5) Muestre con detalle que la sustitución hacia atrás se expresa como:

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} A_{ij} x_j}{A_{ii}}$$

Utilizando:

$$Ax_i = b_i$$

Si para la matriz de coeficientes A, tenemos además que es cuadrada y podemos expresar el sistema con x_i y b_i como vectores:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$m = n$$

Representando el sistema:

$$a_{11} x_1 + \cdots + a_{1n} x_n = b_1$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$a_{m1} x_1 + \cdots + a_{mn} x_n = b_n$$

en donde al despejar para la última ecuación.

$$x_n = \frac{(a_{m1} x_1 + \cdots + a_{m-1(n-1)} x_{n-1}) - b_n}{a_{mn}}$$

Si, además, la matriz es triangular superior:

Obtenemos

$$x_{m-1} = \frac{b_{m-1} - \sum_{j=n}^{n} a_{(m-1)j}\, x_j}{a_{(m-1)(n-1)}}$$

y utilizando $m = i+1$ y despejando $i = m-1$

$$\rightarrow x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}\, x_j}{a_{ii}}$$