4) Muestre que la sustitución hacia adelante se expresa como:

$$x_i = b_i - \sum_{i=0}^{i-1} A_{ij} x_j$$

Para el sistema de ecuaciones:

$$\begin{matrix} a_{11} x_1 \dots + a_{1n} x_n = b_1 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1} x_1 \dots + a_{nn} x_n = b_n \end{matrix}$$

Es posible realizar su representación matricial y posterior triangulación, siguiendo:

$$R_i \frac{a_{ji}}{a_{ii}} - R_j$$

Lo que nos permite obtener:

$$\begin{matrix} a_{11} x_1 = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1} x_1 \dots + a_{nn} x_n = b_n \end{matrix}$$

Que de forma matricial es:

$$\left(\begin{matrix} a_{11} x_1 & \dots & + 0n \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} x_n & \dots & + a_{nn} x_n \end{matrix} \middle| \begin{matrix} b_1 \\ \\ b_n \end{matrix}\right)$$

lo que al despejar el término $b_n$.

$$b_n = \sum_{j=1}^{n} a_{(n-1)j} x_j$$

Y al representar para $x_1$ tenemos

$$x_1 = \frac{b_1}{a_{11}} \quad x_2 = \frac{b_2 - a_{21} x_1}{a_{22}}$$

Por lo que tenemos:

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j}{a_{jj}}$$

Que simplificando para las entradas de la matriz A.

$$\rightarrow x_i = b_i - \sum_{j=0}^{i-1} A_{ij} x_j$$