Travelling Salesman Problem (TSP)

Προηγμένα Θέματα Αλγορίθμων

Θεοδώρα Παναγέα 1115201400135

Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Μάιος 2021

Εισαγωγή

Βασικά σημεία της σημερινής παρουσίασης:

- Ορισμός TSP
- Αρχικές ιδέες επίλυσης του Προβλήματος
- NP-complete και Αναγωγή
- Προσεγγιστικός Αλγόριθμος

Ένα γρήγορο σκονάκι...

- **Κύκλος Euler**: Κύκλος που επισκέπτεται όλες τις ακμές ακριβώς 1 φορά.
- **Κύκλος Hamilton:** Κύκλος που επισκέπτεται όλες τις κορυφές ακριβώς 1 φορά.
- **Κορυφή περιττού βαθμού**: Κορυφή με περιττό πλήθος ακμών
- **Κορυφή άρτιου βαθμού**: Κορυφή με άρτιο πλήθος ακμών
- **MST**: Ένωση όλων των κορυφών με το ελάχιστο κόστος
- **Τέλειο ταίριασμα**: Κάθε κορυφή έχει ακριβώς 1 ακμή
- **Τριγωνική Ανισότητα**: Συντομότερη διαδρομή μεταξύ 2 κορυφών είναι η ακμή που τις ενώνει.

Ορισμός TSP

Το πρόβλημα

Ένας πωλητής πρέπει να επισκεφθεί όλες τις πόλεις σε ένα δίκτυο πόλεων ακριβώς 1 φορά, κάνοντας το μικρότερο ταξίδι.

Ορισμός TSP

Το πρόβλημα

Ένας πωλητής πρέπει να επισκεφθεί όλες τις πόλεις σε ένα δίκτυο πόλεων ακριβώς 1 φορά, κάνοντας το μικρότερο ταξίδι.

Στόχος

Εύρεση μονοπατιού/περιοδείας που περιλαμβάνει όλες τις πόλεις από 1 φορά κι έχει ελάχιστο μήκος.

Ορισμός TSP

Το πρόβλημα

Ένας πωλητής πρέπει να επισκεφθεί όλες τις πόλεις σε ένα δίκτυο πόλεων ακριβώς 1 φορά, κάνοντας το μικρότερο ταξίδι.

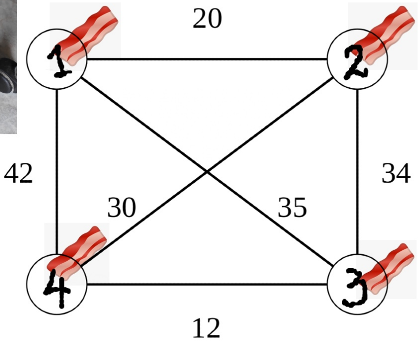
Στόχος

Εύρεση μονοπατιού/περιοδείας που περιλαμβάνει όλες τις πόλεις από 1 φορά κι έχει ελάχιστο μήκος.

Τα δεδομένα μας

- Πόλεις $1, 2, \ldots, n$ και αποστάσεις (πόσες;)
- Πωλητής ξεκινάει από την 1
- Προϋπολογισμός b

Ορισμός TSP



Ιδέες Επίλυσης

Bruteforce

Βρίσκουμε όλες τις δυνατές περιοδείες και παίρνουμε την καλύτερη.

- Πλήθος δυνατών επιλογών: $(n-1)!$
- Πολυπλοκότητα: $\mathcal{O}(n!)$

Ιδέες Επίλυσης

Δυναμικός Προγραμματισμός
ΠΟΛΥ ταχύτερη λύση αλλά...
ακόμα δεν είναι πολυωνυμική!

Ιδέες Επίλυσης

Δυναμικός Προγραμματισμός
ΠΟΛΥ ταχύτερη λύση αλλά...
ακόμα δεν είναι πολυωνυμική!

Το υποπρόβλημα

Για ένα υποσύνολο πόλεων $S \subseteq 1, 2, ..., n$ το οποίο περιλαμβάνει την 1, και $j \in S$, έστω $C(S, j)$ το μήκος της συντομότερης διαδρομής η οποία επισκέπτεται κάθε κόμβο του S μόνο μία φορά, ξεκινώντας από την 1 και καταλήγοντας στη j.

NP-complete και Αναγωγή

Τι γνωρίζουμε μέχρι στιγμής:

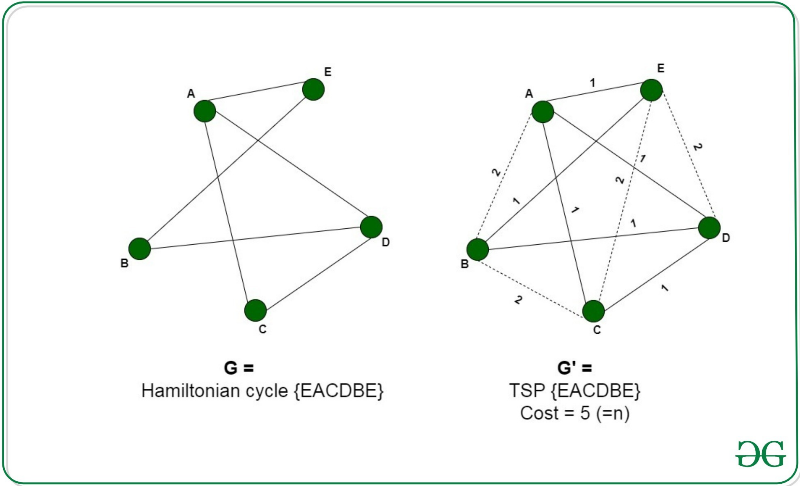
- N κορυφές, $\frac{n(n-1)}{2}$ αποστάσεις
- Ψάχνουμε περιοδεία, περνάει από κάθε πόλη 1 φορά, με κόστος $C \leq b \Rightarrow$
- Θέλουμε μετάθεση των κορυφών ώστε:

$$d_{1,2} + d_{2,3} + \ldots + d_{n,1} \leq b$$

NP-complete και Αναγωγή

Πιστοποιητικό

Εξετάζει αν η περιοδεία περιλαμβάνει όλες τις πόλεις ακριβώς 1 φορά, προσθέτει τα κόστη κι αποφασίζει αν είναι μεγαλύτερο ή ίσο του b.


A
E
B
D
C
G =
Hamiltonian cycle {EACDBE}
A
E
1
2
2
1
1
2
1
1
B
D
2
C
1
G' =
TSP {EACDBE}
Cost = 5 (=n)

NP-complete και Αναγωγή

Απόδειξη:

- Γράφημα G, κατασκευάζω στιγμιότυπο TSP. Κόστος 1 αν (u, v) υπάρχει, $1 + \alpha$ διαφορετικά, με $\alpha > 1$
- Προϋπολογισμός: $|V|$
- Αν έχει κύκλο Hamilton, τότε θα ειναι και η λύση του TSP.
- Αν δεν έχει, τότε δεν υπάρχει και λύση. Φθηνότερη δυνατή θα έχει κόστος $n + \alpha$

1η περ: $\alpha = 1$, Metric TSP γιατί ισχύει η τριγωνική ανισότητα.

2η περ: Το α αυθαίρετα μεγάλο. Τότε υπάρχει λύση με κόστος $\leq n$ ή όλες οι λύσεις είναι τουλ. $n + \alpha$.

Metric TSP 2-Προσεγγιστικός

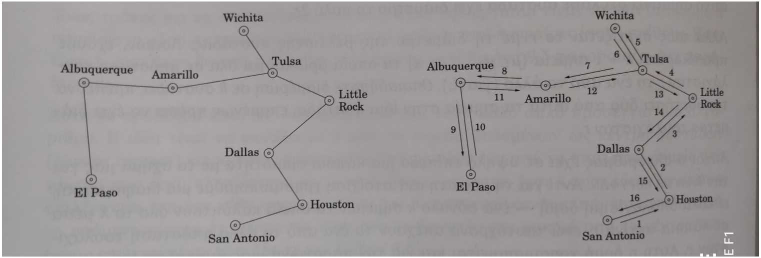
Γνωρίζουμε κάποια εύκολη δομή που σχετίζεται με την καλύτερη περιήγηση του πωλητή;
Ναι! Το MST :)

Ισχύει ότι:

$$\text{κόστος } MST \leq \text{κόστος αυτής της διαδρομής} \leq \text{κόστος } TSP$$

Metric TSP 2-Προσεγγιστικός

Πώς θα χρησιμοποιήσουμε το MST;

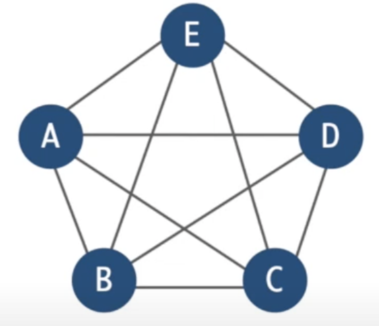


Μήκος το πολύ διπλάσιο από το κόστος του *MST*
ΑΛΛΑ επισκέπτεται κάποιες πόλεις πολλές φορές. Πώς το φτιάχνουμε;

Metric TSP 2-Προσεγγιστικός

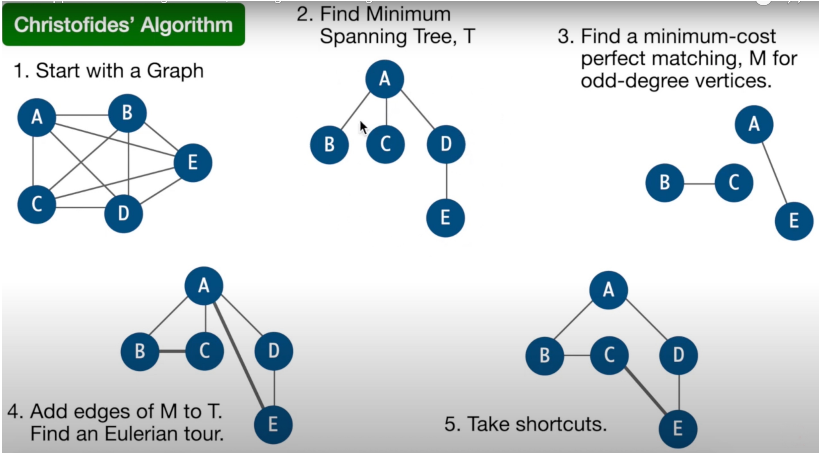
Διαδικασία:

1. Πλήρες γράφημα
2. Δημιουργία MST
3. DFS στο MST
4. Διαγραφή duplicates από το output της DFS



Metric TSP 3/2-Προσεγγιστικός

Βελτίωση λόγου προσέγγισης:



Γενικό TSP και Προσεγγισιμότητα

Έστω αλγόριθμος A για το TSP και α_A ο λόγος προσέγγισης. Από το πρόβλημα του κύκλου Hamilton, φτιάχνω στιγμιότυπο για το TSP.

1η περ: Επιτυχία, περιήγηση το πολύ $n\alpha_A$

2η περ: Αποτυχία, περιήγηση τουλάχιστον $n\alpha_A$

Άρα, σε πολυωνυμικό χρόνο μπορώ να προσδιορίσω αν το G έχει κύκλο Hamilton και αν τρέξουμε τη διαδικασία πολλές φορές (πολυωνυμικό πλήθος) θα βρούμε και τη διαδρομή.

Άρα: πολυωνυμικός αλγόριθμος για το NP-πλήρες πρόβλημα του κύκλου Hamilton.

ΜΟΝΟ ΑΝ $P = NP$

Αναφορές

1. Στοιχεία Θεωρίας Υπολογισμού - Harry R. Lewis, Χρίστος Παπαδημητρίου, Εκδόσεις Κριτική
2. Approximation Algorithms - Vazirani, Εκδόσεις Springer
3. Αλγόριθμοι - Dasgupta, Παπαδημητρίου, Vazirani, Εκδόσεις Κλειδάριθμος
4. Σχεδιασμός Αλγορίθμων - Kleinberg, Tardos, Εκδόσεις Κλειδάριθμος
5. Christofides' Algorithm


Ευχαριστώ πολύ! Προφανώς εγώ έκανα την παρουσίαση!