$\Omega_1 = \Omega_2$

1. Sean P_1 y P_2 dos medidas de probabilidad. Definamos $\mathbb{P} = a_1 P_1 + a_2 P_2$, donde $a_1 + a_2 = 1$ y $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^+$.

¿Es $\mathbb{P}$ una medida de probabilidad?

Demostremos los axiomas de Kolmogorov para $\mathbb{P}$.

$$\mathbb{P}(\Omega) = a_1 P_1(\Omega) + a_2 P_2(\Omega)$$

$$a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1$$

$$a_1 + a_2$$

$$1$$

$$\mathbb{P}(\Omega) = 1$$

DD MM AA

$\forall A: P(A) = a_1 P_1(A) + a_2 P_2(A)$

Sabemos que

$\forall A \in \mathcal{F}, P_1(A) \geq 0$

$\wedge$

$\forall A \in \mathcal{F}, P_2(A) \geq 0$

además

$a_1, a_2 \in \mathbb{R}^+$

Por lo ultimo $a_1 \cdot P_1(A) \geq 0 \wedge a_2 P_2(A) \geq 0$

$P(A) = a_1 P_1(A) + a_2 P_2(A) \geq 0$

$P(A) \geq 0$

$$P(A) \geq 0$$

---

* $\mathbb{P} = a_1 \mathbb{P}_1 + a_2 \mathbb{P}_2$

* $\mathbb{P}(A) = a_1 P_1(A) + a_2 P_2(A)$

$$P(\cup_i^\infty A_i) = a_1 P_1(\cup_i^\infty A_i) + a_2 P_2(\cup_i^\infty A_i)$$

$$= a_1 \sum_{i=1}^{n} P_1(A_i) + a_2 \sum_{i=1}^{n} P_2(A_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_1 P_1(A_i) + \sum_{i=1}^{n} a_2 P_2(A_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_1 P_1(A_i) + a_2 P_2(A_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

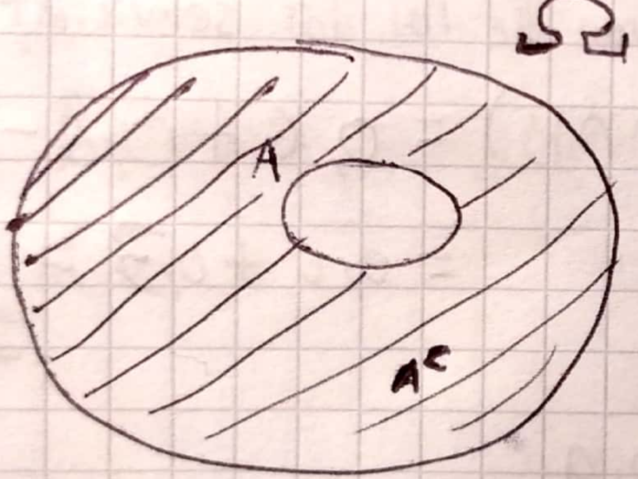
$P(\emptyset)=0$

3. a.

$P(\emptyset) = P(\Omega^c) = 1 - P(\Omega) = 1 - 1 = 0$

$\Omega^c = \emptyset \quad , P(\Omega) = 1$

6. $P(A^c) = P(\Omega) - P(A) = 1 - P(A)$



$$P(\Omega) = \frac{|\Omega|}{|\Omega|} = 1$$

$$A \cup A^c = \Omega$$

$$P(A^c) = P(\Omega \setminus A) = P(\Omega) - P(A) = 1 - P(A)$$

5. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

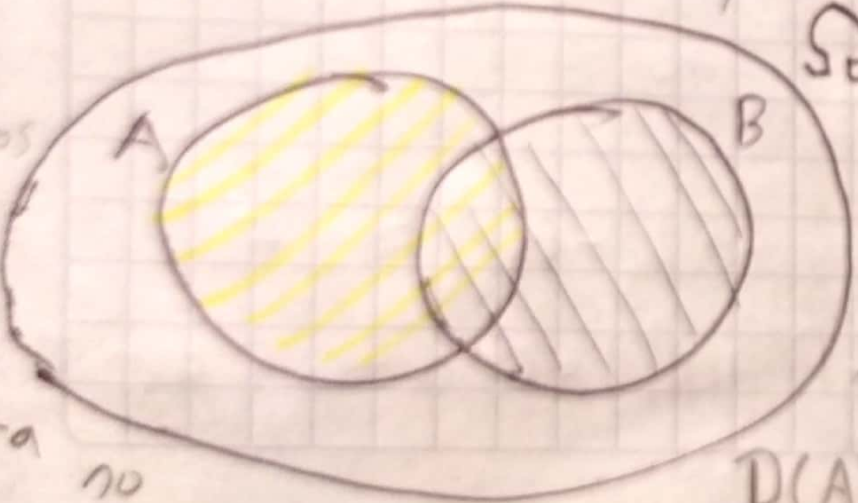
$$P(\Omega) = \frac{|\Omega|}{|\Omega|} = 1$$

$$A \cup A^c = \Omega$$

$$P(A^c) = P(\Omega \setminus A) = P(\Omega) - P(A) = 1 - P(A)$$

f. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

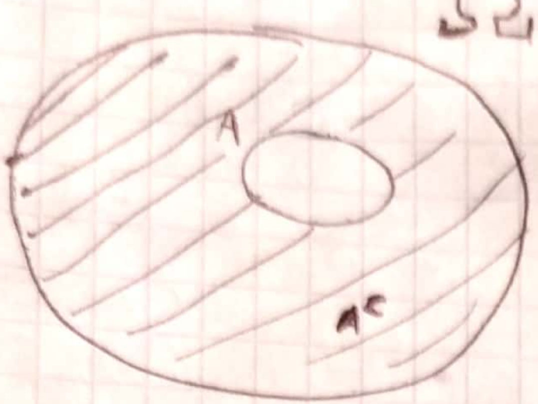
Cuando contamos $P(A)$ estamos contando tanto $P(A \setminus B)$ como $P(A \cap B)$ pues $A \setminus B \cup A \cap B = A$. Por lo mismo cuando contamos $P(B)$ se cuenta $P(B \setminus A)$ y $P(A \cap B)$. Como se ve por lo último estamos contando $P(A \cap B)$ dos veces



restamos $P(A \cap B)$ Para no Sobrecontar

$$P(A) = P(A \setminus B) + P(A \cap B); \quad P(B) = P(B \setminus A) + P(A \cap B)$$

$$P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \underbrace{P(A \setminus B) + P(A \cap B)}_{P(A)} + \underbrace{P(B \setminus A) + P(A \cap B)}_{P(B)} - P(A \cap B)$$



$$P(\Omega) = \frac{|\Omega|}{|\Omega|} = 1$$

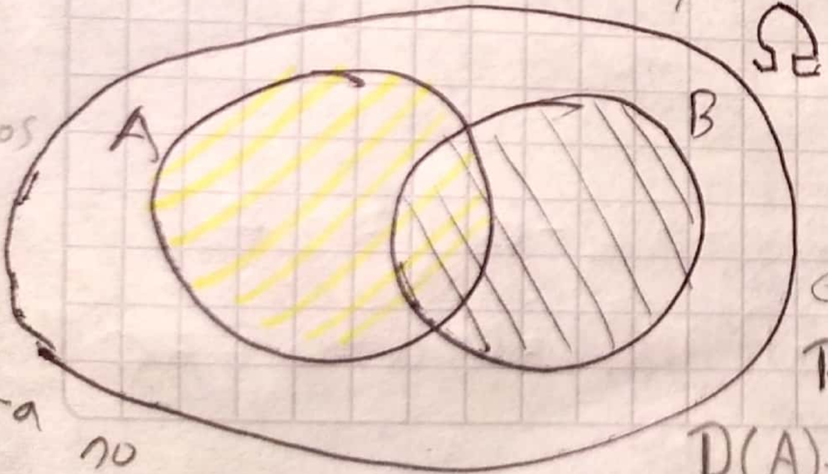
$$A \cup A^c = \Omega$$

$$P(A^c) = P(\Omega \setminus A) = P(\Omega) - P(A) = 1 - P(A)$$

f. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Cuando contamos $P(A)$ estamos contando tanto $P(A \setminus B)$ como $P(A \cap B)$ pues $A \setminus B \cup A \cap B = A$. Por lo mismo cuando contamos $P(B)$ se cuenta $P(B \setminus A)$ y $P(A \cap B)$. Como se ve por lo ultimo estamos contando $P(A \cap B)$ dos veces

restamos $P(A \cap B)$



Para no sobrecontar

$P(A) = P(A \setminus B) + P(A \cap B)$; $P(B) = P(B \setminus A) + P(A \cap B)$

$$P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \underbrace{P(A \setminus B) + P(A \cap B)}_{P(A)} + \underbrace{P(B \setminus A) + P(A \cap B)}_{P(B)} - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = P(A \setminus B) + P(A \cap B)$$
$$+ P(B \setminus A) = P(A) + P(B)$$
$$- P(A \cap B) = P(A \setminus B)$$
$+2$
$$+ P(A \cap B) + P(B \setminus A) +$$
$$P(A \cap B) - P(A \cap B)$$
$$= P(A \setminus B) + 2P(A \cap B)$$
$$+ P(B \setminus A) - P(A \cap B)$$