x}=\bar{h}} + \frac{1}{2!} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(\bar{a})}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j + \circ(|\bar{h}|^2)$$

или

$$f(\bar{a} + \bar{h}) - f(\bar{a}) = \frac{1}{2}\Phi(\bar{h}) + \circ(|\bar{h}|^2) \text{ при } \bar{h} \to 0.$$

а) Если квадратичная форма $\Phi(\bar{h})$ положительно (отрицательно) определенная, то по лемме о квадратичных формах из §7.1 существует положительное (отрицательное) число $C > 0\,(C < 0)$ такое, что $\forall \bar{h}$ выполняется неравенство $\Phi(\bar{h}) \geq C|\bar{h}|^2 \left(\Phi(\bar{h}) \leq C|\bar{h}|^2\right)$, тогда

$$f(\bar{a} + \bar{h}) - f(\bar{a}) \geq \frac{1}{2}\Big(C + \circ(1)\Big)|\bar{h}|^2 \quad \left(f(\bar{a} + \bar{h}) - f(\bar{a}) \leq \frac{1}{2}\Big(C + \circ(1)\Big)|\bar{h}|^2\right).$$

Так как $\circ(1) \to 0$ при $\bar{h} \to 0$, то существует $0 < \delta_1 < \delta$ такое, что для любого $|\bar{h}| < \delta_1$ выполняется неравенство $C + \circ(1) \geq \frac{C}{2} > 0 \left(C + \circ(1) \leq \frac{C}{2} < 0\right)$, тогда $\forall (\bar{a} + \bar{h}) \in \sigma_{\bar{a}}(\delta_1) \subset \sigma_{\bar{a}}(\delta)$ справедливо неравенство

$$f(\bar{a} + \bar{h}) - f(\bar{a}) \geq \frac{C}{4}|\bar{h}|^2 > 0 \quad \left(f(\bar{a} + \bar{h}) - f(\bar{a}) \leq \frac{C}{4}|\bar{h}|^2 < 0\right),$$

т.е. $\bar{a}$ точка локального минимума (максимума).

б) Если квадратичная форма $\Phi(\bar{h})$ неопределенная, то найдутся $\bar{h}_1$ и $\bar{h}_2$ такие, что $\Phi(\bar{h}_1) = C_1 > 0$ и $\Phi(\bar{h}_2) = C_2 < 0$, тогда найдется положительное число $\delta_2 > 0$ такое, что $\forall 0 < t < \delta_2$, $\bar{a} + t \cdot \bar{h}_1 \in \sigma_{\bar{a}}(\delta_1)$ и $\bar{a} + t \cdot \bar{h}_2 \in \sigma_{\bar{a}}(\delta_1)$. Для этих точек имеем

$$f(\bar{a} + t \cdot \bar{h}_1) - f(\bar{a}) = \frac{1}{2}\left(\Phi(t \cdot \bar{h}_1) + \circ(|t \cdot \bar{h}_1|^2)\right) = \frac{t^2}{2}\left(\Phi(\bar{h}_1) + \circ(|\bar{h}_1|^2)\right) =$$

$$= \frac{t^2}{2}\left(C_1 + |\bar{h}_1|^2 \circ (1)\right) \geq \frac{C_1 t^2}{4} > 0,$$

$$f(\bar{a} + t \cdot \bar{h}_2) - f(\bar{a}) = \frac{t^2}{2}\left(C_2 + |\bar{h}_1|^2 \circ (1)\right) \leq \frac{C_2 t^2}{4} < 0,$$

т.е. $\bar{a}$ не является точкой локального экстремума.

Теорема доказана.

Замечание. Если функция $y = f(\bar{x})$, $f : \mathbf{R}^n \to R^1$ трижды дифференцируемая в точке $\bar{a}$, $\frac{\partial f(\bar{a})}{\partial x_i} = 0$, $\frac{\partial^2 f(\bar{a})}{\partial x_i \partial x_j} = 0$, $i, j = 1, \ldots, n$, то тип точки $\bar{a}$ определяется исследованием знакоопределенности 3-формы $d^3 f(\bar{a})\Big|_{d\bar{x} = \bar{h}}$ (и так далее).

Пример 1. Исследовать на экстремум функцию

$$f(x, y, z) = z \ln z - z - z \ln xy + xy + x^2 + 2y^2 - 4x - 2y.$$

Выпишем необходимые условия экстремума

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{z}{x} + y + 2x - 4 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{z}{y} + x + 4y - 2 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z} = \ln z + 1 - 1 - \ln xy = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = \frac{1}{2} \\ z = xy \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = \frac{1}{2} \\ z = 1 \end{cases}$$

Подозрительной на экстремум точкой является $M_0\Big(2; \frac{1}{2}; 1\Big)$. Вычислим в этой точке значения всех вторых частных производных

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Big|_{M_0} = \left(\frac{z}{x^2} + 2\right)\Big|_{M_0} = 2 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = -\frac{1}{x}\Big|_{M_0} = -\frac{1}{2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Big|_{M_0} = \left(\frac{z}{y^2} + 4\right)\Big|_{M_0} = 4 + 4 = 8, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = -\frac{1}{y}\Big|_{M_0} = -2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{1}{z}\Big|_{M_0} = 1,$$

составим матрицу квадратичной формы

$$A = \begin{pmatrix} \frac{9}{4} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 8 & -2 \\ -\frac{1}{2} & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

и вычислим все ее главные миноры

$$\Delta_1 = \frac{9}{4} > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{9}{4} & 1 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 18 - 1 = 17 > 0,$$

$$\Delta_3 = \det A = 18 + 1 + 1 - 2 - 1 - 9 = 8 > 0.$$

В силу критерия Сильвестра квадратичная форма положительно определенная и в соответствии с доказанной теоремой $M_0\left(2; \frac{1}{2}; 1\right)$ является точкой локального минимума.

Пример 2. Исследовать на экстремум функцию

$$u = 3x^3 + y^2 + 6xy + (z-1)^2.$$

Выпишем необходимые условия экстремума

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 9x^2 + 6y = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} = 2y + 6x = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial z} = 2(z-1) = 0 \end{cases} \begin{cases} 3x^2 + 2y = 0 \\ y + 3x = 0 \\ z = 1 \end{cases} \begin{cases} 3x^2 - 6x = 0 \\ y = -3x \\ z = 1 \end{cases} \begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 0 \\ z_1 = 1 \end{cases} \begin{cases} x_2 = 2 \\ y_2 = -6 \\ z_2 = 1 \end{cases}$$

Таким образом здесь две подозрительные на экстремум точки $M_1(0; 0; 1)$ и $M_2(2; -6; 1)$. Найдем все вторые частные производные

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 18x, \ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 6, \ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = 0, \ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2, \ \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = 0, \ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 2.$$

Матрица квадратичной формы в точке $M_1(0; 0; 1)$ имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

ее первый главный минор равен нулю, т.е. критерий Сильвестра "не работает", поэтому попробуем определить знак квадратичной формы исследуя ее непосредственно

$$\Phi(h_1, h_2, h_3) = 12h_1h_2 + 2h_2^2 + 2h_3^2.$$

Поскольку $\Phi(1,1,1) = 12+2+2 = 16 > 0$ и $\Phi(-1,1,1) = -12+2+2 = -8 < 0$, то эта форма неопределенная и значит точка $M_1(0;0;1)$ не является точкой экстремума.

Матрица квадратичной формы в точке $M_2(2;-6;1)$ имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 36 & 6 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

все ее главные миноры

$$\Delta_1 = 36 > 0, \quad \Delta_2 = 36 > 0, \quad \Delta_3 = \det A = 72 > 0$$

положительны, а значит $M_2(2;-6;1)$ является точкой локального минимума.

Пример 3. Исследовать на экстремум функцию

$$u = x^3 + xy + y^2 - 2xz + 2z^2 + 3y - 1.$$

Выпишем необходимые условия экстремума

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 + y - 2z = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} = x + 2y + 3 = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial z} = -2x + 4z = 0 \end{cases} \begin{cases} 2z = x \\ y = 2z - 3x^2 \\ x = -2y - 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2z = x \\ y = 2z - 3x^2 \\ x = -2(x - 3x^2) - 3 \Leftrightarrow 2x^2 - x - 1 = 0 \end{cases} \begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = -2 \\ z_1 = \frac{1}{2} \end{cases} \begin{cases} x_2 = -\frac{1}{2} \\ y_2 = -\frac{5}{4} \\ z_2 = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

Получили две подозрительные на экстремум точки $M_1\left(1;-2;\frac{1}{2}\right)$ и $M_2\left(-\frac{1}{2};-\frac{5}{4};-\frac{1}{4}\right)$. Найдем все вторые частные производные

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6x, \ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 1, \ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = -2, \ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2, \ \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = 0, \ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 4.$$

Матрица квадратичной формы в точке $M_1\left(1;-2;\frac{1}{2}\right)$ имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

все ее главные миноры

$$\Delta_1 = 6 > 0, \quad \Delta_2 = 11 > 0, \quad \Delta_3 = \det A = 36 > 0$$

положительны, а значит $M_1 \left(1; -2; \frac{1}{2}\right)$ является точкой локального минимума и $u_{\min} = -4,5$.

Матрица квадратичной формы в точке $M_2 \left(-\frac{1}{2}; -\frac{5}{4}; -\frac{1}{4}\right)$ имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

все ее главные миноры

$$\Delta_1 = -3 < 0, \quad \Delta_2 = -7 < 0, \quad \Delta_3 = \det A = -36 < 0$$

отрицательны, а значит $M_2 \left(-\frac{1}{2}; -\frac{5}{4}; -\frac{1}{4}\right)$ не является точкой экстремума.

Пример 4. Очевидно функция $u = x^4 + y^4$ имеет в точке (0;0) минимум. Эту же точку получим из необходимых условий экстремума. Все частные производные до третьего порядка включительно равны нулю в этой точке. Поэтому для проверки достаточных условий требуется исследование знакоопределенности 4-формы, имеющей вид,

$$d^4 f \Big|_{d\bar{x}=\bar{h}} = 24(h_1^4 + h_2^4) > 0 \ \ \forall \bar{h} \neq 0.$$

7.7 Неявные функции. Теоремы о неявных функциях.

п.1. Условимся внутри этого пункта точки пространства $\mathbf{R}^n$ обозначать следующим образом $(\bar{x}, y)$, где $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_{n-1})$. Пусть задано некоторое уравнение $f(\bar{x}, y) = 0$.

Определение. Функция $y = \varphi(\bar{x})$, зависящая от $(n-1)$ переменных $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_{n-1})$ и заданная в некоторой δ-окрестности $\sigma_{\bar{a}}(\delta)$ точки $\bar{a} \in \mathbf{R}^{n-1}$, называется *неявной функцией*, задаваемой уравнением $f(\bar{x}, y) = 0$, если $\forall \bar{x} \in \sigma_{\bar{a}}(\delta)$ справедливо равенство $f(\bar{x}, \varphi(\bar{x})) = 0$.

Определение. Функция $z = f(\bar{x}, y)$ называется *гладкой* в области $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, если в любой точке области Ω существуют все первые частные производные

$\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $i = 1, \ldots, n-1$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ и они непрерывны по совокупности переменных в области Ω.

Замечание. Согласно первому достаточному условию дифференцируемости функции (см. §7.2) гладкость функции $z = f(\bar{x}, y)$ на области Ω гарантирует ее дифференцируемость в каждой точке области Ω, что в свою очередь влечет непрерывность $z = f(\bar{x}, y)$ во всех точках области Ω (см. замечание 2 из §7.2). Таким образом гладкость функции $z = f(\bar{x}, y)$ в области Ω эквивалентна непрерывности как самой функции $z = f(\bar{x}, y)$, так и всех ее частных производных $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ в этой области.

Теорема (о неявной функции). *Пусть выполнены следующие условия:*

а) функция $f(\bar{x}, y)$ гладкая в некоторой ϵ-окрестности точки $(\bar{a}, b) \in \mathbf{R}^n$;

б) $f(\bar{a}, b) = 0$;

в) $\frac{\partial f(\bar{a},b)}{\partial y} \neq 0$,

тогда существует единственная неявная функция $y = \varphi(\bar{x})$, определенная в некоторой δ-окрестности $\sigma_{\bar{a}}(\delta)$ точки $\bar{a} \in \mathbf{R}^{n-1}$, такая, что

1) $\varphi(\bar{a}) = b$;

2)$\forall \bar{x} \in \sigma_{\bar{a}}(\delta)$ справедливо равенство $f(\bar{x}, \varphi(\bar{x})) = 0$;

3) функция $y = \varphi(\bar{x})$ гладкая на $\sigma_{\bar{a}}(\delta)$, причем

$$\frac{\partial y}{\partial x_i} = \frac{\partial \varphi(\bar{x})}{\partial x_i} = -\frac{\frac{\partial f(\bar{x},y)}{\partial x_i}}{\frac{\partial f(\bar{x},y)}{\partial y}}\Big|_{y=\varphi(\bar{x})} = -\frac{f'_{x_i}(\bar{x}, y)}{f'_y(\bar{x}, y)}\Big|_{y=\varphi(\bar{x})}.$$

Пример 1. Доказать, что уравнение $z^3 - 3xyz = 8$ определяет единственную дифференцируемую неявную функцию $z = f(x, y)$ в некоторой окрестности точки (0, -1, 2). Вычислить $z_x(0, -1)$ и $z_y(0, -1)$.

Функция $f(x, y, z) = 3xyz - z^3 + 8$ гладкая на $\mathbf{R}^3$ и

$$\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z}\Big|_{(0,-1,2)} = 3xy - 3z^2 = 3(xy - z^2) = -12 \neq 0,$$

т.е. рассматриваемое уравнение действительно локально разрешимо относительно $z = z(x, y)$. Продифференцируем уравнение по x

$$3z^2 z'_x - 3yz - 3xyz'_x = 0$$

откуда получаем

$$z_x(0,-1)=\frac{yz}{z^2-xy}\Big|_{(0,-1,2)}=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}.$$

Точно так же находим

$$z_y(0,-1)=\frac{xz}{z^2-xy}\Big|_{(0,-1,2)}=\frac{0}{4}=0.$$

Пример 2. Исследовать на экстремум функцию $z=z(x,y)$, неявно заданную уравнением

$$5x^2+5y^2+5z^2-2xy-2xz-2yz-72=0.$$

Чтобы выписать необходимые условия экстремума нужны выражения для первых производных функции $z=z(x,y)$, которые получим дифференцированием исходного уравнения по x и y. После дифференцирования уравнения по x имеем

$$10x+10z\cdot z'_x-2y-2z-2x\cdot z'_x-2y\cdot z'_x=0$$

$$5x+(5z-x-y)\cdot z'_x-y-z=0$$

или

$$z'_x=\frac{y+z-5x}{5z-x-y}.$$

Аналогично получаем

$$10y+10z\cdot z'_y-2x-2x\cdot z'_y-2z-2y\cdot z'_y=0$$

$$5y+(5z-x-y)\cdot z'_y-x-z=0$$

или

$$z'_y=\frac{x+z-5y}{5z-x-y}.$$

Выпишем необходимые условия экстремума

$$\begin{cases} z'_x=\frac{y+z-5x}{5z-x-y}=0 \\ z'_y=\frac{x+z-5y}{5z-x-y}=0 \end{cases} \begin{cases} y+z-5x=0 \\ x+z-5y=0 \end{cases} \begin{cases} x=\frac{z}{4} \\ y=\frac{z}{4} \end{cases}$$

Подставим найденные представления для x и y в исходное уравнение

$$5\left(\frac{z}{4}\right)^2+5\left(\frac{z}{4}\right)^2+5z^2-2\left(\frac{z}{4}\right)\cdot\left(\frac{z}{4}\right)-2\left(\frac{z}{4}\right)\cdot z-2\left(\frac{z}{4}\right)\cdot z-72=0$$

или

$$z^2 = 16 \implies z = \pm 4$$

откуда получаем две точки подозрительные на экстремум $M_1(1;1;4)$ и $M_2(-1;-1;-4)$. Найдем все вторые частные производные

$$z''_{xx} = \frac{(z'_x - 5)(5z - x - y) - (y + z - 5x)(5z'_x - 1)}{(5z - x - y)^2}$$

$$z''_{xy} = \frac{(1 + z'_y)(5z - x - y) - (y + z - 5x)(5z'_y - 1)}{(5z - x - y)^2}$$

$$z''_{yy} = \frac{(z'_y - 5)(5z - x - y) - (x + z - 5y)(5z'_y - 1)}{(5z - x - y)^2}$$

и вычислим их значения в подозрительных на экстремум точках.

В точке $M_1(1;1;4)$ находим

$$z''_{xx}\Big|_{M_1} = \frac{(-5)\cdot(20-1-1) - (1+4-5)\cdot(-1)}{(20-1-1)^2} = -\frac{90}{(18)^2} = -\frac{5}{18}$$

$$z''_{xy}\Big|_{M_1} = \frac{1\cdot(20-1-1) - (1+4-5)\cdot(-1)}{(20-1-1)^2} = \frac{1}{18}$$

$$z''_{yy}\Big|_{M_1} = \frac{(-5)\cdot(20-1-1) - (1+4-5)\cdot(-1)}{(20-1-1)^2} = -\frac{5}{18}$$

тогда матрица квадратичной формы имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{5}{18} & \frac{1}{18} \\ \frac{1}{18} & -\frac{5}{18} \end{pmatrix},$$

а ее главные миноры равны

$$A_1 = -\frac{5}{18} < 0, \quad A_2 = \det A = \frac{25-1}{18^2} = \frac{24}{18^2} = \frac{4}{3\cdot 18} = \frac{2}{27} > 0,$$

т.е. $M_1(1;1;4)$ точка локального максимума и $z_{\max} = 4$.

В точке $M_2(-1;-1;-4)$

$$z''_{xx}\Big|_{M_2} = \frac{(-5)\cdot(-20+1+1) - (-1-4+5)\cdot(-1)}{(-20+1+1)^2} = \frac{5}{18}$$

$$z''_{xy}\Big|_{M_2} = \frac{1\cdot(-20+1+1) - (-1-4+5)\cdot(-1)}{(-20+1+1)^2} = -\frac{1}{18}$$

$$z''_{yy}\Big|_{M_2} = \frac{(-5)\cdot(-20+1+1) - (-1-4+5)\cdot(-1)}{(-20+1+1)^2} = \frac{5}{18}$$

матрица квадратичной формы имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} \frac{5}{18} & -\frac{1}{18} \\ -\frac{1}{18} & \frac{5}{18} \end{pmatrix}$$

и главные миноры

$$A_1 = \frac{5}{18} > 0, \quad A_2 = \det A = \frac{2}{27} > 0,$$

т.е. $M_2(-1;-1;-4)$ точка локального минимума и $z_{\min} = -4$.

п.2. Рассмотрим отображение

$$f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m, \quad f(\bar{x}) = \left(f_1(\bar{x}), \ldots, f_m(\bar{x})\right),$$

где все координатные функции $f_i(\bar{x})$ являются гладкими в некоторой ϵ-окрестности точки $\bar{a} \in \mathbf{R}^n$, $\sigma_{\bar{a}}(\epsilon)$. Такие отображения называются *гладкими.*

Определение. Если все координатные функции $f_i(\bar{x})$, $i = 1, \ldots, m$ дифференцируемы в точке $\bar{x} \in \mathbf{R}^n$, то прямоугольная $m \times n$ матрица вида

$$J = J_f = \left\| \frac{\partial(f_1, \ldots, f_m)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} \right\| = \left\| \frac{\partial f_i(\bar{x})}{\partial x_j} \right\|, \; i = 1, \ldots, m, \; j = 1, \ldots, n$$

называется *матрицей Якоби (якобианом) отображения* $f(\bar{x})$.

Очевидно i-я строка якобиана представляет собой градиент координатной функции $f_i(\bar{x})$.

Пусть $m < n$. Отображение $f(\bar{x}) : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ называется *невырожденным в точке* $\bar{a}$, если все координатные функции $f_i(\bar{x})$ дифференцируемы в точке $\bar{a}$ и матрица Якоби имеет полный ранг m, т.е. векторы $grad\, f_1(\bar{a}), \ldots, grad\, f_m(\bar{a})$ линейно независимы. Далее, для определенности, будем считать, что отличный от нуля минор m-го порядка находится в последних m столбцах матрицы Якоби.

Теорема (о системе неявных функций). *Пусть* $n = p + m, p > 0$ *и выполнены следующие условия:*

а) отображение $f(\bar{x}, \bar{y}) : \mathbf{R}^n \equiv \mathbf{R}^p \otimes \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m$ *гладкое в некоторой* ϵ*-окрестности* $\sigma_{(\bar{a},\bar{b})}(\epsilon)$ *точки* $(\bar{a}, \bar{b})$, $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_p)$, $\bar{b} = (b_1, \ldots, b_m)$;

б) $f(\bar{a}, \bar{b}) = 0$;

в) отображение $f(\bar{x},\bar{y})$ невырождено в точке $(\bar{a},\bar{b})$, т.е.

$$\det\left\|\frac{\partial(f_1,\ldots,f_m)}{\partial(y_1,\ldots,y_m)}\right\|\Big|_{(\bar{a},\bar{b})}\neq 0,$$

тогда существует δ-окрестность точки $\bar{a}$ $\sigma_{\bar{a}}(\delta)\subset\mathbf{R}^p$, в которой определено единственное гладкое отображение

$$\bar{y}=\varphi(\bar{x})=(\varphi_1(\bar{x}),\ldots,\varphi_m(\bar{x})):\mathbf{R}^p\to\mathbf{R}^m,\ \bar{x}\in\sigma_{\bar{a}}(\delta)\subset\mathbf{R}^p,$$

обладающее свойствами:

1) $\bar{b}=\varphi(\bar{a})$, т.е. $f(\bar{a},\bar{b})=f(\bar{a},\varphi(\bar{a}))=0$;

2)$\forall\bar{x}\in\sigma_{\bar{a}}(\delta)$ справедливо равенство $f(\bar{x},\varphi(\bar{x}))=0$;

3) якобиан отображения $\bar{y}=\varphi(\bar{x})$ имеет вид

$$J_\varphi(\bar{x})=\left\|\frac{\partial(\varphi_1,\ldots,\varphi_m)}{\partial(x_1,\ldots,x_p)}\right\|=-\left(\frac{\partial(f_1,\ldots,f_m)}{\partial(y_1,\ldots,y_m)}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{\partial(f_1,\ldots,f_m)}{\partial(x_1,\ldots,x_p)}\right)\Big|_{\bar{y}=\varphi(\bar{x})}.$$

Пример 3. Доказать, что система уравнений

$$\begin{cases} u^3+v^3=x(u+v)^2\\ u^2+v^2=u+v+y\end{cases}$$

однозначно разрешима относительно $u=u(x,y)$ и $v=v(x,y)$ в окрестности точки $x=u=1$, $v=y=0$..

Отображение $f(x,y,u,v):\mathbf{R}^4\equiv\mathbf{R}^2\otimes\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ с координатными функциями

$$f_1(x,y,u,v)=x(u+v)^2-u^3-v^3,$$
$$f_2(x,y,u,v)=y+u+v-u^2-v^2,$$

является гладким на $\mathbf{R}^4$, удовлетворяет равенству $f(1;0;1;0)=0$ и его якобиан имеет вид

$$\left\|\frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(x,y,u,v)}\right\|=\left\|\begin{matrix}(u+v)^2 & 0 & 2x(u+v)-3u^2 & 2x(u+v)-3v^2\\ 0 & 1 & 1-2u & 1-2v\end{matrix}\right\|.$$

Поскольку отличен от нуля минор

$$\det\left\|\frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(u,v)}\right\|\Big|_{(1;0;1;0)}=\begin{vmatrix}(2-3) & 2\\ (1-2) & 1\end{vmatrix}=1\neq 0,$$

то в силу теоремы о системе неявных функций получаем требуемое утверждение, при этом якобиан отображения с координатными функциями $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$ в точке (1; 0) восстанавливается по правилу

$$\left\| \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \right\| \Big|_{(1;0)} = -\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Следствие (теорема об обратном отображении). *Пусть для отображения $\bar{y} = \varphi(\bar{x}) : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ выполнены следующие условия:*

а) отображение $\bar{y} = \varphi(\bar{x})$ гладкое в окрестности точки $\bar{a}$;

б) отображение $\bar{y} = \varphi(\bar{x})$ невырождено в точке $\bar{a}$, т.е.

$$\det \left\| \frac{\partial(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} \right\| \Big|_{\bar{x}=\bar{a}} \neq 0,$$

тогда существует обратное гладкое отображение $\bar{x} = \Psi(\bar{y}) = \varphi^{-1}(\bar{y})$ определенное в некоторой δ-окрестности точки $\bar{b} = \varphi(\bar{a})$, якобиан которого восстанавливается по формуле

$$\left\| \frac{\partial(\psi_1, \ldots, \psi_n)}{\partial(y_1, \ldots, y_n)} \right\| \Big|_{\bar{y}=\bar{b}} = \left(\frac{\partial(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} \right)^{-1} \Big|_{\bar{x}=\bar{a}}.$$

7.8 Условный экстремум функции многих переменных.

Пусть требуется найти экстремум числовой функции

$$u = f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$$

зависящей от $(n + m)$ переменных при наличии m условий связи

$$F_i(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Определение. Точка $M_0(x_1^0, \ldots, x_n^0, y_1^0, \ldots, y_m^0) \in \mathbf{R}^{n+m}$ называется точкой *условного максимума (минимума)* функции $u = f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$ при наличии связей $F_i(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0, \quad i = 1, \ldots, m$, если координаты точки M_0 удовлетворяют уравнениям связи и существует окрестность точки M_0, в пределах которой значение функции $u = f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$

в точке M_0 является наибольшим (наименьшим) среди ее значений во всех точках окрестности, координаты которых удовлетворяют уравнениям связи.

п.1. Прямой метод (метод исключения) отыскания условного экстремума. Если все функции $F_i(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$, $\;i = 1, \ldots, m$ из условия связи гладкие в некоторой окрестности точке M_0 и в этой точке минор якобиана

$$\det \left\| \frac{\partial(F_1, \ldots, F_m)}{\partial(y_1, \ldots, y_m)} \right\| \Big|_{M_0} \neq 0,$$

то по теореме о системе неявных функций существует окрестность точки $(x_1^0, \ldots, x_n^0) \in \mathbf{R}^n$, в пределах которой уравнения связи разрешимы относительно y_j, $\;j = 1, \ldots, m$, т.е.

$$y_j = \varphi_j(x_1, \ldots, x_n), \;\; j = 1, \ldots, m.$$

Подставляя эти представления в выражение для функции $u = f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$, сводим поставленную задачу к исследованию на безусловный экстремум функции

$$u = f(x_1, \ldots, x_n, \varphi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \varphi_m(x_1, \ldots, x_n)).$$

Проиллюстрируем сказанное на следующих примерах.

Пример 1. Найти экстремум функции

$$u = x \cdot y \cdot z$$

при условиях связи

$$\begin{cases} x + y - z = 3, \\ x - y - z = 8. \end{cases}$$

Из условий связи находим

$$\begin{cases} y = -2,5, \\ z = x + y - 3 = x - 5,5, \end{cases}$$

тогда

$$u = x \cdot (-2,5) \cdot (x - 5,5) = -2,5x(x - 5,5).$$

Отсюда легко находим искомую точку условного экстремума (максимума)

$$\begin{cases} x^* = 2,75 \\ y^* = -2,5 \\ z^* = -2,75 \end{cases}$$

и $u_{\max} = u(2,75, -2,5, -2,75) = 2,5 \cdot 2,75^2 = 18,90625$.

Пример 2. Найти экстремум функции

$$u = x \cdot y^2 \cdot z^3$$

при условии связи

$$x + 2y + 3z = a,\ x > 0,\ y > 0,\ z > 0,\ a > 0.$$

Из условия связи находим

$$x = a - 2y - 3z$$

тогда

$$u = y^2 \cdot z^3 \cdot (a - 2y - 3z) = ay^2z^3 - 2y^3z^3 - 3y^2z^4.$$

Выпишем необходимые условия экстремума

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial y} = 2ayz^3 - 6y^2z^3 - 6yz^4 = 2yz^3(a - 3y - 3z) = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial z} = 3ay^2z^2 - 6y^3z^2 - 12y^2z^3 = 3y^2z^2(a - 2y - 4z) = 0, \end{cases}$$

из которых находим точку подозрительную на экстремум $y = z = \frac{a}{6}$ (отметим, что линии $y = 0$ и $z = 0$, на которых также выполняются необходимые условия экстремума, не удовлетворяют условиям связи поэтому из дальнейшего рассмотрения их исключаем). Найдем все вторые частные производные и их значения в точке $y = z = \frac{a}{6}$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2az^3 - 12yz^3 - 6z^4 \implies \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big|_{y=z=\frac{a}{6}} = -\frac{a^4}{6^3},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = 6ayz^2 - 18y^2z^2 - 24yz^3 \implies \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}\Big|_{y=z=\frac{a}{6}} = -\frac{a^4}{6^3},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 6ay^2z - 12y^3z - 36y^2z^2 \implies \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\Big|_{y=z=\frac{a}{6}} = -2 \cdot \frac{a^4}{6^3}.$$

Матрица квадратичной формы имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{a^4}{6^3} & -\frac{a^4}{6^3} \\ -\frac{a^4}{6^3} & -2 \cdot \frac{a^4}{6^3} \end{pmatrix},$$

а ее главные миноры равны

$$A_1 = -\frac{a^4}{6^3} < 0, \quad A_2 = \det A = \frac{a^8}{6^6} > 0,$$

т.е. $M\left(\frac{a}{6}; \frac{a}{6}; \frac{a}{6}\right)$ точка локального максимума и $z_{\max} = \left(\frac{a}{6}\right)^3$.

п.2. Метод неопределенных множителей Лагранжа. Метод исключения переменных, рассмотренный в предыдущем пункте, применим лишь в случае явного выражения из условий связи одной группы переменных через другую, что возможно далеко не всегда. Поэтому естественно возникает необходимость в методах лишенных этого недостатка Таковым является метод множителей Лагранжа, изложению которого в тех же предположениях что и в п.1 посвящен этот пункт.

При выполнении условий пункта 1 для функции

$$u = f(x_1, \ldots, x_n, \varphi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \varphi_m(x_1, \ldots, x_n))$$

должны выполняться необходимые условия экстремума (в точке M_0)

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial y_2} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_i} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial y_m} \cdot \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_i} = 0 \;\; i = 1, \ldots, n.$$

Но функции $y_j = \varphi_j(x_1, \ldots, x_n),\ j = 1, \ldots, m$ при их подстановке в условия связи $F_j(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0,\ j = 1, \ldots, m$ обращают их в тождества, поэтому все частные производные уравнений связи по x_i равны нулю (в точке M_0), т.е.

$$\frac{\partial F_j}{\partial x_i} + \frac{\partial F_j}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} + \frac{\partial F_j}{\partial y_2} \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_i} + \ldots + \frac{\partial F_j}{\partial y_m} \cdot \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_i} = 0 \; j = 1, \ldots, m,\ i = 1, \ldots, n.$$

При каждом *фиксированном* значении индекса i умножим j-равенство на числовой множитель λ_j и сложим все эти равенства с предыдущим, получаем

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} + \lambda_1 \cdot \frac{\partial F_1}{\partial x_i} + \lambda_2 \cdot \frac{\partial F_2}{\partial x_i} + \ldots + \lambda_m \cdot \frac{\partial F_m}{\partial x_i} +$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial f}{\partial y_k}+\lambda_1\cdot\frac{\partial F_1}{\partial y_k}+\lambda_2\cdot\frac{\partial F_2}{\partial y_k}+\ldots+\lambda_m\cdot\frac{\partial F_m}{\partial y_k}\right)\cdot\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_i}=0\ i=1,\ldots,n.$$

В силу условия $\det\left\|\frac{\partial(F_1,\ldots,F_m)}{\partial(y_1,\ldots,y_m)}\right\|\Big|_{M_0}\neq 0$ константы $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ можно выбрать такими, чтобы

$$\frac{\partial f}{\partial y_k}+\lambda_1\cdot\frac{\partial F_1}{\partial y_k}+\lambda_2\cdot\frac{\partial F_2}{\partial y_k}+\ldots+\lambda_m\cdot\frac{\partial F_m}{\partial y_k}=0\ \ k=1,\ldots,m.$$

При таком выборе констант $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ последнее равенство приобретает вид

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}+\lambda_1\cdot\frac{\partial F_1}{\partial x_i}+\lambda_2\cdot\frac{\partial F_2}{\partial x_i}+\ldots+\lambda_m\cdot\frac{\partial F_m}{\partial x_i}=0\ \ i=1,\ldots,n.$$

Но левые части полученных $(n+m)$ равенств есть ни что иное как частные производные функции

$$\Psi=f+\lambda_1\cdot F_1+\lambda_2\cdot F_2+\ldots+\lambda_m\cdot F_m$$

по переменным $x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m$. Функция Ψ называется *функцией Лагранжа*, а числа λ_i – *множителями Лагранжа*. Присоединяя к этим $(n+m)$ равенствам условия связи, получим *необходимые* условия условного экстремума в виде системы $(n+2m)$ уравнений

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x_i}=0\ \ i=1,\ldots,n,\ \frac{\partial\Psi}{\partial y_j}=0,\ F_j=0\ \ j=1,\ldots,m,$$

для определения $(n+m)$ координат точек M_0 возможного условного экстремума и m множителей Лагранжа $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$.

Для получения *достаточных* условий условного экстремума заметим, что при выполнении условий связи функция Лагранжа Ψ совпадает с f, поэтому знак соответсвующей квадратичной формы $\Phi(\bar{h})$ (построенной для Ψ) должен исследоваться при следующих ограничениях (в точке M_0) на $\bar{h}$

$$dF_j\Big|_{d\bar{x}=\bar{h}}=(grad\,F_j,\bar{h})=0\ \ j=1,\ldots,m,$$

вытекающих из условий связи.

Пример 3. Найти экстремум функции

$$u=x\cdot y\cdot z$$

при условиях связи

$$\begin{cases} x+y+z=5, \\ xy+yz+xz=8 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} F_1(x,y,z)=x+y+z-5=0, \\ F_2(x,y,z)=xy+yz+xz-8=0. \end{cases}$$

Составим функцию Лагранжа

$$\Psi = xyz + \lambda\cdot(x+y+z-5) + \mu\cdot(xy+yz+xz-8)$$

и выпишем необходимые условия экстремума

$$\begin{cases} \frac{\partial\Psi}{\partial x} = yz+\lambda+\mu\cdot(y+z)=0 \\ \frac{\partial\Psi}{\partial y} = xz+\lambda+\mu\cdot(x+z)=0 \\ \frac{\partial\Psi}{\partial z} = xy+\lambda+\mu\cdot(x+y)=0 \\ x+y+z=5 \\ xy+yz+xz=8. \end{cases}$$

Преобразуем эту системы вычитая из первого уравнения второе, прибавляя ко второму уравнению первое и третье и оставим без изменения остальные уравнения, получим

$$\begin{cases} (y-x)z+\mu\cdot(y-x)=(y-x)(z+\mu)=0 \\ yz+xz+xy+3\lambda+2\mu(x+y+z)=3\lambda+10\mu+8=0 \\ xy+\lambda+\mu\cdot(x+y)=0 \\ x+y+z=5 \\ xy+yz+xz=8 \end{cases}$$

т.е.

$$\begin{cases} y=x \\ 3\lambda+10\mu+8=0 \\ xy+\lambda+\mu\cdot(x+y)=0 \\ x+y+z=5 \\ xy+yz+xz=8 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} z=-\mu \\ 3\lambda+10\mu+8=0 \\ xy+\lambda+\mu\cdot(x+y)=0 \\ x+y+z=5 \\ xy+yz+xz=8. \end{cases}$$

Решим каждую систему в отдельности. Преобразуем первую

$$\begin{cases} y = x \\ 2x + z = 5 \\ x^2 + 2xz = 8 \\ x^2 + \lambda + 2\mu \cdot x = 0 \\ 3\lambda + 10\mu + 8 = 0 \end{cases} \begin{cases} y = x \\ z = 5 - 2x \\ x^2 + 2x(5 - 2x) = 8 \Leftrightarrow 3x^2 - 10x + 8 = 0 \\ x^2 + \lambda + 2\mu \cdot x = 0 \\ 3\lambda + 10\mu + 8 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x \\ z = 5 - 2x \\ \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = \frac{4}{3} \end{array}\right. \\ x^2 + \lambda + 2\mu \cdot x = 0 \\ 3\lambda + 10\mu + 8 = 0. \end{cases}$$

Таким образом

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \\ z = 1 \\ 4 + \lambda + 4\mu = 0 \\ 3\lambda + 10\mu + 8 = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = \frac{4}{3} \\ y = \frac{4}{3} \\ z = \frac{7}{3} \\ \frac{16}{9} + \lambda + \frac{8}{3}\mu = 0 \\ 3\lambda + 10\mu + 8 = 0 \end{cases}$$

откуда получаем первые две точки подозрительные на экстремум

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ y_1 = 2 \\ z_1 = 1 \\ \lambda_1 = 4 \\ \mu_1 = -2 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x_2 = \frac{4}{3} \\ y_2 = \frac{4}{3} \\ z_2 = \frac{7}{3} \\ \lambda_2 = \frac{16}{9} \\ \mu_2 = -\frac{4}{3}. \end{cases}$$

Преобразуем теперь вторую систему

$$\begin{cases} z = -\mu \\ 3\lambda + 10\mu + 8 = 0 \\ xy + \lambda + \mu \cdot (x + y) = 0 \\ x + y + z = 5 \\ xy + yz + xz = 8 \end{cases} \begin{cases} z = -\mu \\ \lambda = -\frac{10}{3}\mu - \frac{8}{3} \\ xy - \frac{10}{3}\mu - \frac{8}{3} + \mu \cdot (x + y) = 0 \\ (x + y) - \mu = 5 \\ xy - (y + x)\mu = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z=-\mu \\ \lambda=-\frac{10}{3}\mu-\frac{8}{3} \\ x+y=\mu+5 \\ xy=\frac{10}{3}\mu+\frac{8}{3}-\mu\cdot(\mu+5) \\ \frac{10}{3}\mu+\frac{8}{3}-2\mu\cdot(\mu+5)=8 \Leftrightarrow 3\mu^2+10\mu+8=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \mu=-2 \\ \mu=-\frac{4}{3} \end{array} \right. \\ z=-\mu \\ \lambda=-\frac{10}{3}\mu-\frac{8}{3} \\ x+y=\mu+5 \\ xy=\frac{10}{3}\mu+\frac{8}{3}-\mu(\mu+5) \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \mu=-2 \\ z=2 \\ \lambda=4 \\ x+y=3 \\ xy=2 \end{cases} \\ \begin{cases} \mu=-\frac{4}{3} \\ z=\frac{4}{3} \\ \lambda=\frac{16}{9} \\ x+y=\frac{11}{3} \\ xy=\frac{28}{9} \end{cases} \end{array} \right.$$

Решая эти две системы уравнений, получаем еще следующие 4 точки подозрительные на экстремум

$$\begin{cases} x_3=1 \\ y_3=2 \\ z_3=2 \\ \lambda_3=4 \\ \mu_3=-2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_4=2 \\ y_4=1 \\ z_4=2 \\ \lambda_4=4 \\ \mu_4=-2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_5=\frac{4}{3} \\ y_5=\frac{7}{3} \\ z_5=\frac{4}{3} \\ \lambda_5=\frac{16}{9} \\ \mu_5=-\frac{4}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} x_6=\frac{7}{3} \\ y_6=\frac{4}{3} \\ z_6=\frac{4}{3} \\ \lambda_6=\frac{16}{9} \\ \mu_6=-\frac{4}{3}. \end{cases}$$

Найдем теперь все вторые частные производные функции Ψ

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}=\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}=0,\ \frac{\partial^2\Psi}{\partial x\partial y}=z+\mu,\ \frac{\partial^2\Psi}{\partial x\partial z}=y+\mu,\ \frac{\partial^2\Psi}{\partial y\partial z}=x+\mu$$

и исследуем знак квадратичной формы

$$\Phi(\bar{h})=2((z+\mu)h_1h_2+(y+\mu)h_1h_3+(x+\mu)h_2h_3)$$

при условиях связи

$$\begin{cases} (grad\, F_1, \bar{h}) = h_1 + h_2 + h_3 = 0, \\ (grad\, F_2, \bar{h}) = (y+z)h_1 + (x+z)h_2 + (x+y)h_3 = 0 \end{cases}$$

в каждой из 6-ти найденных точках.

В точке $M_1(2;2;1)$, для которой $\lambda_1 = 4$, $\mu_1 = -2$, квадратичная форма имеет вид $\Phi(\bar{h}) = -2h_1h_2$, а при условиях связи

$$\begin{cases} h_1 + h_2 + h_3 = 0, \\ 3h_1 + 3h_2 + 4h_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} h_3 = 0, \\ h_1 + h_2 = 0 \Rightarrow h_1 = -h_2 \end{cases}$$

является положительно определенной, т.к. $\Phi(\bar{h}) = 2h_1^2$, т.е. $M_1(2;2;1)$ - точка условного минимума. Точки $M_3(1;2;2)$ и $M_1(2;1;2)$, для которых $\lambda = 4$, $\mu = -2$, также являются точками локального минимума и $u_{\min} = 4$.

В точке $M_2\left(\frac{4}{3};\frac{4}{3};\frac{7}{3}\right)$, для которой $\lambda_2 = \frac{16}{9}$, $\mu_2 = -\frac{4}{3}$, квадратичная форма имеет вид $\Phi(\bar{h}) = 2h_1h_2$, а при условиях связи

$$\begin{cases} h_1 + h_2 + h_3 = 0, \\ \frac{11}{3}h_1 + \frac{11}{3}h_2 + \frac{8}{3}h_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} h_1 + h_2 + h_3 = 0, \\ 11h_1 + 11h_2 + 8h_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} h_3 = 0, \\ h_1 + h_2 = 0 \Rightarrow h_1 = -h_2 \end{cases}$$

является отрицательно определенной, т.к. $\Phi(\bar{h}) = -2h_1^2$, т.е. $M_2\left(\frac{4}{3};\frac{4}{3};\frac{7}{3}\right)$ - точка условного максимума. Точки $M_5\left(\frac{4}{3};\frac{7}{3};\frac{4}{3}\right)$ и $M_6\left(\frac{7}{3};\frac{4}{3};\frac{4}{3}\right)$, для которых $\lambda = \frac{16}{9}$, $\mu = -\frac{4}{3}$, также являются точками локального максимума и $u_{\max} = \frac{4\cdot 4\cdot 7}{3^3} = \frac{112}{27}$.

Пример 4. Найти экстремум функции

$$u = xy + yz, \quad y > 0$$

при условиях связи

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2, \\ y + z = 2 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} F_1(x,y,z) = x^2 + y^2 - 2 = 0, \\ F_2(x,y,z) = y + z - 2 = 0. \end{cases}$$

Составим функцию Лагранжа

$$\Psi = xy + yz + \lambda \cdot (x^2 + y^2 - 2) + \mu \cdot (y + z - 2)$$

и выпишем необходимые условия экстремума

$$\begin{cases} \frac{\partial\Psi}{\partial x} = y + 2\lambda x = 0 \\ \frac{\partial\Psi}{\partial y} = x + z + 2\lambda y + \mu = 0 \\ \frac{\partial\Psi}{\partial z} = y + \mu = 0 \\ x^2 + y^2 = 2 \\ y + z = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = 2 - y \\ y = -2\lambda x \\ \mu = 2\lambda x \\ x + (2 + 2\lambda x) - 4\lambda^2 x + 2\lambda x = 0 \Leftrightarrow (4\lambda^2 - 4\lambda - 1)x = 2 \\ x^2 + 4\lambda^2 x^2 = 2 \Leftrightarrow x^2(1 + 4\lambda^2) = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = 2 - y \\ y = -2\lambda x \\ \mu = 2\lambda x \\ x = \frac{2}{(2\lambda-1)^2-2},\ (2\lambda - 1)^2 - 2 \neq 0 \\ (1 + 4\lambda^2) \cdot \frac{4}{((2\lambda-1)^2-2)^2} = 2 \end{cases}$$

Решим последнее уравнение этой системы

$$2(1 + 4\lambda^2) = ((2\lambda - 1)^2 - 2)^2$$

$$8\lambda^2 + 2 = (2\lambda - 1)^4 - 4(2\lambda - 1)^2 + 4$$

$$(2\lambda - 1)^4 - 4(2\lambda - 1)^2 - 2(4\lambda^2 - 1) = 0$$

$$(2\lambda - 1)^2(2\lambda - 1 - 2)(2\lambda - 1 + 2) - 2(2\lambda - 1)(2\lambda + 1) = 0$$

$$(2\lambda - 1)(2\lambda + 1)((2\lambda - 1)(2\lambda - 3) - 2) = 0$$

$$(2\lambda - 1)(2\lambda + 1)(4\lambda^2 - 8\lambda + 1) = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \pm\frac{1}{2},\ \ \lambda_{3,4} = \frac{2 \pm \sqrt{3}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{4} = \frac{(\sqrt{3} \pm 1)^2}{4}$$

Таким образом мы получили 4 точки подозрительные на экстремум

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{2} \\ x_1 = -1 \\ y_1 = 1 \\ z_1 = 1 \\ \mu_1 = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda_2 = -\frac{1}{2} \\ x_2 = 1 \\ y_2 = 1 \\ z_2 = 1 \\ \mu_2 = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda_3 = \frac{2+\sqrt{3}}{2} = \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{4} \\ x_3 = \frac{2}{(\sqrt{3}+1)^2-2} = \frac{2}{2+2\sqrt{3}} = \frac{1}{1+\sqrt{3}} \\ y_3 = -\frac{1+\sqrt{3}}{2} < 0 \ \ (!!!) \\ z_3 = \frac{5+\sqrt{3}}{2} \\ \mu_3 = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_4 = \frac{2-\sqrt{3}}{2} = \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{4} \\ x_4 = \frac{2}{(\sqrt{3}-1)^2-2} = \frac{2}{2-2\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}-1} = -\frac{\sqrt{3}+1}{2} \\ y_4 = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \\ z_4 = \frac{5-\sqrt{3}}{2} \\ \mu_4 = -\frac{\sqrt{3}-1}{2} \end{cases}$$

из которых третья не удовлетворяет условию $y > 0$ и поэтому в дальнейшем не рассматривается.

Найдем теперь все вторые частные производные функции Лагранжа Ψ

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} = 2\lambda,\ \frac{\partial^2\Psi}{\partial x\partial y} = 1,\ \frac{\partial^2\Psi}{\partial x\partial z} = 0,\ \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} = 2\lambda,\ \frac{\partial^2\Psi}{\partial y\partial z} = 1,\ \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2} = 0$$

и исследуем знак квадратичной формы

$$\Phi(\bar{h}) = 2\lambda h_1^2 + 2h_1h_2 + 2\lambda h_2^2 + 2h_2h_3$$

при условиях связи

$$\begin{cases} (grad\, F_1, \bar{h}) = 2xh_1 + 2yh_2 = 0, \\ (grad\, F_2, \bar{h}) = h_2 + h_3 = 0 \end{cases}$$

в каждой из 3-х найденных точках.

В точке $M_1(-1;1;1)$, для которой $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, квадратичная форма имеет вид $\Phi(\bar{h}) = h_1^2 + 2h_1h_2 + h_2^2 + 2h_2h_3$ и при условиях связи

$$\begin{cases} -2h_1 + 2h_2 = 0, \\ h_2 + h_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} h_2 = h_1, \\ h_3 = -h_1 \end{cases}$$

является положительно определенной, т.к. $\Phi(\bar{h}) = h_1^2 + 2h_1^2 + h_1^2 - 2h_1^2 = 2h_1^2$, т.е. $M_1(-1;1;1)$ - точка условного минимума и $u_{\min} = -1 + 1 = 0$.

В точке $M_2(1;1;1)$, для которой $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$, квадратичная форма имеет вид $\Phi(\bar{h}) = -h_1^2 + 2h_1h_2 - h_2^2 + 2h_2h_3$ и при условиях связи

$$\begin{cases} 2h_1 + 2h_2 = 0, \\ h_2 + h_3 = 0 \end{cases} \begin{cases} h_2 = -h_1, \\ h_3 = h_1 \end{cases}$$

является отрицательно определенной, т.к. $\Phi(\bar{h}) = -h_1^2 - 2h_1^2 - h_1^2 - 2h_1^2 = -6h_1^2$, т.е. $M_2(1;1;1)$ - точка условного максимума и $u_{\max} = 1 + 1 = 2$.

В точке M_4 квадратичная форма имеет вид

$$\Phi(\bar{h}) = (2-\sqrt{3})h_1^2 + 2h_1h_2 + (2-\sqrt{3})h_2^2 + 2h_2h_3$$

и при условиях связи

$$\begin{cases} -(\sqrt{3}+1)h_1 + (\sqrt{3}-1)h_2 = 0, \\ h_2 + h_3 = 0 \end{cases} \begin{cases} h_2 = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}h_1 = \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{2}h_1 = (2+\sqrt{3})h_1, \\ h_3 = -h_2 = -(2+\sqrt{3})h_1 \end{cases}$$

преобразуется к виду

$$\Phi(\bar{h}) = (2-\sqrt{3})h_1^2 + 2(2+\sqrt{3})h_1^2 + (2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})^2h_1^2 - 2(2+\sqrt{3})^2h_1^2 =$$

$$= (2-\sqrt{3}+4+2\sqrt{3}-\sqrt{3}(2+\sqrt{3})^2)h_1^2 = (6+\sqrt{3}-\sqrt{3}(7+4\sqrt{3}))h_1^2 =$$

$$= (6+\sqrt{3}-7\sqrt{3}-12)h_1^2 = (-6-6\sqrt{3})h_1^2 = -6(1+\sqrt{3})h_1^2 < 0,$$

т.е. является отрицательно определенной и значит M_4 - точка условного максимума и $u_{\max} = \frac{-5+3\sqrt{3}}{2}$.

п.3. Наибольшее и наименьшее значения функции на множестве. В соответствии с теоремой Вейерштрасса числовая функция многих переменных непрерывная на замкнутом и ограниченном множестве пространства $\mathbf{R}^n$ (т.е. непрерывная на компакте) достигает на нем свои наибольшее и наименьшее значения. Точки, в которых функция достигает этих значений, могут быть как внутренними, так и граничными (т.е. либо в стационарных внутренних точках, либо на границе множества).

Пример 5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$u = x^2 + 2y^2 + 3z^2$$

на множестве

$$x^2 + y^2 + z^2 \le 100.$$

В начале выпишем необходимые условия экстремума

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 2x = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} = 4y = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial z} = 6z = 0 \end{cases}$$

и найдем подозрительную на экстремум точку $M_0(0;0;0)$.

Найдем все вторые частные производные функции u

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2,\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 4,\ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = 6,\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = 0.$$

Матрица квадратичной формы в точке $M_0(0;0;0)$ имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix},$$

все ее главные миноры

$$\Delta_1 = 2 > 0,\quad \Delta_2 = 8 > 0,\quad \Delta_3 = \det A = 48 > 0$$

положительны, а значит $M_0(0;0;0)$ является точкой локального минимума и $u_{\min} = 0$. (Заметим, что этот нехитрый результат можно получить и без проведения подобных исследований, т.к. $u \ge 0$.)

Исследуем теперь функцию на экстремум на поверхности шара $x^2 + y^2 + z^2 = 100$. Составим функцию Лагранжа

$$\Psi = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + \lambda \cdot (x^2 + y^2 + z^2 - 100),$$

выпишем необходимые условия экстремума

$$\begin{cases} \frac{\partial \Psi}{\partial x} = 2x + 2\lambda x = 0 \\ \frac{\partial \Psi}{\partial y} = 4y + 2\lambda y = 0 \\ \frac{\partial \Psi}{\partial z} = 6z + 2\lambda z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 100 \end{cases} \begin{cases} 2x(1+\lambda) = 0 \\ 2y(2+\lambda) = 0 \\ 2z(3+\lambda) = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 100 \end{cases}$$

и найдем 6 точек подозрительных на экстремум $M_{1,2}(\pm 10; 0; 0)$ при $\lambda = -1$, $M_{3,4}(0; \pm 10; 0)$ при $\lambda = -2$ и $M_{5,6}(0; 0; \pm 10)$ при $\lambda = -3$. В других точках сферы экстремумов нет, т.к. $u(M_{1,2}) = 100$, $u(M_{3,4}) = 200$, $u(M_{5,6}) = 300$, то $u_{\min} = u(0; 0; 0) = 0$ и $u_{\max} = u(M_{5,6}) = 300$.

Этот же результат можно получить и проведя полное исследование. Действительно найдем все вторые частные производные функции Лагранжа Ψ

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = 2 + 2\lambda,\ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 4 + 2\lambda,\ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = 6 + 2\lambda,\ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y \partial z} = 0$$

и исследуем знак квадратичной формы

$$\Phi(\bar{h}) = (2 + 2\lambda)h_1^2 + (4 + 2\lambda)h_2^2 + (6 + 2\lambda)h_3^2$$

при условии связи

$$2xh_1 + 2yh_2 + 2zh_3 = 0$$

в каждой из 3-х пар найденных точках.

В точках $M_{1,2}(\pm 10; 0; 0)$ при $\lambda = -1$, форма $\Phi(\bar{h}) = 2h_2^2 + 4h_3^2 > 0$ положительно определена, значит в этих точках достигается минимум значений функции на сфере (но не в шаре).

В точках $M_{3,4}(0; \pm 10; 0)$ при $\lambda = -2$ форма $\Phi(\bar{h}) = -2h_1^2 + 2h_3^2$ неопределенная, значит в этих точках нет экстремумов.

И наконец, в точках $M_{5,6}(0; 0; \pm 10)$ при $\lambda = -3$ форма $\Phi(\bar{h}) = -4h_1^2 - 2h_2^2 < 0$ отрицательно определена и значит в этих точках достигается максимум значений функции как на сфере, так и на шаре.