

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ  
SETOR DE TECNOLOGIA/SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL/  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MÉTODOS NUMÉRICOS  
EM ENGENHARIA**

**INTRODUÇÃO AOS MÉTODOS APROXIMADOS EM  
ENGENHARIA:**

*Álgebra Linear, Geometria Analítica, Cálculo e Equações  
Diferenciais,*

**por**

**Lucas Máximo Alves**

**CURITIBA – PARANÁ**

**MARÇO – 2007**

**LUCAS MÁXIMO ALVES**

**INTRODUÇÃO AOS MÉTODOS APROXIMADOS EM  
ENGENHARIA:**

*Álgebra Linear, Geometria Analítica, Cálculo e Equações  
Diferenciais,*

**CURITIBA – PARANÁ  
MARÇO – 2007  
LUCAS MÁXIMOALVES**

# **INTRODUÇÃO AOS MÉTODOS APROXIMADOS EM ENGENHARIA:**

*Álgebra Linear, Geometria Analítica, Cálculo e Equações  
Diferenciais,*

Apostila organizada como resultado do estudo das aulas para obtenção de créditos da Disciplina de INTRODUÇÃO AOS MÉTODOS APROXIMADOS EM ENGENHARIA do curso de Doutorado do Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos do Setor de Tecnologia/Setor de Ciências Exatas, Departamento de Engenharia Civil/Departamento de Matemática da Universidade Federal do Paraná

**Orientador:** Prof. Dr. José Antonio Marques  
Carrer

**Orientador:** Prof. Dr.

**CURITIBA – PARANÁ**

**MARÇO – 2007**

## **Dedicatória**

Dedico,

## **Agradecimentos**

Agradeço a Deus pelo seu imenso amor e misericórdia revelado nas oportunidades que a vida me trouxe. Quero também agradecer:

À minha Família pelo apoio emocional e espiritual, ao meu orientador o Prof. Dr. ...., ao meu Co-Orientador o Prof. Dr. ...., a Maristela Bradil pela amizade e dedicação com que nos atende, aos amigos, ...., ...., ...., e toda a galera do CESEC.

## Epígrafe

*“vida é um algo multidimensional cuja imprevisível curvatura temporal só é conhecida quando se experimenta os fatos a cada dia e, mesmo assim, não se consegue prever com exatidão a curvatura temporal dos fatos seguintes, mesmo que se expanda esta (a curvatura futura) numa vizinhança em torno do fato no instante presente”* (Lucas M. Alves)

## Sumário

Apresentação .....	18
Capítulo – I: INTRODUÇÃO AOS MÉTODOS APROXIMADOS .....	20
1. 1 – Objetivos do capítulo .....	20
1. 2 – Introdução .....	20
1. 3 – Simplificação de um Problema Real .....	21
1. 4 – Exemplos e Aplicações .....	21
1. 5 – Discretização do Problema .....	23
1. 6 – Considerações Finais do Capítulo .....	24
Capítulo – II: EQUAÇÕES DIFERENCIAIS .....	25
2. 1 – Objetivos do capítulo .....	25
2. 2 – Introdução .....	25
2.2.1 - Definição .....	25
2.2.2 - Classificação das equações Diferenciais .....	26
2. 3 – Exemplos e Aplicações .....	29
Solução: .....	29
2. 4 – Exercícios e Problemas .....	30
Capítulo – III: MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS .....	31
3. 1 – Objetivos do capítulo .....	31
3. 2 – Introdução .....	31
3. 3 – Derivadas de ordem um ou de primeira ordem .....	32
3. 4 – Derivadas de ordem dois ou segunda ordem .....	35
3. 5 – Derivadas de ordem $n$ qualquer .....	35
3. 6 – Exemplos de Aplicações .....	37
3. 7 – Consistência, Convergência e Estabilidade .....	47
3. 8 – Exercícios e Problemas .....	48
Capítulo – IV: CÁLCULO VARIACIONAL .....	57
4. 1 – Objetivos do capítulo .....	57
4. 2 – Introdução .....	57
4. 3 – Problema da Braquistócrona .....	58
4. 4 – Equação de Euler-Lagrange – Primeira Variação .....	60
4.4.1 - Propriedades do Operador .....	64
4.4.2 – Condições de Contorno .....	66
4. 5 – Funcionais com derivadas de ordem superior .....	68
4. 6 – Exemplos de Aplicações .....	70
4. 7 – Método de Rayleigh-Ritz .....	80
4. 8 – Exemplos de Aplicações .....	90
4. 9 – Exercícios e Problemas .....	94
Capítulo – V: MÉTODO DOS RESÍDUOS PONDERADOS .....	96
5. 1 - Objetivos do capítulo .....	96
5. 2 – Introdução .....	96
5. 3 – Definição Matemática e Desenvolvimento do Método .....	97

5. 4 – Variações do Método por Diferentes Funções de Ponderação .....	101
5.4.1 - Método da Colocação .....	101
5.4.2 – Exemplos de solução usando Método da Colocação .....	102
5.4.3 - Método da Colocação por Subdomínios Modificado .....	108
5.4.4 – Exemplos de solução usando Colocação por Subdomínios Modificado .....	109
5.4.3 - Método da Colocação por Subdomínios .....	110
5.4.4 – Exemplos de solução usando Método da Colocação por subdomínios .....	110
5.4.5 - Método dos Momentos .....	116
5.4.6 – Exemplos de solução usando o Método dos Momentos .....	116
5.4.7 - Método de Galerkin .....	122
5.4.8 – Exemplos de solução usando o Método de Galerkin .....	122
5.4.9 - Método de Galerkin Modificado .....	130
5.4.10 – Exemplos de solução usando o Método de Galerkin Modificado .....	130
5. 5 – Forma Fraca do Método de Resíduos Ponderados .....	131
5. 6 – Exemplos de Soluções da Forma Fraca do Método de Resíduos Ponderados .....	133
Solução: .....	136
5. 7 – Exercícios e Problemas .....	139
 Capítulo – VI: MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS .....	145
6. 1 - Objetivos do capítulo .....	145
6. 2 – Introdução .....	145
6. 3 – Variações do Método de Elementos Finitos .....	147
6.3.1 - Modelo Compatível .....	147
6.3.2 - Modelo de Equilíbrio .....	147
6.3.3 - Modelo Híbrido .....	147
6.3.4 - Modelo Misto .....	148
6. 4 – Definição Matemática e Desenvolvimento do Método .....	148
6.4.1 – Aproximação do Problema Contínuo pela Discretização do Domínio .....	149
6.4.2 - Definição dos Elementos Finitos Unidimensional .....	150
6.4.3 – Inclusão do Método dos Resíduos Ponderados Unidimensional .....	151
6.4.4 – Aplicação Prática utilizando o Método de Galerkin .....	153
6.4.5 - Formulação Fraca dos Resíduos Ponderados .....	154
6.4.6 - Funções de Interpolação Local Lineares .....	156
6.4.7 – As Matrizes Locais $K^e$ e o Vetor Local $f$ .....	160
6.4.8 - Montagem do vetor $f$ e da Matriz Global $K$ .....	168
6.4.9 – Resolução do Sistema de Equações .....	169
6. 5 – Exemplos e Aplicações .....	170
6.5.1 – Exemplo satisfazendo condições de contorno essenciais: .....	170
6.5.2 – Exemplo satisfazendo condições de contorno naturais .....	178
6.5.3 – Exemplo satisfazendo condições de contorno essenciais: .....	181
6. 6 – Enfoque Variacional .....	191
6. 7 – Exemplos e Aplicações .....	199
6.7.1 – Exemplo satisfazendo condições de contorno essenciais: .....	199
6. 8 – Um Caso Especial de Elementos Finitos .....	207
6.8.1 – Método da Colocação por Subdomínios Modificado .....	209
6.8.2 – Formulação Fraca do Método dos Resíduos Ponderados para os Elementos .....	210
Finitos .....	210
6.8.3 - Funções de Interpolação Local Quadráticas .....	211
6.8.4 – Método das Diferenças Finitas .....	216
6. 9 – Exercícios e Problemas .....	220



Capítulo – VII: MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO .....	221
7. 1 - Objetivos do capítulo .....	221
7. 2 - Introdução .....	221
7. 3 – Precursores do Método de Elementos de Contorno.....	222
7.3.1 – Método das Funções de Green.....	223
7.3.2 – Integração por Partes em duas dimensões .....	224
7. 4 – Definição Matemática e Desenvolvimento do Método .....	227
7.4.1 - Valor Principal de Cauchy .....	235
7.4.2 – Solução Numérica da Equação de Laplace.....	237
7. 5 – Discretização do Contorno .....	238
7.5.1 - Elemento Constante – Discretização Linear .....	240
7.5.2 - Elemento Linear – Discretização Linear .....	241
7. 6 – Exemplos e Aplicações.....	245
7. 7 – Exercícios e Problemas.....	<b>Erro! Indicador não definido.</b>
Capítulo – VIII: MÉTODO DOS VOLUMES FINITOS.....	247
8. 1 - Objetivos do capítulo .....	247
8. 2 – Introdução .....	247
8. 3 – Definição Matemática e Desenvolvimento do Método .....	248
8. 4 – Exemplos e Aplicações.....	249
8. 5 – Exercícios e Problemas.....	250
Apêndices .....	251
A. 1 – Conceitos de Engenharia .....	251
A.1.1 - Problema de uma Viga .....	251
A. 2 – Implementações para o Método das Diferenças Finitas usando a Planilha do EXCEL – Microsoft, com código de cores nas células .....	256
A.2.1 – Sub VerCorPre.....	256
A.2.2 - SubMultcorpad .....	257
A.2.3 - Sub multcor .....	258
A.2. 4 - Sub geradora.....	259
A. 3 – Implementação Numérica em FORTRAN do Método de Diferenças Finitas para a solução do Problema da Barra Engastada.....	261
A.3.1 - Arquivos de comandos do Gnuplot .....	263
A. 4 – Solução Analítica das oscilações em uma Membrana Retangular .....	264
A.4.1 - Movimento transverso de uma sob velocidade inicial prescrita.....	264
A. 5 – Implementação Algébrica para o Método Variacional de Euler-Lagrange usando o Maple – 9. ....	265
A.5.1 – Para o funcional do menor caminho entre dois pontos.....	265
A.5.2 – Para o funcional $L(x,y,z) = xz + z^2$ .....	265
A. 6 – Implementação Algébrica para o Método de Rayleigh-Ritz usando o Maple – 9.....	267
A.6.1 – Para $n = 1$ .....	267
A.6.2 – Para $n = 2$ .....	268
A. 7 – Implementação Algébrica para o Método dos Resíduos Ponderados usando o Maple – 9. ....	271
A.7.1 – Método da Colocação para $n = 1$ com um parâmetro alpha .....	271
A.7.2 – Método da Colocação para $n = 2$ com dois parâmetros alpha1 e alpha2.....	272
A.7.3 – Método da Colocação por Subdomínios para $n = 1$ com um parâmetro alpha.....	275

A.7.4 – Método da Colocação por Subdomínios para $n = 2$ com dois parâmetros $\alpha_1$ .. e $\alpha_2$ .....	276
A.7.5 – Método dos Momentos para $n = 1$ com um parâmetro $\alpha$ .....	279
A.7.6 – Método dos Momentos para $n = 2$ com dois parâmetros $\alpha_1$ e $\alpha_2$ .....	280
A.7.7 – Método de Galerkin para $n = 1$ com um parâmetro $\alpha$ .....	283
A.7.8 – Método de Galerkin para $n = 2$ com dois parâmetros $\alpha_1$ e $\alpha_2$ .....	284
Bibliografia.....	287

## Lista de Figuras

Figura - 1. 1. Diagrama de passos simplificadores de um problema real.....	21
Figura - 1. 2. Fio perfeitamente flexível, de comprimento, $l$ , estendido sob uma tensão uniforme, $T$ . ....	21
Figura - 1. 3. Diagrama de substituição de um Modelo Contínuo exato por um Modelo Discreto Aproximado. ....	23
Figura - 1. 4. Diagrama de Transformação de Equações Diferenciais em Equações Algébricas equivalentes. ....	24
Figura - 2. 1. Problema de uma viga bi-apoiada e flexionada sobre seu próprio peso. ....	26
Figura - 3. 1. Mudança do domínio contínuo de coordenadas $(x,y)$ para o discreto de coordenadas $(i,j)$ .....	32
Figura - 3. 2. Influência das diferentes derivadas tomadas em relação ao ponto $x$ e sua vizinhança a direita e esquerda. ....	33
Figura - 3. 3. Distribuição de pontos igualmente espaçados no intervalo $[0;1]$ . ....	37
Figura - 3. 4. Viga bi-apoiada sujeita a uma flexão sob o seu próprio peso. ....	43
Figura - 3. 5. Distribuição de pontos igualmente espaçados no intervalo $[0;4]$ . ....	44
Figura - 3. 6. Barra engastada na extremidade esquerda. ....	48
Figura - 3. 7. Variação da derivada temporal da amplitude da deformação da barra com o tempo no ponto A na extremidade esquerda da barra, ou seja, $x = 0$ (Cortesia de Larissa Utiyama- 2006). ....	52
Figura - 3. 8. Variação da amplitude de oscilação da deformação da barra com o tempo no ponto B no centro da barra, ou seja, $x = L/2$ (Cortesia de Larissa Utiyama- 2006). ....	52
Figura - 3. 9. Variação da amplitude de oscilação da deformação da barra (taxa de deformação) com o tempo no ponto A na extremidade direita da barra, ou seja, $x = L$ (Cortesia de Larissa Utiyama- 2006). ....	53
Figura - 3. 10. Discretização da membrana quadrada de lado $a$ , ....	54
Figura - 3. 11. Variação da amplitude da oscilação em função do tempo. ....	55
Figura - 3. 12. Oscilações espaciais da membrana quadrada simulada no MAPLE – VII (Cortesia de Maiko Fernandes Buzzi e Roberto Vanzuit) .....	55
Figura - 3. 13. Problema de Griffith, resolvido pelo Método de Diferenças Finitas usando-se a Planilha do Microsoft Excel, discretizado a um nível de três cores para o campo das deformações. ....	56
Figura - 4. 1. Problema da <i>braquistócrona</i> {BRAKÛS: curto, reduzido; KHRÓNOS: tempo} .....	58
Figura - 4. 2. Cálculo Variacional de primeira ordem da função $y(x)$ extremizante do funcional. ....	61
Figura - 4. 3. Variação $\delta y$ em torno de função extremizante $y(x)$ . ....	64
Figura - 4. 4. ....	67
Figura - 4. 5. Particularização do <i>problema da braquistócrona</i> para $v_1 = 0$ e considerando o ponto $(1) = (x_1, y_1)$ na origem e com o sentido invertido para $y$ .....	70
Figura - 4. 6. Curva de arco de ciclóide para um tempo mínimo ( <i>Brasquistócrona</i> ). ....	74
Figura - 4. 7. Gráfico da menor distância entre dois pontos segundo o Cálculo Variacional de Euler-Lagrange. ....	77
Figura - 4. 8. Viga bi-apoiada sujeita a deformação pelo seu próprio peso. ....	77
Figura - 4. 9. Viga bi-apoiada sujeita a flexão pelo seu próprio peso. ....	90
Figura - 5. 1. Ortogonalidade das funções $w_l$ e $\varepsilon_\Omega$ . ....	99
Figura - 6. 1. Rede de pontos nodais do Domínio, $\Omega$ e dos Subdomínios, $\Omega_e$ .....	146

Figura - 6. 2. Mudança do domínio contínuo de coordenadas (x,y) para o discreto de coordenadas (i,j) .....	149
Figura - 6. 3. Rede de pontos nodais do Domínio, $\Omega$ e dos Subdomínios, $\Omega_e$ .....	151
Figura - 6. 4. Intervalo de aplicação do Método de Galerkin .....	155
Figura - 6. 5. Elemento Finito linear entre dois pontos. ....	157
Figura - 6. 6. Estruturação unidimensional dos Elementos Finitos. ....	160
Figura - 6. 7. Intervalo de aplicação do Método de Galerkin .....	183
Figura - 6. 8. ....	195
Figura - 6. 9. ....	199
Figura - 6. 10. Elemento Finito Quadrático entre três pontos .....	211
Figura - 6. 11. Estruturação unidimensional dos Elementos Finitos Quadráticos.....	216
Figura - 7. 1. Resumo da Evolução dos Métodos Aproximados baseados nos Resíduos Ponderados .....	222
Figura - 7. 2. Integral por partes em duas dimensões em relação a $x$ . ....	224
Figura - 7. 3. Integral por partes em duas dimensões em relação a $y$ . ....	226
Figura - 7. 4. Exemplo de um domínio, $\Omega$ , com raio, $r$ , e ponto fonte, $\xi$ , e contorno $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_q$ . ....	233
Figura - 7. 5. Solução geométrica para o problema do ponto fonte, $\xi$ , o qual é transferido do interior do domínio para o contorno. ....	233
Figura - 7. 6. Aplicação da propriedade da função delta de Dirac sobre o ponto fonte $\xi$ , sobre o contorno. ....	238
Figura - 7. 7. Discretização linear do contorno de um domínio, $\Omega$ . ....	239
Figura - 7. 8. Tipos de elementos de contorno, linear ou parabólico e tipos de nós, geométricos e funcionais, onde os nós funcionais podem ou não coincidir com os nós geométricos.....	239
Figura - 7. 9. Esquematização de nós para o problema de uma barra engastada. ....	240
Figura - 7. 10. ....	240
Figura - 7. 11. ....	241
Figura - 7. 12. Discretização do contorno, $\Gamma$ .....	241
Figura - 7. 13. Cálculo do coeficiente $C(\xi_i)$ para um ângulo $\alpha$ qualquer. ....	242
Figura - A. 1. Viga bi-apoiada sujeita a deformação pelo seu próprio peso. ....	251

## Lista de Tabelas

Tabela - V. 1. Comparação entre as soluções das equação diferencial resolvida por Resíduos Ponderados pelo Método da Colocação.....	107
Tabela - V. 2. Comparação entre as soluções das equação diferencial resolvida por Resíduos Ponderados por Diferentes Métodos.....	128
Tabela - V. 3. Comparação entre as soluções das equação diferencial resolvida por Resíduos Ponderados por Diferentes Métodos.....	128
Tabela - V. 4. Comparação entre as soluções das equação diferencial resolvida por Resíduos Ponderados por Diferentes Métodos.....	128
Tabela - VI.1 Quadro Resumo das Diferentes Formulações do Método de Elemntos Finitos .....	148

# Lista de Siglas

## CAPÍTULO 01

$\Delta x$	comprimento discretizado;
$\Delta s$	comprimento infinitesimal de um fio;
$c$	constante de velocidade da onda;
$u$	deslocamento unitário;
$\rho$	densidade uniforme de um fio;
$t$	tempo;
$TA$	tensão uniforme na seção do fio em ponto dado $A$ ;

## CAPÍTULO 02

$q$	carregamento em viga;
$c$	coeficiente de amortecimento;
$x$	comprimento;
$u$	deslocamento discretizado; difusão do calor discretizado;
$m$	massa de um corpo;
$E$	módulo de Young;
$I$	momento de inércia;
$R$	rigidez da mola;
$\nabla$	operador laplaciano;

## CAPÍTULO 03

$\binom{n}{r}$	binômio de Newton;
$q$	carregamento distribuído aplicado em uma viga;
$C$	coeficiente de amortecimento de uma mola;
$u$	deslocamento discreto;
$h$	diferença entre pontos discretizados em uma função;
$p(t)$	força aplicada a um sistema massa-mola;
$\omega_m$	frequência natural;
$m$	massa de uma mola;
$M$	momento fletor aplicado em uma viga;
$i$	número do ponto discretizado;
$n$	ordem da derivada de uma função;
$x_i$	ponto onde se aplica a série de Taylor (referencia para série progressiva, centralizada ou regressiva);
$K$	Rigidez da mola;
$\Sigma$	somatório;
$\sigma$	tensão;

## CAPÍTULO 4

$g$	aceleração gravitacional;
$A$	coeficientes de função linear do método de Rayleigh-Ritz;
$ds$	comprimento infinitesimal de uma curva;
$W$	esforço cortante;
$\bar{y}(x)$	função aproximada;
$\phi_i$	função linear independente;
$y(x)$	função que extremiza o funcional;
$\check{y}(x)$	função de caminhos vizinhos;
$I$	funcional de um cálculo variacional;
$F$	função de extremização do funcional;
$\eta(x)$	função derivável arbitrada da primeira variação de Euler-Lagrange;
$M$	momento fletor;
$\varepsilon$	parâmetro da primeira variação de Euler-Lagrange;
$v$	velocidade;

## CAPÍTULO 5

$\alpha_n$	coeficientes das funções de forma;
$\delta(x - x_l)$	delta de Dirac;
$\Gamma$	domínio de uma equação diferencial;
$\Omega$	domínio de uma equação diferencial;
$\varepsilon$	erro;
$\beta(u)$	função adotada para satisfazer as condições de contorno não homogêneas;
$\phi_n$	função de forma;
$w(x)$	função de ponderação nos pontos de colocação;
$L(u)$	operador linear diferencial;
$S(u)$	operador linear diferencial;
$u$	variável da equação diferencial - solução exata ou analítica;
$\bar{u}$	variável da equação diferencial - solução aproximada;

## CAPÍTULO 6

$\alpha_n$	coeficientes das funções de forma;
$\Gamma$	domínio de contorno de uma equação diferencial;
$\Omega$	domínio de uma equação diferencial – somatório de subdomínios;
$\varepsilon$	erro;
$N_i^e$	função de aproximação local do nó $i$ de um elemento finito $e$ ;
$K$	matriz global do sistema de equações formado pelos elementos finitos;
$K^e$	matriz local de um elemento finito;
$L(u)$	operador linear diferencial;
$S(u)$	operador linear diferencial;
$\Omega_e$	subdomínio de uma equação diferencial;
$u$	variável da equação diferencial - solução exata ou analítica;
$\bar{u}$	variável da equação diferencial - solução aproximada;

## CAPÍTULO 7

$\alpha_n$	coeficientes das funções de forma;
$\delta(x - x')$	delta de Dirac;
$\Gamma$	domínio de contorno de uma equação diferencial;
$\Omega$	domínio de uma equação diferencial – somatório de subdomínios;
$\varepsilon$	erro;
$N_i^e$	função de aproximação local do nó $i$ de um elemento finito $e$ ;
$G(x, x')$	função de Green;
$u^*(\xi, X)$	representação da função de Green;
$K$	matriz global do sistema de equações formado pelos elementos finitos;
$K^e$	matriz local de um elemento finito;
$L(u)$	operador linear diferencial;
$S(u)$	operador linear diferencial;
$x$	ponto de campo;
$x'$	ponto de fonte;
$\Omega_e$	subdomínio de uma equação diferencial;
$u$	variável da equação diferencial - solução exata ou analítica;
$\bar{u}$	variável da equação diferencial - solução aproximada;
$\tilde{n}$	vetor normal ao contorno $\Gamma$ ;

## **Resumo**



## **Abstract**

## ***Apresentação***

Esta apostila é resultado da digitação das aulas do prof. José Antônio Marques Carrer. Ela compreende a disciplina de *Métodos Aproximados para a Engenharia* do curso de Mestrado e Doutorado do *Programa de Pós-Graduação de Método Numéricos para a Engenharia* – PPGMNE da Universidade Federal do Paraná - UFPR. Ela foi digitada pelo estudante de doutorado desse curso, Lucas Máximo Alves.

Na sua forma final ela recebeu alguns formatos de apresentação e acréscimos de conteúdo que não estavam nas notas originais do Prof. Marques Carrer. Isto porque o estudante utilizou a digitação dessa apostila como uma forma de incentivo para acompanhar a matéria do curso, por causa de suas freqüentes viagens a Ponta Grossa-PR. Ele procurou também incluir alguns exemplos de seus estudos pessoais e dos colegas da sala de aula. Como por exemplo, algumas implementações algébricas no texto da apostila no *Método de Rayleigh-Ritz*; Rotinas de cálculo usando o MAPLE – 9.0 (contidas no Apêndice), para o Método de Diferenças Finitas, Método Variacional, de Rayleigh-Ritz e Resíduos Ponderados, Elementos Finitos, Elementos de Contorno, etc.; A justificativa matemática da sentença dos Resíduos Ponderado ser nula; coisa que foi proposta como desafio pelo prof. Marques Carrer em sala de aula, etc.

Houve o acréscimo de conteúdo também no caso das *Equações de Diferenças Finitas* e dos gráficos de vibração da barra, que foi realizado pela estudante, Larissa Yutiana, no próprio andamento do curso no ano de 2006. As simulações da Membrana foram realizadas pelo estudante Maiko Buzzi no ano anterior de 2005 e posteriormente melhoradas pelo doutorando Pompeu. A simulação do *Método de Diferenças Finitas* usando a planilha do Microsoft-EXCEL foi criada pelo estudante de doutorado e também professor de Mecânica dos Fluidos da Universidade Estadual de Ponta Grossa, Lucas Máximo Alves, com a ajuda de seu colega de trabalho o Prof. Dr. Adilson Chinelatto. Essa última é uma proposta para se apresentar pela primeira vez em cursos de graduação o *Método de Diferenças Finitas*. Ela é

didática, simples e fácil de realizar por qualquer estudante de graduação que tenha noções básica do uso do EXCEL, e não envolve complicações maiores nos problemas de variáveis de contorno. Contudo, um aprimoramento desse método foi feito pelo colega de curso Eng. Orlando Olympio Lenzi Filho, que gastou algumas horas do seu precioso tempo ampliando o recurso de cores do *Método de Diferenças Finitas* proposto, através do recurso de macros do Microsoft-EXCEL, como uma forma de apresentar os resultados visuais com maior precisão.

Para utilização dessa apostila com maior eficiência queremos lembrar que os termos técnicos ou específicos do assunto foram digitados em itálico e as passagens matemáticas dos exemplos contidos nesta apostila foram totalmente detalhadas.

Agradecemos a todos que contribuíram e estimularam essa iniciativa. Principalmente ao Prof. José Marques Carrer, que além do curso ministrado, estimulou-nos a continuar até o fim com a iniciativa de digitar o curso na forma de apostila eletrônica e impressa, para que todos tivessem a oportunidade de estudar para as provas da disciplina sem nenhuma falta no acompanhamento do conteúdo ministrado no curso.

Aceitamos qualquer crítica ou as correções que se fizerem necessárias para que esse material de estudo possa ser cada vez mais melhorado e possa ajudar os novos estudantes do curso nos anos que se seguirão.

Curitiba, 11 de maio de 2006

Lucas Máximo Alves

# *Capítulo – I*

## INTRODUÇÃO AOS MÉTODOS APROXIMADOS

### *RESUMO*

Neste capítulo será visto como a utilização de *métodos aproximados* pode ajudar a resolver problemas de *equações diferenciais*, quando a *solução analítica* é inacessível. Abordaremos o tema das *hipóteses simplificadoras* e a utilização de *equações algébricas* na substituição de equações diferenciais complexas.

### **1. 1 – Objetivos do capítulo**

- i) Entender a problemática dos *Métodos Aproximados* aplicados a Engenharia.
- ii) Distinguir situações onde a utilização dos *Métodos Aproximados* é viável.
- iii) Saber da existência de diversos *Métodos Aproximados*.

### **1. 2 – Introdução**

A partir de agora estudaremos diferentes métodos de simplificação de problemas reais e de aproximação das soluções das *equações diferenciais* presentes na Engenharia.

### 1.3 – Simplificação de um Problema Real

Na tentativa de se descrever quantitativamente um problema (fenômeno) físico, ou seja, de se **obter uma expressão matemática que corresponda ao fenômeno em questão**, inicialmente o *problema físico real* é substituído por um *problema equivalente*, mais simples.

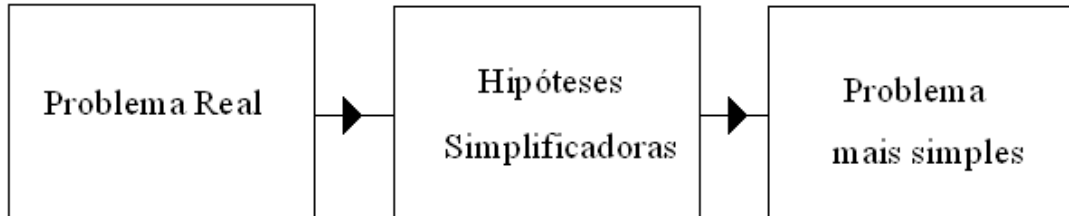


Figura - 1. 1. Diagrama de passos simplificadores de um problema real

Neste novo problema são selecionados os parâmetros considerados fundamentais e que podem ser descritos matematicamente através de um *sistema de equações diferenciais* válido em todo o domínio do problema. A esse sistema são impostas *condições de contorno* e/ou *condições iniciais* apropriadas. Por exemplo, a obtenção da *equação de onda* em um fio flexível e inextensível.

### 1.4 – Exemplos e Aplicações

Seja um fio perfeitamente flexível e inextensível de *densidade* uniforme,  $\rho$ , estendido a uma *tensão uniforme*,  $T$ , entre dois pontos  $x = 0$  e  $x = l$ .

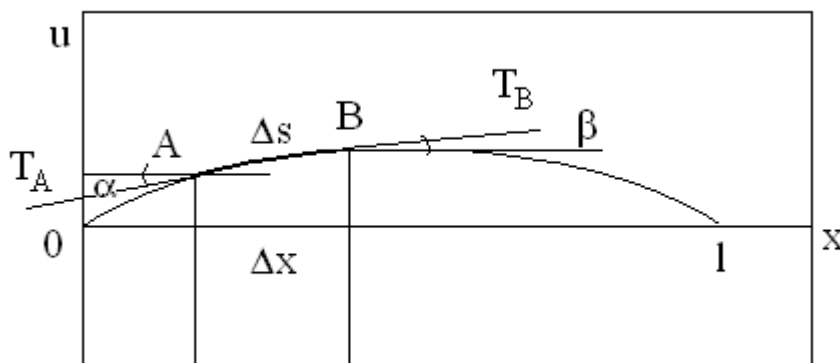


Figura - 1. 2. Fio perfeitamente flexível, de comprimento,  $l$ , estendido sob uma tensão uniforme,  $T$ .

Hipóteses adotadas:

- 1) O fio não oferece resistência ao se curvar isso implica que a *tensão é tangencial* ao fio em cada ponto, ou seja, a *tensão normal* ao fio é sempre nula em qualquer ponto (o problema é estritamente *unidimensional-1D*).
- 2) Ocorre somente pequenos deslocamentos transversais (problema elástico linear).
- 3) A *força gravitacional* sobre o fio é desprezada (a equação diferencial do problema é homogênea)

Para o segmento  $AB$ , de comprimento  $\Delta s$  sobre o fio pode-se escrever:

- O *equilíbrio de forças* na direção horizontal:

$$T_A \cos \alpha = T_B \cos \beta = T(\text{constante}) \quad (1.1)$$

- O *equilíbrio de forças* na direção vertical

$$\rho \Delta s \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_B \sin \beta - T_A \sin \alpha \quad (1.2)$$

Empregando (1.1) em (1.2) tem-se:

$$\frac{\rho}{T} \Delta s \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{T_B \sin \beta}{T_B \cos \beta} - \frac{T_A \sin \alpha}{T_A \cos \alpha} \quad (1.3)$$

Ou

$$\rho \frac{\Delta s}{T} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_B \tan \beta - T_A \tan \alpha \quad (1.4)$$

Como  $\tan \beta = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_B$  e  $\tan \alpha = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_A$  pode-se expandir (em Série de Taylor)  $\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_B$  na

vizinhança de A e obter conseqüentemente:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_B = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_A + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_A \Delta x + \dots (\text{termos de ordem superior em } \Delta x) \quad (1.5)$$

onde os termos de ordem superior em  $\Delta x$  que podem ser desprezados sem problemas.

Conseqüentemente:

$$\tan \beta - \tan \alpha = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_A \Delta x \quad (1.6)$$

Como os deslocamentos transversais ao comprimento do fio são pequenos, podemos fazer a aproximação de que  $\Delta s \cong \Delta x$ . Substituindo (1. 6) em (1. 4) e tomando o limite quando  $\Delta x \rightarrow 0$ , obtém-se:

$$\left. \frac{\rho}{T} \Delta s \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_A \Delta x \quad (1. 7)$$

Ou, na vizinhança do ponto A, na Figura - 1. 2, temos:

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}} \quad (1. 8)$$

Que é a equação de onda do fio, onde  $c^2 = T / \rho$

O próximo passo é a busca da solução para o problema.

## 1. 5 – Discretização do Problema

Um sistema de equações diferenciais constitui um *modelo contínuo*, que possui infinitos *graus de liberdade*, uma vez que as variáveis se distribuem continuamente em todo o domínio do problema. Com exceção de alguns casos mais simples, em geral não é possível encontrar *soluções analíticas* para o problema. Recorre-se, então, aos *modelos discretos* (ou numéricos), obtidos dos *modelos contínuos* através de *hipóteses simplificadoras*: As variáveis que constituem infinitos *graus de liberdade*, são expressos em termos de um número finito de *graus de liberdade*. Esses *graus de liberdade* são incógnitas dos *modelos discretos* dos *sistemas equivalentes* e são determinados a partir da solução de um *sistema de equações algébricas*.

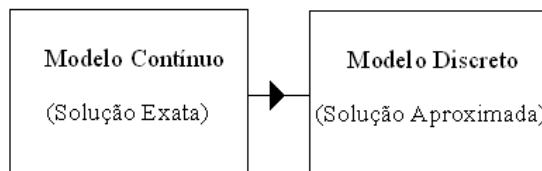


Figura - 1. 3. Diagrama de substituição de um Modelo Contínuo exato por um Modelo Discreto Aproximado.

Resumidamente, quando o *modelo contínuo* é substituído por um *modelo discreto*, o problema matemático da solução de um *sistema de equações diferenciais* é substituído pelo problema da solução de um *sistema de equações algébricas*.

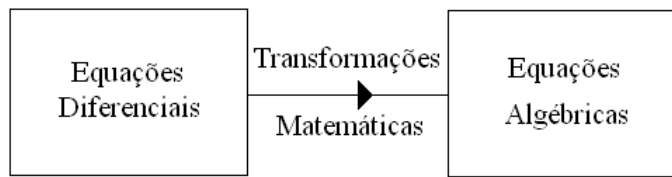


Figura - 1. 4. Diagrama de Transformação de Equações Diferenciais em Equações Algébricas equivalentes.

## 1. 6 – Considerações Finais do Capítulo

Portanto, só nos resta agora estudar as *equações diferenciais* para se poder aplicar os *métodos aproximados* na solução de problemas físicos reais.

Concluimos este capítulo listando de forma resumida alguns dos métodos que podem ser empregados na solução de *equações diferenciais* os quais serão vistos ao longo deste curso. Entre eles teremos:

*Método das Diferenças Finitas; Método Variacional; Método dos Resíduos Ponderados; Métodos dos Elementos de Contorno; Método dos Elementos Finitos; Método dos Volumes Finitos.*



# *Capítulo – II*

## EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

### RESUMO

Neste capítulo serão visto os diferentes tipos de *equações diferenciais* e sua classificação, quanto ao número de *variáveis independentes*, ordem, grau, coeficientes das derivadas, etc.

### 2. 1 – Objetivos do capítulo

- i) Saber reconhecer uma *equação diferencial*.
- ii) Saber classificar uma *equação diferencial*, quanto ao número de *variáveis independentes*, quanto à ordem, quanto ao grau, etc.

### 2. 2 – Introdução

Quase todos os problemas em ciências físicas e engenharia podem ser reduzidos a uma *equação diferencial*. Por esta razão saber reconhecer uma *equação diferencial* dentro de um problema específico é muito importante, para a busca de sua solução. Da mesma forma, saber classificar uma *equação diferencial* é o primeiro passo na busca de sua solução, pois apesar de não existir um método único para se resolver todas as equações diferenciais, a classificação delas ajuda a escolher o método mais adequando de solução.

#### 2.2.1 - Definição

Uma *equação diferencial* é uma equação que envolve uma *função incógnita* e suas derivadas.

## 2.2.2 - Classificação das equações Diferenciais

### 2.2.2.1 - Quanto às variáveis independentes

a) *Equação Diferencial Ordinária* (E.D.O.) – A *função incógnita* depende apenas de uma *variável independente*:  $y = f(x)$ .

b) *Equação Diferencial Parcial* (E.D.P.) – A *função incógnita* depende de duas ou mais *variáveis independentes*:  $y = f(x, y, z, t)$ .

*Exemplo:*

$$EI \frac{d^4 u}{dx^4} = q \quad (2.1)$$

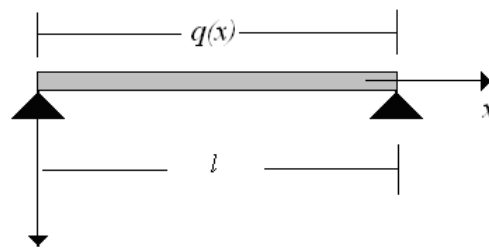


Figura - 2. 1. Problema de uma viga bi-apoiada e flexionada sobre seu próprio peso.

### 2.2.2.2 - Quanto à ordem

A ordem de uma *equação diferencial* é a ordem da mais alta derivada que aparece na equação. Por exemplo, a *equação diferencial* em (2. 1) é de quarta ordem.

*Exemplos:*

1)  $u = u(x)$  ou  $u = u(t)$

EDO de 1ª Ordem

$$u' = 1 + u \quad (2.2)$$

EDO de 2ª Ordem

$$u'' + 4u = x \quad (2.3)$$

EDO de 2ª Ordem

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + Ru = f(t) \quad (2.4)$$

#### 2.2.2.3 - Quanto ao grau

O grau de uma *equação diferencial* é a potência a que se acha elevada a derivada de ordem mais alta.

*Exemplos:*

EDO de 1ª Ordem e do 2º Grau

$$(u')^2 - u' + 2u = x^2 \quad (2.5)$$

2)  $u = u(x, y, z)$

EDP de 2ª Ordem e 1º Grau

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (2.6)$$

$$\nabla^2 u = 0 \quad (2.7)$$

Onde o operador  $\nabla^2$  é chamado de Laplaciano.

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (2.8)$$

#### 2.2.2.4 - Quanto aos coeficientes das Derivadas

a) Lineares – Os coeficientes dependem das *variáveis independentes*.

b) Quase-Lineares – Os coeficientes dependem das *variáveis independentes* e/ou das *variáveis dependentes*, mas não de suas derivadas.

c) Não-Lineares – Os coeficientes dependem das derivadas das *variáveis dependentes*

*Exemplos:*

Linear:

$$a(x) \frac{df}{dx} + b(x)f + c(x) = 0 \quad (2.9)$$

Quase-Linear:

$$f(x) \frac{df}{dx} + b(x)f + c(x) = 0 \quad (2.10)$$

Não-Linear:

$$\left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + d(x, y) = 0 \quad (2.11)$$

OBS: Uma equação linear é sempre do primeiro grau, uma equação do primeiro grau não é necessariamente linear.

#### 2.2.2.5 - Quanto ao Tipo

Serão consideradas *equações diferenciais parciais* de 2ª ordem (são as que mais aparecem na prática).

Seja a forma geral de uma E.D.P. de 2ª ordem com duas *variáveis independentes*.

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2h \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + b \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2f \frac{\partial u}{\partial x} + 2g \frac{\partial u}{\partial y} + eu = 0 \quad (2.12)$$

onde  $a, h, f, g, e$  podem ser constantes ou funções das variáveis  $x$  e  $y$ .

Por analogia com a forma de uma *secção cônica* geral:

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2fx + 2gy + e = 0 \quad (2.13)$$

que representa uma *elipse* quando  $(a.b - h^2 > 0)$ , uma *parábola* quando  $(a.b - h^2 = 0)$ , uma *hipérbole* quando  $(a.b - h^2 < 0)$ . Uma classificação semelhante é adotada para as E.D.P.

*Exemplos:*

1) *Equação de onda unidimensional*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (2.14)$$

Esta equação de onda é do tipo *hiperbólica* porque:  $a = 1$ ;  $h = 0$ ;  $b = -1/c^2$  logo  $a.b - h^2 = -1/c^2 < 0$

2) *Equação de Difusão (condução do calor)*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad (2.15)$$

Esta equação de difusão é do tipo *parabólica* porque:  $a = 1$ ;  $h = 0$ ;  $b = 0$  logo  $a.b - h^2 = 0$

3) *Equação de Laplace*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (2.16)$$

Esta equação de Laplace é do tipo *elíptica* porque:  $a = 1$ ;  $h = 0$ ;  $b = 1$  logo  $a.b - h^2 = 1 > 0$

Uma vez que se sabe reconhecer e classificar uma *equação diferencial*, vamos ao capítulo seguinte onde daremos início ao primeiro *método numérico* de solução baseado na própria definição de derivada, chamado de *Método das Diferenças Finitas*.

## 2.3 – Exemplos e Aplicações

1) Dada a seguinte equação diferencial,

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi(\vec{r}, t) - V(\vec{r}, t) \Psi(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{d\Psi(\vec{r}, t)}{dt}, \quad (2.17)$$

válida para a Mecânica Quântica. Classifique-a quanto as variáveis, à ordem, ao grau, quanto ao coeficiente das suas derivadas e quanto ao tipo.

*Solução:*

- i) Quanto as variáveis: Equação Diferencial Parcial;

- ii) Quanto a ordem: de Segunda Ordem
- iii) Quanto ao grau: Primeiro grau
- iv) Quanto aos coeficientes das derivadas: Linear
- v) Quanto ao tipo: Elíptica

## **2. 4 – Exercícios e Problemas**

## *Capítulo – III*

### MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS

#### RESUMO

Neste capítulo será visto a utilização do *Método das Diferenças Finitas* a problemas de *Equações Diferenciais Ordinárias e Parciais*. Será visto como a utilização da *Derivação Progressiva, Regressiva e Central* afeta no resultado pelo *Método das Diferenças Finitas*. Analisaremos a problemática da *Consistência, Convergência e Estabilidade* do Método.

#### 3. 1 – Objetivos do capítulo

- i) Entender e saber aplicar o *Método das Diferenças Finitas*.
- ii) Saber reconhecer situações onde o *Método das Diferenças Finitas* é aplicável.
- iii) Entender a problemática do *Método das Diferenças Finitas* em pontos extremos.
- iv) Aplicar o *Método de Diferenças Finitas* a problemas acadêmicos.
- v) Entender a problemática da *Consistência, Convergência e Estabilidade* do *Método das Diferenças Finitas*.

#### 3. 2 – Introdução

No *Método das Diferenças Finitas* (MDF) o *domínio do problema*, contínuo, é substituído por uma série de pontos discretos, ou *nós*, nos quais são calculadas as *incógnitas* do problema. Essa substituição do *contínuo* pelo *discreto* denomina-se *discretização*.

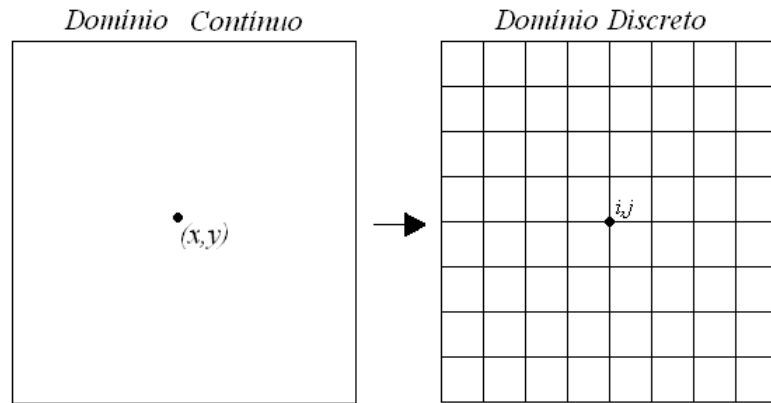


Figura - 3. 1. Mudança do domínio contínuo de coordenadas  $(x,y)$  para o discreto de coordenadas  $(i,j)$

Uma vez efetuada a *discretização do domínio do problema*, aplica-se o MDF para a determinação das incógnitas. As derivadas, que aparecem na equação original, são substituídas (ou aproximadas) por fórmulas discretas de diferenças. A aplicação dessas fórmulas aos *pontos do domínio* discretizado gera um *sistema de equações algébricas*, cuja solução fornece os valores das *incógnitas do problema* nesses *pontos discretos*.

### 3. 3 – Derivadas de ordem um ou de primeira ordem

Por definição a derivada de um função  $u(x)$  em um ponto  $x_i$  é dada por:

$$\left. \frac{du}{dx} \right)_{x=x_i} = \frac{u(x_i + h) - u(x_i)}{h} \quad (3. 1)$$

onde  $h = \Delta x$ .

De forma aproximada, utilizando-se um incremento  $h$  pequeno, porém finito, pode-se escrever:

$$\left. \frac{du}{dx} \right)_{x=x_i} \cong \frac{u(x_i + h) - u(x_i)}{h} \quad (3. 2)$$

A aproximação definida pela equação (3. 2) é denominada diferença progressiva porque utiliza um ponto à frente de  $x_i$ , o ponto  $(x_i + h)$ .

De maneira análoga, pode-se definir uma diferença regressiva.



$$\left. \frac{du}{dx} \right)_{x=x_i} \cong \frac{u(x_i) - u(x_i - h)}{h} \quad (3.3)$$

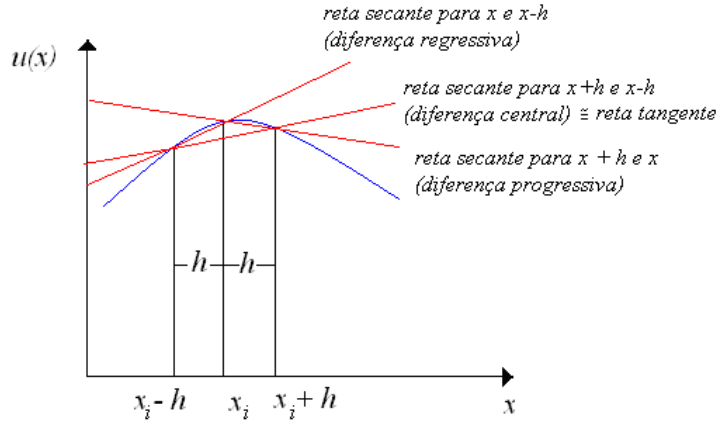


Figura - 3. 2. Influência das diferentes derivadas tomadas em relação ao ponto  $x$  e sua vizinhança a direita e esquerda.

Outra maneira de aproximação é a diferença central:

$$\left. \frac{du}{dx} \right)_{x=x_i} \cong \frac{u(x_i + h) - u(x_i - h)}{2h} \quad (3.4)$$

As fórmulas aproximadas, (3. 2), (3. 3), (3. 4) podem ser obtidas, alternativamente, através de *Séries de Taylor* truncadas, o que permite estimar o erro cometido nas aproximações.

#### i) Diferença progressiva

A expansão em *Série de Taylor* do valor de  $u$  em  $x_i = x_i + h$  em torno do valor de  $u$  em  $x = x_i$  é:

$$u(x_i + h) \cong u(x_i) + h \left. \frac{du}{dx} \right)_{x=x_i} + \frac{h^2}{2!} \left. \frac{d^2u}{dx^2} \right)_{x=x_i} + \frac{h^3}{3!} \left. \frac{d^3u}{dx^3} \right)_{x=x_i} + \dots \quad (3.5)$$

A expressão (3. 5) pode ser reescrita como:

$$\left. \frac{du}{dx} \right)_{x=x_i} \cong \frac{u(x_i + h) - u(x_i)}{h} - \frac{h}{2!} \left. \frac{d^2u}{dx^2} \right)_{x=x_i} - \frac{h^2}{6} \left. \frac{d^3u}{dx^3} \right)_{x=x_i} \quad (3.6)$$

Como  $h$  é pequeno podemos truncar a série no ponto indicado. Logo, desprezando-se os termos relativos às derivadas de ordem igual ou superior a dois, obtém-se a expressão da diferença progressiva. Como  $h$  é um valor pequeno, o maior termo desprezado é igual ao produto de  $h$  por uma constante, ou seja, é da ordem de  $h$  (notação  $O(h)$ ). O erro que se comete quando se substitui a expressão (3. 1) pela expressão (3. 2) é  $O(h)$ .

## ii) Diferença regressiva

Analogamente, a expressão em série de Taylor do valor de  $u$  em  $x = x_i - h$ , em torno do valor de  $u$  em  $x = x_i$ , é:

$$u(x_i - h) \cong u(x_i) - h \left( \frac{du}{dx} \right)_{x=x_i} + \frac{h^2}{2!} \left( \frac{d^2 u}{dx^2} \right)_{x=x_i} - \frac{h^3}{3!} \left( \frac{d^3 u}{dx^3} \right)_{x=x_i} + \dots \quad (3. 7)$$

Resolvendo-se para  $\left( \frac{du}{dx} \right)_{x=x_i}$ , obtém-se

$$\left( \frac{du}{dx} \right)_{x=x_i} \cong \frac{u(x_i) - u(x_i - h)}{h} + \frac{h}{2!} \left( \frac{d^2 u}{dx^2} \right)_{x=x_i} - \frac{h^2}{6} \left( \frac{d^3 u}{dx^3} \right)_{x=x_i} \quad (3. 8)$$

Ao se desprezar os termos relativos às derivadas de ordem dois ou superiores, obtém-se a expressão da diferença regressiva, que também introduz um erro  $O(h)$ , quando se substitui (3. 1).

## iii) Diferença central

Subtraindo-se (3. 5) de (3. 7) tem-se:

$$u(x_i + h) - u(x_i - h) = 2h \left( \frac{du}{dx} \right)_{x=x_i} + \frac{2h^3}{3!} \left( \frac{d^3 u}{dx^3} \right)_{x=x_i} + \dots \quad (3. 9)$$

e

$$\left( \frac{du}{dx} \right)_{x=x_i} \cong \frac{u(x_i) - u(x_i - h)}{2h} - \frac{h^2}{6} \left( \frac{d^3 u}{dx^3} \right)_{x=x_i} \quad (3. 10)$$

Para se obter a expressão correspondente à diferença central são desprezados os termos relativos às derivadas de ordem 3 e superiores, consequentemente o *erro* cometido

quando se substitui (3. 1) por (3. 4) é da ordem de  $O(h^2)$ . Este erro é menor do que aquele cometido pelo uso da *diferença regressiva e progressiva* conforme mostra a Figura - 3. 2.

### 3. 4 – Derivadas de ordem dois ou segunda ordem

As derivadas de segunda ordem também podem ser obtidas através de *Séries de Taylor*, as expressões (3. 5) e (3. 7) podem ser somadas, resultando em:

$$u(x_i + h) + u(x_i - h) = 2u(x_i) + h \left. \frac{d^2 u}{dx^2} \right|_{x=x_i} + \frac{2h^4}{4!} \left. \frac{d^4 u}{dx^4} \right|_{x=x_i} + \dots \quad (3. 11)$$

Resolvendo para  $\left. \frac{d^2 u}{dx^2} \right|_{x=x_i}$  temos:

$$\left. \frac{d^2 u}{dx^2} \right|_{x=x_i} \cong \frac{u(x_i + h) - 2u(x_i) + u(x_i - h)}{h^2} - \frac{h^2}{12} \left. \frac{d^4 u}{dx^4} \right|_{x=x_i} + \dots \quad (3. 12)$$

A aproximação para a derivada segunda é uma aproximação do tipo diferença central e o erro cometido é da ordem de  $O(h^2)$ :

$$\left. \frac{d^2 u}{dx^2} \right|_{x=x_i} \cong \frac{u(x_i + h) - 2u(x_i) + u(x_i - h)}{h^2} \quad (3. 13)$$

### 3. 5 – Derivadas de ordem $n$ qualquer

As derivadas de ordem  $n$  qualquer podem ser expressas em termos do *Binômio de Newton*, como:

$$\left. \frac{d^n u}{dx^n} \right|_{x=x_i} \cong \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} (-1)^r \frac{u(x_i \pm rh)}{h^n} \quad (3. 14)$$

onde

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!} \quad (3. 15)$$

Para se obter a derivada de ordem  $n$  qualquer em *Diferenças Finitas Progressivas* pode-se utilizar a seguinte fórmula:

$$\left. \frac{d^n u}{dx^n} \right)_{x=x_i} \cong \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} (-1)^r \frac{u(x_i + rh)}{h^n} \quad (3.16)$$

ou

$$\frac{d^n u_i}{dx^n} \cong \sum_{r=0}^n \frac{n!}{(n-r)!r!} (-1)^r \frac{u_{i+r}}{h^n} \quad (3.17)$$

Para se obter a derivada de ordem  $n$  qualquer em *Diferenças Finitas Regressivas* pode-se utilizar a seguinte fórmula:

$$\left. \frac{d^n u}{dx^n} \right)_{x=x_i} \cong \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} (-1)^r \frac{u(x_i - rh)}{h^n} \quad (3.18)$$

ou

$$\frac{d^n u_i}{dx^n} \cong \sum_{r=0}^n \frac{n!}{(n-r)!r!} (-1)^r \frac{u_{i-r}}{h^n} \quad (3.19)$$

Para se obter a derivada de ordem  $n$  qualquer em *Diferenças Finitas Centrais* pode-se utilizar a seguinte fórmula:

$$\left. \frac{d^n u}{dx^n} \right)_{x=x_i} \cong \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} (-1)^r \frac{u(x_i + rh) - u(x_i - rh)}{2h^n} \quad (3.20)$$

ou

$$\frac{d^n u_i}{dx^n} \cong \sum_{r=0}^n \frac{n!}{(n-r)!r!} (-1)^r \frac{u_{i+r} - u_{i-r}}{2h^n} \quad (3.21)$$

### 3. 6 – Exemplos de Aplicações

1) Seja a equação diferencial:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + u + x = 0 \quad \text{em} \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (3. 22)$$

com condições de contorno essenciais ou forçadas:

$u(0) = 0$  ;  $u(1) = 0$ . Resolver como exercício o problema acima por meio de *diferenças finitas regressivas, progressivas e diferenças finitas centrais*, com  $h = 0,2$ , para comparação

*Solução:*

A equação diferencial, inicialmente, reescrita de forma discreta:

$$\frac{u(x_i + h) - 2u(x_i) + u(x_i - h))}{h^2} + u(x_i) + x_i = 0 \quad (3. 23)$$

Agrupando os termos semelhantes temos:

$$u(x_i + h) + (h^2 - 2)u(x_i) + u(x_i - h) = -h^2 x_i \quad (3. 24)$$

Em seguida, são identificados os pontos onde a equação discreta deve ser aplicada. Sendo  $h = 0,2$  e conhecidos os valores de  $u$  em  $x = 0$  em  $x = 1$ , os *valores incógnitos da função* são aqueles correspondentes a  $x = 0,2$ ;  $x = 0,4$ ;  $x = 0,6$ ;  $x = 0,8$ .

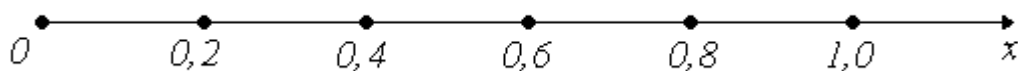


Figura - 3. 3. Distribuição de pontos igualmente espaçados no intervalo [0;1].

Reescrevendo a equação (3. 24) de forma simplificada:

$$u_{i+1} + (h^2 - 2)u_i + u_{i-1} = -h^2 x_i \quad (3. 25)$$

Com condições de contorno:  $u_0 = 0$  e  $u_5 = 1$ .

onde:

$$u_{i+1} = u(x_i + h) \quad ; \quad u_i = u(x_i) \quad (3. 26)$$

e

$$u_{i-1} = u(x_i - h) \quad ; \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (3.27)$$

Aplicando a equação (3.24) ou (3.25) nos quatro pontos, um sistema de quatro equações algébricas é obtido. A solução desse sistema fornece os valores de  $u(0,2)$ ;  $u(0,4)$ ;  $u(0,6)$  e  $u(0,8)$ .

Assim, para

$$\begin{aligned} i = 0 \ (x = 0,); \quad u_1 - 1,96u_0 + u_{-1} &= -0,2^2 \cdot 0,0 = 0,000 \\ i = 1 \ (x = 0,2); \quad u_2 - 1,96u_1 + \boxed{u_0} &= -0,2^2 \cdot 0,2 = -0,008 \\ i = 2 \ (x = 0,4); \quad u_3 - 1,96u_2 + u_1 &= -0,2^2 \cdot 0,4 = -0,016 \\ i = 3 \ (x = 0,6); \quad u_4 - 1,96u_3 + u_2 &= -0,2^2 \cdot 0,6 = -0,024 \\ i = 4 \ (x = 0,8); \quad \boxed{u_5} - 1,96u_4 + u_3 &= -0,2^2 \cdot 0,8 = -0,032 \\ i = 5 \ (x = 1,0); \quad u_6 - 1,96u_5 + u_4 &= -0,2^2 \cdot 1,0 = -0,040 \end{aligned} \quad (3.28)$$

OBS: os valores de  $u_0 = 0$  e  $u_5 = 0$  são conhecidos.

Em forma matricial, após a introdução das *condições de contorno*.

$$\begin{bmatrix} -1,96 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1,96 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1,96 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1,96 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -0,008 \\ -0,016 \\ -0,024 \\ -0,032 \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

As *soluções aproximadas* são obtidas após a solução do *sistema de equações*.

Comparando esses valores com os fornecidos pela *solução analítica*:

$$\boxed{u(x) = \frac{\text{sen}(x)}{\text{sen}(1)} - x} \quad (3.30)$$

tem-se:

$i$	$X$	$u(x)$ analítica	$u(x)$ aproximada por diferença central
0	0,0	0,0000	0,0000
1	0,2	0,0361	0,0362
2	0,4	0,0628	0,0630
3	0,6	0,0710	0,0713
4	0,8	0,0525	0,0527
5	1,0	0,0000	0,0000

2) Resolver o problema anterior com a *condição de contorno natural*.

$$\frac{du(x)}{dx} = 1 \quad \text{em } x = 1 \quad (3.31)$$

*Solução:*

O problema agora possui cinco incógnitas, já que o valor de  $u_5 = u(x = 1)$  não é conhecido. Assim, é necessário gerar mais uma equação, além das aplicadas nos quatros *pontos interiores*, para a solução do problema.

Há três alternativas para a obtenção da equação adicional.

**1ª – Aproximação a *condição de contorno natural* com diferença regressiva:**

$$\left. \frac{du}{dx} \right|_{x=x_i} \cong \frac{u(x_i) - u(x_i - h)}{h} = \frac{u(1) - u(0,8)}{0,2} = \frac{u_5 - u_4}{0,2} = 1 \quad (3.32)$$

A equação adicional requerida para a solução do problema é:

$$u_5 = 0,2 + u_4 \quad (3.33)$$

Mas a partir da quinta equação do Exemplo 1, em  $x_I = 1$  ( $i = 5$ ), temos:

$$\boxed{u_5} - 1,96u_4 + u_3 = -0.032 \quad (3.34)$$

Substituindo a equação (3.33) em (3.34) (quinta equação do Exemplo 1), obtém-se:

$$0,2 + u_4 - 1,96u_4 + u_3 = -0.032 \quad (3.35)$$

ou

$$(1 - 1,96)u_4 + u_3 = -0.032 - 0,2 \quad (3.36)$$

Donde

$$-0,96u_4 + u_3 = -0.232 \quad (3.37)$$

E o novo sistema de equação é:

$$\begin{bmatrix} -1,96 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1,96 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1,96 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -0,96 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -0,008 \\ -0,016 \\ -0,024 \\ -0,232 \end{pmatrix} \quad (3.38)$$

As soluções aproximadas são obtidas após a solução do sistema de equações. Comparando esses valores com os fornecidos pela solução analítica:

$$u(x) = \frac{2\sin(x)}{\cos(1)} - x \quad (3.39)$$

tem-se:

$i$	$x$	$u(x)$ analítica	$u(x)$ aproximada por diferença regressiva
0	0,0	0,0000	0,0000
1	0,2	0,5354	0,4415
2	0,4	1,0415	0,8573
3	0,6	1,4901	1,2229
4	0,8	1,8554	1,5155
5	1,0	2,1184	1,7155 ( $u_4+0,2$ )
6	1,2	2,2541	-

## 2ª – Aproximação a condição de contorno natural com diferença progressiva:

$$\left. \frac{du}{dx} \right|_{x=x_i} \cong \frac{u(x_i + h) - u(x_i)}{h} = \frac{u(1,2) - u(1,0)}{0,2} = \frac{u_6 - u_5}{0,2} = 1 \quad (3.40)$$

A equação adicional requerida para a solução do problema é:

$$u_6 = 0,2 + u_5 \quad (3.41)$$

Mas a partir da sexta equação do Exemplo 1, em  $x_I = 1,2$  ( $i = 6$ ) temos:

$$u_6 - 1,96u_5 + u_4 = 0,2^2 \cdot 1,0 = -0,040 \quad (3.42)$$

Substituindo a equação (3.41) em (3.42) (sexta equação do Exemplo 1), obtém-se:

$$0,2 + u_5 - 1,96u_5 + u_4 = -0,040 \quad (3.43)$$

ou



$$(1-1,96)u_5 + u_4 = -0.040-0,2 \quad (3.44)$$

Donde

$$-0,96u_5 + u_4 = -0.240 \quad (3.45)$$

E o novo sistema de equação é:

$$\begin{bmatrix} -1,96 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1,96 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1,96 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1,96 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -0,96 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -0,008 \\ -0,016 \\ -0,024 \\ -0,032 \\ -0,44 \end{pmatrix} \quad (3.46)$$

As soluções aproximadas são obtidas após a solução do *sistema de equações*.

Comparando esses valores com os fornecidos pela *solução analítica*:

$$u(x) = \frac{2\sin(x)}{\cos(1)} - x \quad (3.47)$$

tem-se:

$i$	$x$	$u(x)$ analítica	$u(x)$ aproximada por diferença progressiva
0	0,0	0,0000	0,0000
1	0,2	0,5354	0,680609
2	0,4	1,0415	1,325994
3	0,6	1,4901	1,902339
4	0,8	1,8554	2,378591
5	1,0	2,1184	2,727699
6	1,2	2,2541	2,927699 ( $u_5+0,2$ )

### 3ª – Aproximação a condição de contorno natural com diferença central:

Esta terceira alternativa, consiste em aplicar a *equação aproximada* (3. 25) no ponto  $x = 1$ , o que gera a quinta equação requerida para a solução do problema, mas envolve o valor de  $u$  em um ponto fictício ( $u_6$ ) fora do *domínio* (o que é outro problema a ser resolvido), o ponto  $x = 1,2$ . A relação entre o valor fictício  $u(1,2) = u_6$  e algum outro valor do

domínio (que constitui uma sexta equação) pode ser obtida aproximando a *condição de contorno natural com diferença central*.

$$\begin{aligned} \left. \frac{du}{dx} \right)_{x=x_i} &\cong \frac{u(x_i + h) - u(x_i - h)}{2h} = \frac{u(1,2) - u(0,8)}{2.(0,2)} \\ &\cong \frac{u_6 - u_4}{0,4} = 1 \end{aligned} \quad (3.48)$$

A equação adicional requerida para a solução do problema é:

$$\frac{u_6 - u_4}{0,4} = 1 \quad (3.49)$$

Mas a partir da quinta equação do Exemplo 1, em  $x_I = 1$  ( $i = 5$ ) temos:

$$\boxed{u_6} - 1,96u_5 + u_4 = -0,2^2.1,0 = -0.040 \quad (3.50)$$

ou

$$\boxed{u_6} - 1,96u_5 + u_4 = -0.040 \quad (3.51)$$

Substituindo a equação (3.49) em (3.51) (sexta equação do Exemplo 1), obtém-se:

$$0,4 + u_4 - 1,96u_5 + u_4 = -0.040 \quad (3.52)$$

Obtém-se:

$$-1,96u_5 + (1 + 1)u_4 = -0.040 - 0,4 \quad (3.53)$$

Donde

$$-1,96u_5 + 2u_4 = -0.44 \quad (3.54)$$

E o novo sistema de equação é:

$$\begin{bmatrix} -1,96 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1,96 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1,96 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1,96 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1,96 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -0,008 \\ -0,016 \\ -0,024 \\ -0,032 \\ -0,044 \end{pmatrix} \quad (3.55)$$

As soluções aproximadas podem ser comparadas com a *solução analítica*:

$$u(x) = \frac{2\sin(x)}{\cos(1)} - x \quad (3.56)$$

Comparando os resultados obtidos de diferentes formas temos:

$i$	$x$	$u(x)$ <i>analítica</i>	$u(x)$ aproximada por <i>diferença regressiva</i> <i>1ª Hipótese</i>	$u(x)$ aproximada <i>por diferença</i> <i>progressiva</i> <i>2ª Hipótese</i>	$u(x)$ aproximada por <i>diferença central</i> <i>3ª Hipótese</i>
0	0,0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1	0,2	0,5354	0,4415	0,680609	0,5423
2	0,4	1,0415	0,8573	1,325994	1,0550
3	0,6	1,4901	1,2229	1,902339	1,5094
4	0,8	1,8554	1,5155	2,378591	1,8794
5	1,0	2,1184	1,7155 ( $u_4+0,2$ )	2,727699	2,1422
6	1,2	2,2541	-	2,927699 ( $u_5+0,2$ )	2,2794 ( $u_4+0,4$ )

3) Determinação dos momentos fletores em uma viga unidimensional bi-apoiada.

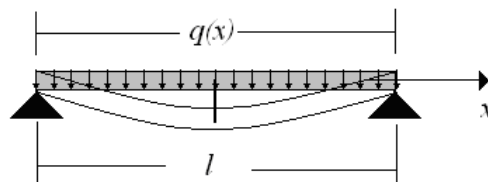


Figura - 3. 4. Viga bi-apoiada sujeita a uma flexão sob o seu próprio peso.

O problema é regido pela equação

$$\frac{d^2 M(x)}{dx^2} = -q \quad (3.57)$$

e pelas condições de contorno:

$$M(x)|_{x=0} = M(x)|_{x=l} = 0 \quad (3.58)$$

Adotar  $h = \Delta x = l/4$

*Solução:*

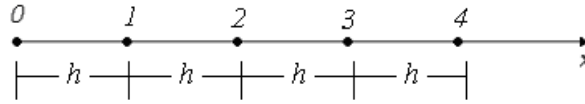


Figura - 3. 5. Distribuição de pontos igualmente espaçados no intervalo  $[0;4]$ .

As incógnitas são  $M_1$ ,  $M_2$  e  $M_3$  com *condições de contorno*  $M_0 = 0$  e  $M_4 = 0$ .

Para

$i = 1$  ( $x_1 = l/4$ ):

$$\frac{M_0 - 2M_1 + M_2}{(l/4)^2} = -q \quad (3.59)$$

$i = 2$  ( $x_2 = l/2$ ):

$$\frac{M_1 - 2M_2 + M_3}{(l/4)^2} = -q \quad (3.60)$$

$i = 3$  ( $x_3 = 3l/4$ ):

$$\frac{M_2 - 2M_3 + M_4}{(l/4)^2} = -q \quad (3.61)$$

Em forma matricial, após a imposição das *condições de contorno* tem-se:

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} = \frac{-ql^2}{16} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.62)$$

Resolvendo:

$$M_1 = M_3 = \frac{3}{32} ql^2 \quad (3.63)$$

e

$$M_2 = \frac{1}{8} ql^2 \quad (3.64)$$

Pergunta:

*Porque a solução aproximada corresponde a solução analítica exata?*

Resposta:

*A solução aproximada expandida em Série de Taylor é igual a solução exata, porque, pelas condições de contorno do problema, os termos de ordem superiores na expansão são todos nulos.*

4) Sistema Massa-Mola sujeita a ação de uma força dependente do tempo.

O problema é descrito pela equação geral:

$$m\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = p(t) \quad (3.65)$$

onde  $m$  é a massa,  $C$  é o coeficiente de amortecimento e  $K$  é a rigidez da mola. A força  $p(t)$  pode ter uma variação qualquer no tempo.

A solução analítica é dada por:

$$u(t) = e^{-\zeta\omega_m t} \left\{ u_o \cos \omega_d t + \frac{(\dot{u}_o + \zeta\omega_m u_o)}{\omega_d} \sin \omega_d t \right\} + \frac{1}{m\omega_d} \int_0^t p(\tau) e^{-\zeta\omega_m(t-\tau)} \sin \omega_d(t-\tau) d\tau \quad (3.66)$$

Onde  $u_o$  e  $\dot{u}_o$  são as condições iniciais e  $\omega_m = \sqrt{\frac{K}{m}}$  é a frequência natural do sistema,

$$\zeta = \frac{C}{2m\omega_m}, \quad \omega_d = \omega_m \sqrt{1 - \zeta^2}$$

Para resolver o problema numericamente, utilizando as aproximações de *diferença central* para as derivadas de segunda ordem (aceleração) e de primeira ordem (velocidade), são feitas as substituições:

$$\ddot{u}_j = \frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{\Delta t^2} \quad e \quad \dot{u}_j = \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2\Delta t} \quad (3.67)$$

o índice  $j$  refere-se ao tempo  $t_j = j\Delta t$ ,  $\Delta t$  é o passo (incremento) de tempo.

A versão discretizada da equação diferencial, após a substituição das derivadas pelas suas aproximações, é dada por:

$$\left(\frac{m}{\Delta t^2} + \frac{c}{2\Delta t}\right)u_{j+1} = p^*_j \quad (3.68)$$

onde  $p^*_j$  é dado por:

$$p^*_j = p_j - \left(K - \frac{2m}{\Delta t^2}\right)u_j - \left(\frac{m}{\Delta t^2} - \frac{c}{2\Delta t}\right)u_{j-1} \quad (3.69)$$

Para  $j = 0, 1, 2, \dots$ , os valores de  $u_{j+1}$  são obtidos a partir dos valores já conhecidos  $u_j$  e  $u_{j-1}$ .

Para se iniciar o processo de marcha no tempo ( $j = 0$ ) é necessário determinar o valor de  $u_{j-1}$ ; das fórmulas de aproximação, pode-se escrever:

$$\ddot{u}_0 = \frac{u_{+1} - 2u_0 + u_{-1}}{\Delta t^2} \quad e \quad \dot{u}_0 = \frac{u_{+1} - u_{-1}}{2\Delta t} \quad (3.70)$$

Resolvendo-se para  $u_{-1}$ , obtém-se:

$$\begin{aligned} u_1 &= 2\Delta t\dot{u}_0 + u_{-1} \\ \ddot{u}_0 &= \frac{(2\Delta t\dot{u}_0 + u_{-1}) - 2u_0 + u_{-1}}{\Delta t^2} \end{aligned} \quad (3.71)$$

ou

$$u_{-1} = u_0 - \dot{u}_0\Delta t + \frac{1}{2}\ddot{u}_0\Delta t^2 \quad (3.72)$$

Os valores de  $u_0$  e  $\dot{u}_0$  são conhecidos (*condições iniciais*) e, da própria *equação diferencial*, pode-se determinar o valor de  $\ddot{u}_0$ :

$$m\ddot{u}_0 + C\dot{u}_0\Delta t + Ku_0 = p_0 \quad (3.73)$$

ou

$$\ddot{u}_0 = \frac{p_0 - (C\dot{u}_0\Delta t + Ku_0)}{m} \quad (3.74)$$

### 3. 7 – Consistência, Convergência e Estabilidade

Para se garantir que a *solução numérica* fornecida por um *esquema numérico* represente uma aproximação razoável da *solução exata* do problema matemático, é necessário que o esquema utilizado apresente propriedades de *consistência*, *convergência* e *estabilidade*. Essas propriedades estão inter-relacionadas na *solução numérica* e são funções dos erros envolvidos.

Consistência: Um *esquema de diferenças finitas* é dito consistente quando, ao refinarem-se as aproximações (por *diferenças finitas*), no limite, as *equações aproximadas* se tornam matematicamente equivalentes às equações diferenciais originais. Assim, se  $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0, \Delta t \rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow 0$  (onde  $\varepsilon$  é o *erro de truncamento da equação aproximada*).

Convergência: A *solução numérica* tende para a *solução exata* à medida que os incrementos espaciais e temporal diminuem. Se  $f$  é a *solução exata da equação diferencial* e  $\bar{f}$  é a *solução aproximada*, então:

$$\bar{f} \rightarrow f \quad (3. 75)$$

Se, no ponto  $x = x_i$ ,  $u_i$  representa a *solução exata* da equação diferencial e  $\tilde{u}_i$  representa a *solução aproximada*, o esquema é convergente quando o *erro de discretização*  $\omega_i = u_i - \tilde{u}_i$  tende para zero, em qualquer ponto  $i$ , à medida que se refina a discretização.

Estabilidade: É uma propriedade relacionada basicamente com o *esquema de integração no tempo*. Quando um *esquema numérico* qualquer é instável, uma pequena perturbação (um erro de truncamento, por exemplo), tende a crescer na medida em que o processo de cálculo avança no tempo, conduzindo a erros acima dos valores toleráveis e comprometendo a *solução numérica*. Por exemplo, o método da diferença central utilizado no quarto exemplo, para o avanço no tempo, só é estável para valores de passo de tempo  $\Delta t$  a um valor crítico definido pela expressão.

$$\Delta t < \Delta t_{\text{Critico}} = \frac{2}{\omega_m} \quad (3. 76)$$

De acordo com a teoria da estabilidade, da solução das *equações diferenciais de Lyapunov*, essa amplificação do erro no tempo, associada à instabilidade das equações diferenciais é, em geral, exponencial no tempo (vide capítulo 4 de *L. Esgoltz, Ecuaciones Diferenciales y Cálculo Variacionais*, Editora MIR, 1977).

### 3. 8 – Exercícios e Problemas

1) Resolver pelo *Método das Diferenças Finitas* a seguinte equação diferencial:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (3. 77)$$

para a barra da Figura - 3. 6. Use a diferença central também para as condições de contorno.

Com *condições iniciais*:

$$u(x, t = 0) = 0 ; \frac{\partial u(x, t = 0)}{\partial t} = 0 \quad (3. 78)$$

ou

$$u_0 = 0 ; \dot{u}_0 = 0 \quad (3. 79)$$

E *condições de contorno*

$$u(x = 0, t) = 0 ; \frac{\partial u(x = L, t)}{\partial x} = 1 \quad (3. 80)$$

ou

$$u(0) = 0 ; \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=L} = 1 \quad (3. 81)$$

Fazer os gráficos de  $u_A(t)$  e  $u_B(t)$  e gráficos de  $\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=c}$

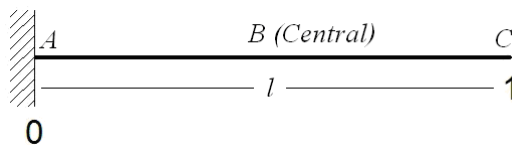


Figura - 3. 6. Barra engastada na extremidade esquerda coorespondente ao ponto A.

*Solução:*

Seja a seguinte *equação diferencial*:



$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (3.82)$$

Com as seguintes *condições iniciais*:

$$u(x, t=0) = 0 \quad \frac{\partial u(x, t=0)}{\partial t} = 0 \quad (3.83)$$

E *condições de contorno*:

$$u(x=0, t) = 0 \quad \frac{\partial u(x=L, t)}{\partial x} = 1 \quad (3.84)$$

onde  $L$  é o comprimento da barra.

Na discretização  $u_{i \rightarrow \text{posição } i}^{j \rightarrow \text{tempo } j}$  computacionalmente equivale a :

$$u \left( \begin{matrix} I \\ \leftarrow x \end{matrix}, \begin{matrix} J \\ \leftarrow t \end{matrix} \right) \text{ loops em } \begin{bmatrix} J \\ I \end{bmatrix}^T, \quad (3.85)$$

Vamos usar a diferença central para calcular as derivadas. Para resolver por *diferenças finitas* é preciso em primeiro lugar discretizar a equação, na seguinte forma:

$$\frac{u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k}{\Delta x^2} = \frac{1}{c^2} \left( \frac{u_i^{k+1} - 2u_i^k + u_i^{k-1}}{\Delta t^2} \right) \quad (3.86)$$

onde

$$\frac{c^2 \cdot \Delta t^2}{\Delta x^2} (u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k) = u_i^{k+1} - 2u_i^k + u_i^{k-1} \quad (3.87)$$

Isolando  $u_i^{k+1}$ , a equação acima fica na seguinte forma:

$$u_i^{k+1} = \left( \frac{c^2 \cdot \Delta t^2}{\Delta x^2} \right) (u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k) + 2u_i^k - u_i^{k-1} \quad (3.88)$$

Chamando de

$$\alpha = \left( \frac{c^2 \cdot \Delta t^2}{\Delta x^2} \right) \quad (3.89)$$

temos:

$$u_i^{k+1} = \alpha u_{i+1}^k + (2 - 2\alpha) u_i^k + \alpha u_{i-1}^k - u_i^{k-1} \quad (3.90)$$

*a) Solucionando problemas computacionais para as condições iniciais*

Um problema que existe em termos de *implementação numérica* refere-se ao termo  $u_i^{k-1}$ , que para o tempo  $k=0, k-1$ , gera um tempo negativo, ou seja, a equação (3. 90) fica:

$$u_i^{+1} = \alpha u_{i+1}^0 + (2 - 2\alpha)u_i^0 + \alpha u_{i-1}^0 - u_i^{-1} \quad (3. 91)$$

Para resolver esse problema usamos a seguinte condição:

$$\frac{\partial u(x, t = 0)}{\partial t} = 0 \Leftrightarrow \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0, \quad (3. 92)$$

que discretizando usando *diferença central*, fica da seguinte forma:

$$\frac{u_i^{k+1} - u_i^{k-1}}{2\Delta t} = 0, \quad (3. 93)$$

que resulta em  $u_i^{k+1} = u_i^{k-1}$ , devendo ser substituída na Equação (3. 86) quando  $n = 0$ .

$$\frac{u_i^{+1} - u_i^{-1}}{2\Delta t} = 0, \quad (3. 94)$$

ou

$$u_i^{+1} = u_i^{-1}, \quad (3. 95)$$

Retornando a equação (3. 91) temos:

$$u_i^{+1} = \frac{\alpha}{2} u_{i+1}^0 + (1 - \alpha)u_i^0 + \frac{\alpha}{2} u_{i-1}^0 \quad (3. 96)$$

#### b) Solucionando problemas computacionais para as condições de contorno

Um outro problema no termo  $u_{i+1}^k$ , pois para a ultima *iteração espacial* do  $i$ , que é  $i+1$ , necessitamos calcular um valor inexistente na barra, isto é, além da barra. Para resolver esse problema usamos a seguinte condição:

$$\frac{\partial u(x = L, t)}{\partial x} = 1, \quad (3. 97)$$

que discretizando usando *diferença central*, fica da seguinte forma:

$$\frac{u_{i+1}^k - u_{i-1}^k}{2\Delta x} = 1, \quad (3. 98)$$

que resulta em:

$$u_{i+1}^k = 2\Delta x + u_{i-1}^k, \quad (3.99)$$

o qual deve ser substituído na Equação (3.86) quando for a última iteração do  $i$ .

Para  $i = n$  ( $i = 6$ ):

$$u_n^{+1} = \frac{\alpha}{2}u_{n+1}^0 + (1-\alpha)u_n^0 + \frac{\alpha}{2}u_{n-1}^0 \quad (3.100)$$

A condição de contorno fica:

$$\left. \frac{\partial u(x=L, t)}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=L} = 1 \rightarrow \frac{u_{n+1} - u_{n-1}}{2\Delta x} = 1 \quad (3.101)$$

logo

$$u_{n+1} = 2\Delta x + u_{n-1} \quad (3.102)$$

Retornando a equação (3.100) temos:

$$u_n^{+1} = \frac{\alpha}{2}(2\Delta x + u_{n-1}^0) + (1-\alpha)u_n^0 + \frac{\alpha}{2}u_{n-1}^0 \quad (3.103)$$

Observe que para:

i)  $k = 0$  e  $1 \leq i \leq n-1$ :

$$u_n^{k+1} = \frac{\alpha}{2}u_{i+1}^k + (1-\alpha)u_i^k + \frac{\alpha}{2}u_{i-1}^k \quad (3.104)$$

ou

$$u_n^{k+1} = \frac{\alpha}{2}(\underbrace{2\Delta x + u_{n-1}^k}_{u_{n+1}}) + (1-\alpha)u_n^k + \frac{\alpha}{2}u_{n-1}^k \quad (3.105)$$

ii)  $k = 0$  e  $i = n$

$$u_n^{k+1} = \frac{\alpha}{2}(2\Delta x + u_{n-1}^k) + (1-\alpha)u_n^k + \frac{\alpha}{2}u_{n-1}^k \quad (3.106)$$

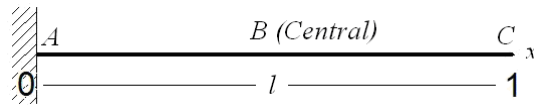
iii)  $k > 0$  e  $1 \leq i \leq n-1$ :

$$u_i^{k+1} = \alpha u_{i+1}^k + (2-2\alpha)u_i^k + \frac{\alpha}{2}u_{i-1}^k - u_i^{k-1} \quad (3.107)$$

iv)  $k > 0$  e  $i = n$ :

$$u_n^{k+1} = \alpha(2\Delta x + u_{n-1}^k) + (2-2\alpha)u_n^k + \alpha u_{n-1}^k - u_n^{k-1} \quad (3.108)$$

com  $c\Delta t < \Delta x$ .



graficando-se:

$$\begin{cases} u_A \times t \\ u_B \times t \end{cases} \quad \frac{du}{dx} \Big|_i \times t \quad (3.109)$$

Resultados:

1) Graficando  $\frac{du(x=0,t)}{dx} \Big|_{x=A} \times t$  temos:

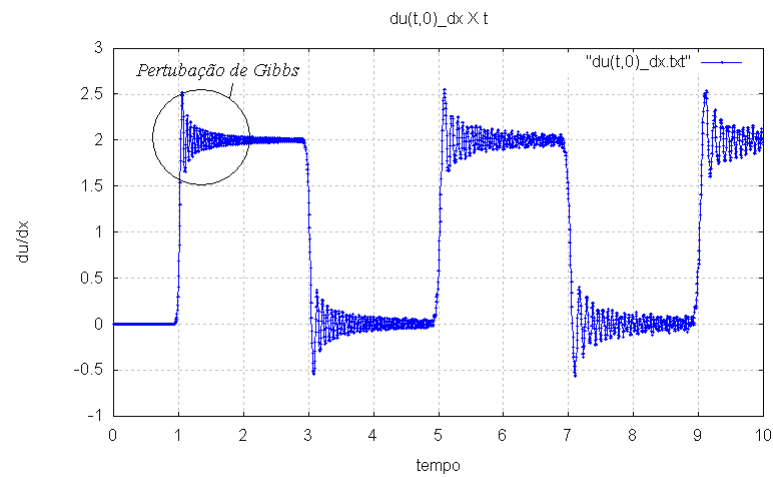


Figura - 3. 7. Variação da derivada temporal da amplitude da deformação da barra com o tempo no ponto A na extremidade esquerda da barra, ou seja,  $x = 0$  (Cortesia de Larissa Utiyama- 2006).

2) Graficando  $u(x=L/2,t) \Big|_{x=B} \times t$ , temos:

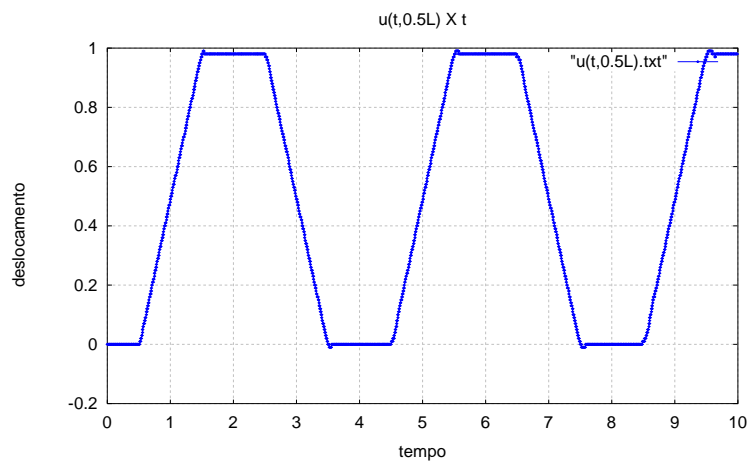


Figura - 3. 8. Variação da amplitude de oscilação da deformação da barra com o tempo no ponto B no centro da barra, ou seja,  $x = L/2$  (Cortesia de Larissa Utiyama- 2006).

3) Graficando  $u(x = L, t)|_{x=C} \times t$  temos:

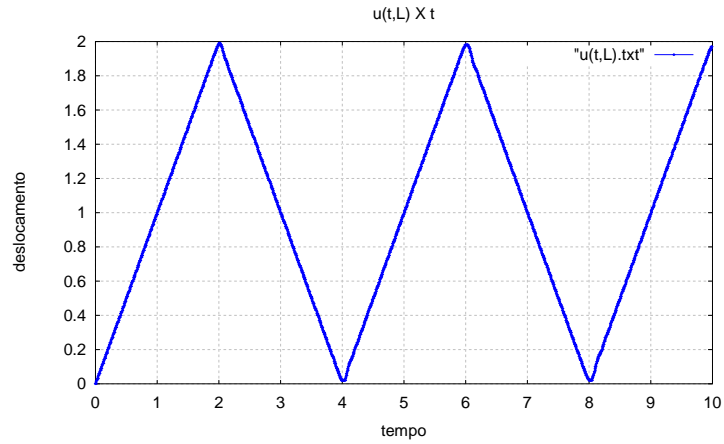


Figura - 3. 9. Variação da amplitude de oscilação da deformação da barra (taxa de deformação) com o tempo no ponto C na extremidade direita da barra, ou seja,  $x = L$  (Cortesia de Larissa Utiyama- 2006).

2) Resolver pelo *Método das Diferenças Finitas* a seguinte equação

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{c} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (3. 110)$$

Com as seguintes condições iniciais:

i) Para toda a membrana

$$u(x, y, t = 0) = 0, \quad (3. 111)$$

ii) Para as bordas:

$$u(x, y, t) = 0, \quad (3. 112)$$

iii) Para o centro:

$$V_0 = \frac{\partial u(x, t = 0)}{\partial t} = c, \quad (3. 113)$$

iv)) Fora do centro:

$$\frac{\partial u(x, t = 0)}{\partial t} = 0, \quad (3. 114)$$

conforme mostra a Figura - 3. 10.

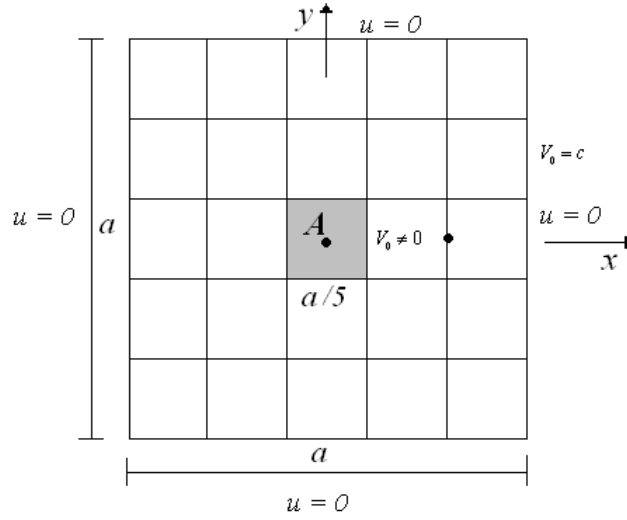


Figura - 3. 10. Discretização da membrana quadrada de lado  $a$ .

Na discretização  $u_{ij \rightarrow \text{posição } i \text{ e } j}^{k \rightarrow \text{tempo } k}$  computacionalmente equivale a :

$$u \left( \begin{matrix} I \\ x \end{matrix}, \begin{matrix} J \\ y \end{matrix}, \begin{matrix} K \\ t \end{matrix} \right) \text{ loops em } \left[ \begin{matrix} K-\text{tempo} \\ J-\text{coord. } y \end{matrix} \left[ \begin{matrix} I-\text{coord. } x \end{matrix} \right. \right. , \quad (3.115)$$

no caso geral, temos:

$$\Delta y \begin{matrix} \square \\ \Delta x \end{matrix} \begin{cases} \Delta x = \Delta y \\ c \Delta t < \Delta x \end{cases}$$

*Solução:*

Discretizando, a equação diferencial,

$$(u_{x+1,y}^t - 2u_{x,y}^t + u_{x-1,y}^t) \frac{1}{\Delta x^2} + (u_{x,y+1}^t - 2u_{x,y}^t + u_{x,y-1}^t) \frac{1}{\Delta y^2} = \frac{1}{c^2} (u_{x,y}^{t+1} - 2u_{x,y}^t + u_{x,y}^{t-1}) \frac{1}{\Delta t^2} \quad (3.116)$$

e isolando o termo  $u_{x,y}^{t+1}$

$$u_{x,y}^{t+1} = c^2 \Delta t^2 \left( (u_{x+1,y}^t - 2u_{x,y}^t + u_{x-1,y}^t) \frac{1}{\Delta x^2} + (u_{x,y+1}^t - 2u_{x,y}^t + u_{x,y-1}^t) \frac{1}{\Delta y^2} \right) + 2u_{x,y}^t - u_{x,y}^{t-1} \quad (3.117)$$

Para resolver o problema no termo  $u_{x,y}^{t-1}$  para  $t=0$  no centro discretizamos a condição

$$\frac{\partial u(x, t=0)}{\partial t} = c, \text{ ficando } \frac{u_{x,y}^{t+1} - u_{x,y}^{t-1}}{2\Delta t} \text{ e concluindo que } u_{x,y}^{t-1} = 2\Delta t c - u_{x,y}^{t+1}, \text{ para fora do centro}$$

também usando diferença central, conclui-se que  $u_{x,y}^{t+1} = u_{x,y}^{t-1}$ , para os termos  $u_{x+1,y}^t$  e  $u_{x,y+1}^t$ , não haverá problema, pois para os valores máximos de  $x$  e  $y$ , a condição garante que será 0.

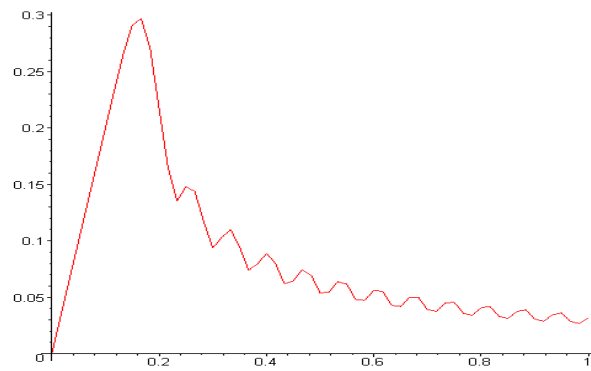


Figura - 3. 11. Variação da amplitude da oscilação em função do tempo.

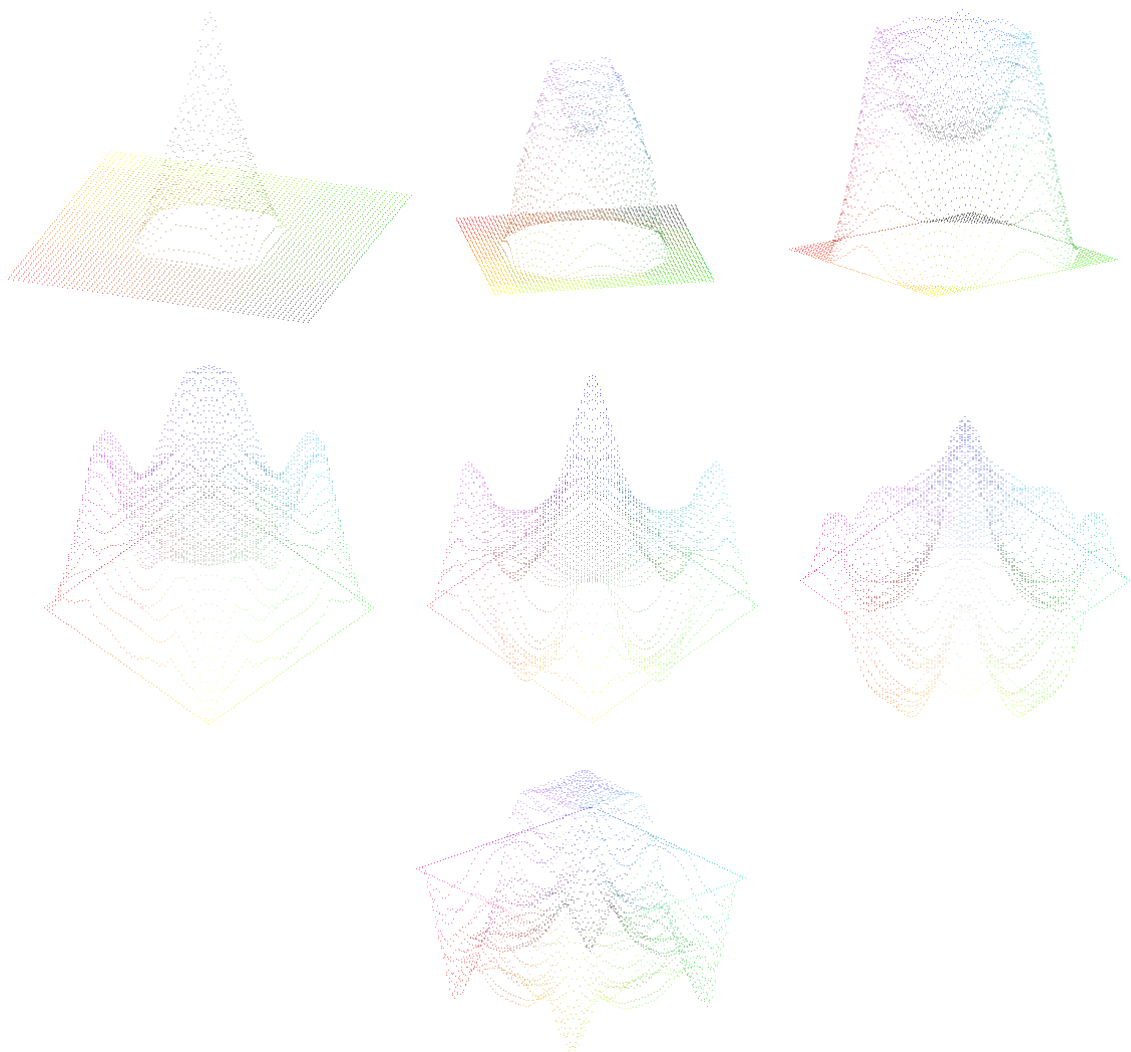


Figura - 3. 12. Oscilações espaciais da membrana quadrada simulada no MAPLE – VII (Cortesia de Maiko Fernandes Buzzi e Roberto Vanzuit)

3) Usando *diferenças finitas*, resolva o *problema de Griffith* para uma placa plana e infinita, sujeita a uma tensão constante,  $\sigma$ , nas bordas superior e inferior, e um entalhe plano no centro da placa, cuja *equação diferencial biquadrada* para o problema é dada pelas *funções de Airy*:

$$\nabla^2 \sigma = \nabla^4 \psi = 0, \quad (3.118)$$

Com *condições de contorno*:

i) Nas bordas superior e inferior

$$\begin{aligned} \sigma(-L_A \leq x \leq L_A, y = L_B) &= \sigma_0 \\ \sigma(-L_A \leq x \leq L_A, y = -L_B) &= \sigma_0 \end{aligned}, \quad (3.119)$$

ii) Nas bordas laterais

$$\begin{aligned} \sigma(x = -L_A, -L_B \leq y \leq L_B) &= \sigma_0 \\ \sigma(x = L_A, -L_B \leq y \leq L_B) &= \sigma_0 \end{aligned}, \quad (3.120)$$

iii) Nas extremidades da trinca

$$\begin{aligned} \sigma(x = -L_0, y = 0) &= \sigma_f \\ \sigma(x = L_0, y = 0) &= \sigma_f \end{aligned}, \quad (3.121)$$

*Solução*:

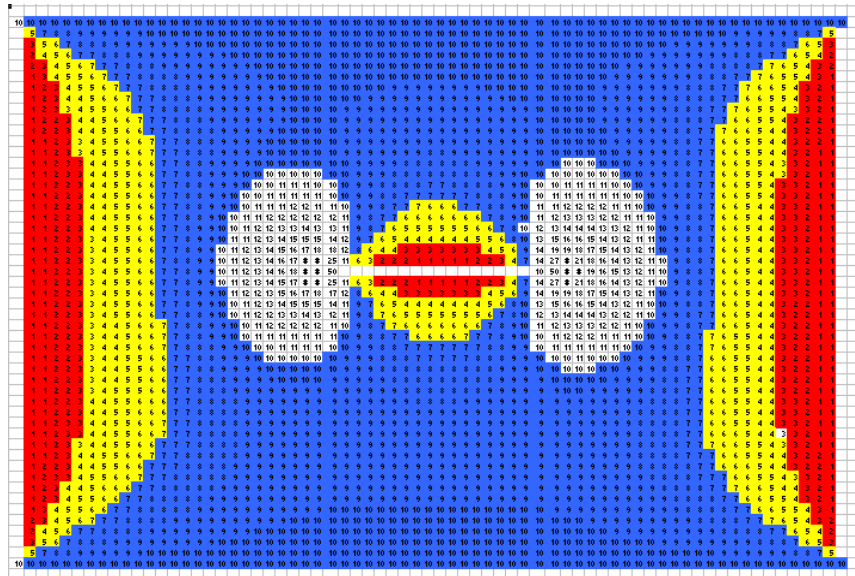


Figura - 3. 13. Problema de Griffith, resolvido pelo Método de Diferenças Finitas usando-se a Planilha do Microsoft Excel, discretizado a um nível de três cores para o campo das deformações.



# *Capítulo – IV*

## CÁLCULO VARIACIONAL

### RESUMO

Neste capítulo será visto a origem do *Método Variacional* a partir do problema da *braquistócrona*, onde será deduzido as *Equações de Euler-Lagrange*. Em seguida utilizaremos esta equação para desenvolver o *Método Variacional* para derivadas superiores. Concluiremos este capítulo com exemplos de *extremização de funcionais* para determinação da *equação diferencial* do problema.

### 4. 1 – Objetivos do capítulo

- i) Entender o *Método Variacional de Euler-Lagrange*
- ii) Compreender a origem das *Equações de Euler-Lagrange* de primeira ordem e ordem superiores.
- ii) Saber utilizar a *Equação de Euler-Lagrange* em problemas para determinação das *equações diferenciais*.
- iii) Entender e saber aplicar o *Método Rayleigh-Ritz* acoplado ao problema do *Cáculo Variacional*.

### 4. 2 – Introdução

O *Método Variacional* tem origem na *Mecânica Clássica de Newton*. Este método foi desenvolvido como uma generalização dos problemas dinâmicos da *Mecânica Analítica ou Racional*. Existem diferentes abordagens matemáticas para se chegar as *Equações de Euler-Lagrange*. Contudo, o problema da *braquistócrona* é o mais direto, pois elimina a

necessidade de se conhecer todo o desenvolvimento da *Mecânica Analítica* envolvida. Esse método é precursor dos demais métodos que se seguirão, visto que ele determina a *equação diferencial do problema* através das *Equações de Euler-Lagrange*. As *equações diferenciais* encontradas pelo *Método Variacional* poderão ser resolvidas analítica ou numericamente pelos demais métodos que serão aprendidos neste curso.

### 4.3 – Problema da Braquistócrona

Uma partícula cai do ponto (1) para o ponto (2), deslizando sem atrito sobre uma curva  $y = y(x)$ . Determine a curva correspondente ao tempo mínimo de queda.

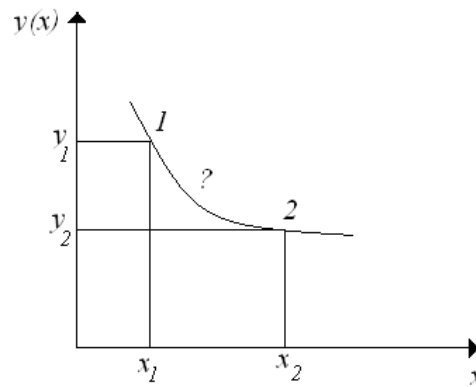


Figura - 4. 1. Problema da *braquistócrona* {BRAKÛS: curto, reduzido; KHRÓNOS: tempo}

*Solução:*

Tempo de queda:

$$I = \int_{(1)}^{(2)} dt \quad (4.1)$$

velocidade:

$$v = \frac{ds}{dt} \quad (4.2)$$

onde o comprimento da curva descrita é dado por:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 \quad (4.3)$$

logo

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \sqrt{1 + (y')^2} dx \quad (4.4)$$

Pelo *Princípio da Conservação da Energia (Sistema Conservativo)*

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + mgy_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgy_2 = \frac{1}{2}mv^2 + mgy \quad (4.5)$$

onde a velocidade de queda é dada por:

$$v = \sqrt{v_1^2 + 2g(y_1 - y)} \quad (4.6)$$

Assim:

$$dt = \frac{ds}{v} \quad (4.7)$$

logo

$$I = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{\sqrt{v_1^2 + 2g(y_1 - y)}} dx \quad (4.8)$$

Em (4.8)  $I$  é uma função especial denominada *funcional*. O *funcional* do problema da *Braquistócrona* depende de uma *variável independente*  $x$ , de uma *variável dependente*  $y$ , e da derivada primeira de  $y$ , isto é,  $y'$ .

Genericamente:

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx \quad I: \text{funcional} \quad (4.9)$$

O problema contudo ainda não foi solucionado, pois a expressão da função  $y = y(x)$  não é conhecida. Esse é o problema do *cálculo variacional*, que consiste em determinar as *funções* que extremizam o *funcional* (para o problema da *braquistócrona*, a *trajetória*  $y$  que produz um tempo mínimo de queda). Essas funções são obtidas após se estabelecerem as condições necessárias à *extremização do funcional*, segundo um procedimento análogo ao da procura dos *pontos extremos (extremantes)* de uma função. Assim, dada uma função  $y = y(x)$ , a sua expansão em *Série de Taylor*, na vizinhança de  $x = a$ , é dada por (admitindo que  $f(x)$  tenha *derivadas contínuas* em  $x = a$ ):

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + \dots \quad (4.10)$$

e portanto:

$$f(x) - f(a) = f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + \dots \quad (4.11)$$

Para que  $f(a)$  seja um *valor mínimo relativo* à função,  $f(x) - f(a) > 0$  para todos os valores de  $x$  numa *vizinhança* de  $a$ , ou seja, para todos os “valores admissíveis” de  $x(a)$ . Onde o ponto  $a$  é um *ponto extremo* ou *extremizante* da função.

Da mesma maneira, para que  $f(a)$  seja um *máximo relativo*,  $f(x) - f(a) < 0$ . Como  $(x-a)$  adquire valores positivos e negativos, impões-se a condição de que  $f'(a) = 0$ , a fim de que o termo predominante do desenvolvimento em série tenha valores não negativos, isto é:

$$((x-a)^2 > 0 \text{ e } |(x-a)^3| > (x-a)^4 \dots). \quad (4.12)$$

A condição  $f'(a) = 0$  é a condição necessária para que o ponto  $x = a$  seja ponto extremo da função. Como  $(x-a)^2 > 0$ , se  $f''(a) > 0$  tem-se um *ponto de mínimo* em  $x = a$ ; se  $f''(a) < 0$  tem-se um *ponto de máximo* em  $x = a$ . Se  $f''(a) = 0$ , o termo predominante passa a ser o terceiro, que altera o sinal para valores admissíveis de  $x$  à direita e à esquerda de  $a$ , caracterizando um *ponto de inflexão* (se  $f''(a) \neq 0$ ).

A extremização do funcional está sempre ligada a algum critério matemático ou princípio físico imposto ao problema, conforme uma necessidade prática, como no caso da curva de tempo mínimo (Braquistócrona), ou do *Princípio da Mínima Energia Potencial*.

## 4.4 – Equação de Euler-Lagrange – Primeira Variação

O valor do funcional depende da função escolhida, função esta que corresponde ao caminho entre  $x_1$  e  $x_2$ .

Admite-se a existência de certo caminho,  $y(x)$ , que extremiza o *funcional* em relação aos caminhos vizinhos (variados),  $\tilde{y}(x)$ . Uma família de caminhos variados, dependentes de um parâmetro  $\varepsilon$  é definida como:

$$\tilde{y}(x) = y(x) + \varepsilon \eta(x) \quad (4.13)$$

Onde  $\eta(x)$  é uma *função derivável*, arbitrariamente escolhida, que se anula em  $x = x_1$  e  $x = x_2$ :  $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$ . Nota-se ainda que, qualquer que seja a escolha de  $\eta(x)$ , quando  $\varepsilon = 0$  os caminhos variados coincidem com o *caminho extremizante*.

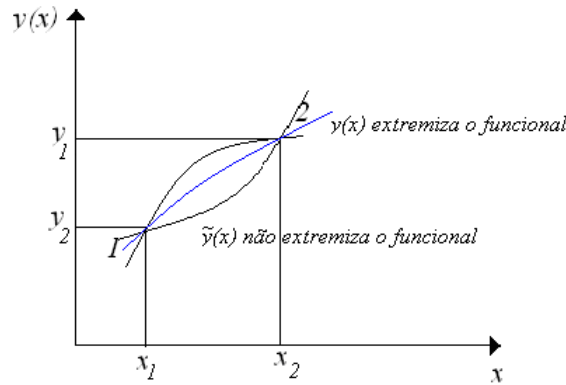


Figura - 4. 2. *Calculo Variacional* de primeira ordem da função  $y(x)$  extremizante do *funcional*.

Considerando os *caminhos variados*, o *funcional*:

$$\tilde{I} = \int_{x_1}^{x_2} F(x, \tilde{y}, \tilde{y}') dx \quad (4.14)$$

tem o seu *valor extremo* dado por (já que por hipótese,  $y$  extremiza o *funcional*):

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx \quad (4.15)$$

substituindo (4.13) em (4.14):

$$\tilde{I} = \int_{x_1}^{x_2} F(\varepsilon, \tilde{y}(\varepsilon), \tilde{y}'(\varepsilon)) dx \quad (4.16)$$

ou

$$\tilde{I} = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y + \varepsilon\eta, y' + \varepsilon\eta') dx \quad (4.17)$$

Em (4.17), o *funcional* está escrito como função do parâmetro  $\varepsilon$  e pode ser expandido em *Série de Taylor* na vizinhança de  $\varepsilon = 0$  (porque em  $\varepsilon = 0$  temos  $\tilde{y} = y$ ):

$$\tilde{I} = \left(\tilde{I}\right)_{\varepsilon=0} + \left(\frac{d\tilde{I}}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} \varepsilon + \left(\frac{d^2\tilde{I}}{d\varepsilon^2}\right)_{\varepsilon=0} \frac{\varepsilon^2}{2!} + \dots \quad (4.18)$$

ou

$$\tilde{I} - I = \left(\frac{d\tilde{I}}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} \varepsilon + \left(\frac{d^2\tilde{I}}{d\varepsilon^2}\right)_{\varepsilon=0} \frac{\varepsilon^2}{2!} + \dots \quad (4.19)$$

Analogamente ao caso da função  $y = f(x)$ , a condição necessária para que  $\tilde{I}$  seja extremo em  $\varepsilon = 0$  é dada por:

$$\tilde{I} = \tilde{I}(\varepsilon, \tilde{y}(\varepsilon), \tilde{y}'(\varepsilon)) \quad (4.20)$$

Onde:

$$\delta\tilde{I} = \left(\frac{d\tilde{I}}{d\varepsilon}\right) d\varepsilon = \int \delta F(x, \tilde{y}, \tilde{y}') dx = 0 \quad (4.21)$$

Logo

$$\delta F(x, \tilde{y}, \tilde{y}') = \left( \frac{\partial F}{\partial \tilde{y}} \frac{\partial \tilde{y}}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial F}{\partial \tilde{y}'} \frac{\partial \tilde{y}'}{\partial \varepsilon} \right) \delta \varepsilon \quad (4.22)$$

e

$$\left(\frac{d\tilde{I}}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} = 0 \quad (4.23)$$

ou seja

$$\left(\frac{d\tilde{I}}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} = 0 \quad (4.24)$$

Logo

$$\left(\frac{d\tilde{I}}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} = \left[ \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial F}{\partial \tilde{y}} \frac{\partial \tilde{y}}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial F}{\partial \tilde{y}'} \frac{\partial \tilde{y}'}{\partial \varepsilon} \right) \delta \varepsilon dx \right]_{\varepsilon=0} = 0 \quad (4.25)$$

De (4.17):

$$\left( \frac{d\tilde{I}}{d\varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} = \left[ \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial F}{\partial \tilde{y}} \eta + \frac{\partial F}{\partial \tilde{y}'} \eta' \right) dx \right]_{\varepsilon=0} = 0 \quad (4.26)$$

Como em  $\varepsilon = 0$ ,  $\tilde{y} = y$  e  $\tilde{y}' = y'$ , a expressão (4.26) pode ser escrita como:

$$\int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial F}{\partial y} \eta + \frac{\partial F}{\partial y'} \eta' \right) dx = 0. \quad (4.27)$$

Agora vamos procurar eliminar o segundo termo da integral.

Integrando por partes, pode-se eliminar  $\eta'$ :

$$\begin{cases} u = \frac{dF}{dy'} \Rightarrow du = \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) dx \\ dv = \eta' dx \Rightarrow v = \eta \end{cases} \quad (4.28)$$

Logo

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y'} \eta' dx = \left. \frac{\partial F}{\partial y'} \eta \right|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \eta dx \quad (4.29)$$

Como  $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$  temos:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y'} \eta' dx = - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \eta dx \quad (4.30)$$

Substituindo (4.30) em (4.27):

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] \eta dx = 0 \quad (4.31)$$

Usando o LEMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO DAS VARIAÇÕES.

Se  $\int_{x_1}^{x_2} f(x) \eta(x) dx = 0$ , com  $f(x)$  contínua e  $\eta(x)$  continuamente derivável (ou

diferenciável) e anulando-se em  $x_1$  e  $x_2$ , então  $f(x) = 0$  no intervalo considerado.

Assim tem-se de (4.31) que:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0 \quad (4.32)$$

que é a equação de Euler-Lagrange e é a condição a que  $y(x)$  deve obedecer para que seja *extremizante do funcional*.

Da equação (4.13) pode-se definir o operador  $\delta$ :

$$\delta y = \tilde{y} - y = \varepsilon \eta \quad ; \quad \tilde{y} = y + \varepsilon \eta \quad (4.33)$$

Por definição,  $\delta y$  representa uma variação arbitrária introduzida na *variável dependente*  $y$  para um valor fixo da *variável independente*  $x$ . Graficamente temos:

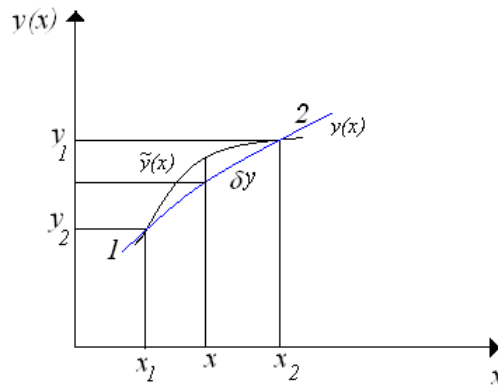


Figura - 4.3. Variação  $\delta y$  em torno de função extremizante  $y(x)$ .

#### 4.4.1 - Propriedades do Operador

1)  $\delta \left[ \frac{dy}{dx} \right] = \frac{d}{dx}(\delta y)$ : *comutativa com o operador diferencial*.

Vejamos a variação da função  $\frac{dy}{dx}$ :

$$\left( \frac{dy}{dx} \right)^{\sim} = \frac{d\tilde{y}}{dx} \quad (4.34)$$

logo



$$\begin{aligned}\delta\left[\frac{dy}{dx}\right] &= \left(\frac{dy}{dx}\right)^{\sim} - \frac{dy}{dx} = \frac{d\tilde{y}}{dx} - \frac{dy}{dx} = \frac{d(\tilde{y} - y)}{dx} = \\ \delta\left[\frac{dy}{dx}\right] &= \frac{d(\delta y)}{dx}\end{aligned}\tag{4.35}$$

2)  $\delta\left[\int ydx\right] = \int \delta y dx$ : *comutativo com o operador integral*

Vejamos a variação da função  $\int ydx$  cujo caminho variável é dado por:

$$\left(\int ydx\right)^{\sim} = \int \tilde{y}dx\tag{4.36}$$

então

$$\begin{aligned}\delta\left[\int ydx\right] &= \left(\int ydx\right)^{\sim} - \int ydx = \int \tilde{y}dx - \int ydx = \int (\tilde{y} - y)dx = \\ \delta\left[\int ydx\right] &= \int \delta y dx\end{aligned}\tag{4.37}$$

Substituindo (4.27) no segundo termo à direita em (4.18):

$$\left[\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y}\eta + \frac{\partial F}{\partial y'}\eta'\right)dx\right]\varepsilon = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y}\eta\varepsilon + \frac{\partial F}{\partial y'}\eta'\varepsilon\right)dx = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'\right)dx =\tag{4.38}$$

Integrando por partes:

$$\begin{cases} u = \frac{\partial F}{\partial y'} \Rightarrow du = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)dx \\ dv = \delta y' dx \Rightarrow v = \int \delta y' dx = \delta y \end{cases}\tag{4.39}$$

Logo

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' dx = \underbrace{\frac{\partial F}{\partial y'}}_{=0} \delta y \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) \delta y dx\tag{4.40}$$

Mas  $\delta y = \tilde{y} - y = 0$  porque são iguais em  $x_1$  e  $x_2$ .

Substituindo (4.40) em (4.38):

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] \delta y dx = 0 \quad (4.41)$$

A expressão (4.41) é denominada *primeira variação do funcional*. Portanto, a condição necessária à extremização requer que a *primeira variação do funcional* seja igual a zero.

$$\delta^{(1)} I = \int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] \delta y dx = 0 \quad (4.42)$$

Note-se que:

1.

$$\delta^{(1)} I = \left( \frac{d\tilde{I}}{d\varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} \varepsilon \quad (4.43)$$

2. A analogia entre a *primeira variação de um funcional* e o *diferencial total* de uma função é evidente se:

$$F = F(x, y, y') \quad , \quad \delta^{(1)} I = \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial F}{\partial y} \delta y - \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \right) dx = 0 \quad (4.44)$$

$$f = f(x, y) \quad , \quad df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \quad (4.45)$$

#### 4.4.2 – Condições de Contorno

Foi considerado, até agora, o caso no qual são dados os pontos  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$  por onde deve passar a *função extremizante* e  $\delta(x_1) = \delta(x_2) = 0$ : essas *condições de contorno* são denominadas *cinemáticas* ou *forçadas*.

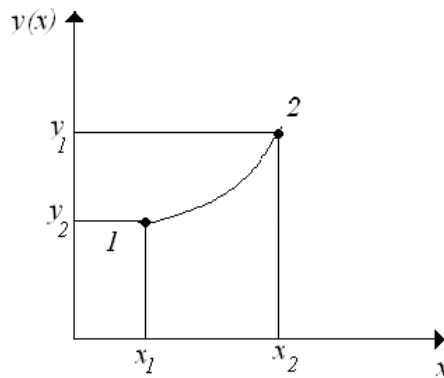


Figura - 4. 4.

Supões-se, agora, que são dados apenas  $x_1$  e  $x_2$ ; assim, dos *caminhos variados*, alguns passarão por  $y_1$  e  $y_2$  e outros não.

Para  $I = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx$ , o desenvolvimento da *condição de extremização*

conduz a:

$$\delta^{(1)} I = \int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] \delta y dx + \frac{\partial F}{\partial y} \delta y \Big|_{x_2} - \frac{\partial F}{\partial y} \delta y \Big|_{x_1} = 0, \quad (4. 46)$$

onde cada um desses termos é nulo individualmente, porque eles são linearmente independentes.

A função  $y(x)$  que extremiza o funcional deverá atender, além da equação de *Euler-Lagrange*, equação (4. 32), às seguintes *condições de contorno*:

*Condições de Contorno Essenciais (Cinemáticas)*

*Condições de Contorno Naturais*

$$\delta y \Big|_{x_1} = 0 \quad (\text{ou } y(x_1) = y_1 \text{ prescrito}) \quad \text{ou} \quad \frac{\partial F}{\partial y} \Big|_{x_1} = 0 \quad (4. 47)$$

*Condições de Contorno Essenciais (Cinemáticas)*

*Condições de Contorno Naturais*

$$\delta y \Big|_{x_2} = 0 \quad (\text{ou } y(x_2) = y_2 \text{ prescrito}) \quad \text{ou} \quad \frac{\partial F}{\partial y} \Big|_{x_2} = 0 \quad (4. 48)$$

Em (4. 47) e (4. 48), as condições envolvendo os valores de  $y(x)$  em  $x_1$  e  $x_2$  são as *condições de contorno cinemáticas ou forçadas*, as *condições de contorno* envolvendo derivadas são as *condições de contorno naturais*.

## 4.5 – Funcionais com derivadas de ordem superior

Seja o funcional:

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y', y'', y''') dx \quad (4.49)$$

A condição de extremização se escreve como:

$$\delta^{(1)} I = \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' + \frac{\partial F}{\partial y''} \delta y'' + \frac{\partial F}{\partial y'''} \delta y''' \right) dx = 0 \quad (4.50)$$

Integrando por partes:

a)

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' dx = \left. \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y \right|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \delta y dx \quad (4.51)$$

b)

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y''} \delta y'' dx &= \left. \frac{\partial F}{\partial y''} \delta y' \right|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y''} \right) \delta y' dx = \\ &= \left. \frac{\partial F}{\partial y''} \delta y' \right|_{x_1}^{x_2} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y''} \right) \delta y \Big|_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{\partial F}{\partial y''} \right) \delta y dx \end{aligned} \quad (4.52)$$

c)

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y'''} \delta y''' dx &= \left. \frac{\partial F}{\partial y'''} \delta y'' \right|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'''} \right) \delta y'' dx = \\ &= \left. \frac{\partial F}{\partial y'''} \delta y'' \right|_{x_1}^{x_2} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'''} \right) \delta y' \Big|_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{\partial F}{\partial y'''} \right) \delta y' dx = \\ &= \left. \frac{\partial F}{\partial y'''} \delta y'' \right|_{x_1}^{x_2} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'''} \right) \delta y' \Big|_{x_1}^{x_2} + \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{\partial F}{\partial y'''} \right) \delta y \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d^3}{dx^3} \left( \frac{\partial F}{\partial y'''} \right) \delta y dx \end{aligned} \quad (4.53)$$

A condição de extremização é:

$$\begin{aligned}
& \int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{\partial F}{\partial y''} \right) - \frac{d^3}{dx^3} \left( \frac{\partial F}{\partial y'''} \right) \right] \delta y dx + \\
& + \left[ \frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y''} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{\partial F}{\partial y'''} \right) \right] \delta y \Big|_{x_1}^{x_2} + \left[ \frac{\partial F}{\partial y''} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'''} \right) \right] \delta y' \Big|_{x_1}^{x_2} + \frac{\partial F}{\partial y'''} \delta y''' \Big|_{x_1}^{x_2} = 0
\end{aligned} \tag{4.54}$$

A função  $y(x)$  que extremiza o funcional deverá atender à equação de Euler-Lagrange de ordem superiores:

$$\frac{d^3}{dx^3} \left( \frac{\partial F}{\partial y'''} \right) - \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{\partial F}{\partial y''} \right) + \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \tag{4.55}$$

E às condições de contorno:

*Cinemáticas / Naturais* são:

$$y'' \text{ prescrito } (\delta y'' = 0) \text{ ou } \frac{\partial F}{\partial y'''} \Big|_{x_1} = 0 \tag{4.56}$$

e

$$y' \text{ prescrito } (\delta y' = 0) \text{ ou } \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'''} \right) - \frac{\partial F}{\partial y''} = 0 \tag{4.57}$$

e

$$y \text{ prescrito } (\delta y = 0) \text{ ou } \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{\partial F}{\partial y'''} \right) - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y''} \right) + \frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \tag{4.58}$$

## 4.6 – Exemplos de Aplicações

1) Voltando ao problema da *Braquistócrona*:

$$I = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{v_1^2 + 2g(y_1 - y)}} dx \quad (4.59)$$

*Solução:*

Particularizando o problema para  $v_1 = 0$  e considerando o ponto  $(1) = (x_1, y_1)$  na origem e com o sentido invertido para  $y$ , conforme mostra a Figura - 4. 5.

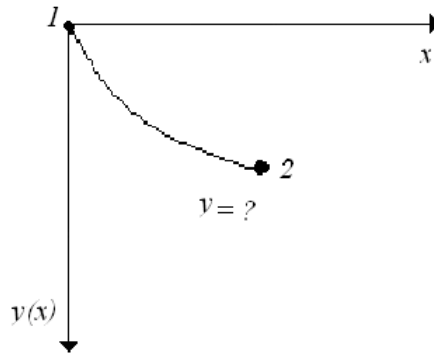


Figura - 4. 5. Particularização do problema da braquistócrona para  $v_1 = 0$  e considerando o ponto  $(1) = (x_1, y_1)$  na origem e com o sentido invertido para  $y$

A equação (4. 59) fica:

$$I = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{2gy}} dx = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{y}} dx \quad (4.60)$$

Com sentido invertido para  $y$ . Logo o funcional a ser extremizado é:

$$F(x, y, y') = \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{y}} \quad (4.61)$$

E

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y'} \right) - \frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y} = 0 \quad (4.62)$$

Substituindo (4. 61) na equação de Euler-Lagrange (4. 32), temos:

$$\frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y'} = \frac{1}{2} \frac{2y'}{\sqrt{1+(y')^2} \sqrt{y}} \quad (4.63)$$

logo

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y'} \right) = \frac{y''}{\sqrt{1+(y')^2} \sqrt{y}} - \frac{1}{2} \frac{2y'' y'^2}{\left( \sqrt{1+(y')^2} \right)^3 \sqrt{y}} - \frac{1}{2} \frac{y'^2}{\sqrt{1+(y')^2} (\sqrt{y})^3} \quad (4.64)$$

e

$$\frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y} = -\frac{1}{2} \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{(\sqrt{y})^3} \quad (4.65)$$

Logo juntando tudo em (4.32) temos:

$$\frac{y''}{\sqrt{1+(y')^2} \sqrt{y}} - \frac{1}{2} \frac{2y'' y'^2}{\left( \sqrt{1+(y')^2} \right)^3 \sqrt{y}} - \frac{1}{2} \frac{y'^2}{\sqrt{1+(y')^2} (\sqrt{y})^3} + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{(\sqrt{y})^3} = 0 \quad (4.66)$$

Multiplicando tudo por  $\sqrt{1+(y')^2} \sqrt{y}$ , temos:

$$y'' - \frac{y'' y'^2}{(1+(y')^2)} - \frac{y'^2}{2y} + \frac{(1+y'^2)}{2y} = 0 \quad (4.67)$$

Multiplicando tudo por  $2y$ , temos:

$$2yy'' - \frac{2yy'' y'^2}{1+(y')^2} - y'^2 + 1 + y'^2 = 0 \quad (4.68)$$

Ou

$$2yy'' - \frac{2yy'^2 y''}{1+(y')^2} + 1 = 0 \quad (4.69)$$

$$2yy''(1+y'^2) - 2yy'^2 y'' + 1 + y'^2 = 0 \quad (4.70)$$

Simplificando os termos semelhantes,

$$2yy'' + 2yy'^2 y'' - 2yy'^2 y'' + 1 + y'^2 = 0 \quad (4.71)$$

obtém-se a seguinte *equação diferencial*:

$$2yy'' + (y')^2 + 1 = 0 \quad (4.72)$$

Fazendo-se uma mudança de variáveis temos:

$$y' = u \quad (4.73)$$

e

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dy} \frac{dy}{dx} = y' \frac{du}{dy} \\ y'' &= u \frac{du}{dy} \end{aligned} \quad (4.74)$$

Logo

$$2yu \frac{du}{dy} + u^2 + 1 = 0 \quad (4.75)$$

ou

$$2yudu + (u^2 + 1)dy = 0 \quad (4.76)$$

Logo

$$d[y(1 + u^2)] = 0 \quad (4.77)$$

Efetuada a integração temos:

$$y(1 + u^2) = a \quad (4.78)$$

ou

$$y(1 + (y')^2) = a \quad (4.79)$$

que fica:

$$(y')^2 = \frac{a}{y} - 1 \quad (4.80)$$

Logo



$$y' = \sqrt{\frac{a-y}{y}} = \frac{dy}{dx} \quad (4.81)$$

ou

$$\frac{dx}{dy} = \sqrt{\frac{y}{a-y}} \Rightarrow dx = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{a-y}} dy \quad (4.82)$$

Então:

$$x = \int \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{a-y}} dy + x_0 \quad (4.83)$$

Fazendo:

$$y = a \cdot \text{sen}^2(t/2) \quad (4.84)$$

logo

$$dy = 2a \cdot \text{sen}(t/2) \cos(t/2) dt / 2 = a \text{sen}(t/2) \cos(t/2) dt \quad (4.85)$$

e

$$x = \int \frac{\sqrt{a \cdot \text{sen}(t/2)}}{\sqrt{a \cos(t/2)}} a \text{sen}(t/2) \cos(t/2) dt + x_0 \quad (4.86)$$

ou

$$x = a \int \text{sen}^2(t/2) dt + x_0. \quad (4.87)$$

Como:

$$\text{sen}^2(t/2) = \frac{1 - \cos(t/2)}{2} \quad (4.88)$$

Ficamos com:

$$x = \frac{a}{2} \int (1 - \cos t) dt + x_0 \quad (4.89)$$

Portanto

$$x = a \left( \frac{t}{2} - \frac{\text{sent}}{2} \right) + x_0 \quad (4.90)$$

Para  $y|_{x=0} = 0 \Rightarrow x_0 = 0$ . A solução final fica:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{a}{2}(t - \text{sent}) \\ y = a \text{sen}^2(t/2) = \frac{a}{2}(1 - \cos t) \end{array} \right. \quad (4.91)$$

Esta equação é a *equação da ciclóide*.

Portanto, a *Braquistócrona* é um arco de ciclóide desde o ponto (1) com  $(x = 0, y = 0)$  até o ponto (2) com  $(x = x_2, y = y_2)$ .

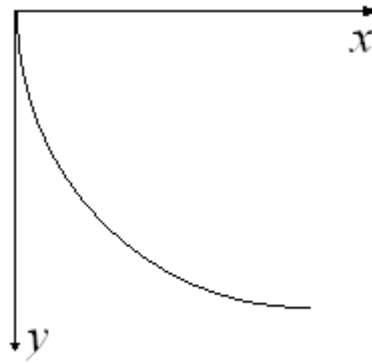


Figura - 4. 6. Curva de arco de ciclóide para um tempo mínimo (*Braquistócrona*).

2) Extremizar o seguinte funcional

$$I = \int_{x_1}^{x_2} (xy' + (y')^2) dx \quad (4.92)$$

*Solução:*

A partir da equação de Euler-Lagrange temos que:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0 \quad (4.93)$$

Sendo  $\partial F / \partial y = 0$  temos:

$$0 - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0 \quad (4.94)$$

O que implica que:

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = C \quad (4.95)$$

Logo,

$$F = F(x, y'). \quad (4.96)$$

Retornando a equação de Euler-Lagrange temos:

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{\partial}{\partial y'} (xy' + y'^2) = x + 2y' \quad (4.97)$$

ou

$$x + 2y' = C \Rightarrow y' = -\frac{x}{2} + \frac{C}{2}. \quad (4.98)$$

Portanto,

$$\boxed{y = -\frac{x^2}{4} + \frac{Cx}{2} + D}. \quad (4.99)$$

3) Provar que a menor distância entre dois pontos é uma linha reta, ou seja:

$$I = \text{distância} = \int_{x_1}^{x_2} ds = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2} dx \quad (4.100)$$

*Solução:*

Sendo o funcional  $F = F(y') = \sqrt{1 + y'^2}$  e aplicando a equação de Euler-Lagrange temos:

$$\underbrace{\frac{\partial F}{\partial y}}_{=0} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0 \quad (4.101)$$

Sendo  $\partial F / \partial y = 0$  temos:

$$0 - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0 \quad (4.102)$$

O que implica que:

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = C \quad (4.103)$$

Logo,

$$F = F(x, y'). \quad (4.104)$$

Retornando a equação de Euler-Lagrange temos:

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{dF}{dy'} = \frac{1}{2} (1 + y'^2)^{-1/2} 2y' = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \quad (4.105)$$

logo

$$\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = C \Rightarrow y' = C \sqrt{1 + y'^2}. \quad (4.106)$$

Ou

$$y'^2 = C^2 (1 + y'^2). \quad (4.107)$$

Logo

$$y'^2 = \frac{C^2}{1 - C^2} \Rightarrow y'^2 = A^2 \Rightarrow y' = \pm A. \quad (4.108)$$

Integrado em  $x$  temos:

$$\frac{dy}{dx} = \pm A \Rightarrow y = \int \pm A dx. \quad (4.109)$$

Portanto,

$$y = \pm Ax + B. \quad (4.110)$$

Que é a equação reduzida de uma reta

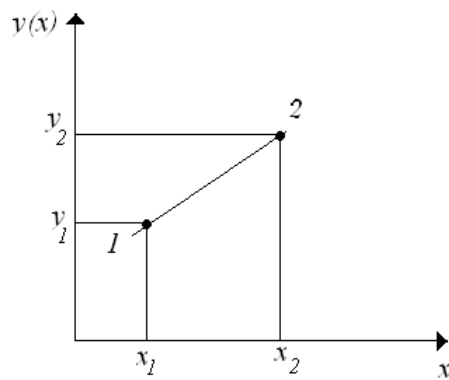


Figura - 4. 7. Gráfico da menor distância entre dois pontos segundo o Cálculo Variacional de Euler-Lagrange.

4) Aplicar o cálculo variacional ao problema de flexão de uma viga bi-apoiada.

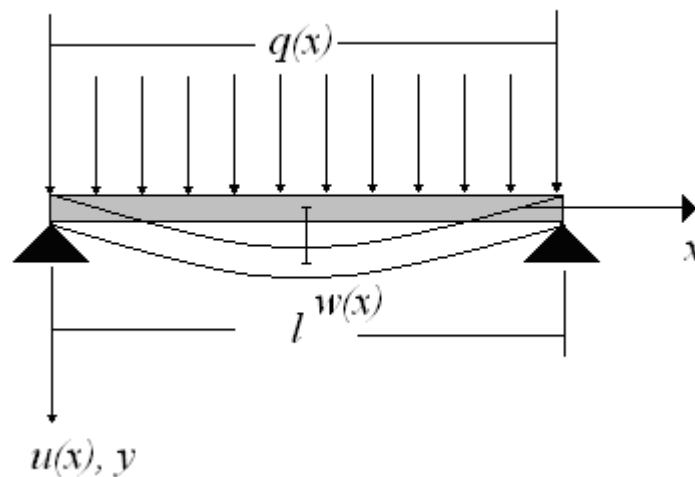


Figura - 4. 8. Viga bi-apoiada sujeita a deformação pelo seu próprio peso.

*Solução:*

A energia potencial total do sistema é:

$$I_p = \int_0^l \left[ \frac{EI}{2} \left( \frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 - qw \right] dx. \quad (4. 111)$$

Onde  $E$ : é o módulo de Elasticidade;  $I$  : o momento de Inércia da secção transversal da viga;

$\frac{EI}{2} \left( \frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2$  : é a Energia Potencial de Deformação;  $qw(x)$ : é a Energia Potencial da carga

Atuante. Sendo  $F$  dado por:

$$F = F(x, w, w'') = \frac{EI}{2} \left( \frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 - qw \quad (4.112)$$

Pelo Principio da Energia Potencial mínima, a configuração de equilíbrio corresponde à extremização do funcional.

Da equação de Euler-Lagrange:

$$\frac{d^3}{dx^3} \left( \frac{\partial F}{\partial w'''} \right) - \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{\partial F}{\partial w''} \right) + \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial w'} \right) - \frac{\partial F}{\partial w} = 0 \quad (4.113)$$

como

$$\frac{d^3}{dx^3} \left( \frac{\partial F}{\partial w'''} \right) = 0 \quad e \quad \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial w'} \right) = 0 \quad (4.114)$$

Temos:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{\partial F}{\partial w''} \right) + \frac{\partial F}{\partial w} = 0 \quad (4.115)$$

Logo

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{\partial F}{\partial w''} \right) = \frac{d^2 (EI w'')}{dx^2} \quad ; \quad \frac{\partial F}{\partial w} = EI w'' \quad (4.116)$$

e

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{\partial F}{\partial w''} \right) = EI \frac{d^4 w}{dx^4} \quad e \quad \frac{\partial F}{\partial w} = -q \quad (4.117)$$

Então substituindo em (4.115) temos:

$$\frac{d^4 w}{dx^4} = \frac{q}{EI} \quad (4.118)$$

A equação diferencial da linha elástica.

Considerando as *condições de contorno* ( $x = 0$  e  $x = l$ )

$$\frac{\partial F}{\partial w''} \delta w' = 0 : w' \text{ prescrito (cinemática)} (\delta w' = 0) \text{ ou } \frac{\partial F}{\partial w''} = 0 \text{ (natural)} \quad (4. 119)$$

e

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial w''} \right) \delta w = 0 : w' \text{ prescrito (cinemática)} (\delta w = 0) \text{ ou } \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial w''} \right) = 0 \text{ (natural)} \quad (4. 120)$$

As condições naturais podem ser escritas como:

$$\frac{\partial F}{\partial w''} = EIw'' = 0 \text{ ou } M = 0 \text{ (Momento Fletor)} \quad (4. 121)$$

e

$$\frac{d}{dx} (EIw'') = EIw''' = 0 \text{ ou } Q = 0 \text{ (Q: Esforço cortante)} \quad (4. 122)$$

Para o exemplo, há duas *condições de contorno* cinemáticas e duas naturais:

Em

$$\begin{cases} x = 0 ; & w = 0 \text{ e } w'' = 0 \\ x = l ; & w = 0 \text{ e } w'' = 0 \end{cases} \quad (4. 123)$$

## 4.7 – Método de Rayleigh-Ritz

Dado o funcional

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx \quad (4.124)$$

com *condições de contorno*  $y(x_1) = y(x_2) = 0$ . Cujas condição variacional é dada por:

$$\delta I = \delta \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx = \int_{x_1}^{x_2} \delta F(x, y, y') dx = 0. \quad (4.125)$$

Para que a condição variacional seja satisfeita é necessário que o integrando satisfaça a equação de Euler-Lagrange da seguinte forma:

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{\partial F}{\partial x} \delta x + \frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \right] dx = 0 \quad (4.126)$$

Desenvolvendo temos:

$$\int_{x_1}^{x_2} \mathbf{L} \left[ F(x, y(x), y'(x)) \right] \delta y dx = \int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] \delta y dx = 0 \quad (4.127)$$

ou

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0 \quad (4.128)$$

### 4.7.1 - Funcional para a Solução Aproximada

No método de Rayleigh-Ritz a função  $y(x)$ , que extremiza o funcional é substituída por uma *solução aproximada*  $\bar{y}(x)$ , definida como:

$$y \cong \bar{y} = \alpha_1 \phi_1 + \alpha_2 \phi_2 + \dots \alpha_n \phi_n \rightarrow \bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \phi_i, \quad (4.129)$$

onde as funções  $\phi_i, i=1,2,\dots,n$  são conhecidas e linearmente independentes no espaço vetorial de funções e os coeficientes  $\alpha_i$ , devem ser determinados de forma a se obter a melhor aproximação possível para a solução do problema.



Como as funções  $\phi_i, i = 1, 2, \dots, n$ , são conhecidas, resulta que tanto  $\bar{y}$  quanto  $\bar{y}'$  dependerão dos parâmetros  $\alpha_i$ . Então:

$$y' \equiv \bar{y}' = \alpha_1 \phi'_1 + \alpha_2 \phi'_2 + \dots + \alpha_n \phi'_n \rightarrow \bar{y}' = \sum_{i=1}^n \alpha_i \phi'_i. \quad (4.130)$$

Substituindo  $\bar{y}$ , definido em (4.129) e  $\bar{y}'$ , definido em (4.15), no funcional (4.124), obtém-se um funcional aproximado:

$$\bar{I} = \int_{x_1}^{x_2} F(x, \bar{y}, \bar{y}') dx. \quad (4.131)$$

cuja condição variacional é dada por:

$$\delta I = \delta \int_{x_1}^{x_2} F(x, \bar{y}, \bar{y}') dx = \int_{x_1}^{x_2} \delta F(x, \bar{y}, \bar{y}') dx = 0. \quad (4.132)$$

Para que a condição variacional seja satisfeita é necessário que o integrando satisfaça a equação de Euler-Lagrange da seguinte forma:

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{\partial F}{\partial x} \delta x + \frac{\partial F}{\partial y} \delta \bar{y} + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta \bar{y}' \right] dx = 0 \quad (4.133)$$

Desenvolvendo temos:

$$\int_{x_1}^{x_2} \mathbf{L} \left[ F(x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x)) \right] \delta \bar{y} dx = \int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] \delta \bar{y} dx = 0 \quad (4.134)$$

Se  $\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \phi_i$ ;  $\bar{y}' = \sum_{i=1}^n \alpha_i \phi'_i$ , então o funcional aproximado  $\bar{I}$  dependerá somente dos  $n$  parâmetros  $\alpha_i$ , de onde podemos escrever:

$$\bar{I} = \bar{I}(\alpha_i) = \int_{x_1}^{x_2} F(\alpha_i, x, \phi_i, \phi'_i) dx \rightarrow \int_{x_1}^{x_2} \mathbf{L} \left[ F(x, \alpha_i, \phi_i(x), \phi'_i(x)) \right] \delta \bar{y} dx = L(\alpha_i) \Big|_{x_1}^{x_2} \quad (4.135)$$

Explicitando tudo em termos das funções,  $\phi_i(x)$ , isto é, substituindo-se (4.130) em (4.131) temos:

$$\bar{I} = \int_{x_1}^{x_2} F(x, \sum_{i=1}^n \alpha_i \phi_i(x), \sum_{i=1}^n \alpha_i \phi'_i(x)) dx \rightarrow \bar{I} = \int_{x_1}^{x_2} F(\sum_{i=1}^n \alpha_i \phi_i(x), \sum_{i=1}^n \alpha_i \phi'_i(x)) dx \quad (4.136)$$

#### 4.7.2 - Equações de Euler-Lagrange para a Solução Aproximada

A condição variacional também deve ser válida para a solução aproximada, de forma análoga devemos ter:

$$\delta \bar{I} = \delta \int_{x_1}^{x_2} F(x, \bar{y}, \bar{y}') dx = \int_{x_1}^{x_2} \delta F(x, \bar{y}, \bar{y}') dx = 0 \quad (4.137)$$

Como o funcional exato do problema satisfaz a Equações de Euler-Lagrange, para que a condição variacional aproximada seja possível é preciso que o integrando da solução aproximada também deva satisfazer a mesma equação, ou seja,

$$\frac{\partial F}{\partial \bar{y}} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial \bar{y}'} \right) = 0 \quad (4.138)$$

Onde em termos das funções,  $\phi_i(x)$  temos:

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial F}{\partial \phi_j} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial F}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \bar{y}}{\partial \phi_j} = \frac{\partial F}{\partial \bar{y}} \sum_{j=1}^n \frac{\partial \bar{y}}{\partial \phi_j} \quad (4.139)$$

e

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial F}{\partial \phi'_j} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial F}{\partial \bar{y}'} \frac{\partial \bar{y}'}{\partial \phi'_j} = \frac{\partial F}{\partial \bar{y}'} \sum_{j=1}^n \frac{\partial \bar{y}'}{\partial \phi'_j} \quad (4.140)$$

E ainda

$$\frac{d}{dx} \left( \sum_{j=1}^n \frac{\partial F}{\partial \phi'_j} \right) = \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial \bar{y}'} \sum_{j=1}^n \frac{\partial \bar{y}'}{\partial \phi'_j} \right) = \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial \bar{y}'} \right) \sum_{j=1}^n \frac{\partial \bar{y}'}{\partial \phi'_j} \quad (4.141)$$

Então subtraindo (4.139) de (4.141) temos:

$$\frac{d}{dx} \left( \sum_{j=1}^n \frac{\partial F}{\partial \phi'_j} \right) - \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial F}{\partial \phi'_j} \right) = \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial \bar{y}'} \right) \sum_{j=1}^n \frac{\partial \bar{y}'}{\partial \phi'_j} - \left( \frac{\partial F}{\partial \bar{y}'} \right) \sum_{j=1}^n \frac{\partial \bar{y}'}{\partial \phi'_j} \quad (4.142)$$

Sabendo que:

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial \bar{y}}{\partial \phi_j} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \bar{y}}{\partial \phi_j} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \alpha_i \delta_{ij} = \sum_{j=1}^n \alpha_j \quad (4.143)$$

Logo podemos escrever:

$$\frac{d}{dx} \left( \sum_{j=1}^n \frac{\partial F}{\partial \phi'_j} \right) - \sum_{j=1}^n \frac{\partial F}{\partial \phi_j} = \left[ \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial \bar{y}'} \right) - \frac{\partial F}{\partial \bar{y}} \right] \sum_{j=1}^n \alpha_j = 0 \quad (4.144)$$

que satisfaz a equação de Euler-Lagrange também, ou seja,

$$\sum_{j=1}^n \left[ \frac{\partial F}{\partial \phi_j} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial \phi'_j} \right) \right] = 0 \quad (4.145)$$

Portanto, é possível mostrar que o Lagrangeano  $F(x, y, y')$  pode ser escrito em termos da somatória do Lagrangeanos parciais  $F(x, y, y') \rightarrow \sum_{i=0}^n F(\alpha_i, x, \phi_i, \phi'_i)$ , onde vale a igualdade:

$$\bar{I} = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx \rightarrow \bar{I} = \int_{x_1}^{x_2} \sum_{i=1}^n F(\alpha_i, x, \phi_i, \phi'_i) dx \rightarrow \sum_{i=1}^n \int_{x_1}^{x_2} F(\alpha_i, x, \phi_i, \phi'_i) dx, \quad (4.146)$$

com a seguinte condição variacional

$$\delta \bar{I} = \delta \int_{x_1}^{x_2} F(x, \bar{y}, \bar{y}') dx = \int_{x_1}^{x_2} \delta \sum_{i=1}^n F(\alpha_i, x, \phi_i, \phi'_i) dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_1}^{x_2} \delta F(\alpha_i, x, \phi_i, \phi'_i) dx = 0 \quad (4.147)$$

satisfazendo cada uma delas a equação de Euler-Lagrange, conforme mostra a equação (4.145).

#### 4.7.3 - Sistema de Equações para o Método de Rayleigh-Ritz

Separando a parte que depende dos  $\alpha_i$ 's do restante podemos escrever:

$$\bar{I} = \sum_{i=1}^n f(\alpha_i) \int_{x_1}^{x_2} G(x, \phi_i, \phi'_i) dx. \quad (4.148)$$

Portanto, como a integral é definida, o funcional aproximado,  $\bar{I}$ , dependerá somente dos  $n$  parâmetros  $\alpha_i$ , pode-se escrever:

$$\bar{I} = \bar{I}(\alpha_i) \rightarrow F(\alpha_i) \quad (4.149)$$

Logo, a condição de extremização de  $\bar{I}$  passa a ser dada por:

$$\delta^{(1)}\bar{I} = \frac{\partial \bar{I}}{\partial \alpha_1} \delta \alpha_1 + \frac{\partial \bar{I}}{\partial \alpha_2} \delta \alpha_2 + \dots + \frac{\partial \bar{I}}{\partial \alpha_n} \delta \alpha_n = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \bar{I}}{\partial \alpha_j} \delta \alpha_j = 0. \quad (4.150)$$

Ou

$$\delta^{(1)}\bar{I}(\alpha_i) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \bar{I}}{\partial \alpha_j} \delta \alpha_j = \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \int_{x_1}^{x_2} \mathbf{L} \left[ \sum_{i=1}^n \alpha_i \phi_i(x) \right] dx = 0 \rightarrow \delta^{(1)}F(\alpha_i). \quad (4.151)$$

Como as variações  $\delta \alpha_i$  são arbitrárias,  $\delta^{(1)}I$  só se anula quando:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{I}}{\partial \alpha_j} &= \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \int_{x_1}^{x_2} F(\alpha_i, x, \phi_i, \phi_i') dx = 0 \rightarrow \frac{\partial F(\alpha_i)}{\partial \alpha_i} = 0 \\ &\Downarrow \\ \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \int_{x_1}^{x_2} \mathbf{L} \left[ \sum_{i=1}^n \alpha_i \phi_i(x) \right] dx &= \frac{\partial}{\partial \alpha_i} [L(\alpha_i)]_{x_1}^{x_2}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \end{aligned} \quad (4.152)$$

ou seja,

$$\frac{\partial \bar{I}}{\partial \alpha_j} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \left[ F\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \phi_i(x), \sum_{i=1}^n \alpha_i \phi_i'(x)\right) \right] dx = 0. \quad (4.153)$$

A expressão (4.152) gera um sistema de equações cuja solução fornece os valores de  $\alpha_i$  que correspondem à melhor *solução aproximada* do tipo descrito em (4.129).

$$\frac{\partial \bar{I}}{\partial \alpha_j} = \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \left[ \sum_{i=1}^n f(\alpha_i) \int_{x_1}^{x_2} G(x, \phi_i, \phi_i') dx \right] = 0. \quad (4.154)$$

Ou seja:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial (f(\alpha_i))}{\partial \alpha_j} \int_{x_1}^{x_2} G(x, \phi_i, \phi_i') dx = 0. \quad (4.155)$$

gerando uma série de termos em  $\alpha_i$ , com coeficientes do tipo:

$$\frac{\partial \bar{I}}{\partial \alpha_j} = \sum_{i=1}^n A_{ji} L(\alpha_i) = 0. \quad (4.156)$$

Onde:

$$A_{ji} = \int_{x_1}^{x_2} G(x, \phi_i, \phi'_i) dx \quad (4.157)$$

E

$$L(\alpha_i) = \frac{\partial f(\alpha_i)}{\partial \alpha_i}. \quad (4.158)$$

Substituindo (4.156) em (4.150) vemos que a condição de extremização pode ser colocada em termos de um sistema de equações para os  $\alpha_i$ s

$$\delta \bar{I} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \bar{I}}{\partial \alpha_j} \delta \alpha_j = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n A_{ji} L(\alpha_i) \delta \alpha_j = 0. \quad (4.159)$$

ou seja,

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n A_{ji} L(\alpha_i) = 0. \quad (4.160)$$

cuja matriz do sistema é quadrada e dada por:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L(\alpha_1) \\ L(\alpha_2) \\ \vdots \\ L(\alpha_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.161)$$

Quando as soluções aproximadas atendem às condições de convergência do método, um aumento do número  $n$  de termos produz uma melhor representação da *solução exata* do problema.

As condições de convergência são:

- 1) As funções  $\phi_i, i = 1, 2, \dots, n$  são conhecidas e linearmente independentes no espaço vetorial de funções.
- 2) As soluções aproximadas devem ser contínuas;
- 3) As derivadas das *soluções aproximadas* devem ser contínuas até uma unidade a menos que a ordem do *operador diferencial* que aparece no *funcional*.

- 4) As soluções aproximadas devem satisfazer exatamente as *condições de contorno essenciais* ou *forçadas* do problema
- 5) A sequência de funções deve ser tal que, no limite, quando  $n \rightarrow \infty$ , o erro quadrático médio se anula.

#### 4.7.4 - Condições de Convergência do Método de Rayleigh-Ritz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x_1}^{x_2} (y - \bar{y})^2 dx = 0 \quad (4.162)$$

ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x_1}^{x_2} \left( y(x) - \sum_{i=1}^n \alpha_i \phi_i \right)^2 dx = 0 \quad (4.163)$$

Observe que isso implica em:

$$\delta \int_{x_1}^{x_2} (y - \bar{y})^2 dx = \int_{x_1}^{x_2} \delta (y - \bar{y})^2 dx = 0 \quad (4.164)$$

mas

$$\int_{x_1}^{x_2} \delta (y - \bar{y})^2 dx = \int_{x_1}^{x_2} \delta \left( y - \sum_{i=1}^n \alpha_i \phi_i \right)^2 dx = 0 \quad (4.165)$$

Ou seja:

$$\int_{x_1}^{x_2} \delta (y - \bar{y})^2 dx = 2 \int_{x_1}^{x_2} (y - \bar{y}) \delta (y - \bar{y}) dx = 0 \quad (4.166)$$

logo

$$\int_{x_1}^{x_2} (y - \bar{y}) \delta (y - \bar{y}) dx = \int_{x_1}^{x_2} \left( y - \sum_{i=1}^n \alpha_i \phi_i \right) \delta \left( y - \sum_{i=1}^n \alpha_i \phi_i \right) dx = 0 \quad (4.167)$$

Ou

$$\int_{x_1}^{x_2} [y - \bar{y}] [\delta y - \delta \bar{y}] dx = \int_{x_1}^{x_2} \left[ \underbrace{(y - \bar{y}) \delta y}_{=0} - (y - \bar{y}) \delta \bar{y} \right] dx = 0 \quad (4.168)$$

Sendo  $\delta y = 0$ , temos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x_1}^{x_2} (y - \bar{y})^2 dx = \int_{x_1}^{x_2} [(y - \bar{y}) \delta \bar{y}] dx = 0 \quad (4.169)$$

Fazendo

$$\delta \bar{y} = \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i \phi_i \right) \delta \alpha_j = \sum_{i=1}^n \frac{\partial (\alpha_i \phi_i)}{\partial \alpha_j} \delta \alpha_j \rightarrow \delta \bar{y} = \sum_{i=1}^n \phi_i \delta_{ij} \delta \alpha_j = \phi_j \delta \alpha_j. \quad (4.170)$$

Temos:

$$\int_{x_1}^{x_2} (y - \bar{y}) \delta \bar{y} dx = \int_{x_1}^{x_2} \left( y - \sum_{i=1}^n \alpha_i \phi_i \right) \phi_j \delta \alpha_j dx = 0. \quad (4.171)$$

Para  $\delta \alpha_j$  arbitrários temos necessariamente que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x_1}^{x_2} (y - \bar{y})^2 dx = \int_{x_1}^{x_2} \left( y - \sum_{i=1}^n \alpha_i \phi_i \right) \phi_j dx = 0. \quad (4.172)$$

Separando a integral temos:

$$\int_{x_1}^{x_2} y \phi_j dx = \int_{x_1}^{x_2} \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i \phi_i \right) \phi_j dx. \quad (4.173)$$

ou

$$\sum_{i=1}^n \underbrace{\left[ \int_{x_1}^{x_2} \phi_i \phi_j dx \right]}_{K_{ij}} \alpha_i = \underbrace{\int_{x_1}^{x_2} y \phi_j dx}_{f_j}. \quad (4.174)$$

Logo

$$\sum_{i=1}^n K_{ij} \alpha_i = f_j. \quad (4.175)$$

Ou

$$[K]\alpha = f. \quad (4.176)$$

Uma matriz reduzida pode ser gerada, quando se explicita os  $L(\alpha_i)$  em termos dos  $\alpha_{i,s}$ , ficando, portanto o sistema determinado em termos dos coeficientes  $\alpha_{i,s}$ , da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & \dots & M_{1m} \\ M_{21} & M_{22} & \dots & M_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{n1} & M_{n2} & \dots & M_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_m \end{bmatrix}. \quad (4.177)$$

Onde

$$M_{ij} = \int_{x_1}^{x_2} \phi_i \phi_j dx. \quad (4.178)$$

E

$$C_j = \int_{x_1}^{x_2} y \phi_j dx. \quad (4.179)$$

Observe que os  $C_j$  dependem da solução exata do problema.

Substituindo,  $y$  por  $\bar{y} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \phi_i$  em (4.179) temos:

$$C_j = \int_{x_1}^{x_2} \sum_{i=1}^n \alpha_i \phi_i \phi_j dx. \quad (4.180)$$

Como as funções  $\phi_i(x)$  são mutuamente ortogonais temos:

$$C_j = \sum_{i=1}^n \alpha_i \int_{x_1}^{x_2} \phi_i \phi_j dx = \sum_{i=1}^n \alpha_i \delta_{ij} = \alpha_j. \quad (4.181)$$

Portanto, a equação (4.177) fica:



$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & .. & M_{1m} \\ M_{21} & M_{22} & .. & A_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ M_{n1} & M_{n2} & .. & M_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}. \quad (4.182)$$

Onde necessariamente a matriz  $M$  é a matriz identidade:

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & .. & M_{1m} \\ M_{21} & M_{22} & .. & A_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ M_{n1} & M_{n2} & .. & M_{mm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & .. & 0 \\ 0 & 1 & .. & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & .. & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.183)$$

## 4.8 – Exemplos de Aplicações

Exemplo: Dado o funcional.

$$I_p = \int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{EI}{2} \left( \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right)^2 - qw(x) \right] dx = 0 \quad (4.184)$$

que representa a energia potencial total para a flexão de uma viga. Obter uma *solução aproximada* para  $w(x)$  para o caso de uma viga simplesmente apoiada.

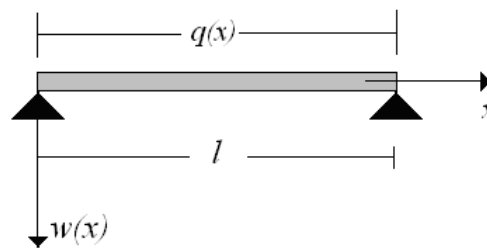


Figura - 4. 9. Viga bi-apoiada sujeita a flexão pelo seu próprio peso.

Com *condições de contorno*:

$$\begin{cases} w(0) = 0 \\ w(l) = 0 \end{cases} \quad (4.185)$$

1ª Tentativa:

Escolhendo uma solução do tipo:

$$\bar{w} = \alpha \phi = \alpha \underbrace{x(l-x)}_{\phi}; \phi = x(l-x) \quad (4.186)$$

*Solução:*

$$\bar{w} = \alpha x(l-x) \Rightarrow \frac{d\bar{w}}{dx} = \alpha x(l-2x) \Rightarrow \frac{d^2 \bar{w}}{dx^2} = -2\alpha \quad (4.187)$$

Então:

$$\begin{aligned}
\bar{I}_p &= \int_{x_1=0}^{x_2=l} \left[ \frac{EI}{2} (-2\alpha)^2 - q\alpha x(l-x) \right] dx \\
&= \int_{x_1=0}^{x_2=l} \left[ 2EI\alpha^2 - q\alpha(xl-x^2) \right] dx = 0
\end{aligned} \tag{4. 188}$$

Integrando e aplicando os limites temos:

$$\bar{I}_p = 2EI\alpha^2 x \Big|_0^l - q\alpha \left( \frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^l \tag{4. 189}$$

ou

$$\bar{I}_p = 2EI\alpha^2 l - q\alpha \left( \frac{l^3}{2} - \frac{l^3}{3} \right) \tag{4. 190}$$

Logo

$$\bar{I}_p = 2EI\alpha^2 l - q\alpha \left( \frac{l^3}{6} \right), \tag{4. 191}$$

onde:

$$\frac{\partial \bar{I}_p}{\partial \alpha} = 0 : \text{condição de extremização}, \tag{4. 192}$$

logo

$$4EI\alpha l - q \left( \frac{l^3}{6} \right) = 0, \tag{4. 193}$$

Portanto,

$$\alpha = \frac{ql^2}{24EI}, \tag{4. 194}$$

Retornando a  $\bar{w}(x)$  temos:

$$\bar{w}(x) = \frac{ql^2}{24EI} x(l-x), \tag{4. 195}$$

Que em  $x = l/2$  temos:

$$\bar{w}(x)|_{x=l/2} = \frac{ql^4}{96EI}, \quad (4.196)$$

Onde a solução exata é:

$$w_{\max} = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EI}, \quad (4.197)$$

cujo erro é dado por:

$$\frac{\bar{w}_{\max}}{w_{\max}} = 0,8. \quad (4.198)$$

Logo a solução aproximada é 80% do valor exato.

2ª Tentativa:

Escolhendo uma solução do tipo:

$$\bar{w}(x) = \alpha \phi = \alpha \underbrace{x^2(l-x)}_{\phi}; \phi = x^2(l-x) \quad (4.199)$$

3ª Tentativa:

Escolhendo uma solução do tipo:

$$\bar{w}(x) = \alpha_1 \phi_1 + \alpha_2 \phi_2 = \alpha_1 \underbrace{x(l-x)}_{\phi_1} + \alpha_2 \underbrace{x^2(x-l)}_{\phi_2}; \phi_i = x^i(l-x) \quad (4.200)$$

4ª Tentativa:

Escolhendo uma solução do tipo:

$$\bar{w}(x) = \alpha_1 \phi_1 + \alpha_2 \phi_2 = \alpha_1 \underbrace{x(l-x)}_{\phi_1} + \alpha_2 \underbrace{x^2(x-l)^2}_{\phi_2}; \phi_i = x^i(l-x)^i \quad (4.201)$$

Com

$$\bar{w}'; \bar{w}''; (\bar{w}'')^2; \alpha_1 = \frac{-ql^4}{24EI}; \alpha_2 = \frac{ql^2}{24EI} \quad (4.202)$$

e

$$\bar{w}(x) = \frac{ql^4}{24EI} x(l-x) + \frac{ql^2}{24EI} x^2(x-l)^2. \quad (4.203)$$

Calcular  $\bar{w}$  em  $x = l/2$ , com:

$$\frac{d^4 w}{dx^4} = \frac{q}{EI} \begin{cases} w(0) = 0; w''(0) = M = 0 \\ w(l) = 0; w''(l) = M = 0 \end{cases} \quad (4.204)$$

e comparar o resultado com o  $\bar{w}$ .

## 4.9 – Exercícios e Problemas

Extremizar estes outros funcionais:

1)

$$I = \int_{x_1}^{x_2} (y^2 + y'^2 - 2y \sin x) dx \quad (4.205)$$

2)

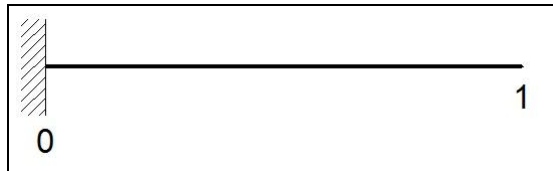
$$I = \int_{x_1}^{x_2} y'(1 + x^2 y') dx \quad (4.206)$$

3)

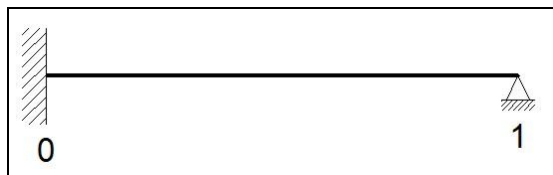
$$I = \int_{x_1}^{x_2} (y'^2 + 2yy' - 16y^2) dx \quad (4.207)$$

4) Indicar as *condições de contorno* para as vigas ( $EI = \text{cte}$ ;  $l = \text{comprimento}$ ).

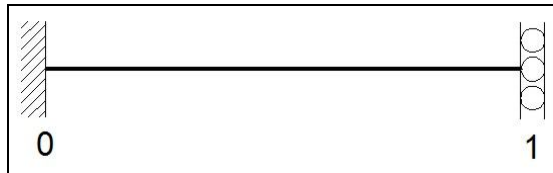
a) Viga engastada



b) Viga com apoio fixo



c) Viga com apoio móvel



Extremizar estes outros funcionais:

5)

$$F(x, y, y') = y'^2 - y^2 \rightarrow I = \int_{x_1}^{x_2} (y'^2 - y^2) dx \quad (4.208)$$

6)

$$F(x, y, y') = \frac{x^2 y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} \rightarrow I = \int_{x_1}^{x_2} \frac{x^2 y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} dx \quad (4. 209)$$

7)

$$F(x, y, y') = y \sqrt{1 + (y')^2} \rightarrow I = \int_{x_1}^{x_2} y \sqrt{1 + (y')^2} dx \quad (4. 210)$$

8)

$$F(x, y, y') = \sqrt{1 + (y')^2} - \lambda y \rightarrow I = \int_{x_1}^{x_2} [\sqrt{1 + (y')^2} - \lambda y] dx \quad (4. 211)$$

9)

$$F(x, y, y') = \text{sen}(xy') \rightarrow I = \int_{x_1}^{x_2} \text{sen}(xy') dx \quad (4. 212)$$

# *Capítulo – V*

## MÉTODO DOS RESÍDUOS PONDERADOS

### RESUMO

Neste capítulo será visto a origem do *Método dos Resíduos Ponderados*. Este método se apresenta como uma alternativa ao *Método Variacional* e por sua vez deu origem ao *Método dos Elementos Finitos* e ao *Método dos Elementos de Contorno*.

### 5. 1 - Objetivos do capítulo

- i) Entender a origem do *Método dos Resíduos Ponderados*
- ii) Saber aplicar o *Método dos Resíduos Ponderados* nas suas mais diferentes formas
- iii) Resolver problemas de equações diferenciais pertinentes ao método.
- iv) Saber utilizar o *Método dos Resíduos Ponderados* no contexto de outros métodos aproximados

### 5. 2 – Introdução

O *Método dos Resíduos Ponderados* é um método de aproximação que surgiu a partir do *Método Variacional*, mas como uma proposta de se libertar da *condição de extremização* de um *funcional*. Tendo apenas como condição a *equação diferencial* que pode ou não ser proveniente de uma *condição variacional de um funcional*. Este método é muito interessante e versátil. Foi a partir dele que foi possível dar origem a outros métodos de solução de *equações diferenciais*, tais como o *Método dos Elementos Finitos* e o *Método dos Elementos de Contorno*.



### 5.3 – Definição Matemática e Desenvolvimento do Método

Seja um problema descrito pela seguinte *equação diferencial*

$$\mathbf{L}(u) = b \quad \text{em } \Omega \quad (5.1)$$

sujeito as *condições de contorno*

$$\mathbf{S}(u) = g \quad \text{em } \Gamma \quad (5.2)$$

Onde  $\mathbf{L}$  e  $\mathbf{S}$  são *operadores lineares*.

Devido às dificuldades de obtenção da solução exata,  $u$ , esta pode ser aproximada por uma função,  $\bar{u}$ , que tenha um *grau de continuidade* necessário para tornar o lado esquerdo da equação (5.1) não identicamente nulo e que pode, ou não, satisfazer as *condições de contorno* do problema. A função aproximada  $\bar{u}$  pode ser definida como:

$$\bar{u} = \beta + \sum_{n=1}^N \alpha_n \phi_n \cong u \quad (5.3)$$

onde  $\beta$  é uma função conhecida, incluída para satisfazer as *condições de contorno não-homogêneas* ( $\beta|_{\Gamma} = u|_{\Gamma}$ ),  $\alpha_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots, N$ ) são coeficientes ainda não determinados e  $\phi_n$  são *Funções de Forma linearmente independentes* (no *espaço vetorial de funções*) e identicamente nulas no contorno. Além disso, as funções  $\phi_n$  devem ser tais que a aproximação melhore quando o número  $N$  cresce, ou seja, o conjunto de funções  $\phi_n$  deve obedecer ao *critério de completitude* (ou *completeza*), expresso como:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \beta + \sum_{n=1}^N \alpha_n \phi_n \right\} \rightarrow u \quad (5.4)$$

De forma análoga as equações (5.1) e (5.2) podemos definir a solução aproximada da equação diferencial como sendo dada por:

$$\mathbf{L}(\bar{u}) = \bar{b} \quad \text{em } \Omega \quad (5.5)$$

sujeito as *condições de contorno*

$$\mathbf{S}(\bar{u}) = \bar{g} \quad \text{em } \Gamma. \quad (5.6)$$

Subtraindo (5.5) de (5.1) e (5.6) de (5.2) temos:

$$\mathbf{L}(\bar{u}) - \mathbf{L}(u) = \bar{b} - b \quad \text{em } \Omega \quad (5.7)$$

e

$$\mathbf{S}(\bar{u}) - \mathbf{S}(u) = \bar{g} - g \quad \text{em } \Gamma. \quad (5.8)$$

Onde podemos definir os erros  $\varepsilon_\Omega$  e  $\varepsilon_\Gamma$  no *domínio* e nas *condições de contorno* respectivamente como sendo:

$$\varepsilon_\Omega = \bar{b} - b \quad \text{em } \Omega \quad (5.9)$$

e

$$\varepsilon_\Gamma = \bar{g} - g \quad \text{em } \Gamma. \quad (5.10)$$

Ou seja,

$$\varepsilon_\Omega = \mathbf{L}(\bar{u}) - \mathbf{L}(u) \quad \text{em } \Omega \quad (5.11)$$

e

$$\varepsilon_\Gamma = \mathbf{S}(\bar{u}) - \mathbf{S}(u) \quad \text{em } \Gamma. \quad (5.12)$$

Usando o fato de que  $\mathbf{L}(u) = b$  e  $\mathbf{S}(u) = g$  podemos escrever:

$$\varepsilon_\Omega = \mathbf{L}(\bar{u}) - b \quad \text{em } \Omega \quad (5.13)$$

e

$$\varepsilon_\Gamma = \mathbf{S}(\bar{u}) - g \quad \text{em } \Gamma. \quad (5.14)$$

Utilizando uma solução aproximada tal como a definida em (5.3), somente  $\varepsilon_\Omega$  será diferente de zero se a série for truncada em um número finito.

Observe que a idéia básica do *Método dos Resíduos Ponderados* é tomar  $\varepsilon_\Omega$  tão pequeno quanto possível em  $\Omega$  (o que equivale a tomar  $\bar{u}$  tão próximo de  $u$  quanto seja possível). Logo o erro entre as funções  $\bar{u}$  e  $u$  pode ser escrito como:

$$\Delta u = \bar{u} - u \quad (5.15)$$

Sendo  $\bar{u}$  dado por (5.3) temos:

$$\Delta u = \beta + \sum_{n=1}^N \alpha_n \phi_n - u \rightarrow 0 \quad (5.16)$$

Observe que não é suficiente encontrar uma função  $\bar{u}$  que mais se aproxima de  $u$ . Precisamos fazer com que a operação de  $\mathbf{L}$  sobre  $\bar{u}$  seja também próxima da operação de  $\mathbf{L}$  sobre  $u$ , de tal forma que tanto o erro  $\Delta u$  quanto o erro  $\varepsilon_\Omega$  seja minimizado.

Como  $\bar{u}$  pode oscilar para valores de  $\bar{b}$  abaixo e acima de  $b$  devemos minimizar o erro de forma quadrática, para garantir a melhor aproximação e a convergência possível da série. Portanto,

$$\delta \int_{\Omega} \varepsilon_\Omega^2 d\Omega = \int_{\Omega} \delta(\varepsilon_\Omega^2) d\Omega = 0 \quad (5.17)$$

Logo

$$\delta \int_{\Omega} \varepsilon_\Omega^2 d\Omega = \int_{\Omega} 2\varepsilon_\Omega \delta(\varepsilon_\Omega) d\Omega = 0 \quad (5.18)$$

Chamando de  $w_l$  a uma função peso do tipo dada por:

$$\delta w_l = \delta \varepsilon_\Omega = \frac{d\varepsilon_\Omega}{d\Omega} d\Omega = \nabla \varepsilon_\Omega \cdot \hat{s} d\Omega \quad (5.19)$$

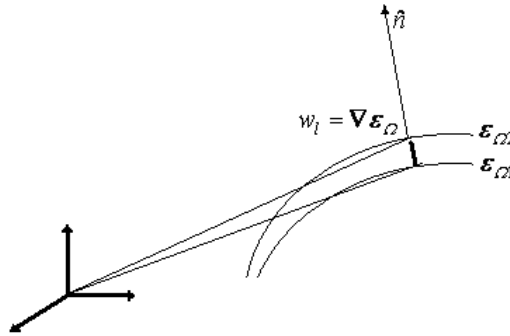


Figura - 5. 1. Ortogonalidade das funções  $w_l$  e  $\varepsilon_\Omega$ .

Pois certamente a integral acima será nula quando a função  $w_l = d\varepsilon_\Omega / d\Omega$  for ortogonal a  $\varepsilon_\Omega$ . Portanto a função peso  $w_l$  deve ser de tal forma que:

$$w_l = \nabla \varepsilon_\Omega \cdot \hat{s} \quad (5.20)$$

logo

$$\int_{\Omega} \varepsilon_{\Omega} w_l d\Omega = \int_{\Omega} \varepsilon_{\Omega} \nabla \varepsilon_{\Omega} d\Omega = 0 \quad (5.21)$$

Substituindo (5.13) em (5.21) temos a definição de um conjunto de funções de ponderação  $w_l$  ( $l = 1, 2, \dots, N$ ) o erro é distribuído da seguinte maneira (a integral indicada é efetuada  $N$  vezes):

$$\int_{\Omega} [\mathbf{L}(u) - b] w_l d\Omega = \int_{\Omega} \varepsilon_{\Omega} w_l d\Omega = 0 \quad (5.22)$$

onde  $\varepsilon_{\Omega} = \mathbf{L}(u) - b \neq 0$ .

Substituindo (5.3) em (5.22), tem-se:

$$\int_{\Omega} w_l \left\{ \mathbf{L}(\beta) + \sum_{n=1}^N \alpha_n \mathbf{L}(\phi_n) - b \right\} d\Omega = 0, \quad l = 1, 2, 3, \dots, N \quad (5.23)$$

Rearranjando os termos da equação (5.23) temos:

$$\sum_{n=1}^N \alpha_n \int_{\Omega} w_l \mathbf{L}(\phi_n) d\Omega = \int_{\Omega} w_l [b - \mathbf{L}(\beta)] d\Omega, \quad (5.24)$$

Sendo o número de *funções de ponderação* igual ao de *Funções de Forma*, os coeficientes  $\alpha_n$  são obtidos após a solução do sistema de equações:

$$\underset{\sim}{K} \underset{\sim}{\alpha} = \underset{\sim}{f} \quad (5.25)$$

Na qual os elementos da matriz  $\underset{\sim}{K}$  e do vetor  $\underset{\sim}{f}$  são definidos como:

$$K_{ln} = \int_{\Omega} w_l \mathbf{L}(\phi_n) d\Omega \quad (5.26)$$

e

$$f_l = \int_{\Omega} w_l [b - \mathbf{L}(\beta)] d\Omega, \quad (5.27)$$

Observação: As *funções de ponderação* devem constituir um *conjunto linearmente independente*, no *espaço vetorial de funções*.

## 5.4 – Variações do Método por Diferentes Funções de Ponderação

Dependendo do conjunto de *funções de ponderação* adotado, um esquema correspondente de resíduos ponderados é obtido. Os mais comuns são:

### 5.4.1 - Método da Colocação

A equação diferencial é satisfeita em um determinado número de pontos, denominados *pontos de colocação*.

Se a equação diferencial é satisfeita,  $\varepsilon_\Omega = 0$ . Após a imposição da condição  $\varepsilon_\Omega = 0$ , nos  $N$  pontos seleccionados, um sistema de equações é obtido, no qual as incógnitas são os parâmetros  $\alpha_n$ . Este método equivale a adotar, como *funções de ponderação*  $w_l$ ; a *função Delta de Dirac* nos pontos  $x = x_l$ , isto é:

$$w_l(x) = \delta(x - x_l). \quad (5.28)$$

Os elementos  $K_{ln}$  e  $f_l$  são definidos como:

$$K_{ln} = \int_{\Omega} \underbrace{\delta(x - x_l)}_{w_l(x)} \mathbf{L}(\phi_n(x)) d\Omega = \mathbf{L}(\phi_n(x_l)) d\Omega \quad (5.29)$$

e

$$f_l = \int_{\Omega} \delta(x - x_l) [b - \mathbf{L}(\beta)] d\Omega = [b - \mathbf{L}(\beta)]|_{x=x_l}, \quad (5.30)$$

Neste método temos que o erro no domínio é nulo, logo:

$$\varepsilon_\Omega = 0 \Rightarrow w_l(x) = \delta(x - x_l). \quad (5.31)$$

Onde, conforme (5.13), nós já havíamos visto que a definição do erro no domínio,  $\varepsilon_\Omega$  é dado por:

$$\varepsilon_\Omega = \mathbf{L}(\bar{u} - b) = \mathbf{L}\left(\underbrace{\beta + \sum_n \alpha_n \phi_n(x_l)}_{\bar{u}}\right) - b \neq 0. \quad (5.32)$$

E, portanto

$$\varepsilon_\Omega|_{x_l} = \mathbf{L}(\bar{u}|_{x_l} - b|_{x_l}) = \mathbf{L}\left(\underbrace{\beta|_{x_l} + \sum_n \alpha_n \phi_n(x_l)}_{\bar{u}}\right) - b|_{x_l} \neq 0. \quad (5.33)$$

### 5.4.2 – Exemplos de solução usando Método da Colocação

1) Resolver a seguinte equação diferencial usando o Método dos Resíduos Ponderados

$$\frac{d^2 u}{dx^2} - u = 0. \quad (5.34)$$

onde

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=1} = 1. \quad (5.35)$$

utilizando o *Método da Colocação*, com um e dois parâmetros.

#### Solução

Vamos encontrar uma solução aproximada do tipo:

$$\bar{u} = \beta + \alpha\phi. \quad (5.36)$$

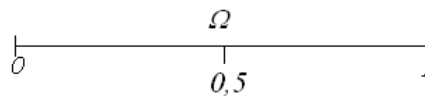
Adotando  $\phi_i = x^i$ , tem-se:

$$u = \bar{u} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \phi_i \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (5.37)$$

as funções  $\beta$  e  $\phi$  que satisfazem as *condições de contorno* são:

$$\beta = x \quad e \quad \phi|_{x=0} = \phi|_{x=1} = 0 \Rightarrow \phi = x(x-1). \quad (5.38)$$

No intervalo ou domínio  $\Omega = [0;1]$



Logo,

$$\bar{u}(x) = x + \alpha x(x-1). \quad (5.39)$$

O erro  $\varepsilon_\Omega$  é dado por:

$$\varepsilon_\Omega = \frac{d^2 \bar{u}(x)}{dx^2} - \bar{u} - 0 = 0. \quad (5.40)$$

onde

$$\varepsilon_{\Omega} = \frac{d^2 \bar{u}(x)}{dx^2} - \bar{u} = 2\alpha - (x + \alpha(x^2 - x)). \quad (5.41)$$

ou

$$\varepsilon_{\Omega} = -x - \alpha(x^2 - x - 2). \quad (5.42)$$

Como só há um parâmetro, a *sentença de resíduos ponderados* é escrita como:

$$\int_0^1 w \varepsilon_{\Omega} dx = 0, \quad (5.43)$$

para que o erro seja nulo em alguns pontos especiais, chamados *pontos de colocação*.

Adotando como ponto de colocação o ponto  $x = 1/2$ , tem-se:

$$w(x) = \delta(x - \frac{1}{2}). \quad (5.44)$$

Portanto, se somente um parâmetro é utilizado para  $\bar{u}$ , isto é, se  $\bar{u}(x) = x + \alpha x(x - 1)$ , para  $0 \leq x \leq 1$  a *sentença de resíduos ponderados* é:

$$\int_0^1 w \varepsilon_{\Omega} dx = \int_0^1 \delta(x - \frac{1}{2}) \varepsilon_{\Omega} dx = 0. \quad (5.45)$$

Então

$$\int_0^1 w \varepsilon_{\Omega} dx = \int_0^1 \delta(x - \frac{1}{2}) [-x - \alpha(x^2 - x - 2)] dx = 0. \quad (5.46)$$

Integrando e resolvendo para  $\alpha$ , temos:

$$[-x - \alpha(x^2 - x - 2)] \Big|_{x=1/2} \alpha = 0. \quad (5.47)$$

Substituindo os limites de integração temos;

$$[x^2 - x - 2] \Big|_{x=1/2} \alpha = -\frac{1}{2}. \quad (5.48)$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\left[ \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 2 \right] \alpha &= -\frac{1}{2} \\
\left[ \frac{1-2-8}{4} \right] \alpha &= -\frac{1}{2} \\
\Rightarrow -\frac{9}{4} \alpha &= -\frac{1}{2} \\
\alpha &= \frac{2}{9}
\end{aligned} \tag{5.49}$$

Portanto a solução aproximada  $\bar{u}(x)$  é:

$$\bar{u} = x + \frac{2}{9}x(x-1). \tag{5.50}$$

2) Adotando  $n = 2$ , isto é com dois parâmetros,  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ , pode-se fazer:

$$\bar{u} = \beta + \alpha_1 \phi_1 + \alpha_2 \phi_2. \tag{5.51}$$

Com

$$\begin{aligned}
\phi_1 &= x(x-1); \phi_1(x=0) = \phi_1(x=1) = 0 \\
\phi_2 &= x^2(x-1); \phi_2(x=0) = \phi_2(x=1) = 0
\end{aligned} \tag{5.52}$$

No domínio  $\Omega$  dado pelo intervalo  $[0;1]$ . Dividindo este intervalo em dois valores iguais para termos pontos igualmente espaçados, temos:

$$\begin{array}{c}
\Omega \\
\hline
\begin{array}{ccccccc}
| & & | & & | & & | \\
0 & & 1/3 & & 2/3 & & 1
\end{array}
\end{array}$$

Logo, quando se adota

$$\bar{u} = x + \alpha_1 x(x-1) + \alpha_2 x^2(x-1). \tag{5.53}$$

Então:

$$\frac{d^2 \bar{u}}{dx^2} = 2\alpha_1 + (6x-2)\alpha_2. \tag{5.54}$$

O erro  $\varepsilon_\Omega$  é dado por:



$$\varepsilon_{\Omega} = \frac{d^2 \bar{u}(x)}{dx^2} - \bar{u} - 0 \neq 0. \quad (5.55)$$

substituindo  $\bar{u}(x)$  de (5.53) e (5.54) em (5.55) tem-se:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\Omega} &= \frac{d^2 \bar{u}(x)}{dx^2} - \bar{u} = 2\alpha_1 + (6x-2)\alpha_2 - (x + \alpha_1 x(x-1) + \alpha_2 x^2(x-1)) = \\ &= -x - \alpha_1(x^2 - x - 2) - \alpha_2(x^3 - x^2 - 6x + 2) \end{aligned} \quad (5.56)$$

ou

$$\varepsilon_{\Omega} = -x + \begin{bmatrix} -(x^2 - x - 2) & -(x^3 - x^2 - 6x + 2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}. \quad (5.57)$$

A sentença de resíduos ponderados pode ser escrita como:

$$\int_0^1 \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \varepsilon_{\Omega} dx = 0, \quad (5.58)$$

para que o erro seja nulo em alguns pontos especiais, chamados *pontos de colocação*.

Adotando como pontos de colocação os valores  $x = 1/3$  e  $x = 2/3$ , obtém-se:

$$\int_0^1 \begin{bmatrix} \delta(x - \frac{1}{3}) \\ \delta(x - \frac{2}{3}) \end{bmatrix} \varepsilon_{\Omega} dx = 0. \quad (5.59)$$

Portanto, as sentenças de resíduos ponderados são:

$$\int_0^1 \begin{bmatrix} \delta(x - 1/3) \\ \delta(x - 2/3) \end{bmatrix} (-x) dx + \int_0^1 \begin{bmatrix} \delta(x - 1/3) \\ \delta(x - 2/3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -(x^2 - x - 2) & -(x^3 - x^2 - 6x + 2) \end{bmatrix} dx \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.60)$$

Ou na forma matricial

$$\begin{bmatrix} \int_0^1 (-x) \delta(x - 1/3) dx \\ \int_0^1 (-x) \delta(x - 2/3) dx \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \int_0^1 -(x^2 - x - 2) \delta(x - 1/3) dx & \int_0^1 -(x^3 - x^2 - 6x + 2) \delta(x - 1/3) dx \\ \int_0^1 -(x^2 - x - 2) \delta(x - 2/3) dx & \int_0^1 -(x^3 - x^2 - 6x + 2) \delta(x - 2/3) dx \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.61)$$

Após a integração dos termos, e impondo-se os limites de integração, obtém-se o sistema de equação:

$$\begin{bmatrix} (x^2 - x - 2)\Big|_{x=1/3} & (x^3 - x^2 - 6x + 2)\Big|_{x=1/3} \\ (x^2 - x - 2)\Big|_{x=2/3} & (x^3 - x^2 - 6x + 2)\Big|_{x=2/3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/3 \\ -2/3 \end{bmatrix} \quad (5.62)$$

ou

$$\begin{bmatrix} -\frac{20}{9} & -\frac{2}{27} \\ -\frac{20}{9} & -\frac{58}{27} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/3 \\ -2/3 \end{bmatrix} \quad (5.63)$$

Resolvendo para  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  temos:

$$\alpha_1 = \frac{81}{560} \quad ; \quad \alpha_2 = \frac{9}{56} \quad (5.64)$$

Portanto, a solução aproximada  $\bar{u}(x)$  é:

$$\bar{u} = x + \frac{81}{560}x(x-1) + \frac{9}{56}x^2(x-1). \quad (5.65)$$

3) Resolver a equação diferencial anterior por Resíduos Ponderados, com o *Método da Colocação*, utilizando três parâmetros, tentando usar a solução aproximada do tipo:

$$\bar{u} = x + \alpha_1 x(x-1) + \alpha_2 x^2(x-1)^2. \quad (5.66)$$

As soluções aproximadas podem ser comparadas com a solução exata:

$$u(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e - e^{-1}}. \quad (5.67)$$

Comparando as soluções por meio da Tabela - V. 1.

Tabela - V. 1. Comparação entre as soluções das equação diferencial resolvida por Resíduos Ponderados pelo Método da Colocação

$x$	0	1/3	1/2	2/3	1
$u(x)$	0	0,288921	0,443410	0,610243	1
$u_1(x)$	0	0,283951	0,444444	0,617284	1
$u_2(x)$	0	0,289286	0,443750	0,610714	1

Pergunta:

***Porque o erro nos pontos de colocação não é nulo? Como aparentemente prescrevia a teoria:***

Resposta:

No *Método da Colocação*, o erro da função não é nulo

$$\Delta u = u - \bar{u} \neq 0. \quad (5.68)$$

E sim o erro na equação diferencial:

$$\mathbf{L}[u(x)] - \mathbf{L}[\bar{u}(x)] = 0. \quad (5.69)$$

Nos pontos de colocação, ou seja:

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{d^2 u}{dx^2} - u \right] - \left[ \frac{d^2 \bar{u}}{dx^2} - \bar{u} \right] = 0 \\ & = \frac{d^2(u - \bar{u})}{dx^2} \Big|_{x=x_i} - (u - \bar{u}) \Big|_{x=x_i} = 0 \end{aligned} \quad (5.70)$$

Nos pontos de colocação,  $x_i$ , dados por:

$$x_1 = \frac{1}{3} \quad ; \quad x_2 = \frac{1}{2} \quad ; \quad x_3 = \frac{2}{3}. \quad (5.71)$$

### 5.4.3 - Método da Colocação por Subdomínios Modificado

Este também é um tipo de método de colocação por subdomínios no qual se impõe a condição de que a integral do erro é nula nos  $N$  sub-domínios,  $\Omega_l$ , nos quais o domínio original,  $\Omega$ , foi dividido. Se a equação diferencial é satisfeita,  $\varepsilon_\Omega = 0$ . Após a imposição da condição  $\varepsilon_\Omega = 0$ , nos  $N$  pontos selecionados, um sistema de equações é obtido, no qual as incógnitas são os parâmetros  $\alpha_n$ . Este método equivale a adotar, como *funções de ponderação*  $w_l$ ; a *função Delta de Dirac* nos pontos  $x = x_l$ , isto é: o que equivale a definir  $w_l$  como:

$$w_l(x) = \begin{cases} \delta(x - x_l) & \text{se } x \in \Omega_l \\ 0 & \text{se } x \notin \Omega_l \end{cases}, \quad (5.72)$$

Os elementos  $K_{ln}$  e  $f_l$  são definidos como:

$$K_{ln} = \int_{\Omega_l} \delta(x - x_l) \mathbf{L}(\phi_n(x)) d\Omega = \mathbf{L}(\phi_n(x_l)) \quad (5.73)$$

e

$$f_l = \int_{\Omega_l} \delta(x - x_l) [b - \mathbf{L}(\beta)] d\Omega = [b - \mathbf{L}(\beta)]|_{x=x_l}, \quad (5.74)$$

Neste método temos que o erro nos subdomínios é nulo, logo:

$$\varepsilon_{\Omega_l} = 0 \Rightarrow w_l = \delta(x - x_l). \quad (5.75)$$

Onde, conforme (5.13), nós havíamos visto que a definição do erro no domínio,  $\varepsilon_\Omega$  é dado por:

$$\varepsilon_{\Omega_l} = \mathbf{L}(\bar{u}) - b = \mathbf{L}(\beta + \sum_n \alpha_n \phi_n(x_l)) - b \neq 0. \quad (5.76)$$

E, portanto

$$\varepsilon_{\Omega_l}|_{x_l} = \mathbf{L}(\bar{u})|_{x_l} - b|_{x_l} = \mathbf{L}(\beta)|_{x_l} + \sum_n \alpha_n \mathbf{L}[\phi_n(x_l)] - b|_{x_l} \neq 0. \quad (5.77)$$

A equação diferencial é satisfeita em um determinado número de pontos, denominados pontos de colocação.

#### *5.4.4 – Exemplos de solução usando Colocação por Subdomínios Modificado*

### 5.4.3 - Método da Colocação por Subdomínios

Este também é um método de colocação no qual se impõe a condição de que a integral do erro é nula nos  $N$  sub-domínios,  $\Omega_l$ , nos quais o domínio original,  $\Omega$ , foi dividido, o que equivale a definir  $w_l$  como:

$$w_l = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \Omega_l \\ 0 & \text{se } x \notin \Omega_l \end{cases}, \quad (5.78)$$

Os elementos  $K_{ln}$  e  $f_l$  são definidos como:

$$K_{ln} = \int_{\Omega_l} \mathbf{L}(\phi_n(x)) d\Omega \quad (5.79)$$

e

$$f_l = \int_{\Omega_l} [b - \mathbf{L}(\beta)] d\Omega, \quad (5.80)$$

### 5.4.4 – Exemplos de solução usando Método da Colocação por Subdomínios

1) Resolver a seguinte equação diferencial usando o Método dos Resíduos Ponderados

$$\frac{d^2 u}{dx^2} - u = 0. \quad (5.81)$$

onde

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=1} = 1. \quad (5.82)$$

Utilizando o *Método da Colocação por Subdomínios*, com um e dois parâmetros.

*Solução*

Vamos encontrar uma solução aproximada do tipo:

$$\bar{u} = \beta + \alpha \phi. \quad (5.83)$$

Adotando  $\phi_i = x^i$ , tem-se:

$$u = \bar{u} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \phi_i \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (5.84)$$

as funções  $\beta$  e  $\phi$  que satisfazem as *condições de contorno* são:

$$\beta = x \quad e \quad \phi|_{x=0} = \phi|_{x=1} = 0 \Rightarrow \phi = x(x-1). \quad (5.85)$$

No intervalo ou domínio  $\Omega = [0; 1]$ .

logo

$$\bar{u}(x) = x + \alpha x(x-1). \quad (5.86)$$

O erro  $\varepsilon_\Omega$  é dado por:

$$\varepsilon_\Omega = \frac{d^2 \bar{u}(x)}{dx^2} - \bar{u} - 0 \neq 0. \quad (5.87)$$

onde

$$\varepsilon_\Omega = \frac{d^2 \bar{u}(x)}{dx^2} - \bar{u} = 2\alpha - (x + \alpha(x^2 - x)). \quad (5.88)$$

ou

$$\varepsilon_\Omega = -x - \alpha(x^2 - x - 2). \quad (5.89)$$

Como só há um parâmetro, a sentença de resíduos ponderados é escrita como:

$$\int_0^1 w \varepsilon_\Omega dx = 0, \quad (5.90)$$

para que o erro seja nulo em alguns pontos especiais, chamados *pontos de colocação*.

Adotando como ponto de colocação o ponto  $x = 1$  tem-se:

$$w(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \notin [0; 1] \\ 1 & \text{se } x \in [0; 1] \end{cases}. \quad (5.91)$$

Portanto, se somente um parâmetro é utilizado para  $\bar{u}$ , isto é, se  $\bar{u}(x) = x + \alpha x(x-1)$ , então  $w=1$  para  $0 \leq x \leq 1$  a *sentença de resíduos ponderados* é escrito como:

$$\int_0^1 w \varepsilon_{\Omega} dx = \int_0^1 1 \varepsilon_{\Omega} dx = 0. \quad (5.92)$$

Então:

$$\int_0^1 w \varepsilon_{\Omega} dx = \int_0^1 1(-x - \alpha(x^2 - x - 2)) dx = 0. \quad (5.93)$$

Integrando e resolvendo para  $\alpha$ :

$$\alpha \left( -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x \right) \Big|_0^1 = \frac{x^2}{2} \Big|_0^1. \quad (5.94)$$

Substituindo os limites de integração temos;

$$\begin{aligned} \alpha \left( -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 2 \right) &= \frac{1}{2} \\ \alpha \left( \frac{-2+3+12}{6} \right) &= \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (5.95)$$

Logo

$$\frac{13}{6} \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{3}{13}. \quad (5.96)$$

Portanto, a solução aproximada  $\bar{u}(x)$  é:

$$\bar{u}(x) = x + \frac{3}{13} x(x-1). \quad (5.97)$$

2) Adotando  $n = 2$ , isto é com dois parâmetros  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ , pode-se fazer:

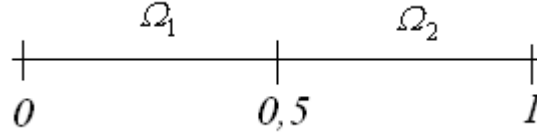
$$\bar{u} = \beta + \alpha_1 \phi_1(x) + \alpha_2 \phi_2(x). \quad (5.98)$$

com as seguintes condições de contorno:



$$\begin{aligned}\phi_1 &= x(x-1); \phi_1(x=0) = \phi_1(x=1) = 0 \\ \phi_2 &= x^2(x-1); \phi_2(x=0) = \phi_2(x=1) = 0.\end{aligned}\quad (5.99)$$

Utilizando o ponto  $x = 1/2$  para dividir o domínio  $\Omega = [0;1]$  em dois intervalos ou sub-domínios,  $\Omega_1 = [0;1/2]$  e  $\Omega_2 = [1/2;1]$ :



Logo, quando se adota,

$$\bar{u}(x) = x + \alpha_1 x(x-1) + \alpha_2 x^2(x-1). \quad (5.100)$$

Então:

$$\frac{d^2 \bar{u}}{dx^2} = 2\alpha_1 + (6x-2)\alpha_2. \quad (5.101)$$

O erro  $\varepsilon_\Omega$  é dado por:

$$\varepsilon_\Omega = \frac{d^2 \bar{u}(x)}{dx^2} - \bar{u} - 0 \neq 0. \quad (5.102)$$

substituindo  $\bar{u}(x)$  de (5.100) e (5.101) em (5.102) tem-se:

$$\varepsilon_\Omega = \frac{d^2 \bar{u}(x)}{dx^2} - \bar{u} = 2\alpha_1 + (6x-2)\alpha_2 - (x + \alpha_1 x(x-1) + \alpha_2 x^2(x-1)). \quad (5.103)$$

ou

$$\varepsilon_\Omega = -x - \alpha_1(x^2 - x - 2) - \alpha_2(x^3 - x^2 - 6x + 2). \quad (5.104)$$

As *sentenças de resíduos ponderados* podem ser escritas como:

$$\int_0^{1/2} w \varepsilon_\Omega dx = 0 \quad ; \quad \int_{1/2}^1 w \varepsilon_\Omega dx = 0, \quad (5.105)$$

para que o erro seja nulo nos pontos especiais, chamados de *pontos de colocação*, para cada subdomínio.

Adotando-se como *ponto de colocação* o ponto  $x = 1/2$  tem-se:

$$w(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \notin [0;1] \\ 1 & \text{se } x \in [0;1] \end{cases}. \quad (5.106)$$

para pontos fora do domínio e pontos dentro do domínio, respectivamente.

Portanto, as *sentenças de resíduos ponderados* são:

$$\int_0^{1/2} w\varepsilon_{\Omega} dx = \int_0^{1/2} 1 \left[ -x - \alpha_1(x^2 - x - 2) - \alpha_2(x^3 - x^2 - 6x + 2) \right] dx = 0. \quad (5.107)$$

e

$$\int_{1/2}^1 w\varepsilon_{\Omega} dx = \int_{1/2}^1 1 \left[ -x - \alpha_1(x^2 - x - 2) - \alpha_2(x^3 - x^2 - 6x + 2) \right] dx = 0. \quad (5.108)$$

Ou, na forma matricial, temos:

$$\begin{bmatrix} \int_0^{1/2} (x^2 - x - 2) dx & \int_0^{1/2} (x^3 - x^2 - 6x + 2) dx \\ \int_{1/2}^1 (x^2 - x - 2) dx & \int_{1/2}^1 (x^3 - x^2 - 6x + 2) dx \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \int_0^{1/2} x dx \\ \int_{1/2}^1 x dx \end{bmatrix} \quad (5.109)$$

Após a integração dos termos e impondo os limites de integração, obtém-se o seguinte sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} \left( \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x \right) \Big|_0^{1/2} & \left( \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 6\frac{x^2}{2} + 2x \right) \Big|_0^{1/2} \\ \left( \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x \right) \Big|_{1/2}^1 & \left( \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 6\frac{x^2}{2} + 2x \right) \Big|_{1/2}^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{x^2}{2} \Big|_0^{1/2} \\ \frac{x^2}{2} \Big|_{1/2}^1 \end{bmatrix} \quad (5.110)$$

ou

$$\begin{bmatrix} -\frac{13}{12} & \frac{43}{192} \\ -\frac{13}{12} & -\frac{251}{192} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{8} \\ -\frac{3}{8} \end{bmatrix} \quad (5.111)$$

Resolvendo para  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  temos:

$$\alpha_1 = \frac{95}{637} \quad ; \quad \alpha_2 = \frac{8}{49} \quad (5.112)$$

Portanto, a solução aproximada  $\bar{u}(x)$  é:

$$\bar{u} = x + \frac{95}{637}x(x-1) + \frac{8}{49}x^2(x-1). \quad (5.113)$$

3) Resolver a equação diferencial anterior por Resíduos Ponderados, com o *Método da Colocação por Subdomínios*, utilizando três parâmetros, tentando usar a solução aproximada do tipo:

$$\bar{u} = x + \alpha_1 x(x-1) + \alpha_2 x^2(x-1)^2. \quad (5.114)$$

#### 5.4.5 - Método dos Momentos

As funções de ponderação são potências de  $x$  e são definidas como:

$$w_l = x^{l-1} \quad l = 1, 2, \dots, N \quad (5.115)$$

Os elementos  $K_{ln}$  e  $f_l$  são definidos como:

$$K_{ln} = \int_{\Omega} x^{l-1} \mathbf{L}(\phi_n(x)) d\Omega \quad (5.116)$$

e

$$f_l = \int_{\Omega} x^{l-1} [b - \mathbf{L}(\beta)] d\Omega, \quad (5.117)$$

#### 5.4.6 – Exemplos de solução usando o Método dos Momentos

1) Resolver a seguinte equação diferencial pelo Método dos Resíduos Ponderados

$$\frac{d^2 u}{dx^2} - u = 0. \quad (5.118)$$

onde

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=1} = 1. \quad (5.119)$$

Utilizando o *Método dos Momentos*, com um e dois parâmetros.

#### Solução

Vamos encontrar uma solução aproximada do tipo:

$$\bar{u} = \beta + \alpha \phi. \quad (5.120)$$

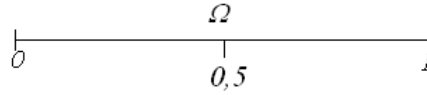
Adotando  $\phi_i = x^i$ , tem-se:

$$u = \bar{u} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \phi_i \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (5.121)$$

as funções  $\beta$  e  $\phi$  que satisfazem as *condições de contorno* são:

$$\beta = x \quad e \quad \phi|_{x=0} = \phi|_{x=1} = 0 \Rightarrow \phi = x(x-1). \quad (5.122)$$

No intervalo ou no domínio  $\Omega = [0;1]$



logo

$$\bar{u}(x) = x + \alpha x(x-1). \quad (5.123)$$

O erro  $\varepsilon_\Omega$  é dado por:

$$\varepsilon_\Omega = \frac{d^2 \bar{u}(x)}{dx^2} - \bar{u} \neq 0. \quad (5.124)$$

onde

$$\varepsilon_\Omega = \frac{d^2 \bar{u}(x)}{dx^2} - \bar{u} = 2\alpha - (x + \alpha(x^2 - x)). \quad (5.125)$$

ou

$$\varepsilon_\Omega = -x - \alpha(x^2 - x - 2). \quad (5.126)$$

Como só há um parâmetro, a *sentença de resíduos ponderados* é escrita como:

$$\int_0^1 w \varepsilon_\Omega dx = 0, \quad (5.127)$$

para que o erro seja mínimo.

Quando se utiliza para a solução aproximada somente um parâmetro, o *método dos momentos* é igual ao *método da colocação por subdomínios*. Pois o momento de 1ª ordem, vale:

$$w_1(x) = 1. \quad (5.128)$$

Portanto, se somente um parâmetro é utilizado para  $\bar{u}$ , isto é, se  $\bar{u}(x) = x + \alpha x(x-1)$ , então  $w=1$  para  $0 \leq x \leq 1$  a *sentença de resíduos ponderados* é escrita como:

$$\int_0^1 w \varepsilon_{\Omega} dx = \int_0^1 1 \varepsilon_{\Omega} dx = 0. \quad (5.129)$$

Então:

$$\int_0^1 w \varepsilon_{\Omega} dx = \int_0^1 1(-x - \alpha(x^2 - x - 2))dx = 0. \quad (5.130)$$

Integrando e resolvendo para  $\alpha$  :

$$\alpha \left( -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x \right) \Bigg|_0^1 = \frac{x^2}{2} \Bigg|_0^1. \quad (5.131)$$

Substituindo os limites de integração temos;

$$\begin{aligned} \alpha \left( -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 2 \right) &= \frac{1}{2} \\ \alpha \left( \frac{-2+3+12}{6} \right) &= \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (5.132)$$

Logo

$$\frac{13}{6} \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{3}{13}. \quad (5.133)$$

Portanto, a solução aproximada  $\bar{u}(x)$  é:

$$\bar{u}(x) = x + \frac{3}{13} x(x-1). \quad (5.134)$$

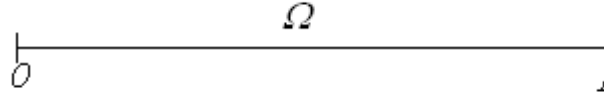
2) Adotando  $n = 2$ , isto é com dois parâmetros  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ , pode-se fazer:

$$\bar{u} = \beta + \alpha_1 \phi_1(x) + \alpha_2 \phi_2(x). \quad (5.135)$$

com as seguintes condições de contorno

$$\begin{aligned} \phi_1 &= x(x-1); \phi_1(x=0) = \phi_1(x=1) = 0 \\ \phi_2 &= x^2(x-1); \phi_2(x=0) = \phi_2(x=1) = 0 \end{aligned} \quad (5.136)$$

No intervalo ou domínio  $\Omega = [0;1]$ :



Logo, quando se adota,

$$\bar{u}(x) = x + \alpha_1 x(x-1) + \alpha_2 x^2(x-1). \quad (5.137)$$

Então

$$\frac{d^2 \bar{u}(x)}{dx^2} = 2\alpha_1 + (6x-2)\alpha_2. \quad (5.138)$$

O erro  $\varepsilon_\Omega$  é dado por:

$$\varepsilon_\Omega = \frac{d^2 \bar{u}(x)}{dx^2} - \bar{u} - 0 \neq 0. \quad (5.139)$$

substituindo  $\bar{u}(x)$  de (5.137) e (5.138) em (5.139) tem-se:

$$\varepsilon_\Omega = \frac{d^2 \bar{u}(x)}{dx^2} - \bar{u} = 2\alpha_1 + (6x-2)\alpha_2 - (x + \alpha_1 x(x-1) + \alpha_2 x^2(x-1)). \quad (5.140)$$

ou

$$\varepsilon_\Omega = -x - \alpha_1(x^2 - x - 2) - \alpha_2(x^3 - x^2 - 6x + 2). \quad (5.141)$$

As *sentenças de resíduos ponderados* são escritas como:

$$\int_0^1 w_1 \varepsilon_\Omega dx = 0 \quad ; \quad \int_0^1 w_2 \varepsilon_\Omega dx = 0. \quad (5.142)$$

Para que o erro seja mínimo, ou seja:

Adotando-se os momentos dados por:

$$w_1(x) = 1 \quad ; \quad w_2(x) = x. \quad (5.143)$$

Portanto, as *sentenças de resíduos ponderados* são:

$$\int_0^1 1 \varepsilon_\Omega dx = 0 \quad ; \quad \int_0^1 x \varepsilon_\Omega dx = 0. \quad (5.144)$$

e

$$\int_0^1 \begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix} (-x) dx + \int_{1/2}^1 \begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix} \left[ -(x^2 - x - 2) - (x^3 - x^2 - 6x + 2) \right] dx \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.145)$$

Ou, na forma matricial, temos:

$$\begin{bmatrix} \int_0^1 (x^2 - x - 2) dx & \int_0^1 (x^3 - x^2 - 6x + 2) dx \\ \int_0^1 (x^3 - x^2 - 2x) dx & \int_0^1 (x^4 - x^3 - 6x^2 + 2x) dx \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_0^1 x dx \\ \int_0^1 x^2 dx \end{bmatrix} \quad (5.146)$$

Após a integração dos termos e impondo os limites de integração, obtém-se o seguinte sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} \left( \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x \right) \Big|_0^1 & \left( \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 6\frac{x^2}{2} + 2x \right) \Big|_0^1 \\ \left( \frac{x^4}{3} - \frac{x^3}{2} - \frac{2x^2}{2} \right) \Big|_0^1 & \left( \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4} - 6\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left( \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 \\ \left( \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 \end{bmatrix} \quad (5.147)$$

ou

$$\begin{bmatrix} -\frac{13}{6} & -\frac{13}{12} \\ -\frac{13}{12} & -\frac{21}{20} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} \quad (5.148)$$

Resolvendo para  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  temos:

$$\alpha_1 = \frac{118}{793} \quad ; \quad \alpha_2 = \frac{10}{61} \quad (5.149)$$

Portanto, a solução aproximada  $\bar{u}(x)$  é:

$$\bar{u} = x + \frac{118}{793} x(x-1) + \frac{10}{61} x^2(x-1). \quad (5.150)$$



3) Resolver a equação diferencial anterior por Resíduos Ponderados, com o *Método dos Momentos*, utilizando três parâmetros, tentando usar a solução aproximada do tipo:

$$\bar{u} = x + \alpha_1 x(x-1) + \alpha_2 x^2(x-1)^2. \quad (5.151)$$

#### 5.4.7 - Método de Galerkin

As funções de ponderação são as próprias funções,  $\phi_n$ , Então, os elementos  $K_{ln}$  e  $f_l$  são definidos como:

$$K_{ln} = \int_{\Omega} \phi_l \mathbf{L}(\phi_n(x)) d\Omega \quad (5.152)$$

e

$$f_l = \int_{\Omega} \phi_l [b - \mathbf{L}(\beta)] d\Omega, \quad (5.153)$$

possuindo a seguinte vantagem:

Vantagem do método: Geralmente a matriz  $\tilde{K}$  do sistema de equações é simétrica. Isto diminui o tempo de processamento de matrizes grandes e consequentemente o custo computacional, pelo fato de algumas operações serem iguais.

#### 5.4.8 – Exemplos de solução usando o Método de Galerkin

1) Resolver a seguinte equação diferencial usando o *Método dos Resíduos Ponderados*:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} - u = 0 \quad (5.154)$$

onde

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=1} = 1. \quad (5.155)$$

Utilizando o *Método de Galerkin*, com um e dois parâmetros.

#### Solução

Vamos encontrar uma solução aproximada do tipo:

$$\bar{u} = \beta + \alpha \phi. \quad (5.156)$$

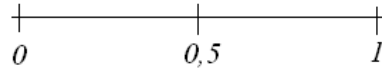
Adotando  $\phi_i = x^i$ , tem-se:

$$u = \bar{u} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \phi_i \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (5.157)$$

as funções  $\beta$  e  $\phi$  que satisfazem as *condições de contorno* são:

$$\beta = x \quad e \quad \phi|_{x=0} = \phi|_{x=1} = 0 \Rightarrow \phi = x(x-1). \quad (5.158)$$

No intervalo ou domínio  $\Omega = [0; 1]$ .



logo se

$$\bar{u}(x) = x + \alpha x(x-1). \quad (5.159)$$

O erro  $\varepsilon_\Omega$  é dado por:

$$\varepsilon_\Omega = \frac{d\bar{u}(x)}{dx^2} - \bar{u} - 0 \neq 0. \quad (5.160)$$

onde

$$\varepsilon_\Omega = \frac{d\bar{u}(x)}{dx^2} - \bar{u} = 2\alpha - (x + \alpha(x^2 - x)). \quad (5.161)$$

ou

$$\varepsilon_\Omega = -x - \alpha(x^2 - x - 2). \quad (5.162)$$

Como só há um parâmetro, a *sentença de resíduos ponderados* é escrita como:

$$\int_0^1 w_1 \varepsilon_\Omega dx = 0. \quad (5.163)$$

para que o erro seja mínimo.

Adotando como função de ponderação a própria função  $\phi(x)$ , ou seja:

$$w(x) = \phi(x) = x(x-1). \quad (5.164)$$

Portanto, se somente um parâmetro é utilizado para  $\bar{u}(x)$ , isto é, se  $\bar{u}(x) = x + \alpha x(x-1)$  então para o intervalo  $0 \leq x \leq 1$  a *sentença de resíduos ponderados* (5.163), para o problema é escrita como:

$$\int_0^1 w \varepsilon_{\Omega} dx = \int_0^1 \phi(x) \varepsilon_{\Omega} dx = 0. \quad (5.165)$$

Então:

$$\int_0^1 x(x-1) \left[ -x + \alpha(x^2 - x - 2) \right] dx = 0. \quad (5.166)$$

ou

$$\int_0^1 x(x-1)(x^2 - x - 2) dx [\alpha] = - \int_0^1 x(x-1)x dx. \quad (5.167)$$

e

$$\int_0^1 (x^4 - x^3 - 2x^2 - x^3 + x^2 + 2x) dx [\alpha] = - \int_0^1 x(x-1)x dx. \quad (5.168)$$

logo

$$\int_0^1 (x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x) [\alpha] dx = - \int_0^1 (x^3 - x^2) dx. \quad (5.169)$$

Integrando e resolvendo para  $\alpha$  :

$$\alpha \left( \frac{x^5}{5} - 2\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + 2\frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 [\alpha] = - \left( \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1. \quad (5.170)$$

Substituindo os limites de integração temos;

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{5} - \frac{2}{4} - \frac{1}{3} + \frac{2}{2} \right) [\alpha] &= - \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{3} \right) \\ \left( \frac{12 - 30 - 20 + 60}{60} \right) [\alpha] &= \frac{-3 + 4}{12}. \end{aligned} \quad (5.171)$$

Logo

$$\frac{22}{60} \alpha = \frac{1}{12} \Rightarrow \alpha = \frac{5}{22}. \quad (5.172)$$

Portanto, a solução aproximada  $\bar{u}(x)$  é:

$$\bar{u}(x) = x + \frac{5}{22}x(x-1). \quad (5.173)$$

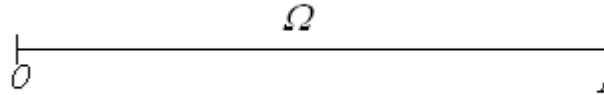
2) Adotando  $n = 2$ , isto é com dois parâmetros,  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ , pode-se fazer:

$$\bar{u} = \beta + \alpha_1\phi_1 + \alpha_2\phi_2. \quad (5.174)$$

com as seguintes condições de contorno:

$$\begin{aligned} \phi_1 &= x(x-1); \phi_1(x=0) = \phi_1(x=1) = 0 \\ \phi_2 &= x^2(x-1); \phi_2(x=0) = \phi_2(x=1) = 0 \end{aligned} \quad (5.175)$$

No domínio  $\Omega$  dado pelo intervalo  $\Omega = [0;1]$ :



Logo, quando se adota

$$\bar{u}(x) = x + \alpha_1 \underbrace{x(x-1)}_{\phi_1} + \alpha_2 \underbrace{x^2(x-1)}_{\phi_2}. \quad (5.176)$$

Então:

$$\frac{d^2\bar{u}}{dx^2} = 2\alpha_1 + (6x-2)\alpha_2. \quad (5.177)$$

O erro  $\varepsilon_\Omega$  é dado por:

$$\varepsilon_\Omega = \frac{d^2\bar{u}(x)}{dx^2} - \bar{u}(x) - 0 \neq 0. \quad (5.178)$$

substituindo  $\bar{u}(x)$  de (5.176) e (5.177) em (5.178) tem-se:

$$\begin{aligned} \varepsilon_\Omega &= \frac{d^2\bar{u}(x)}{dx^2} - \bar{u} = 2\alpha_1 + (6x-2)\alpha_2 - (x + \alpha_1x(x-1) + \alpha_2x^2(x-1)) = \\ &= -x - \alpha_1(x^2 - x - 2) - \alpha_2(x^3 - x^2 - 6x + 2) \end{aligned} \quad (5.179)$$

ou

$$\varepsilon_{\Omega} = -x + \begin{bmatrix} -(x^2 - x - 2) & -(x^3 - x^2 - 6x + 2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}. \quad (5.180)$$

Adotando-se como *funções de ponderação* as próprias funções,  $\phi_l(x)$ , ou seja:

$$\begin{aligned} w_1(x) &= \phi_1(x) = x(x-1) \\ w_2(x) &= \phi_2(x) = x^2(x-1) \end{aligned} \quad (5.181)$$

Portanto, a *sentença de resíduos ponderados* pode ser escrita como:

$$\int_0^1 \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \varepsilon_{\Omega} dx = \int_0^1 \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} \varepsilon_{\Omega} dx = 0, \quad (5.182)$$

ou

$$\int_0^1 \phi_1 \varepsilon_{\Omega} dx ; \int_0^1 \phi_2 \varepsilon_{\Omega} dx = 0, \quad (5.183)$$

Resultando em

$$\int_0^1 \begin{bmatrix} x(x-1) \\ x^2(x-1) \end{bmatrix} (-x) dx + \int_0^1 \begin{bmatrix} x(x-1) \\ x^2(x-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -(x^2 - x - 2) & -(x^3 - x^2 - 6x + 2) \end{bmatrix} dx \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.184)$$

Ou, na forma matricial, temos:

$$\begin{bmatrix} \int_0^1 (x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x) dx & \int_0^1 (x^5 - 2x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 2x) dx \\ \int_0^1 (x^5 - 2x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 2x) dx & \int_0^1 (x^6 - 2x^5 - 5x^4 + 8x^3 - 2x^2) dx \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_0^1 (x^3 - x^2) dx \\ \int_0^1 (x^4 - x^3) dx \end{bmatrix} \quad (5.185)$$

Após a integração termos e impondo os limites de integração, obtém-se o seguinte sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} \left( \frac{x^5}{5} - \frac{2x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} \right) \Big|_0^1 & \left( \frac{x^6}{6} - \frac{2x^5}{5} - \frac{5x^4}{4} + \frac{8x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} \right) \Big|_0^1 \\ \left( \frac{x^6}{6} - \frac{2x^5}{5} - \frac{5x^4}{4} + \frac{8x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} \right) \Big|_0^1 & \left( \frac{x^7}{7} - \frac{2x^6}{6} - \frac{5x^5}{5} + \frac{8x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} \right) \Big|_0^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \left( \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 \\ \left( \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^1 \end{bmatrix} \quad (5.186)$$

ou

$$\begin{bmatrix} \frac{11}{30} & \frac{11}{60} \\ \frac{11}{60} & \frac{1}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{12} \\ \frac{1}{20} \end{bmatrix} \quad (5.187)$$

Resolvendo para  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  temos:

$$\alpha_1 = \frac{69}{473} \cong e \quad \alpha_2 = \frac{7}{43} \cong \quad (5.188)$$

Portanto, a solução aproximada  $\bar{u}(x)$  é:

$$\bar{u} = x + \frac{69}{473} + \frac{7}{473}x^2(x-1). \quad (5.189)$$

3) Resolver a equação diferencial anterior por Resíduos Ponderados, com o *Método de Galerkin*, utilizando três parâmetros, tentando usar a solução aproximada do tipo:

$$\bar{u} = x + \alpha_1 x(x-1) + \alpha_2 x^2(x-1)^2. \quad (5.190)$$

As *soluções aproximadas* podem ser comparadas com a *solução analítica* exata dada por:

$$u(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^1 - e^{-1}}. \quad (5.191)$$

Nos pontos:  $x = 1/3$ ;  $x = 1/2$  e  $x = 2/3$ .

Comparando as soluções aproximadas obtidas com um parâmetro, por meio da Tabela - V. 2.

Tabela - V. 2. Comparação entre as soluções das equação diferencial resolvida por Resíduos Ponderados por Diferentes Métodos para  $n = 1$ .

$x$	$u(x)$	Colocação	Subdomínio	Momentos	Galerkin
0	0	0	0	0	0
1/3	0,288921	0,283951	0,28051	0,282051	0,282828
1/2	0,443410	0,444444	0,442308	0,442308	0,443182
2/3	0,610243	0,617284	0,611111	0,611111	0,616161
1	1	1	1	1	1

Comparando as soluções aproximadas obtidas com dois parâmetros, por meio da Tabela - V. 3.

Tabela - V. 3. Comparação entre as soluções das equação diferencial resolvida por Resíduos Ponderados por Diferentes Métodos para  $n = 2$ .

$x$	$u(x)$	Colocação	Subdomínio	Momentos	Galerkin
0	0	0	0	0	0
1/3	0,288921	0,289286	0,288098	0,288123	0,288858
1/2	0,443410	0,443750	0,442308	0,442308	0,443182
2/3	0,610243	0,610714	0,609338	0,609313	0,610132
1	1	1	1	1	1

Como exercício pode-se comparar as soluções as soluções aproximadas obtidas com três parâmetros, por meio da Tabela - V. 4.

Tabela - V. 4. Comparação entre as soluções das equação diferencial resolvida por Resíduos Ponderados por Diferentes Métodos para  $n = 3$ .



$x$	$u(x)$	Colocação	Subdomínio	Momentos	Galerkin
$0$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$
$1/3$					
$1/2$					
$2/3$					
$1$	$1$	$1$	$1$	$1$	$1$

#### 5.4.9 - Método de Galerkin Modificado

As funções de ponderação são as derivadas das próprias funções,  $\phi_n$ , Então, os elementos  $K_{ln}$  e  $f_l$  são definidos como:

$$K_{ln} = \int_{\Omega} \phi_l' \mathbf{L}(\phi_n(x)) d\Omega \quad (5.192)$$

e

$$f_l = \int_{\Omega} \phi_l' [b - \mathbf{L}(\beta)] d\Omega, \quad (5.193)$$

#### 5.4.10 – Exemplos de solução usando o Método de Galerkin Modificado

## 5.5 – Forma Fraca do Método de Resíduos Ponderados

Se, na solução aproximada,  $\bar{u}$ , não se inclui uma função  $\beta$  que atenda às *condições de contorno* do problema, isto é, se  $\bar{u}$  é definido como:

$$\bar{u} = \sum_{n=1}^N \alpha_n \phi_n \cong u \quad (5.194)$$

A substituição de  $\bar{u}$  em (5.1) e em (5.2) gera dois erros ou resíduos:

$$\varepsilon_{\Omega} = \mathbf{L}(u) = b \quad \text{em } \Omega \quad (5.195)$$

e

$$\varepsilon_{\Gamma} = \mathbf{S}(u) = g \quad \text{em } \Gamma \quad (5.196)$$

Se a solução aproximada  $\bar{u}$ , tal como definida em (5.194), não satisfaz as *condições de contorno*, então o resíduo  $\varepsilon_{\Gamma}$  também deve ser ponderado no contorno e a sentença de resíduos ponderados é escrita como:

$$\int_{\Omega} w_l \varepsilon_{\Omega} d\Omega + \int_{\Gamma} \bar{w}_l \varepsilon_{\Gamma} d\Gamma = 0 \quad l = 1, 2, 3, \dots, N \quad (5.197)$$

O sistema de equações gerado por (5.197) também pode ser representado como:

$$\underset{\sim}{K} \underset{\sim}{\alpha} = \underset{\sim}{f} \quad (5.198)$$

onde, agora

$$K_{ln} = \int_{\Omega} w_l \mathbf{L}(\phi_n) d\Omega + \int_{\Gamma} \bar{w}_l \mathbf{S}(\phi_n) d\Gamma \quad (5.199)$$

e

$$f_l = \int_{\Omega} w_l b d\Omega + \int_{\Gamma} \bar{w}_l g d\Gamma, \quad (5.200)$$

Se o problema estudado apresentar *condições de contorno* naturais, a avaliação das integrais

$$\int_{\Gamma} w_l \varepsilon_{\Gamma} d\Gamma, \quad (5.201)$$

que aparecem na equação (5.197) pode apresentar dificuldades.

Para evitar essas dificuldades adicionais à determinação das soluções aproximadas, o termo que contém o operador  $\mathbf{L}$ , na integral envolvendo o erro  $\varepsilon_\Omega$ , na equação (5. 197), é dada por:

$$\int_{\Omega} w_l \varepsilon_\Omega d\Omega = \int_{\Omega} w_l [\mathbf{L}(\bar{u}) - b] d\Omega, \quad (5. 202)$$

pode ser integrado por partes e reescrito genericamente como:

$$\int_{\Omega} w_l \mathbf{L}(\bar{u}) d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{C}(w_l) \mathbf{D}(\bar{u}) d\Omega + \int_{\Gamma} w_l \mathbf{E}(\bar{u}) d\Gamma, \quad (5. 203)$$

onde  $\mathbf{C}, \mathbf{D}$  e  $\mathbf{E}$  são operadores diferenciais lineares de ordem inferior à do operador  $\mathbf{L}$ .

Substituindo (5. 203) em (5. 197), encontra-se:

$$\int_{\Omega} \mathbf{C}(w_l) \mathbf{D}(\bar{u}) d\Omega - \int_{\Gamma} w_l b d\Gamma + \int_{\Gamma} [\bar{w}_l \varepsilon_\Gamma + w_l \mathbf{E}(\bar{u})] d\Gamma = 0. \quad (5. 204)$$

A equação (5. 204) é usualmente denominada *Forma Fraca* da sentença de resíduos ponderados.

Na integral de contorno em (5. 204) é possível eliminar a integral que envolve *condições de contorno* naturais mediante uma escolha apropriada da função de ponderação  $\bar{w}_l$ .

Pode-se ainda, adotar funções que satisfaçam as equações diferenciais em  $\Omega$ , mas que aproximam as *condições de contorno*, gerando as chamadas *formulações de contorno*. Nesse caso, a *sentença de resíduos ponderados* é escrita como:

$$\int_{\Gamma} \bar{w}_l \varepsilon_\Gamma d\Gamma = 0, \quad (5. 205)$$

Uma vez que, o erro  $\varepsilon_\Omega$  é nulo, ou seja:

$$\varepsilon_\Omega = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{L}(\phi_i) - b = 0. \quad (5. 206)$$

Se as funções  $\bar{w}_l$  e  $\phi$  forem as mesmas tem-se o método de TREFFTZ.

Pode-se também prosseguir integrando por partes a primeira integral de domínio à esquerda da equação (5. 203) até que todas as derivadas de  $\bar{u}$  sejam “transferidas” para  $w_l$ . Desta forma, pode-se então considerar que a *função de ponderação* é uma solução da *equação*

diferencial homogênea, cujo operador está aplicado a  $w_l$ , ao invés de  $u$ , ou que  $w_l$  é a solução da equação diferencial singular correspondente,  $w_l$  é uma função de Green. Nesse caso, a função de ponderação é representada por  $w$ . Assim, partindo-se da expressão:

$$\int_{\Omega} w_l \mathbf{L}(\bar{u}) d\Omega, \quad (5.207)$$

chega-se a

$$\int_{\Omega} \bar{u} \mathbf{M}(w) d\Omega, \quad (5.208)$$

Se  $\mathbf{L} = \mathbf{M}$ , diz-se que  $\mathbf{L}$  é um operador auto-adjunto. Quando  $\mathbf{M}(w) = \delta(x - \xi)$  tem-se o Método dos Elementos de Contorno. Veremos isso com mais clareza no Capítulo VII – Método dos Elementos de Contorno.

## 5. 6 –Exemplos de Soluções da Forma Fraca do Método de Resíduos Ponderados

1) Resolver usando o método dos resíduos ponderados a seguinte equação diferencial:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} - u = 0 \quad (5.209)$$

onde

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=1} = 1. \quad (5.210)$$

Utilizar uma solução aproximada que atenda as condições de contorno, empregando o Método de Galerkin para dois parâmetros.

*Solução*

Vamos encontrar uma solução aproximada do tipo:

$$\bar{u}(x) = \beta + \alpha_1 \phi_1 + \alpha_2 \phi_2. \quad (5.211)$$

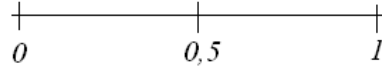
Adotando  $\phi_i = \sin(i\pi x)$ , tem-se:

$$u = \bar{u} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \phi_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i \text{sen}(i\pi x) \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (5.212)$$

As funções  $\beta$  e  $\phi$  que satisfazem as *condições de contorno* são:

$$\beta = x \quad e \quad \phi|_{x=0} = \phi|_{x=1} = 0 \Rightarrow \phi_1 = \text{sen}(\pi x); \phi_2 = \text{sen}(2\pi x). \quad (5.213)$$

No intervalo



Logo

$$\bar{u}(x) = x + \alpha_1 \underbrace{\text{sen}(\pi x)}_{\phi_1} + \alpha_2 \underbrace{\text{sen}(2\pi x)}_{\phi_2}. \quad (5.214)$$

O erro  $\varepsilon_\Omega$  é dado por:

$$\varepsilon_\Omega = \frac{d^2 \bar{u}(x)}{dx^2} - \bar{u} \neq 0. \quad (5.215)$$

ou

$$\varepsilon_\Omega = -x - \alpha_1(1 + \pi^2)\text{sen}(\pi x) - \alpha_2(1 + 4\pi^2)\text{sen}(2\pi x). \quad (5.216)$$

A sentença de resíduos ponderados é escrita como:

$$\int_0^1 w \varepsilon_\Omega dx = 0. \quad (5.217)$$

A sentença de resíduos ponderados (5. 197), para o problema por Galerkin é:

$$\int_0^1 \begin{bmatrix} \text{sen}(\pi x) \\ \text{sen}(2\pi x) \end{bmatrix} \varepsilon_\Omega dx = 0. \quad (5.218)$$

Então:

$$\int_0^1 \begin{bmatrix} \text{sen}(\pi x) \\ \text{sen}(2\pi x) \end{bmatrix} \left( x - \alpha_1(1 + \pi^2)\text{sen}(\pi x) - \alpha_2(1 + 4\pi^2)\text{sen}(2\pi x) \right) dx \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.219)$$

e

$$\int_0^1 \begin{bmatrix} \text{sen}(\pi x) \\ \text{sen}(2\pi x) \end{bmatrix} (-x) dx - \int_0^1 \begin{bmatrix} \text{sen}(\pi x) \\ \text{sen}(2\pi x) \end{bmatrix} [(1 + \pi^2) \text{sen}(\pi x) - (1 + 4\pi^2) \text{sen}(2\pi x)] dx \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.220)$$

Ou na forma matricial

$$\int_0^1 \begin{bmatrix} (1 + \pi^2) \text{sen}(\pi x) & (1 + 4\pi^2) \text{sen}(\pi x) \text{sen}(2\pi x) \\ (1 + 4\pi^2) \text{sen}(\pi x) \text{sen}(2\pi x) & (1 + 4\pi^2) \text{sen}^2(2\pi x) \end{bmatrix} dx \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = - \int_0^1 \begin{bmatrix} x \text{sen}(\pi x) \\ x \text{sen}(2\pi x) \end{bmatrix} dx. \quad (5.221)$$

$$\int_0^1 \text{sen}^2(\pi x) dx = + \int_0^1 \left( \frac{1}{2} - \frac{\cos(2\pi x)}{2} \right) dx = \left[ \frac{x}{2} - \frac{\text{sen}(2\pi x)}{4\pi} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{2}. \quad (5.222)$$

$$\int_0^1 \text{sen}^2(2\pi x) dx = + \int_0^1 \left( \frac{1}{2} - \frac{\cos(4\pi x)}{2} \right) dx = \left[ \frac{x}{2} - \frac{\text{sen}(4\pi x)}{8\pi} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{2}. \quad (5.223)$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \text{sen}(\pi x) \text{sen}(2\pi x) dx &= \frac{1}{2} \int_0^1 [-\cos(\pi + 2\pi)x + \cos(\pi - 2\pi)x] dx = \\ &= \frac{1}{2} \left[ -\frac{\text{sen}(3\pi)}{3\pi} - \frac{\text{sen}(\pi x)}{\pi} \right]_{x=0}^{x=1} = 0 \end{aligned} \quad (5.224)$$

como

$$\begin{aligned} \cos(a + b) &= \cos(a) \cos(b) - \text{sen}(a) \text{sen}(b) \\ \cos(a - b) &= \cos(a) \cos(b) + \text{sen}(a) \text{sen}(b) \end{aligned} \quad (5.225)$$

Logo,

$$\int_0^1 x \text{sen}(\pi x) dx = \frac{1}{\pi}. \quad (5.226)$$

$$\int_0^1 x \text{sen}(2\pi x) dx = -\frac{1}{2\pi}. \quad (5.227)$$

O sistema de equações resultante é:

$$\begin{bmatrix} \frac{(1+\pi^2)}{2} & 0 \\ 0 & \frac{(1+4\pi^2)}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\pi} \\ \frac{2}{\pi} \end{bmatrix} \quad (5.228)$$

Resolvendo para  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  temos:

$$\alpha_1 = -\frac{2}{\pi(1+\pi^2)} \quad ; \quad \alpha_2 = \frac{1}{\pi(1+4\pi^2)}. \quad (5.229)$$

Portanto,

$$\bar{u}(x) = x - \frac{2}{\pi(1+\pi^2)} \text{sen}(\pi x) + \frac{1}{\pi(1+4\pi^2)} \text{sen}(2\pi x). \quad (5.230)$$

$$\bar{u}\left(\frac{1}{3}\right) = 0,287151 \quad ; \quad \bar{u}\left(\frac{1}{2}\right) = 0,441431 \quad ; \quad \bar{u}\left(\frac{2}{3}\right) = 0,609134. \quad (5.231)$$

2) Resolver usando o método dos resíduos ponderados a seguinte equação diferencial:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} - u = 0 \quad (5.232)$$

onde

$$u|_{x=0} = 0 \quad , \quad u|_{x=1} = 1. \quad (5.233)$$

Utilizando uma solução aproximada que não atenda as *condições de contorno* do problema, empregando o *Método de Galerkin* para três parâmetros.

*Solução:*

O contorno se reduz aos pontos  $x = 0$  e  $x = 1$  e o erro  $\varepsilon_\Gamma$  é representado como:

$$\varepsilon_\Gamma = \mathbf{S}(u) - g \neq 0 \quad \begin{cases} \varepsilon_\Gamma|_{x=0} = \bar{u} - 0 \neq 0 \\ \varepsilon_\Gamma|_{x=1} = \bar{u} - 1 \neq 0 \end{cases} \text{ em } \Gamma \quad (5.234)$$

A sentença de resíduos ponderados é escrita como:



$$\int_0^1 w \varepsilon_{\Omega} dx + [\bar{w}_l \varepsilon_{\Gamma}]_{x=0} + [\bar{w}_l \varepsilon_{\Gamma}]_{x=1} = 0. \quad (5.235)$$

Pode-se adotar:

$$\bar{u} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \phi_i \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (5.236)$$

com  $\phi_i = x^{i-1}$

Se  $n = 3$ , então,

$$\bar{u}(x) = x + \alpha_1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2. \quad (5.237)$$

Então:

$$\varepsilon_{\Omega} = \frac{d^2 \bar{u}(x)}{dx^2} - \bar{u} \neq 0. \quad (5.238)$$

fica

$$\varepsilon_{\Gamma} = 2\alpha_3 - (\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2) = -[1 \quad x \quad (x^2 - 2)] \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}. \quad (5.239)$$

Substituindo (5.239) em (5.235) e adotando  $\bar{w}_l = -w_l$ , a sentença de resíduos ponderados é escrita como:

$$-\int_0^1 \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \end{bmatrix} [1 \quad x \quad (x^2 - 2)] dx \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} - \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \end{bmatrix} [1 \quad x \quad x^2] \right\} \bigg|_{x=0} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} - \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \end{bmatrix} [1 \quad x \quad x^2] \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} - 1 \right\} \bigg|_{x=1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.240)$$

ou

$$-\int_0^1 \begin{bmatrix} 1 & x & (x^2 - 2) \\ x & x^2 & (x^3 - 2x) \\ x^2 & x^3 & (x^4 - 2x^2) \end{bmatrix} dx \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} [1 \quad 1 \quad 1] \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.241)$$

Integrando e impondo os limites, obtém-se o sistema de equações:

$$-\begin{bmatrix} x & \frac{x^2}{2} & (\frac{x^3}{3}-2x) \\ \frac{x^2}{2} & \frac{x^3}{3} & (\frac{x^4}{4}-\frac{2x^2}{2}) \\ \frac{x^3}{3} & \frac{x^4}{4} & (\frac{x^5}{5}-\frac{2x^3}{3}) \end{bmatrix}_0^1 \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.242)$$

Substituindo e agrupando os termos semelhantes:

$$\left\{ -\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & -\frac{7}{15} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.243)$$

Finalmente:

$$\begin{bmatrix} 3 & \frac{3}{2} & -\frac{2}{3} \\ \frac{3}{2} & \frac{4}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{4}{3} & \frac{5}{4} & \frac{8}{15} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.244)$$

Resolvendo para  $\alpha_1$  ;  $\alpha_2$  e  $\alpha_3$  temos:

$$\alpha_1 = -\frac{9}{133} \cong \quad ; \quad \alpha_2 = \frac{84}{133} \cong \quad ; \quad \alpha_3 = \frac{30}{133} \cong \quad (5.245)$$

Portanto, a solução aproximada é:

$$\bar{u} = \frac{1}{333} (9 + 84x + 30x^2). \quad (5.246)$$

e

$$\bar{u}(x=0) = 0,068 \quad ; \quad \bar{u}(x=1) = 0,917. \quad (5.247)$$

Se  $\bar{w}_l = w_l$

$$\left\{ - \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & -\frac{7}{15} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.248)$$

e:

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{8}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & \frac{7}{4} \\ \frac{2}{3} & \frac{3}{4} & \frac{22}{15} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.249)$$

Resolvendo para  $\alpha_1$  ;  $\alpha_2$  e  $\alpha_3$  temos:

$$\alpha_1 = -\frac{63}{655} \cong \quad ; \quad \alpha_2 = \frac{636}{655} \cong \quad ; \quad \alpha_3 = \frac{30}{131} \cong \quad (5.250)$$

Portanto, a solução aproximada é:

$$\bar{u} = \frac{1}{655} (-63 + 636x + 150x^2). \quad (5.251)$$

e

$$\bar{u}(x=0) = -0,0962 \quad ; \quad \bar{u}(x=1) = 1,1038. \quad (5.252)$$

## 5.7 – Exercícios e Problemas

### 5.7.1 - Exemplos de Solução usando o Método de Galerkin

1) Resolver usando o *método dos resíduos ponderados* a seguinte equação diferencial:

$$\frac{d^2 \bar{u}}{dx^2} - u = 0. \quad (5.253)$$

onde

$$u|_{x=0} = 0 \quad , \quad \left. \frac{d\bar{u}}{dx} \right|_{x=1} = 20. \quad (5.254)$$

*Solução:*

Adotando  $\phi_i = x^i$ , tem-se:

$$u = \bar{u} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \phi_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i x^i \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (5.255)$$

A sentença de resíduos ponderados (5.197), para o problema é:

$$\int_0^1 \left[ \frac{d^2 u}{dx^2} - \bar{u} \right] w_l dx + \left[ \left( \frac{d\bar{u}}{dx} - 20 \right) \bar{w}_l \right] \Big|_{x=1} = 0. \quad (5.256)$$

Observe que  $u(x=0) = 0 \Rightarrow \bar{u}|_{x=0} = \sum_{i=1}^n \alpha_i (x=0)^i = 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$  e  $\Omega = [0;1]$ . Ou

seja, note que a *condição de contorno essencial* em  $x = 0$  é atendida com a escolha de

$$\bar{u}|_{x=0} = \sum_{i=1}^n \alpha_i x^i = 0.$$

Integrando por partes o termo que envolve  $\frac{d^2 \bar{u}}{dx^2}$  encontra-se:

$$\int_0^1 \frac{d^2 \bar{u}}{dx^2} w_l dx = \bar{w}_l \frac{d\bar{u}}{dx} \Big|_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 \frac{d\bar{u}}{dx} \frac{dw_l}{dx} dx. \quad (5.257)$$

onde

$$\begin{aligned} a = w_l &\Rightarrow da = \frac{dw_l}{dx} dx \\ b = \frac{d\bar{u}}{dx} &\Rightarrow db = \frac{d^2 \bar{u}}{dx^2} dx \end{aligned} \quad (5.258)$$

Substituindo (5.257) em (5.256) temos:

$$-\int_0^1 \frac{d\bar{u}}{dx} \frac{dw_l}{dx} dx - \int_0^1 \bar{u} w_l dx + w_l \frac{d\bar{u}}{dx} \Big|_{x=1} - w_l \frac{d\bar{u}}{dx} \Big|_{x=0} + \left[ \underbrace{\bar{w}_l \left( \frac{d\bar{u}}{dx} - 20 \right)}_{\text{ponderação do erro para } x=1} \right] \Big|_{x=1} = 0. \quad (5.259)$$

Observe que o ultimo termo da expressão (5.259) é o termo de ponderação do erro para  $x = 1$ .

Nós podemos escolher  $w_l = 0$  para  $x = 0$  e  $w_l = -\bar{w}_l$  para  $x = 1$ .

Logo se

$$w_l \Big|_{x=1} = -\bar{w}_l \Big|_{x=1} \text{ e } w_l \Big|_{x=0} = 0, \quad (5.260)$$

A equação (5.259) se reduz a:

$$\int_0^1 \frac{d\bar{u}}{dx} \frac{dw_l}{dx} dx - \int_0^1 \bar{u} w_l dx = 20 w_l \Big|_{x=1}. \quad (5.261)$$

Adotando  $n = 2$ , então:

$$\bar{u} = \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 = [x \quad x^2] \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}. \quad (5.262)$$

e

$$\frac{d\bar{u}}{dx} = [1 \quad 2x] \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}. \quad (5.263)$$

Se

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ x^2 \end{bmatrix} \text{ então } \frac{d}{dx} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2x \end{bmatrix} \quad (5.264)$$

A sentença de resíduos ponderados é reescrita como:

$$\int_0^1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2x \end{bmatrix} [1 \quad 2x] dx \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} + \int_0^1 \begin{bmatrix} x \\ x^2 \end{bmatrix} [x \quad x^2] dx \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = 20 \begin{bmatrix} x \\ x^2 \end{bmatrix} \Big|_{x=1} \quad (5.265)$$

ou

$$\left\{ \int_0^1 \begin{bmatrix} 1 & 2x \\ 2x & 4x^2 \end{bmatrix} dx + \int_0^1 \begin{bmatrix} x^2 & x^3 \\ x^3 & x^4 \end{bmatrix} dx \right\} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = 20 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.266)$$

Integrando e impondo os limites, obtém-se o sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} 4/3 & 5/4 \\ 5/4 & 23/15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 20 \end{bmatrix} \quad (5.267)$$

Resolvendo para  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  temos:

$$\alpha_1 = \frac{4080}{347} \cong 11,7579 \quad e \quad \alpha_2 = \frac{1200}{347} \cong 3,4582 \quad (5.268)$$

Portanto, a solução aproximada é:

$$\bar{u} = 11,7579 + 3,4582x^2. \quad (5.269)$$

Calculando a derivada em  $x = 1$  para saber se a solução é boa:

$$\left. \frac{d\bar{u}}{dx} \right|_{x=1} = 18,674, \quad (5.270)$$

não é 20, mas chega perto.

2) Resolver o mesmo problema anterior para  $n = 3$ .

Adotando  $n = 3$ , então:

$$\bar{u} = \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 = \begin{bmatrix} x & x^2 & x^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}. \quad (5.271)$$

e

$$\frac{d\bar{u}}{dx} = \begin{bmatrix} 1 & 2x & 3x^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}. \quad (5.272)$$

Se

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix} \text{ então } \frac{d}{dx} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2x \\ 3x^2 \end{bmatrix} \quad (5.273)$$

A sentença de resíduos ponderados é reescrita como:

$$\int_0^1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2x \\ 3x^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2x & 3x^2 \end{bmatrix} dx \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} + \int_0^1 \begin{bmatrix} x \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & x^2 & x^3 \end{bmatrix} dx \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = 20 \begin{bmatrix} x \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix}_{x=1} \quad (5.274)$$

ou

$$\left\{ \int_0^1 \begin{bmatrix} 1 & 2x & 3x^2 \\ 2x & 4x^2 & 6x^3 \\ 3x^2 & 6x^3 & 9x^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} dx + \int_0^1 \begin{bmatrix} x^2 & x^3 & x^4 \\ x^3 & x^4 & x^5 \\ x^4 & x^5 & x^6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} dx \right\} = 20 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.275)$$

Integrando e impondo os limites, obtém-se o sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} x & x^2 & x^3 \\ x^2 & \frac{4}{3}x^3 & \frac{6}{4}x^4 \\ x^3 & \frac{6}{4}x^4 & \frac{9}{5}x^5 \end{bmatrix}_{x=1} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{x^3}{3} & \frac{x^4}{4} & \frac{x^5}{5} \\ \frac{4}{x^4} & \frac{5}{x^5} & \frac{6}{x^6} \\ \frac{5}{x^5} & \frac{6}{x^6} & \frac{7}{x^7} \end{bmatrix}_{x=1} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 20 \\ 20 \end{bmatrix} \quad (5.276)$$

Para  $x = 1$  temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{4}{3} & \frac{6}{4} \\ 1 & \frac{6}{4} & \frac{9}{5} \end{bmatrix}_{x=1} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \end{bmatrix}_{x=1} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 20 \\ 20 \end{bmatrix} \quad (5.277)$$

Logo

$$\begin{bmatrix} \frac{4}{3} & \frac{5}{4} & \frac{6}{5} \\ \frac{5}{4} & \frac{23}{15} & \frac{3}{5} \\ \frac{6}{5} & \frac{5}{3} & \frac{68}{35} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}_{x=1} = \begin{bmatrix} 20 \\ 20 \\ 20 \end{bmatrix} \quad (5.278)$$

Resolvendo para  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  temos:

$$\alpha_1 = \frac{30300}{2329} \cong 13,009 \quad e \quad \alpha_2 = \frac{-600}{2329} \cong -0,25762 \quad e \quad \alpha_3 = \frac{5775}{2329} \cong (5.279)$$

Portanto, a solução aproximada é:

$$\bar{u} = 13,009x - 0,25762x^2 + 2,4796x^3. \quad (5.280)$$

Calculando a derivada em  $x = 1$  para saber se a solução é boa:

$$\left. \frac{d\bar{u}}{dx} \right|_{x=1} = 13,009 - 0,51524x + 7,4337x^2, \quad (5.281)$$

Para  $x = 1$  temos:

$$\left. \frac{d\bar{u}}{dx} \right|_{x=1} = 13,009 - 0,51524 + 7,4337 = 19,92746, \quad (5.282)$$

não é 20, mas chega perto.



# *Capítulo – VI*

## MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

### *RESUMO*

Neste capítulo será visto a origem do Método dos Elementos Finitos. Este método se apresenta como uma alternativa ao Método Variacional e ao Método dos Resíduos Ponderados e por sua vez deu origem ao Método dos Elementos de Contorno.

### **6. 1 - Objetivos do capítulo**

- i) Entender a origem do Método dos Elementos Finitos
- ii) Saber aplicar o Método dos Elementos Finitos nas suas mais diferentes formas
- iii) Resolver problemas de equações diferenciais pertinentes ao método.
- iv)

### **6. 2 – Introdução**

A idéia básica do *Método dos Elementos Finitos* consiste em subdividir, inicialmente, o *domínio do problema*, em *subdomínios* de dimensões finitas tais que, o conjunto de todos os *subdomínios* seja igual ao *domínio original*. Em seguida, sobre cada subdomínio, isoladamente, adota-se um *comportamento aproximado*, local, para as *incógnitas do problema*, conforme esquematiza a Figura - 6. 1.

Em geral, esse *comportamento local* é descrito com o emprego de funções simples. A característica principal desse procedimento, então, consiste em utilizar aproximações locais nos subdomínios, nos quais o *domínio original* foi dividido, em vez de utilizar aproximações de caráter global. Para a obtenção de respostas cada vez melhores,

aumenta-se o número de *subdomínios*, mantendo-se o mesmo *comportamento local* já adotado em cada *subdomínio*, no lugar de se adotar funções de ordem maior na aproximação de caráter global. Os *subdomínios* são denominados *elementos finitos*.

Os *elementos finitos* são definidos por sua forma geométrica, pelas *funções de aproximação* adotadas e pelos tipos de problemas para os quais foram desenvolvidos. Cada elemento possui um número determinado de *pontos nodais*, ou nós, que podem ser internos ou externos. Os nós externos fazem a conexão com os elementos vizinhos.

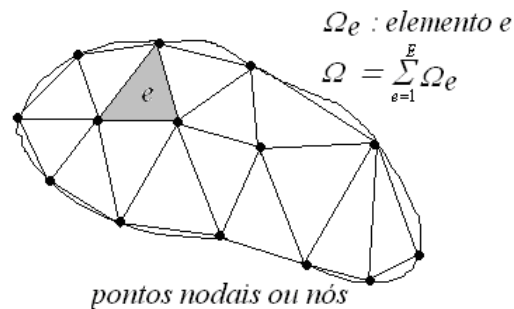


Figura - 6. 1. Rede de pontos nodais do Domínio,  $\Omega$  e dos Subdomínios,  $\Omega_e$ .

Nos nós comuns aos diferentes elementos, o valor das variáveis do problema é o mesmo, independentemente do elemento que esteja sendo considerado.

Após a definição da *malha de elementos finitos* e do tipo de elemento (linear, triangular, quadrático, etc), as *matrizes características* correspondentes a cada elemento podem ser formadas e, em seguida, agrupadas, formando o *sistema global de equações*. A solução deste sistema fornece os valores das incógnitas nos pontos nodais. Através do *comportamento aproximado local*, as *incógnitas do problema*, em qualquer *ponto do elemento*, são calculadas em função dos valores nodais das mesmas incógnitas nos pontos nodais já conhecidos, isto é, as aproximações locais são funções de interpolação, por meio dos quais os valores das incógnitas em qualquer ponto pertencente ao elemento finito são calculados em função dos valores nodais.

### 6.2.1 –A origem do Método dos Elementos Finitos

O trabalho de Turner, Cough, Martin e Topp “Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures” publicado em 1956 no *Journal of Aeronautical Sciences*. Vol. 23, pag. 805-823, é reconhecido como um dos primeiros a apresentar os fundamentos do *Método dos Elementos Finitos*.

As bases teóricas do método foram mais bem definidas no início da década de 60 com o estudo mais aprofundado dos *Métodos Energéticos* e de *Técnicas Variacionais*.

## 6.3 – Variações dos Modelos no Método de Elementos Finitos

Para problemas de Mecânica dos Sólidos, podem ser identificados quatro formulações, ou modelos básicos, que pertencem ao “Enfoque Variacional” do método:

### 6.3.1 - Modelo Compatível

Baseia-se no *Princípio da Energia Potencial Mínima*. Sobre cada elemento é adotado um *campo de deslocamento*, escolhidos de tal maneira que haja *continuidade de deslocamentos* e, eventualmente, de suas derivadas, entre os elementos. As incógnitas são os *deslocamentos nos pontos nodais*.

### 6.3.2 - Modelo de Equilíbrio

Baseia-se no *Princípio da Energia Complementar Mínima*. Sobre cada elemento é adotado um *campo de tensões em equilíbrio*; o *equilíbrio entre elementos* também é mantido. As incógnitas são as *tensões nos pontos nodais*. É um modelo pouco utilizado na prática.

### 6.3.3 - Modelo Híbrido

Há dois tipos. O primeiro tipo se baseia em um *Princípio de Energia Complementar Mínima Modificado*. No interior de cada elemento é adotado um *campo de tensões em equilíbrio* e, no contorno de cada elemento, um *campo de deslocamento* é adotado, devendo haver *compatibilidade de deslocamento* entre elementos vizinhos. As incógnitas são os *deslocamentos nodais*. Aplicações Práticas: Problemas de estado plano de tensão ou deslocamento e de flexão de placas.

O segundo tipo se baseia em um *Princípio de Energia Potencial Mínima Modificado*. No interior de cada elemento é adotado um *campo de deslocamentos* e, no contorno de cada elemento, um *campo de tensões* é adotado, devendo haver *equilíbrio de tensões (forças de superfícies)* entre elementos vizinhos. As incógnitas são as *tensões*, ou *forças de superfícies* nos pontos nodais. Esse modelo é pouco utilizado. Vantagem do Modelo Híbrido: Os resultados são mais precisos.

### 6.3.4 - Modelo Misto

Baseia-se em um *Princípio Variacional Generalizado*, como o *Princípio de Reissner*. Sobre cada elemento são adotados, simultaneamente e independentemente, *campos de tensões e de deslocamentos*. As incógnitas são as *tensões* (ou *forças de superfícies*) e os *deslocamentos nos pontos nodais*. Vantagem do Modelo Misto: Deslocamentos e tensões são determinados com a mesma precisão.

No final da década de 70 foram introduzidas formulações baseadas na aplicação localizada do *Método de Galerkin*, o que possibilitou que o *Método dos Elementos Finitos* fosse empregado na solução de problemas que não possuam *Formulação Variacional*. De uma maneira geral, qualquer um dos *Métodos de Resíduos Ponderados* pode ser utilizado no cálculo pelo *Método dos Elementos Finitos*.

Tabela - VI. 1. Quadro Resumo das Diferentes Formulações do Método de Elementos Finitos

Método	Princípio Utilizado	Elementos	Incógnitas nos pontos nodais	Condições	Vantagens	Aplicações Práticas
Compatível	<i>Princípio da Energia Potencial Mínima</i>	Campo de Deslocamento	Deslocamentos	Continuidade nos Deslocamentos e suas derivadas		
Equilíbrio	<i>Princípio da Energia Complementar Mínima</i>	Campo de Tensão em equilíbrio	Tensão	Equilíbrio		pouco utilizado
Híbrido do 1º Tipo	<i>Princípio da Energia Complementar Mínima Modificado</i>	Campo de Tensão em equilíbrio no domínio e campo de Deslocamentos no contorno	Deslocamentos	Compatibilidade nos Deslocamentos entre os elementos vizinhos	Resultados mais precisos	Problemas de flexões em placas
Híbrido do 2º Tipo	<i>Princípio da Energia Potencial Mínima Modificado</i>	Campo de Deslocamentos no domínio e Campo de Tensões no contorno	Tensões ou forças de superfícies	Equilíbrio de Tensões (ou forças de superfícies) entre elementos vizinhos	Resultados Mais precisos	
Misto	<i>Princípio da Variacional Generalizado (Reissner)</i>	Campo Tensões e Deslocamentos no domínio	Tensões (ou forças de superfícies) e os Deslocamentos		Deslocamentos e Tensões determinados com mesma precisão	

## 6. 4 – Definição Matemática e Desenvolvimento do Método

O *Método de Elementos Finitos* teve sua origem nos *Métodos Variacionais aproximados*, mas a partir do *Método dos Resíduos Ponderados*, este vínculo passou a ser não

mais necessário. Portanto, por ser esta última situação de abrangência mais geral, para o *Método de Elementos Finitos*, começaremos a representá-lo, em primeiro lugar, a partir do *Método de Resíduos Ponderados*, apesar de não ser a ordem histórica de evolução do método. Depois trataremos o *Enfoque Variacional do Método de Elementos Finitos*.

#### 6.4.1 – Aproximação do Problema Contínuo pela Discretização do Domínio

Seja um problema unidimensional dado pela seguinte *equação diferencial*:

$$\mathbf{L}(u) = b \quad \text{em } \Omega, \quad (6.1)$$

sujeito as *condições de contorno*

$$\mathbf{S}(u) = g \quad \text{em } \Gamma, \quad (6.2)$$

onde  $\mathbf{L}$  e  $\mathbf{S}$  são *operadores lineares*.

Este problema será aproximado por uma função do tipo:

$$u \cong \bar{u} = \sum_{m=1}^{M+1} u_m N_m \quad \text{em } \Omega, \quad (6.3)$$

cujo o domínio contínuo,  $\Omega$  será substituído por um domínio equivalente, discreto conforme mostra a Figura - 6. 2.

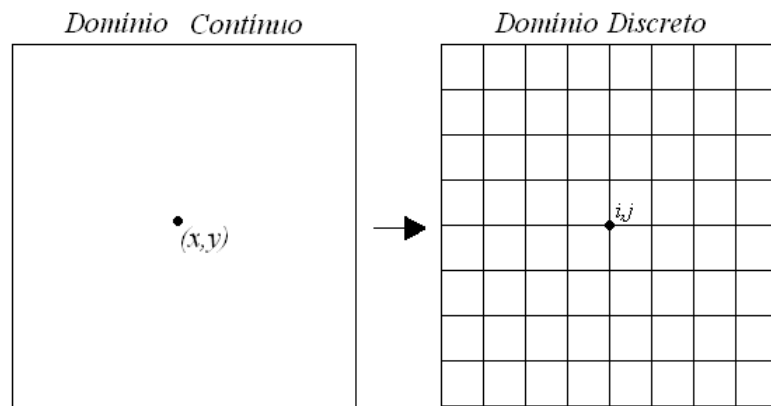


Figura - 6. 2. Mudança do domínio contínuo de coordenadas (x,y) para o discreto de coordenadas (i,j)

Logo, no domínio discretizado, teremos:

$$\mathbf{L}(\bar{u}) = \bar{b} \quad \text{em } \Omega, \quad (6.4)$$

e no *contorno* discretizado, temos:

$$\mathbf{S}(\bar{u}) = \bar{g} \quad em \Gamma. \quad (6.5)$$

Substituindo (6.3) em (6.4) e (6.5) ficamos com:

$$\mathbf{L}\left(\sum_{m=1}^{M+1} u_m N_m\right) = \bar{b} \quad em \Omega \quad (6.6)$$

e, no contorno:

$$\mathbf{S}\left(\sum_{m=1}^{M+1} u_m N_m\right) = \bar{g} \quad em \Gamma. \quad (6.7)$$

Como  $\mathbf{L}$  e  $\mathbf{S}$  são *operadores lineares*, no domínio, podemos escrever:

$$\sum_{m=1}^{M+1} u_m \mathbf{L}(N_m) = \bar{b} \quad em \Omega, \quad (6.8)$$

e no contorno,

$$\sum_{m=1}^{M+1} u_m \mathbf{S}(N_m) = \bar{g} \quad em \Gamma. \quad (6.9)$$

#### 6.4.2 - Definição dos Elementos Finitos Unidimensional

Se o domínio  $\Omega$  é dividido ou discretizado em  $E$  subdomínios,  $\Omega_e$ , da seguinte forma:

$$\Omega = \sum_{e=1}^E \Omega_e \quad (6.10)$$

E, se em correspondência a divisão do *domínio*, o *contorno*,  $\Gamma$ , é dividido em  $B$  partes,  $\Gamma_b$ , da seguinte forma:

$$\Gamma = \sum_{b=1}^B \Gamma_b. \quad (6.11)$$

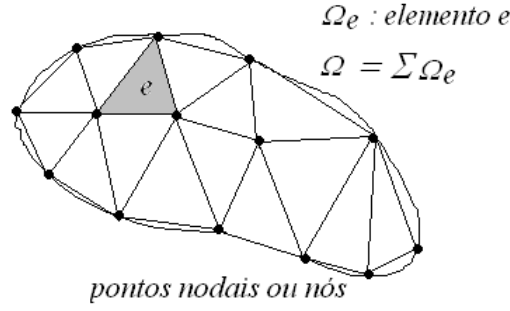


Figura - 6. 3. Rede de pontos nodais do Domínio,  $\Omega$  e dos Subdomínios,  $\Omega_e$ .

Logo, teremos:

$$\sum_{e=1}^E \mathbf{L} \left( \sum_{m=1}^{M+1} u_m N_m^e \right) = \bar{b} \quad \text{em } \Omega_e, \quad (6.12)$$

sujeito as condições de contorno

$$\sum_{b=1}^B \mathbf{S} \left( \sum_{m=1}^{M+1} u_m N_m^e \right) = \bar{g} \quad \text{em } \Gamma_b. \quad (6.13)$$

Como  $\mathbf{L}$  e  $\mathbf{S}$  são operadores lineares temos:

$$\sum_{e=1}^E \sum_{m=1}^{M+1} u_m \mathbf{L} (N_m^e) = \bar{b} \quad \text{em } \Omega_e, \quad (6.14)$$

sujeito as condições de contorno

$$\sum_{b=1}^B \sum_{m=1}^{M+1} u_m \mathbf{S} (N_m^e) = \bar{g} \quad \text{em } \Gamma_b. \quad (6.15)$$

#### 6.4.3 – Inclusão do Método dos Resíduos Ponderados Unidimensional

A sentença de resíduos ponderados de caráter global (onde as funções de aproximação são válidas em  $\Omega$  e em  $\Gamma$ ):

$$\int_{\Omega} w_l \varepsilon_{\Omega} d\Omega + \int_{\Gamma} \bar{w}_l \varepsilon_{\Gamma} d\Gamma = 0. \quad (6.16)$$

Logo, os erros cometidos no domínio é:

$$\varepsilon_{\Omega} = \mathbf{L} \left( \sum_{m=1}^{M+1} u_m N_m \right) - b \neq 0 \quad \text{em } \Omega \quad (6.17)$$

E no contorno:

$$\varepsilon_{\Gamma} = \mathbf{S} \left( \sum_{m=1}^{M+1} u_m N_m \right) - g \neq 0 \quad \text{em } \Gamma \quad (6.18)$$

Como  $\mathbf{L}$  e  $\mathbf{S}$  são *operadores lineares* temos:

no domínio:

$$\varepsilon_{\Omega_e} = \sum_{m=1}^{M+1} u_m \mathbf{L}(N_m) - \bar{b} \neq 0 \quad \text{em } \Omega_e \quad (6.19)$$

e no contorno

$$\varepsilon_{\Gamma_e} = \sum_{m=1}^{M+1} u_m \mathbf{S}(N_m) - \bar{g} \neq 0 \quad \text{em } \Gamma_b \quad (6.20)$$

Se o domínio  $\Omega$  é dividido em  $E$  subdomínios,  $\Omega_e$ , e se, em correspondência a divisão do domínio, o contorno,  $\Gamma$ , é dividido em  $B$  partes,  $\Gamma_b$ . A *sentença de resíduos ponderados* de carácter global é substituída por:

$$\sum_{e=1}^E \int_{\Omega_e} w_{le} \varepsilon_{\Omega_e} d\Omega_e + \sum_{b=1}^B \int_{\Gamma_b} \bar{w}_{lb} \varepsilon_{\Gamma_b} d\Gamma_b = 0, \quad (6.21)$$

onde, as *funções de aproximação* são definidas localmente, sendo válidas somente para  $\Omega_e$  e  $\Gamma_b$  e não mais para  $\Omega$  e  $\Gamma$ , da seguinte forma:

$$\int_{\Omega_e} w_{le} \varepsilon_{\Omega_e} d\Omega_e + \int_{\Gamma_b} \bar{w}_{lb} \varepsilon_{\Gamma_b} d\Gamma_b = 0 \quad (6.22)$$

Portanto, temos:

$$\varepsilon_{\Omega_e} = \sum_{m=1}^{M+1} u_m \mathbf{L}(N_m) - \bar{b} \neq 0 \quad \text{em } \Omega_e \quad (6.23)$$

e no contorno



$$\varepsilon_{\Gamma_e} = \sum_{m=1}^{M+1} u_m \mathbf{S}(N_m) - \bar{g} \neq 0 \quad \text{em } \Gamma_b \quad (6.24)$$

Portanto,

$$\int_{\Omega_e} w_{le} \left[ \sum_{m=1}^{M+1} u_m \mathbf{L}(N_m) - \bar{b} \right] d\Omega_e + \int_{\Gamma_e} \bar{w}_{le} \left[ \sum_{m=1}^{M+1} u_m \mathbf{S}(N_m) - \bar{g} \right] d\Gamma_b = 0 \quad (6.25)$$

OBS:

Se as integrais em (6. 16) e (6. 21) contêm derivadas de ordem  $s$  nos integrandos, deve-se assegurar que as *funções de aproximação* tenham derivadas de ordem superior a  $(s - 1)$  contínuas.

#### 6.4.4 – Aplicação Prática utilizando o Método de Galerkin

Dada a seguinte equação diferencial

$$\frac{d^2 u(x)}{dx^2} - u(x) = 0 \quad (6.26)$$

Definida em  $[x_A ; x_B]$  e com *condições de contorno* essenciais  $u(x = x_A) = u_A$  e  $u(x = x_B) = u_B$ .

Sendo

$$\varepsilon_{\Omega} = \frac{d^2 \bar{u}}{dx^2} - \bar{u} \neq 0 \quad (6.27)$$

e

$$\varepsilon_{\Gamma} = \frac{d\bar{u}}{dx} - \bar{g} \neq 0 \quad (6.28)$$

A sentença de resíduos ponderados é dada por:

$$\int_{\Omega} w_l \varepsilon_{\Omega} d\Omega + \int_{\Gamma} \bar{w}_l \varepsilon_{\Gamma} d\Gamma = 0 \quad (6.29)$$

Ou

$$\int_{\Omega} w_l \left[ \frac{d^2 u(x)}{dx^2} - u(x) - \bar{b} \right] d\Omega + \int_{\Gamma} \bar{w}_l \left[ \frac{du}{dx} - \bar{g} \right] d\Gamma = 0 \quad (6.30)$$

Discretizando a solução  $u(x)$  a partir de

$$u \cong \bar{u} = \sum_{m=1}^{M+1} u_m N_m \text{ em } \Omega, \quad (6.31)$$

ou (6.30) temos:

$$\sum_{m=1}^{M+1} u_m \left\{ \int_{\Omega} w_l \left[ \frac{d^2 N_m(x)}{dx^2} - N_m(x) - 0 \right] d\Omega + \int_{\Gamma} \bar{w}_l \left[ \frac{dN_m}{dx} - \bar{g} \right] d\Gamma \right\} = 0 \quad (6.32)$$

Subdividindo o domínio  $\Omega$  em  $\Omega_e$  subintervalos temos:

$$\sum_{m=1}^{M+1} u_m \left\{ \int_{\Omega_e} w_l^e \sum_{e=1}^E \left[ \frac{d^2 N_m^e(x)}{dx^2} - N_m^e(x) \right] d\Omega_e + \int_{\Gamma_b} \bar{w}_l^e \sum_{b=1}^B \left[ \frac{dN_m^e(x)}{dx} - \bar{g} \right] d\Gamma_b \right\} = 0 \quad (6.33)$$

Escolhendo por Galerkin

$$w_l^e = \bar{w}_l^e = N_l^e \quad (6.34)$$

Temos:

$$\sum_{m=1}^{M+1} u_m \left\{ \int_{\Omega_e} N_l^e \sum_{e=1}^E \left[ \frac{d^2 N_m^e(x)}{dx^2} - N_m^e(x) \right] d\Omega_e + \int_{\Gamma_b} N_l^e \sum_{b=1}^B \left[ \frac{dN_m^e(x)}{dx} - \bar{g} \right] d\Gamma_b \right\} = \quad (6.35)$$

Observe que na *sentença básica de resíduos ponderados* aparecem derivadas de ordem dois, conseqüentemente, é necessário que as *funções de aproximação* possuam derivadas de ordem um contínuas. Neste caso, precisaríamos de *elementos finitos quadráticos* para as *funções de interpolação*. Contudo, para contornar essa situação utilizando *elementos finitos lineares*, podemos resolver a *equação diferencial* a partir da *forma fraca dos resíduos ponderados*.

#### 6.4.5 - Formulação Fraca dos Resíduos Ponderados

A *sentença de resíduos ponderados* é dada por:

$$\int_{\Omega} w_l \varepsilon_{\Omega} d\Omega = 0 \quad (6.36)$$

Onde

$$\int_0^1 w_l \left[ \frac{d^2 \bar{u}}{dx^2} - \bar{u}(x) \right] dx = 0 \quad (6.37)$$

Logo, a forma fraca da sentença de resíduos ponderados pode ser escrita como:

$$-\int_{x_A}^{x_B} \left( \frac{d\bar{u}}{dx} \frac{dw_l}{dx} + \bar{u} w_l \right) dx + \left[ w_l \frac{d\bar{u}}{dx} \right]_{x=x_A}^{x=x_B} = 0 \quad (6.38)$$

Um conjunto de  $(M + 1)$  pontos nodais é escolhido no intervalo (domínio)  $[0 ; 1]$  que constitui o domínio do problema, e uma aproximação do tipo:

$$u \cong \bar{u} = \sum_{m=1}^{M+1} u_m N_m \quad (6.39)$$

é adotada, onde  $u_m$  é o valor da aproximação no nó  $m$  ( $N_m = 1$  em  $m$ ). Assim, as condições de contorno essenciais são atendidas diretamente, especificando-se os valores nodais apropriados e  $\varepsilon_I = 0$ .

Na prática, os valores conhecidos só serão introduzidos na etapa de resolução do sistema de equações e, dessa maneira, todos os valores,  $u_1, u_2, \dots, u_{M+1}$  são considerados incógnitas do problema.

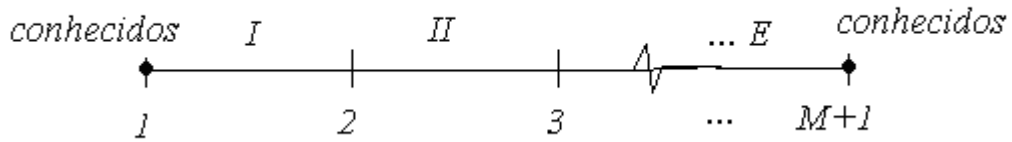


Figura - 6. 4. Intervalo de aplicação do Método de Galerkin

Adotando-se o *Método de Galerkin*,  $w_l = N_l$ ,  $1 \leq l, m \leq M + 1$  e a equação (6.38) é reescrita como:

$$-\int_{x_A}^{x_B} \left( \frac{dN_l}{dx} \sum_{m=1}^{M+1} u_m \frac{dN_m}{dx} + N_l \sum_{m=1}^{M+1} u_m N_m \right) dx + \left[ N_l \frac{d\bar{u}}{dx} \right]_{x=x_A}^{x=x_B} = 0 \quad (6.40)$$

Como a integral e o somatório são operadores lineares temos:

$$\sum_{m=1}^{M+1} u_m \left\{ \int_{x_A}^{x_B} \left( \frac{dN_l}{dx} \frac{dN_m}{dx} + N_l N_m \right) dx \right\} = \left[ N_l \frac{d\bar{u}}{dx} \right]_{x=x_A}^{x=x_B} = 0 \quad (6.41)$$

Matricialmente

$$\underset{\sim}{K} \underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{f} \quad (6.42)$$

Onde os elementos da matriz  $\underset{\sim}{K}$  são dadas por:

$$K_{lm} = \int_{x_A}^{x_B} \left( \frac{dN_l}{dx} \frac{dN_m}{dx} + N_l N_m \right) dx \quad (1 \leq l, m \leq M+1) \quad (6.43)$$

E os elementos do vetor  $\underset{\sim}{f}$  são:

$$f_l = \left[ N_l \frac{d\bar{u}}{dx} \right]_{x=x_A}^{x=x_B} \quad (1 \leq l \leq M+1) \quad (6.44)$$

#### 6.4.6 - Funções de Interpolação Local Lineares

Na *sentença básica de resíduos ponderados* aparecem derivadas de ordem dois, consequentemente, é necessário que as *funções de aproximação* possuam derivadas de ordem um contínuas. Na forma fraca, essa exigência é amenizada porque as derivadas de ordem mais alta são as derivadas primeiras. Assim, é necessário que as *funções de aproximação* possuam derivadas de ordem zero contínuas, ou seja, é necessário que as funções sejam contínuas.

Adotando uma variação linear, pode-se escrever, para cada elemento:

$$\bar{u}_e = \alpha_i + \alpha_j \chi_i^e. \quad (6.45)$$

Ou matricialmente

$$\bar{u}_e = [1 \quad \chi_i^e] \begin{bmatrix} \alpha_i \\ \alpha_j \end{bmatrix}. \quad (6.46)$$

Onde

$$\chi_i^e = x - x_i^e. \quad (6.47)$$

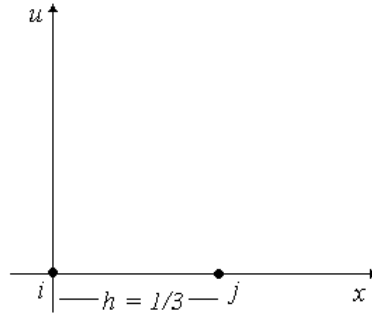


Figura - 6. 5. Elemento Finito linear entre dois pontos.

Aplicando aos pontos nodais  $i$  e  $j$ , temos:

$$\begin{aligned} u_i &= \alpha_i \\ u_j &= \alpha_i + \alpha_j h^e \end{aligned} \quad (6.48)$$

Onde matricialmente temos:

$$\underset{\sim}{U}^e = \underset{\sim}{C} \underset{\sim}{\alpha} \quad (6.49)$$

ou

$$\underset{\sim}{U}^e = \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & h^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_i \\ \alpha_j \end{bmatrix} = \underset{\sim}{C} \underset{\sim}{\alpha}. \quad (6.50)$$

Invertendo a expressão (6. 265) anterior, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} \alpha_i \\ \alpha_j \end{bmatrix} = \frac{1}{h^e} \begin{bmatrix} h^e & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix}. \quad (6.51)$$

Combinando-se as expressões (6. 262) com (6. 266), tem-se:

$$\bar{u}_e = \begin{bmatrix} 1 & \chi_i^e \end{bmatrix} \frac{1}{h^e} \begin{bmatrix} h^e & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix} \quad (6.52)$$

Ou

$$\bar{u}_e = \frac{1}{h^e} \begin{bmatrix} (h^e - \chi_i^e) & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix} \quad (6.53)$$

Logo

$$\bar{u}_e = \left(1 - \frac{\chi_i^e}{h^e}\right) u_i + \frac{\chi_i^e}{h^e} u_j \quad (6.54)$$

Ou ainda

$$\bar{u}_e = N_i^e u_i + N_j^e u_j \quad (6.55)$$

Onde

$$\begin{cases} N_i^e = 1 - \frac{\chi_i^e}{h^e} = 1 - \frac{(x - x_i^e)}{h^e} = \frac{x_j^e - x}{x_j^e - x_i^e} \\ N_j^e = \frac{\chi_i^e}{h^e} = \frac{(x - x_i^e)}{x_j^e - x_i^e} \end{cases} \quad x_i \leq x \leq x_j \quad (6.56)$$

A derivada primeira de  $\bar{u}_e$  é:

$$\frac{d\bar{u}_e}{dx} = \frac{dN_i^e}{dx} u_i + \frac{dN_j^e}{dx} u_j \quad (6.57)$$

De (6.47) para  $\chi_i^e = x - x_i^e$  temos:

$$\frac{d\bar{u}_e}{dx} = -\frac{1}{h^e} \left(1 - \frac{dx_i^e}{dx}\right) u_i + \frac{1}{h^e} \left(1 - \frac{dx_i^e}{dx}\right) u_j = \begin{bmatrix} -\frac{1}{h^e} & \frac{1}{h^e} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix} \left(1 - \frac{dx_i^e}{dx}\right) \quad (6.58)$$

Ou matricialmente

$$\frac{d\bar{u}_e}{dx} = \underset{\sim}{N}_x U^e = \underset{\sim}{U}^{e,T} \underset{\sim}{N}_x^T \quad (6.59)$$

onde

$$\frac{dN_{i,j}^e}{dx} = N_{\sim x}^e \quad (6.60)$$

Na formação do sistema de equações (6.42), as contribuições de um elemento típico  $e$ , associado aos nós  $i$  e  $j$ , quando se adota uma *aproximação local linear*, podem ser calculados de uma maneira geral, levando em conta a equação (6.38) e (6.43). Para o elemento  $e$ :

$$N_i = N_i^e = 1 - \frac{\chi_e}{h^e} \quad (6.61)$$

$$N_j = N_j^e = \frac{\chi_e}{h^e} \quad (6.62)$$

Onde

$$\chi_i^e = x - x_i^e \quad ; \quad h^e = x_j - x_i \quad ; \quad x_i \leq x \leq x_j \quad (6.63)$$

Cujas derivadas são:

$$\frac{dN_i}{dx} = \frac{dN_i^e}{dx} = -\frac{1}{h^e} \frac{d\chi_i}{dx} = -\frac{1}{h^e} \left( 1 - \frac{dx_i^e}{dx} \right) \quad (6.64)$$

e

$$\frac{dN_j}{dx} = \frac{dN_j^e}{dx} = \frac{1}{h^e} \frac{d\chi_i}{dx} = \frac{1}{h^e} \left( 1 - \frac{dx_i^e}{dx} \right) \quad (6.65)$$

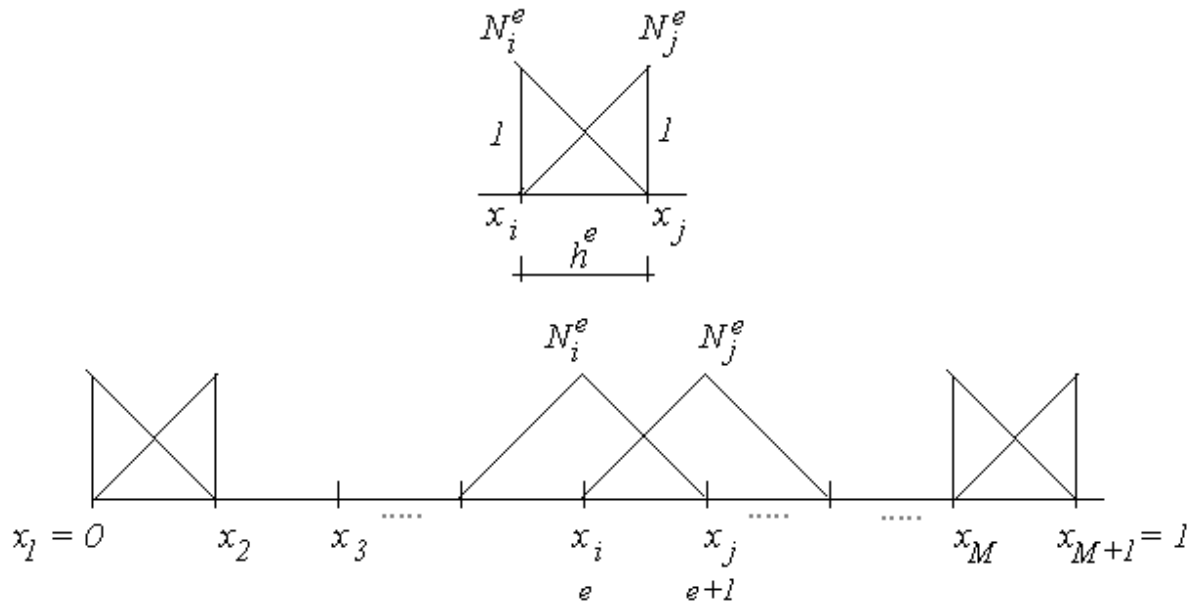


Figura - 6. 6. Estruturação unidimensional dos Elementos Finitos.

Observe que para um único elemento finito, temos:

$$\chi_i^e = x - x_i^e = x - 0 = x \quad ; \quad h^e = x_j - x_i = \quad ; \quad 0 \leq x \leq h^e \quad (6.66)$$

E neste caso:

$$\frac{dN_i}{dx} = \frac{dN_i^e}{dx} = -\frac{1}{h^e} \frac{d\chi_i^e}{dx} = -\frac{1}{h^e} \quad (6.67)$$

e

$$\frac{dN_j}{dx} = \frac{dN_j^e}{dx} = \frac{1}{h^e} \frac{d\chi_i^e}{dx} = \frac{1}{h^e} \quad (6.68)$$

Do ponto de vista global, as únicas *funções de aproximação* não nulas do elemento  $e$  são as funções  $N_i$  e  $N_j$ ; consequentemente,  $N_l = 0$  se  $l \neq i$  ou se  $l \neq j$ . De maneira geral,  $N_l = 0$  se  $l \notin$  ao elemento  $e$ .

#### 6.4.7 – As Matrizes Locais $K^e$ e o Vetor Local $f$

Note-se que, das equações (6.40) a (6.42) pode-se obter:

$$K_{lm} = \sum_{e=1}^E K_{l,m}^e \quad (6.69)$$



onde

$$K_{ij}^e = \int_{x_i}^{x_j} \left( \frac{dN_i^e}{dx} \frac{dN_j^e}{dx} + N_i^e N_j^e \right) dx \quad (1 \leq i, j \leq M+1) \quad (6.70)$$

Observando que:

$$K_{l,m}^e = 0 \quad \text{se} \quad l, m \neq i, j \quad (6.71)$$

Ou de forma geral a partir de (6. 61),(6. 62) e (6. 64), (6. 65) temos:

$$K_{ij}^e = \int_{x_i}^{x_j} \left[ - \left( \frac{1}{h^e} \frac{d\chi_i^e}{dx} \right)^2 + \left( 1 - \frac{\chi_i^e}{h^e} \right) \frac{\chi_i^e}{h^e} \right] dx \quad (6.72)$$

Onde

$$\chi_i^e = x - x_i^e \quad ; \quad h^e = x_j^e - x_i^e \quad ; \quad 0 \leq x \leq h^e \quad (6.73)$$

Logo usando (6. 73) em(6. 72) temos:

$$K_{ij}^e = \int_{x_i}^{x_j} \left[ - \frac{1}{h^{e2}} \left( 1 - \frac{dx_i^e}{dx} \right)^2 + \left( 1 - \frac{(x - x_i^e)}{h^e} \right) \frac{(x - x_i^e)}{h^e} \right] dx. \quad (6.74)$$

E

$$K_{ii}^e = \int_{x_i}^{x_j} \left[ - \frac{1}{h^{e2}} \left( 1 - \frac{dx_i^e}{dx} \right)^2 + \left( 1 - \frac{(x - x_i^e)}{h^e} \right)^2 \right] dx. \quad (6.75)$$

E

$$K_{jj}^e = \int_{x_i}^{x_j} \left[ - \frac{1}{h^{e2}} \left( 1 - \frac{dx_i^e}{dx} \right)^2 + \left( \frac{(x - x_i^e)}{h^e} \right)^2 \right] dx. \quad (6.76)$$

Observe que para um único elemento finito, temos:

$$\chi_i^e = x - x_i^e = x - 0 = x \quad ; \quad h^e = x_j - x_i = \quad ; \quad 0 \leq x \leq h^e \quad (6.77)$$

Logo, a partir de (6. 61),(6. 62) e (6. 64), (6. 65) os elementos fora da diagonal são dados por:

$$K_{ij}^e = K_{ji}^e = \int_0^{h^e} \left[ \frac{d}{dx} \left( 1 - \frac{x}{h^e} \right) \frac{d}{dx} \left( \frac{x}{h^e} \right) + \left( 1 - \frac{x}{h^e} \right) \frac{x}{h^e} \right] dx \quad (6.78)$$

Ou

$$K_{ij}^e = K_{ji}^e = \int_0^{h^e} \left[ \frac{d}{dx} \left( 1 - \frac{x}{h^e} \right) \frac{d}{dx} \left( \frac{x}{h^e} \right) + \left( 1 - \frac{x}{h^e} \right) \frac{x}{h^e} \right] dx = \int_0^{h^e} \left[ -\frac{1}{(h^e)^2} + \frac{x}{h^e} + \frac{x^2}{(h^e)^2} \right] dx \quad (6.79)$$

Então

$$\begin{aligned} K_{ij}^e &= \left[ -\frac{x}{h^{e2}} + \frac{x^2}{2h^e} + \frac{x^3}{3h^{e2}} \right]_0^{h^e} \\ K_{ij}^e &= \left[ -\frac{h^e}{h^{e2}} + \frac{h^{e2}}{2h^e} + \frac{h^{e3}}{3h^{e2}} \right] \\ K_{ij}^e &= -\frac{1}{h^e} + \frac{h^e}{6} \end{aligned} \quad (6.80)$$

Os elementos da diagonal da matriz são dados por:

$$K_{ii}^e = \int_0^{h^e} \left[ \left( \frac{d}{dx} \left( 1 - \frac{x}{h^e} \right) \right)^2 + \left( 1 - \frac{x}{h^e} \right)^2 \right] dx = 0 \quad (6.81)$$

ou

$$K_{ii}^e = \int_0^{h^e} \left[ \left( \frac{d}{dx} \left( 1 - \frac{x}{h^e} \right) \right)^2 + \left( 1 - \frac{x}{h^e} \right)^2 \right] dx = \int_0^{h^e} \left[ \left( \frac{1}{h^e} \right)^2 + \left( 1 - \frac{2x}{h^e} + \frac{x^2}{(h^e)^2} \right) \right] dx \quad (6.82)$$

logo

$$\begin{aligned}
K_{ii}^e &= \left[ \left( \frac{1}{h^e} \right)^2 x + \left( 1 - \frac{2x^2}{2h^e} + \frac{x^3}{3h^{e^2}} \right) \right]_o^{h^e} \\
K_{ii}^e &= \left[ \frac{h^e}{h^{e^2}} + \left( 1 - \frac{h^{e^2}}{h^e} + \frac{h^{e^3}}{3h^{e^2}} \right) \right] \\
K_{ii}^e &= \frac{1}{h^e} + \frac{h^e}{3}
\end{aligned} \tag{6. 83}$$

E

$$K_{jj}^e = \int_0^{h^e} \left[ \left( \frac{d}{dx} \left( \frac{x}{h^e} \right) \right)^2 + \left( \frac{x}{h^e} \right)^2 \right] dx = 0 \tag{6. 84}$$

ou

$$K_{jj}^e = \int_0^{h^e} \left[ \left( \frac{d}{dx} \left( \frac{x}{h^e} \right) \right)^2 + \left( \frac{x}{h^e} \right)^2 \right] dx = \int_0^{h^e} \left[ \left( \frac{1}{h^e} \right)^2 + \left( \frac{x}{h^e} \right)^2 \right] dx \tag{6. 85}$$

logo

$$\begin{aligned}
K_{jj}^e &= \left[ \left( \frac{1}{h^e} \right)^2 x + \left( \frac{x^3}{3h^{e^2}} \right) \right]_0^{h^e} \\
K_{jj}^e &= \left[ \frac{h^e}{h^{e^2}} + \frac{h^{e^3}}{3h^{e^2}} \right] \\
K_{jj}^e &= \frac{1}{h^e} + \frac{h^e}{3}
\end{aligned} \tag{6. 86}$$

E

$$f^e_l = \left[ N_l \frac{d\bar{u}}{dx} \right]_{x=x_i}^{x=x_j} \tag{6. 87}$$

Matricialmente os elementos da matriz  $\tilde{K}$  são dadas por:

$$K_{ij}^e = \int_{x_i}^{x_j} \begin{bmatrix} N_x^T & N_x + N^T & N \end{bmatrix} dx \quad (1 \leq i, j \leq M+1) \quad (6.88)$$

E os elementos do vetor  $f_{\sim}^e$ :

$$f_l^e = \begin{bmatrix} N_l & N_x & U^e \end{bmatrix}_{x=x_i}^{x=x_j} \quad (6.89)$$

Numerando-se os elementos de 1 a  $M$  e os nós de 1 a  $M+1$ , cada elemento produz uma matriz do tipo:

$$K_{\sim}^e = \begin{bmatrix} 0 & \dots & \left( \frac{1}{h^e} + \frac{h^e}{3} \right) & \left( -\frac{1}{h} + \frac{h^e}{6} \right) & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \left( -\frac{1}{h^e} + \frac{h^e}{6} \right) & \left( \frac{1}{h} + \frac{h^e}{3} \right) & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & \dots & & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.90)$$

E

$$f_E = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \left[ N_1 \frac{d\bar{u}}{dx} \right]_{x=x_E}^{x=x_{E+1}} \\ \left[ N_2 \frac{d\bar{u}}{dx} \right]_{x=x_E}^{x=x_{E+1}} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.91)$$

Com as componentes da matriz  $K_{\sim}^e$  determinados, temos para cada elemento:

i) ELEMENTO I:

$$K_{\sim}^{e=I} = \begin{bmatrix} k_{11}^I & k_{12}^I & \dots & 0 \\ k_{21}^I & k_{22}^I & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.92)$$

onde

$$K_{\sim}^{e=I} = \begin{bmatrix} \left( \frac{1}{h^I} + \frac{h^I}{3} \right) & \left( -\frac{1}{h} + \frac{h^I}{6} \right) & \dots & 0 \\ \left( -\frac{1}{h^I} + \frac{h^I}{6} \right) & \left( \frac{1}{h^I} + \frac{h^I}{3} \right) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.93)$$

E os elementos do vetor  $f_I$  :

$$f_I = \begin{bmatrix} f_1^I \\ f_2^I \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.94)$$

Ou

$$f_I = \begin{bmatrix} \left[ N_1 \frac{d\bar{u}}{dx} \right]_{x=x_1}^{x=x_2} \\ \left[ N_2 \frac{d\bar{u}}{dx} \right]_{x=x_1}^{x=x_2} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.95)$$

ii) ELEMENTO II:

$$K_{\sim}^{\prime\prime} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & ...0 \\ 0 & k_{22}^{\prime\prime} & k_{23}^{\prime\prime} & ...0 \\ 0 & k_{32}^{\prime\prime} & k_{33}^{\prime\prime} & ...0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & ...0 \end{bmatrix} \quad (6.96)$$

onde

$$K_{\sim}^{e=\prime\prime} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & ...0 \\ 0 & \left( \frac{1}{h^{\prime\prime}} + \frac{h^{\prime\prime}}{3} \right) & \left( -\frac{1}{h^{\prime\prime}} + \frac{h^{\prime\prime}}{6} \right) & ...0 \\ 0 & \left( -\frac{1}{h^{\prime\prime}} + \frac{h^{\prime\prime}}{6} \right) & \left( \frac{1}{h^{\prime\prime}} + \frac{h^{\prime\prime}}{3} \right) & ...0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & ...0 \end{bmatrix} \quad (6.97)$$

E os elementos do vetor  $f_{\sim}^{\prime\prime}$  :

$$f_{\sim}^{\prime\prime} = \begin{bmatrix} 0 \\ f_2^{\prime\prime} \\ f_3^{\prime\prime} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.98)$$

Ou

$$f_{\sim}^{\prime\prime} = \begin{bmatrix} 0 \\ \left[ N_2 \frac{d\bar{u}}{dx} \right]_{x=x_2}^{x=x_3} \\ \left[ N_3 \frac{d\bar{u}}{dx} \right]_{x=x_2}^{x=x_3} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.99)$$

iii) ELEMENTO E:

$$K_{\sim}^E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & ...0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & ...k_{33}^E & k_{34}^E \\ 0 & 0 & ...k_{43}^E & k_{44}^E \end{bmatrix} \quad (6.100)$$

onde

$$K_{\sim}^{e=E} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & ...0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & ... \left( \frac{1}{h^E} + \frac{h^E}{3} \right) & \left( -\frac{1}{h^E} + \frac{h^E}{6} \right) \\ 0 & 0 & ... \left( -\frac{1}{h^E} + \frac{h^E}{6} \right) & \left( \frac{1}{h^E} + \frac{h^E}{3} \right) \end{bmatrix} \quad (6.101)$$

E os elementos do vetor  $f_E :$

$$f_E = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ f_1^E \\ f_2^E \end{bmatrix} \quad (6.102)$$

Ou

$$f_E = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \left[ N_1 \frac{d\bar{u}}{dx} \right]_{x=x_E}^{x=x_{E+1}} \\ \left[ N_2 \frac{d\bar{u}}{dx} \right]_{x=x_E}^{x=x_{E+1}} \end{bmatrix} \quad (6.103)$$

#### 6.4.8 - Montagem do vetor $f$ e da Matriz Global $K$

A matriz global  $K_{\sim}$  pode ser formada agrupando-se as matrizes  $K^e$ , observando que as contribuições dos nós comuns a elementos vizinhos devem ser adicionados na matriz global  $K_{\sim}$ .

$$K_{\sim} = \begin{bmatrix} k_{11}^I & k_{12}^I & 0 & \dots & 0 \\ k_{21}^I & k_{22}^I + k_{22}^{II} & k_{23}^{II} & \dots & 0 \\ & & \vdots & & \vdots \\ 0 & k^{II} & k^{II} + \dots & k_{MM}^E & k_{MM+1}^E \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & k_{M+1M}^E & k_{M+1M+1}^E \end{bmatrix} \quad (6.104)$$

Ou seja:

$$K_{\sim} = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{h^I} + \frac{h^I}{3}\right) & \left(-\frac{1}{h^I} + \frac{h^I}{6}\right) & 0 & \dots & 0 \\ \left(-\frac{1}{h^I} + \frac{h^I}{6}\right) & \left(\frac{1}{h^I} + \frac{1}{h^{II}} + \frac{h^I + h^{II}}{3}\right) & \left(-\frac{1}{h^{II}} + \frac{h^{II}}{6}\right) & \dots & 0 \\ & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \left(-\frac{1}{h^{II}} + \frac{h^{II}}{6}\right) & \dots & \left(\frac{1}{h^{E-1}} + \frac{1}{h^E} + \frac{h^{E-1} + h^E}{3}\right) & \left(-\frac{1}{h^E} + \frac{h^{IE}}{6}\right) \\ & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \left(-\frac{1}{h^E} + \frac{h^E}{6}\right) & \left(\frac{1}{h^E} + \frac{h^E}{3}\right) \end{bmatrix} \quad (6.105)$$

E os elementos do vetor  $f_{\sim}$ :

$$f_l = \begin{bmatrix} f_1^I \\ f_2^I + f_1^{II} \\ \vdots \\ f_2^{E-1} + f_1^E \\ f_2^E \end{bmatrix} \quad (6.106)$$

Ou seja:



$$\underset{\sim}{f} = \begin{bmatrix} -d\bar{u}/dx)_{x_1=x_A} \\ -d\bar{u}/dx)_{x_2=x_A+h^1} -d\bar{u}/dx)_{x_2=x_A+h^1} \\ -d\bar{u}/dx)_{x_3=x_2+h^2} -d\bar{u}/dx)_{x_3=x_2+h^2} \\ \vdots \\ -d\bar{u}/dx)_{x_E=x_{E-1}+h^E=x_B} \end{bmatrix} \quad (6.107)$$

#### 6.4.9 – Resolução do Sistema de Equações

O sistema de equações é montado da seguinte forma:

$$\underset{\sim}{K} \underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{f} \quad (6.108)$$

Ou

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{1}{h^I} + \frac{h^I}{3}\right) & \left(-\frac{1}{h^I} + \frac{h^I}{6}\right) & 0 & \dots & 0 \\ \left(-\frac{1}{h^I} + \frac{h^I}{6}\right) & \left(\frac{1}{h^I} + \frac{1}{h^{II}} + \frac{h^I + h^{II}}{3}\right) & \left(-\frac{1}{h^{II}} + \frac{h^{II}}{6}\right) & \dots & 0 \\ & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \left(-\frac{1}{h^{II}} + \frac{h^{II}}{6}\right) & \dots & \left(\frac{1}{h^{E-1}} + \frac{1}{h^E} + \frac{h^{E-1} + h^E}{3}\right) & \left(-\frac{1}{h^E} + \frac{h^{IE}}{6}\right) \\ & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \left(-\frac{1}{h^E} + \frac{h^E}{6}\right) & \left(\frac{1}{h^E} + \frac{h^E}{3}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{u}_3 \\ \vdots \\ \bar{u}_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1^I \\ f_2^I + f_1^{II} \\ \vdots \\ f_2^{E-1} + f_1^E \\ f_2^E \end{bmatrix} \quad (6.109)$$

Sendo conhecido os valores das condições de contorno nos pontos extremos a primeira e a última linha da matriz acima são eliminadas ficando com o seguinte sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{1}{h^{II}} + \frac{h^{II}}{3}\right) & \left(-\frac{1}{h^{II}} + \frac{h^{II}}{6}\right) & 0 & \dots & 0 \\ \left(-\frac{1}{h^{II}} + \frac{h^{II}}{6}\right) & \left(\frac{1}{h^{II}} + \frac{1}{h^{III}} + \frac{h^{II} + h^{III}}{3}\right) & \left(-\frac{1}{h^{III}} + \frac{h^{III}}{6}\right) & \dots & 0 \\ & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \left(-\frac{1}{h^{III}} + \frac{h^{III}}{6}\right) & \dots & \left(\frac{1}{h^{E-2}} + \frac{1}{h^{E-1}} + \frac{h^{E-2} + h^{E-1}}{3}\right) & \left(-\frac{1}{h^{E-1}} + \frac{h^{E-1}}{6}\right) \\ & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \left(-\frac{1}{h^{E-1}} + \frac{h^{E-1}}{6}\right) & \left(\frac{1}{h^{E-1}} + \frac{1}{h^E} + \frac{h^{E-1} + h^E}{3}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_2 \\ \bar{u}_3 \\ \bar{u}_4 \\ \vdots \\ \bar{u}_{E-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_2^I + f_1^{II} \\ f_2^{II} + f_1^{III} \\ \vdots \\ f_2^{E-2} + f_1^E - 1 \\ f_2^{E-1} \end{bmatrix} \quad (6.110)$$

Cuja solução fornece os valores de  $u = (\bar{u}_2, \bar{u}_3, \bar{u}_4, \dots, \bar{u}_{E-1})$

## 6.5 – Exemplos e Aplicações

### 6.5.1 – Exemplo satisfazendo condições de contorno essenciais:

Dada a seguinte equação diferencial

$$\frac{d^2 u(x)}{dx^2} - u = 0 \quad (6.111)$$

Definida em  $[0 ; 1]$  e com condições de contorno essenciais.

$$\begin{aligned} u(x=0) &= 0 \\ u(x=1) &= 1 \end{aligned} \quad (6.112)$$

*Solução:*

A sentença de resíduos ponderados é:

$$\int_{\Omega} w_l \varepsilon_{\Omega} d\Omega = 0 \quad (6.113)$$

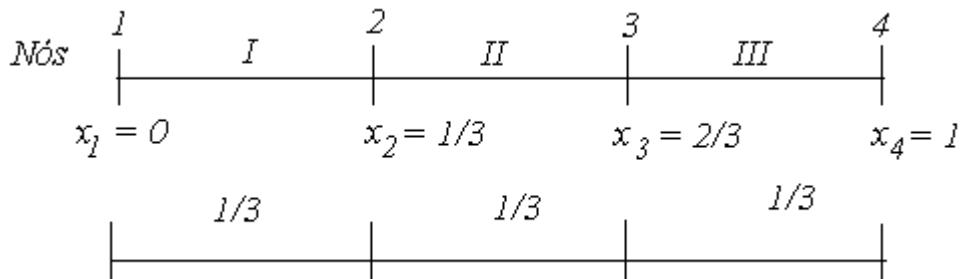
Onde

$$\varepsilon_{\Omega} = \frac{d^2 \bar{u}}{dx^2} + \bar{u} \neq 0 \quad (6.114)$$

A forma fraca da sentença de resíduos ponderados é:

$$-\int_0^1 \left( \frac{d\bar{u}}{dx} \frac{dw_l}{dx} + \bar{u} w_l \right) dx + \left[ w_l \frac{d\bar{u}}{dx} \right]_{x=0}^{x=1} = 0 \quad (6.115)$$

Fazendo  $E = M = 3$ , o intervalo  $[0 ; 1]$  será dividido em três sub-intervalos (elementos) de mesmo comprimento,  $h^1 = h^2 = h^3 = 1/3$ .



Numerando os nós de 1 a 4 e os elementos de 1 a 3, temos para o:

i) ELEMENTO I:

$$0 \leq x \leq h^I \quad (6.116)$$

Onde:

$$N_1 = 1 - \frac{x}{h^I} \quad (6.117)$$

e

$$N_2 = \frac{x}{h^I} \quad (6.118)$$

$$\underset{\sim}{K}^I = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & 0 & 0 \\ k_{21} & k_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.119)$$

Onde

$$K_{11} = \int_0^1 \left( \frac{dN_1}{dx} \frac{dN_1}{dx} + N_1 N_1 \right) dx \quad (1 \leq l = 1, m = 1 \leq M = 4) \quad (6.120)$$

E

$$K_{12} = \int_0^1 \left( \frac{dN_1}{dx} \frac{dN_2}{dx} + N_1 N_2 \right) dx \quad (1 \leq l = 1, m = 2 \leq M = 4) \quad (6.121)$$

E

$$K_{21} = \int_0^1 \left( \frac{dN_2}{dx} \frac{dN_1}{dx} + N_2 N_1 \right) dx \quad (1 \leq l = 2, m = 1 \leq M = 4) \quad (6.122)$$

E

$$K_{22} = \int_0^1 \left( \frac{dN_2}{dx} \frac{dN_2}{dx} + N_2 N_2 \right) dx \quad (1 \leq l = 2, m = 2 \leq M = 4) \quad (6.123)$$

Ou seja,

$$K_{\sim}^I = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{h} + \frac{h^I}{3}\right) & \left(-\frac{1}{h} + \frac{h^I}{6}\right) & 0 & 0 \\ \left(-\frac{1}{h} + \frac{h^I}{6}\right) & \left(\frac{1}{h} + \frac{h^I}{3}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.124)$$

A formação dos elementos do vetor  $f_I$  é dado por:

$$f_{\sim}^I{}_1 = \left[ N_1 \frac{d\bar{u}}{dx} \right]_{x=x_1}^{x=x_2} \quad (6.125)$$

E

$$f^I{}_2 = \left[ N_2 \frac{d\bar{u}}{dx} \right]_{x=x_1}^{x=x_2} \quad (6.126)$$

Logo

$$f_I = \begin{bmatrix} f_1^I \\ f_2^I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.127)$$

Ou

$$f_I = \begin{bmatrix} \left[ N_1 \frac{d\bar{u}}{dx} \right]_{x=x_1}^{x=x_2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.128)$$

ii) ELEMENTO II:

$$h^I \leq x \leq h^I + h^{II} \quad (6.129)$$

Onde:

$$N_2 = 1 - \frac{x}{h^{II}} \quad (6.130)$$

e

$$N_3 = \frac{x}{h^{II}} \quad (6.131)$$

$$K_{\sim}^{II} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{22} & k_{23} & 0 \\ 0 & k_{32} & k_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.132)$$

Onde

$$K_{22} = \int_0^1 \left( \frac{dN_2}{dx} \frac{dN_2}{dx} + N_2 N_2 \right) dx \quad (1 \leq l = 2, m = 2 \leq M = 4) \quad (6.133)$$

E

$$K_{23} = \int_0^1 \left( \frac{dN_2}{dx} \frac{dN_3}{dx} + N_2 N_3 \right) dx \quad (1 \leq l = 2, m = 3 \leq M = 4) \quad (6.134)$$

E

$$K_{32} = \int_0^1 \left( \frac{dN_3}{dx} \frac{dN_2}{dx} + N_3 N_2 \right) dx \quad (1 \leq l = 3, m = 2 \leq M = 4) \quad (6.135)$$

E

$$K_{33} = \int_0^1 \left( \frac{dN_3}{dx} \frac{dN_3}{dx} + N_3 N_3 \right) dx \quad (1 \leq l = 3, m = 3 \leq M = 4) \quad (6.136)$$

Ou seja,

$$K_{\sim}^{II} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left( \frac{1}{h^{II}} + \frac{h^{II}}{3} \right) & \left( -\frac{1}{h^{II}} + \frac{h^{II}}{6} \right) & 0 \\ 0 & \left( -\frac{1}{h^{II}} + \frac{h^{II}}{6} \right) & \left( \frac{1}{h^{II}} + \frac{h^{II}}{3} \right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.137)$$

A formação dos elementos do vetor  $f_{II}$  é dado por:

$$f_{II_2} = \left[ N_2 \frac{d\bar{u}}{dx} \right]_{x=x_2}^{x=x_3} \quad (6.138)$$

E

$$f_{II_3} = \left[ N_3 \frac{d\bar{u}}{dx} \right]_{x=x_2}^{x=x_3} \quad (6.139)$$

Logo

$$f_{II} = \begin{bmatrix} 0 \\ f_{II_2} \\ f_{II_3} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.140)$$

Ou

$$f_{II} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.141)$$

iii) ELEMENTO III:

$$h^I + h^{II} \leq x \leq h^I + h^{II} + h^{III} \quad (6.142)$$

Onde:

$$N_2 = 1 - \frac{x}{h^{III}} \quad (6.143)$$

e

$$N_3 = \frac{x}{h^{III}} \quad (6.144)$$

$$K_{\sim}^{III} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{33} & k_{34} \\ 0 & 0 & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \quad (6.145)$$

Onde

$$K_{33} = \int_0^1 \left( \frac{dN_3}{dx} \frac{dN_3}{dx} + N_3 N_3 \right) dx \quad (1 \leq l = 3, m = 3 \leq M = 4) \quad (6.146)$$

E

$$K_{34} = \int_0^1 \left( \frac{dN_3}{dx} \frac{dN_4}{dx} + N_3 N_4 \right) dx \quad (1 \leq l = 3, m = 4 \leq M = 4) \quad (6.147)$$

E

$$K_{43} = \int_0^1 \left( \frac{dN_4}{dx} \frac{dN_3}{dx} + N_4 N_3 \right) dx \quad (1 \leq l = 4, m = 3 \leq M = 4) \quad (6.148)$$

E

$$K_{44} = \int_0^1 \left( \frac{dN_4}{dx} \frac{dN_4}{dx} + N_4 N_4 \right) dx \quad (1 \leq l = 4, m = 4 \leq M = 4) \quad (6.149)$$

Ou seja,

$$K_{\sim}^{III} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left( \frac{1}{h^{III}} + \frac{h^{III}}{3} \right) & \left( -\frac{1}{h^{III}} + \frac{h^{III}}{6} \right) \\ 0 & 0 & \left( -\frac{1}{h^{III}} + \frac{h^{III}}{6} \right) & \left( \frac{1}{h^{III}} + \frac{h^{III}}{3} \right) \end{bmatrix} \quad (6.150)$$

A formação dos elementos do vetor  $f_{\sim}^{III}$  é dado por:

$$f_{\sim}^{III}{}_3 = \left[ N_3 \frac{d\bar{u}}{dx} \right]_{x=x_3}^{x=x_4} \quad (6.151)$$

E

$$f_{\sim}^{III}{}_4 = \left[ N_4 \frac{d\bar{u}}{dx} \right]_{x=x_3}^{x=x_4} \quad (6.152)$$

logo

$$f_{\sim}^{III} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ f_3^{III} \\ f_4^{III} \end{bmatrix} \quad (6.153)$$

Ou

$$f_{\sim}^{III} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \left[ N_3 \frac{d\bar{u}}{dx} \right]_{x=x_3}^{x=x_4} \\ \left[ N_4 \frac{d\bar{u}}{dx} \right]_{x=x_3}^{x=x_4} \end{bmatrix} \quad (6.154)$$

iv) MONTAGEM DA MATRIZ GLOBAL



O vetor  $f_{\sim}$  global é definido como:  $f = \left[ N_l \frac{d\bar{u}}{dx} \right]_{x=0}^{x=1}$ , ou seja:

$$f_l = \begin{bmatrix} f_1^I \\ f_2^I + f_2^{II} \\ f_3^{II} + f_3^{III} \\ f_4^{III} \end{bmatrix} \quad (6.155)$$

logo

$$f_{\sim} = \begin{bmatrix} -d\bar{u}/dx|_{x=0} \\ 0 \\ 0 \\ -d\bar{u}/dx|_{x=1} \end{bmatrix} \quad (6.156)$$

Agrupando as matrizes  $K_{\sim}^I, K_{\sim}^{II}, K_{\sim}^{III}$  dos elementos para formar a matriz global, encontra-se o seguinte sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{1}{h} + \frac{h}{3}\right) & \left(-\frac{1}{h} + \frac{h}{6}\right) & 0 & 0 \\ \left(-\frac{1}{h} + \frac{h}{6}\right) & 2\left(\frac{1}{h} + \frac{h}{6}\right) & \left(-\frac{1}{h} + \frac{h}{6}\right) & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{h} + \frac{h}{6}\right) & 2\left(\frac{1}{h} + \frac{h}{3}\right) & \left(-\frac{1}{h} + \frac{h}{6}\right) \\ 0 & 0 & \left(-\frac{1}{h} + \frac{h}{6}\right) & \left(\frac{1}{h} + \frac{h}{3}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{u}_3 \\ \bar{u}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{d\bar{u}}{dx}|_{x=0} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{d\bar{u}}{dx}|_{x=1} \end{bmatrix} \quad (6.157)$$

## V) RESOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES

Os valores de  $\bar{u}_1$  e  $\bar{u}_2$  são iguais aos valores prescritos. Portanto, são valores conhecidos e as linhas 1 e 4 podem ser removidas. Remova somente essas linhas, não remova as colunas, e utilize o sistema regular de equações que ficar. Substituindo-se os valores conhecidos  $\bar{u}_1 = 0$  e  $\bar{u}_4 = 1$  nas outras equações, o sistema de equações se reduz a:

$$\begin{aligned}
2\left(\frac{1}{h} + \frac{h}{3}\right)\bar{u}_2 + \left(-\frac{1}{h} + \frac{h}{6}\right)\bar{u}_3 &= 0 \\
\left(-\frac{1}{h} + \frac{h}{3}\right)\bar{u}_2 + 2\left(\frac{1}{h} + \frac{h}{3}\right)\bar{u}_3 &= -\left(-\frac{1}{h} + \frac{h}{6}\right)
\end{aligned} \tag{6. 158}$$

Substituindo-se  $h = 1/3$ , obtém-se:

$$\begin{aligned}
\frac{56}{9}\bar{u}_2 - \frac{53}{18}\bar{u}_3 &= 0 \\
-\frac{53}{18}\bar{u}_2 + \frac{56}{9}\bar{u}_3 &= \frac{53}{18}
\end{aligned} \tag{6. 159}$$

Resolvendo o sistema, encontra-se os seguintes valores:

$$\begin{aligned}
\bar{u}_2 &= 0,288546 \\
\bar{u}_3 &= 0,609750
\end{aligned} \tag{6. 160}$$

Das equações remanescentes, obtém-se os valores de  $\frac{d\bar{u}}{dx}\Big|_{x=0}$  e  $\frac{d\bar{u}}{dx}\Big|_{x=1}$

$$\begin{aligned}
\frac{d\bar{u}}{dx}\Big|_{x=0} &= -\left(-\frac{1}{h} + \frac{h}{6}\right)\bar{u}_2 = 0,849609 \\
\frac{d\bar{u}}{dx}\Big|_{x=1} &= \left(-\frac{1}{h} + \frac{h}{6}\right)\bar{u}_3 + \left(\frac{1}{h} + \frac{h}{3}\right)\bar{u}_4 = 1,315711
\end{aligned} \tag{6. 161}$$

### 6.5.2 – Exemplo satisfazendo condições de contorno naturais

Dada a seguinte equação diferencial

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} - u = 0 \tag{6. 162}$$

Definida em  $[0 ; 1]$  se as condições de contorno forem:

$$\begin{aligned} u|_{x=0} &= 0 \\ \frac{du}{dx}\bigg|_{x=1} &= 1 \end{aligned} \quad (6.163)$$

*Solução:*

A sentença de resíduos ponderados é:

$$\int_{\Omega} w_l \varepsilon_{\Omega} d\Omega + \int_{\Gamma} \bar{w}_l \varepsilon_{\Gamma} d\Gamma = 0 \quad (6.164)$$

Onde

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\Omega} &= \frac{d^2 \bar{u}}{dx^2} + \bar{u} \neq 0 \\ \varepsilon_{\Gamma} &= \frac{d\bar{u}}{dx} - 1 \neq 0 \end{aligned} \quad (6.165)$$

Logo, a *sentença básica de resíduos ponderados* é escrita como (já admitindo que a *condição de contorno essencial* seja atendida diretamente)

$$\int_0^1 w_l \left( \frac{d^2 \bar{u}}{dx^2} + \bar{u} \right) dx + \left[ \bar{w}_l \left( \frac{d\bar{u}}{dx} - 1 \right) \right]_{x=1} = 0 \quad (6.166)$$

Efetuada-se a *integração por partes*, chega-se a *forma fraca da sentença de resíduos ponderados*, cuja forma fraca é:

$$-\int_0^1 \left( \frac{dw_l}{dx} \frac{d\bar{u}}{dx} + w_l \bar{u} \right) dx + \left[ w_l \frac{d\bar{u}}{dx} \right]_{x=0}^{x=1} + \left[ \bar{w}_l \frac{d\bar{u}}{dx} \right]_{x=1} - \bar{w}_l|_{x=1} = 0 \quad (6.167)$$

Precisamos agora eliminar  $\frac{d\bar{u}}{dx}\bigg|_{x=1}$  da seguinte forma:

Se  $\bar{w}_l|_{x=1} = -w_l|_{x=1}$ , a equação (6.167) é escrita como:

$$\int_0^1 \left( \frac{dw_l}{dx} \frac{d\bar{u}}{dx} + w_l \bar{u} \right) dx + \left[ w_l \frac{d\bar{u}}{dx} \right]_{x=0} - w_l|_{x=1} = 0 \quad (6.168)$$

Se  $w_l = N_l$  e a discretização é mantida, a matriz  $K$  é a mesma. O vetor

$f$  global é definido como:  $f = \left[ N_l \frac{d\bar{u}}{dx} \right]_{x=0}^{x=1}$ , ou seja:

$$f_l = \begin{bmatrix} f_1^I \\ f_2^I + f_2^{II} \\ f_3^{II} + f_3^{III} \\ f_4^{III} \end{bmatrix} \quad (6.169)$$

O sistema final de equações é:

$$K \cdot \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{u}_3 \\ \bar{u}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{d\bar{u}}{dx} \Big|_{x=0} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (6.170)$$

Adotando-se o *Método de Galerkin* e a mesma discretização, a mesma matriz  $K$  é obtida, e o sistema de equações é:

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{1}{h} + \frac{h}{3}\right) & \left(-\frac{1}{h} + \frac{h}{6}\right) & 0 & 0 \\ \left(-\frac{1}{h} + \frac{h}{6}\right) & 2\left(\frac{1}{h} + \frac{h}{6}\right) & \left(-\frac{1}{h} + \frac{h}{6}\right) & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{h} + \frac{h}{6}\right) & 2\left(\frac{1}{h} + \frac{h}{3}\right) & \left(-\frac{1}{h} + \frac{h}{6}\right) \\ 0 & 0 & \left(-\frac{1}{h} + \frac{h}{6}\right) & \left(\frac{1}{h} + \frac{h}{3}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{u}_3 \\ \bar{u}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{d\bar{u}}{dx} \Big|_{x=0} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (6.171)$$

Como  $\bar{u}_1 = 0$  é o valor conhecido, a primeira equação pode ser eliminada do sistema. Substituindo  $\bar{u}_1$  pelo seu valor nas outras equações, o sistema de equações se reduz a:

$$\begin{bmatrix} 2\left(\frac{1}{h} + \frac{h}{3}\right) & \left(-\frac{1}{h} + \frac{h}{6}\right) & 0 \\ \left(-\frac{1}{h} + \frac{h}{6}\right) & 2\left(\frac{1}{h} + \frac{h}{3}\right) & \left(-\frac{1}{h} + \frac{h}{6}\right) \\ 0 & \left(-\frac{1}{h} + \frac{h}{6}\right) & \left(\frac{1}{h} + \frac{h}{3}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_2 \\ \bar{u}_3 \\ \bar{u}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (6.172)$$

Substituindo-se  $h = 1/3$ , obtém-se:

$$\begin{bmatrix} \frac{56}{9} & -\frac{53}{18} & 0 \\ -\frac{53}{18} & \frac{56}{9} & -\frac{53}{13} \\ 0 & -\frac{53}{18} & \frac{28}{9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_2 \\ \bar{u}_3 \\ \bar{u}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (6.173)$$

Resolvendo o sistema:

$$\begin{aligned} \bar{u}_2 &= 0,219309 \\ \bar{u}_3 &= 0,463444 \\ \bar{u}_4 &= 0,760045 \end{aligned} \quad (6.174)$$

O valor de  $\frac{d\bar{u}}{dx}\Big|_{x=0}$  pode ser determinado:

$$\begin{aligned} -\frac{d\bar{u}}{dx}\Big|_{x=0} &= \left(-\frac{1}{h} + \frac{h}{6}\right)\bar{u}_2 = -\frac{53}{13}\bar{u}_2 = -0,645743 \\ \frac{du}{dx}\Big|_{x=0} &= 0,645743 \end{aligned} \quad (6.175)$$

### 6.5.3 – Exemplo satisfazendo condições de contorno essenciais:

Dada a seguinte equação diferencial:

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} - 4y - 4x = 0, \quad (6.176)$$

definida em  $[0 ; 1]$  e com *condições de contorno essenciais*:

$$\begin{aligned} y(x=0) &= 0 \\ y(x=1) &= 1 \end{aligned} \quad (6.177)$$

Resolver pelo *Método dos Elementos Finitos*.

*Solução:*

A sentença de resíduos ponderados é:

$$\int_{\Omega} w_l \varepsilon_{\Omega} d\Omega = 0 \quad (6.178)$$

Onde

$$\varepsilon_{\Omega} = \frac{d^2 \bar{y}}{dx^2} - 4\bar{y} - 4x \neq 0 \quad (6.179)$$

A forma fraca da sentença de resíduos ponderados é:

$$-\int_0^1 \left( \frac{dy}{dx} \frac{dw_l}{dx} + 4yw_l + 4xw_l \right) dx + \left[ w_l \frac{dy}{dx} \right]_{x=0}^{x=1} = 0 \quad (6.180)$$

Um conjunto de  $(M + 1)$  pontos é escolhido no intervalo (domínio)  $[0 ; 1]$  e uma aproximação do tipo:

$$y \cong \bar{y} = \sum_{m=1}^{M+1} y_m N_m \quad (6.181)$$

é adotada, onde  $y_m$  é o valor da aproximação no nó  $m$  ( $N_m = 1$  em  $m$ ). Assim, as *condições de contorno* essenciais são atendidas diretamente, especificando-se os valores nodais apropriados e  $\varepsilon_{\Gamma} = 0$ . De forma análoga ao exemplo anterior, os valores conhecidos só serão introduzidos na etapa de resolução do sistema de equações e, dessa maneira, todos os valores,  $u_1, u_2, \dots, u_{M+1}$  são considerados incógnitas do problema.

Adotando-se o *Método de Galerkin*,  $w_l = N_l$ ,  $1 \leq l, m \leq M + 1$  e a equação (6.38) é reescrita como:

$$-\int_0^1 \left( \frac{dN_l}{dx} \sum_{m=1}^{M+1} y_m \frac{dN_m}{dx} + 4N_l \sum_{m=1}^{M+1} y_m N_m - 4N_l x \right) dx + \left[ N_l \frac{d\bar{y}}{dx} \right]_{x=0}^{x=1} = 0 \quad (6.182)$$

Para  $(1 \leq l, m \leq M+1)$ . Matricialmente temos:

$$\underset{\sim}{K} \underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{f} \quad (6.183)$$

Onde os elementos da matriz  $\underset{\sim}{K}$  são dados por:

$$K_{lm} = \int_0^1 \left( \frac{dN_l}{dx} \frac{dN_m}{dx} + 4N_l N_m \right) dx \quad (1 \leq l, m \leq M+1) \quad (6.184)$$

E os elementos do vetor  $\underset{\sim}{f}$ :

$$f_l = \left[ N_l \frac{d\bar{y}}{dx} \right]_{x=0}^{x=1} - 4 \int_0^1 N_l x dx = 0 \quad (6.185)$$

Dividindo-se o domínio  $\Omega$  em três subdomínios, temos:

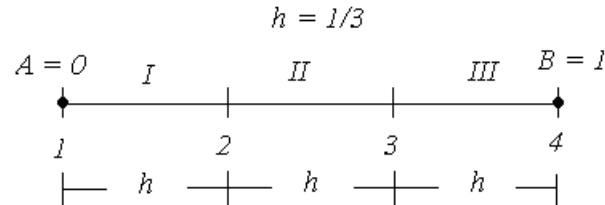


Figura - 6. 7. Intervalo de aplicação do Método de Galerkin

Vamos agora calcular as funções de interpolação local para o elemento  $e$ :

$$N_i = N_i^e = 1 - \frac{\chi}{h^e} \quad (6.186)$$

$$N_j = N_j^e = \frac{\chi}{h^e} \quad (6.187)$$

Onde

$$\chi = x - x_i \quad ; \quad h^e = x_j - x_i \quad ; \quad 0 \leq x \leq h^e \quad (6.188)$$

Para o:

i) ELEMENTO I:

$$0 \leq x \leq h \quad (6.189)$$

Onde:

$$N_1 = 1 - \frac{x}{h} \quad (6.190)$$

e

$$N_2 = \frac{x}{h} \quad (6.191)$$

A formação dos elementos do vetor  $\underset{\sim}{f}_I$  é dado por:

$$\begin{aligned} f^I_1 &= \left[ N_1 \frac{d\bar{u}}{dx} \right]_{x=x_1}^{x=x_2} - 4 \int_0^h N_1 x dx = \\ &= \left[ N_1 \frac{d\bar{u}}{dx} \right]_{x=x_1}^{x=x_2} - 4 \int_0^h \left( 1 - \frac{x}{h} \right) x dx = \\ &= \left[ N_1 \frac{d\bar{u}}{dx} \right]_{x=x_1}^{x=x_2} - 4 \frac{h^2}{6} \end{aligned} \quad (6.192)$$

E

$$\begin{aligned} f^I_2 &= \left[ N_2 \frac{d\bar{u}}{dx} \right]_{x=x_1}^{x=x_2} - 4 \int_0^h N_2 x dx = \\ &= \left[ N_2 \frac{d\bar{u}}{dx} \right]_{x=x_1}^{x=x_2} - 4 \int_0^h \left( \frac{x}{h} \right) x dx \\ &= \left[ N_1 \frac{d\bar{u}}{dx} \right]_{x=x_1}^{x=x_2} - 4 \frac{h^3}{3} \end{aligned} \quad (6.193)$$

Logo



$$f_I = \begin{bmatrix} f_1^I \\ f_2^I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6. 194)$$

Ou

$$f_I = \begin{bmatrix} \left[ N_1 \frac{d\bar{u}}{dx} \right]_{x=x_1}^{x=x_2} - 4 \frac{h^2}{6} \\ \left[ N_1 \frac{d\bar{u}}{dx} \right]_{x=x_1}^{x=x_2} - 4 \frac{h^3}{3} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6. 195)$$

ii) ELEMENTO II:

$$h \leq x \leq 2h \quad (6. 196)$$

Onde:

$$\begin{aligned} N_i = N_2 &= 1 - \frac{(x - x_2)}{h} \\ N_2 &= 1 - \frac{(x - h)}{h} \\ N_2 &= 2 - \frac{x}{h} \end{aligned} \quad (6. 197)$$

e

$$N_j = N_3 = \frac{x - h}{h} \quad (6. 198)$$

A formação dos elementos do vetor  $f_{II}$  é dado por:

$$\begin{aligned}
f''_2 &= \left[ N_2 \frac{d\bar{u}}{dx} \right]_{x=x_2}^{x=x_3} - 4 \int_h^{2h} N_2 x dx = \\
&= \left[ N_2 \frac{d\bar{u}}{dx} \right]_{x=x_2}^{x=x_3} - 4 \int_h^{2h} \left( 2 - \frac{x}{h} \right) x dx \\
&= \left[ N_2 \frac{d\bar{u}}{dx} \right]_{x=x_2}^{x=x_3} - \frac{8h^2}{3}
\end{aligned} \tag{6.199}$$

E

$$\begin{aligned}
f''_3 &= \left[ N_3 \frac{d\bar{u}}{dx} \right]_{x=x_2}^{x=x_3} - 4 \int_h^{2h} N_3 x dx \\
&= \left[ N_3 \frac{d\bar{u}}{dx} \right]_{x=x_2}^{x=x_3} - 4 \int_0^{2h} \left( \frac{x}{h} - 1 \right) x dx \\
&= \left[ N_3 \frac{d\bar{u}}{dx} \right]_{x=x_2}^{x=x_3} - \frac{20h^2}{6}
\end{aligned} \tag{6.200}$$

Logo

$$f_{II} = \begin{bmatrix} 0 \\ f''_2 \\ f''_3 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{6.201}$$

Ou

$$f_{II} = \begin{bmatrix} 0 \\ \left[ N_3 \frac{d\bar{u}}{dx} \right]_{x=x_2}^{x=x_3} - 8 \frac{h^3}{3} \\ \left[ N_2 \frac{d\bar{u}}{dx} \right]_{x=x_2}^{x=x_3} - 20 \frac{h^2}{6} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{6.202}$$

iii) ELEMENTO III:

$$2h \leq x \leq 3h = 1 \quad (6.203)$$

Onde:

$$\begin{aligned} N_i = N_3 &= 1 - \frac{(x - x_3)}{h} \\ N_3 &= 1 - \frac{(x - 2h)}{h} \end{aligned} \quad (6.204)$$

$$N_3 = 3 - \frac{x}{h}$$

e

$$N_j = N_4 = \frac{x - 2h}{h} \quad (6.205)$$

A formação dos elementos do vetor  $f_{III}$  é dado por:

$$\begin{aligned} f_{III}^3 &= \left[ N_3 \frac{d\bar{u}}{dx} \right]_{x=x_3}^{x=x_4} - 4 \int_{2h}^{3h} N_3 x dx = \\ &= \left[ N_3 \frac{d\bar{u}}{dx} \right]_{x=x_3}^{x=x_4} - 4 \int_{2h}^{3h} \left( 3 - \frac{x}{h} \right) x dx \\ &= \left[ N_3 \frac{d\bar{u}}{dx} \right]_{x=x_3}^{x=x_4} - \frac{28h^2}{6} \end{aligned} \quad (6.206)$$

E

$$\begin{aligned} f_{III}^4 &= \left[ N_4 \frac{d\bar{u}}{dx} \right]_{x=x_3}^{x=x_4} - 4 \int_{2h}^{3h} N_4 x dx = \\ &= \left[ N_4 \frac{d\bar{u}}{dx} \right]_{x=x_3}^{x=x_4} - 4 \int_{2h}^{3h} \left( \frac{x}{h} - 2 \right) x dx = \\ &= \left[ N_4 \frac{d\bar{u}}{dx} \right]_{x=x_3}^{x=x_4} - \frac{16h^2}{3} \end{aligned} \quad (6.207)$$

Logo

$$f_{III} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ f_3^{III} \\ f_4^{III} \end{bmatrix} \quad (6.208)$$

Ou

$$f_{III} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \left[ N_3 \frac{d\bar{u}}{dx} \right]_{x=x_3}^{x=x_4} - \frac{28h^2}{6} \\ \left[ N_4 \frac{d\bar{u}}{dx} \right]_{x=x_3}^{x=x_4} - \frac{16h^3}{3} \end{bmatrix} \quad (6.209)$$

Cujas contribuições são:

$$\begin{bmatrix} f_1^I \\ f_2^I + f_2^{II} \\ f_3^{II} + f_3^{III} \\ f_4^{III} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{d\bar{y}}{dx} \Big|_{x=0} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{dy}{dx} \Big|_{x=1} \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} -\frac{h^2}{6} \\ \left( \frac{h^2}{3} + \frac{2h^2}{3} \right) \\ \left( \frac{5h^2}{6} + \frac{7h^2}{6} \right) \\ \frac{4h^2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{d\bar{y}}{dx} \Big|_{x=0} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{dy}{dx} \Big|_{x=1} \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} \frac{h^2}{6} \\ h^2 \\ 2h^2 \\ \frac{4h^2}{3} \end{bmatrix} \quad (6.210)$$

iv) MONTAGEM DA MATRIZ GLOBAL

O vetor  $f_{\sim}$  global é definido como:  $f_{\sim} = \left[ N_l \frac{d\bar{u}}{dx} \right]_{x=0}^{x=1} - 4 \int_0^1 N_l x dx$ , ou seja:

$$f_l = \begin{bmatrix} f_1^I \\ f_2^I + f_2^{II} \\ f_3^{II} + f_3^{III} \\ f_4^{III} \end{bmatrix} \quad (6.211)$$

logo

$$f \sim \begin{bmatrix} -4 \left[ N_1 \frac{d\bar{u}}{dx} \right]_{x=0} & -4 \int_0^1 N_1 x dx \\ -4 \int_0^h N_2 x dx & -4 \int_h^{2h} N_3 x dx \\ -4 \int_h^{2h} N_3 x dx & -4 \int_{2h}^{3h} N_4 x dx \\ -4 \left[ N_4 \frac{d\bar{u}}{dx} \right]_{x=1} & -4 \int_{2h}^{3h=1} N_4 x dx \end{bmatrix} \quad (6.212)$$

Agrupando as matrizes  $K^I, K^{II}, K^{III}$  dos elementos para formar a matriz global, encontra-se:

$$\begin{bmatrix} \left( \frac{1}{h} + \frac{4h}{3} \right) & \left( -\frac{1}{h} + \frac{2h}{3} \right) & 0 & 0 \\ \left( -\frac{1}{h} + \frac{2h}{3} \right) & 2 \left( \frac{1}{h} + \frac{4h}{3} \right) & \left( -\frac{1}{h} + \frac{2h}{3} \right) & 0 \\ 0 & \left( -\frac{1}{h} + \frac{2h}{3} \right) & 2 \left( \frac{1}{h} + \frac{4h}{3} \right) & \left( -\frac{1}{h} + \frac{2h}{3} \right) \\ 0 & 0 & \left( -\frac{1}{h} + \frac{2h}{3} \right) & \left( \frac{1}{h} + \frac{4h}{3} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \\ \bar{y}_3 \\ \bar{y}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{d\bar{y}}{dx} \Big|_{x=0} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{d\bar{y}}{dx} \Big|_{x=1} \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} \frac{h^2}{6} \\ h^2 \\ \frac{2h^2}{3} \\ \frac{4h^2}{3} \end{bmatrix} \quad (6.213)$$

## V) RESOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES

Os valores de  $\bar{y}_1$  e  $\bar{y}_2$  são iguais aos valores prescritos. Portanto, são valores conhecidos e as linhas 1 e 4 podem ser removidas. Remova somente essas linhas, não remova as colunas, e utilize o sistema regular de equações que ficar. Substituindo-se os valores conhecidos  $\bar{y}_1 = 0$  e  $\bar{y}_4 = 1$  nas outras equações, o sistema de equações se reduz a:

$$\begin{aligned} 2 \left( \frac{1}{h} + \frac{4h}{3} \right) \bar{y}_2 + \left( -\frac{1}{h} + \frac{2h}{3} \right) \bar{y}_3 &= -4h^2 \\ \left( -\frac{1}{h} + \frac{2h}{3} \right) \bar{y}_2 + 2 \left( \frac{1}{h} + \frac{4h}{3} \right) \bar{y}_3 &= -8h^2 \end{aligned} \quad (6.214)$$

Substituindo-se  $h = 1/3$ , obtém-se:

$$\begin{aligned}\frac{62}{9}\bar{y}_2 - \frac{25}{9}\bar{y}_3 &= -\frac{4}{9} \\ -\frac{25}{9}\bar{y}_2 + \frac{62}{9}\bar{y}_3 &= -\frac{8}{9}\end{aligned}\tag{6. 215}$$

Resolvendo, encontra-se:

$$\begin{aligned}\bar{y}_2 &= -0,139174 \\ \bar{y}_3 &= -0,181515\end{aligned}\tag{6. 216}$$

## 6. 6 – Enfoque Variacional

Dado um problema descrito por um *funcional*, isto é, que permite uma *formulação variacional* a ser desenvolvido pelo MEF.

$$I = \int_{x_A}^{x_B} F d\Omega \quad (6. 217)$$

Se as incógnitas nos *pontos nodais* correspondem a uma função  $u$  que torna estacionário (extremiza) o *funcional* e atende às *condições de contorno essenciais* do problema, pode-se admitir que o valor do *funcional* em todo o domínio do problema,  $F(u)$ , será igual à soma dos valores dos funcionais calculados em cada elemento, isto é:

$$F = \sum_{e=1}^M F^e(u) \quad (6. 218)$$

onde  $M$  é o número de elementos finitos nos quais o *domínio original* foi discretizado. Logo

$$I = \sum_{e=1}^M I^e \quad (6. 219)$$

onde

$$I^e = \int_{x_i}^{x_j} F^e(u_k) dx \quad (6. 220)$$

Admite-se que, para um elemento genérico  $e$ , a função  $u$  passa a ser descrito como:

$$u = \sum_{k=1}^{r_e} \alpha_k^e \phi_k^e \quad (6. 221)$$

Onde  $\alpha_k^e$  são parâmetros ajustáveis ou não conhecidos (incógnitas) e  $\phi_k^e$  são *funções de forma* conhecidas, escolhidas de maneira semelhante à do método de Rayleigh-Ritz. Em notação matricial temos:

$$u = A \alpha \quad (6. 222)$$

Onde

$$\underset{\sim}{A} = \begin{bmatrix} \phi_1^e & \phi_2^e & \dots & \phi_{re}^e \end{bmatrix} \quad (6.223)$$

E

$$\underset{\sim}{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_1^e \\ \alpha_2^e \\ \vdots \\ \alpha_{re}^e \end{bmatrix} \quad (6.224)$$

Substituindo a expressão (6.221) em (6.218), obtém-se o funcional aproximado:

$$\bar{F} = \sum_{e=1}^M F^e(\alpha_k^e) \quad k=1,2,3,\dots,r_e \quad (6.225)$$

e, agora, as únicas incógnitas são os parâmetros  $\alpha_k^e$ .

Note que os parâmetros  $\alpha_k^e$  diferem de elemento a elemento, as funções  $\phi_k^e$  também podem diferir de elemento a elemento embora, em geral as funções  $\phi_k^e$  adotadas sejam as mesmas.

Aplicando a *condição de ponto estacionário* (ou *condição de extremização*) ao *funcional aproximado*  $\bar{F}$ , pode-se escrever:

$$\delta \bar{F} = 0 \quad (6.226)$$

$$\delta \bar{F} = \sum_{e=1}^M \delta F^e(\alpha_k^e) = 0 \quad (6.227)$$

Ou ainda

$$\delta \bar{F} = \sum_{e=1}^M \sum_{k=1}^{r_e} \frac{\partial F^e}{\partial \alpha_k^e} \delta \alpha_k^e = 0 \quad (6.228)$$

Como as variações  $\delta \alpha_k^e$  são arbitrárias, a expressão (6.228) se reduz a:

$$\frac{\partial F^e}{\partial \alpha_k^e} = 0 \begin{cases} e = 1, 2, \dots, M \\ k = 1, 2, \dots, \Omega_e \end{cases} \quad (6.229)$$



A expressão (6. 229) representa um sistema de equações cuja solução fornece os valores dos parâmetros  $\alpha_k^e$ , a partir dos quais, com o emprego de (6. 221), o valor da incógnita  $u$  pode ser calculado em qualquer ponto do elemento.

A expressão (6. 229) representa um esquema de solução que pode ser denominado Rayleigh-Ritz localizado (ou local). No *método dos elementos finitos*, no lugar dos parâmetros  $\alpha_k^e$ , as incógnitas são os valores da função  $u$  nos *pontos nodais da malha de elementos finitos* ( $u = \sum_{i=1}^n \alpha_i \phi_i$ ). Partindo da expressão (6. 222) aplicada aos  $n_e$  nós de um elemento qualquer; pode-se escrever:

$$\begin{aligned} u_1 &= A_1 \alpha \\ u_2 &= A_2 \alpha \\ &\vdots \\ u_{n_e} &= A_{n_e} \alpha \end{aligned} \quad (6. 230)$$

Onde  $u_i$  é o valor de  $u$  no nó  $i$  do elemento  $e$ ,  $A_i$  representa a matriz  $A$  com as *funções de forma* calculados de acordo com a posição do nó  $i$ , isto é, correspondentes às coordenadas do nó  $i$ . De maneira compacta,

$$U^e = C \alpha \quad (6. 231)$$

Onde

$$U^e = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n_e} \end{bmatrix} \quad (6. 232)$$

É o vetor dos valores nodais (incógnitas) de  $u$  no elemento  $e$ . A matriz

$$\underset{\sim}{C} = \begin{bmatrix} A \\ \underset{\sim}{1} \\ A \\ \underset{\sim}{2} \\ \vdots \\ A \\ \underset{\sim}{n_e} \end{bmatrix} \quad (6.233)$$

é uma matriz com as *funções de forma* que estão calculadas para as posições (coordenadas) correspondentes aos pontos nodais.

Se as *funções de forma* são selecionadas de maneira adequada e se o número de nós do elemento é igual ao número de parâmetros, ou seja, se

$$n_e = r_e \quad (6.234)$$

A matriz  $\underset{\sim}{C}$  será quadrada e regular. Portanto, de (6.231), pode-se escrever:

$$\underset{\sim}{\alpha} = \underset{\sim}{C}^{-1} \underset{\sim}{U}^e \quad (6.235)$$

Substituindo (6.235) em (6.222) temos:

$$\bar{u} = \underset{\sim}{A} \underset{\sim}{\alpha} = \underset{\sim}{A} \underset{\sim}{C}^{-1} \underset{\sim}{U}^e = \underset{\sim}{N} \underset{\sim}{U}^e \quad (6.236)$$

Onde

$$\underset{\sim}{N} = \underset{\sim}{A} \underset{\sim}{C}^{-1} \quad (6.237)$$

Assim, os parâmetros  $\alpha_k^e$  são eliminados e o valor da variável,  $u$ , em qualquer ponto de um elemento, pode ser calculado em função dos valores nodais (ainda desconhecidos ou incógnitas).

Para evitar a inversão da matriz  $\underset{\sim}{C}$  é importante obter a matriz  $\underset{\sim}{N}$  diretamente. Se  $\underset{\sim}{N}$  é determinada conveniente, então, considerar que:

$$\underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{N} \underset{\sim}{U}^e = \sum_{k=1}^{n_e} \phi_k^e u_k \quad (6.238)$$

As funções de forma em (6.238) se referem a valores nodais de  $u$  e não de parâmetros  $\alpha_k^e$

Adotando uma variação linear, pode-se escrever, para cada elemento:

$$\bar{u}_k = \alpha_i + \alpha_j \chi_k = \begin{bmatrix} 1 & \chi_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_i \\ \alpha_j \end{bmatrix}. \quad (6.239)$$

Onde

$$\chi_k = x - x_k. \quad (6.240)$$

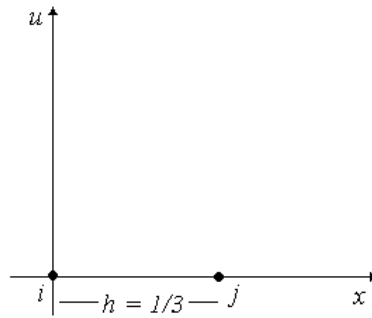


Figura - 6. 8.

Aplicando aos pontos nodais  $i$  e  $j$ , temos:

$$\begin{aligned} u_i &= \alpha_i \\ u_j &= \alpha_i + \alpha_j h^e \end{aligned} \quad (6.241)$$

Ou

$$\underset{\sim}{U}^e = \underset{\sim}{C} \underset{\sim}{\alpha} \quad (6.242)$$

logo

$$\underset{\sim}{U}^e = \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & h^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_i \\ \alpha_j \end{bmatrix} = \underset{\sim}{C} \underset{\sim}{\alpha} \quad (6.243)$$

Invertendo a expressão (6. 265) anterior, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} \alpha_i \\ \alpha_j \end{bmatrix} = \frac{1}{h^e} \begin{bmatrix} h^e & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix} \quad (6.244)$$

Combinando-se as expressões (6. 262) com (6. 266), tem-se:

$$\bar{u}_e = \begin{bmatrix} 1 & \chi_e \end{bmatrix} \frac{1}{h^e} \begin{bmatrix} h^e & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix} \quad (6.245)$$

Ou

$$\bar{u}_e = \frac{1}{h^e} \begin{bmatrix} (h^e - \chi_e) & \chi_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix} = \left(1 - \frac{\chi_e}{h^e}\right) u_i + \frac{\chi_e}{h^e} u_j \quad (6.246)$$

Ou ainda

$$\bar{u}_e = N_i^e u_i + N_j^e u_j \quad (6.247)$$

Onde

$$\begin{cases} N_i^e = 1 - \frac{\chi_e}{h^e} \\ N_j^e = \frac{\chi_e}{h^e} \end{cases} \quad 0 \leq x \leq h \quad (6.248)$$

A derivada primeira de  $\bar{u}_e$  é:

$$\frac{d\bar{u}_e}{dx} = \frac{dN_i^e}{dx} u_i + \frac{dN_j^e}{dx} u_j \quad (6.249)$$

E

$$\frac{d\bar{u}_e}{dx} = -\frac{1}{h^e} \left(1 - \frac{dx_e}{dx}\right) u_i + \frac{1}{h^e} \left(1 - \frac{dx_e}{dx}\right) u_j = \begin{bmatrix} -\frac{1}{h^e} & \frac{1}{h^e} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix} \left(1 - \frac{dx_e}{dx}\right) \quad (6.250)$$

Ou

$$\frac{d\bar{u}_e}{dx} = N_{\underset{\sim}{x}} U_{\underset{\sim}{}}^e = U_{\underset{\sim}{}}^{e,T} N_{\underset{\sim}{x}}^T \quad (6.251)$$

onde

$$\frac{dN_{i,j}^e}{dx} = N_{\underset{\sim}{x}} \quad (6.252)$$

Para o cálculo do funcional deve-se calcular  $(du_e / dx)^2$ :

$$\left( \frac{d\bar{u}_e}{dx} \right)^2 = U_{\sim}^{e,T} N_{\sim x}^T N_{\sim x} U_{\sim}^e \quad (6. 253)$$

e  $u_e^2$ ,

$$\bar{u}_e^2 = U_{\sim}^{e,T} N_{\sim}^T N_{\sim} U_{\sim}^e \quad (6. 254)$$

Substituindo (6. 238) em (6. 218), tem-se um funcional aproximado,  $\bar{I}$ , que é função somente dos valores nodais  $u_e$ .

Onde o funcional de um elemento é:

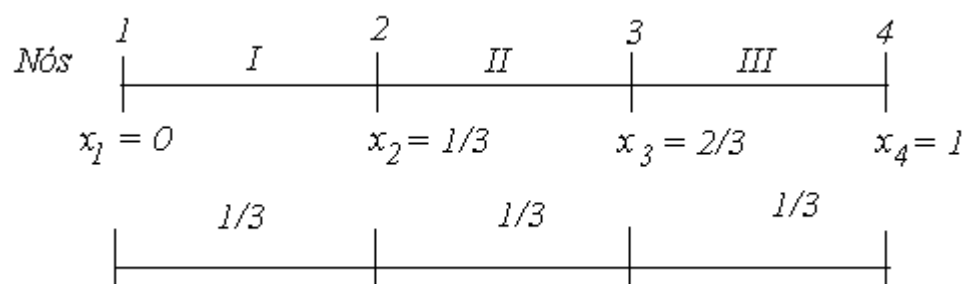
$$\begin{aligned} I &= \int_{x_A}^{x_B} F d\Omega = \int_{x_i}^{x_j} \sum_{e=1}^M F^e d\Omega_e \\ I &= \sum_{e=1}^M I^e = \sum_{e=1}^M \int_{x_i}^{x_j} F^e(u_k) dx \end{aligned} \quad (6. 255)$$

A condição de ponto estacionário será dada por:

$$\delta \bar{F} = \sum_{e=1}^M \delta F^e(u_k) = \sum_{e=1}^M \sum_{k=1}^{r_e} \frac{\partial F^e}{\partial \alpha_k^e} \delta \alpha_k^e = 0 \quad (6. 256)$$

A expressão (6. 256) representa um sistema de equações cuja solução fornece os valores nodais  $u_k$ . Conhecidos os valores nodais, o valor de  $u$ , em qualquer ponto de qualquer elemento, é determinado. Ou seja, da condição de ponto estacionário temos:

$$\begin{aligned} \delta I &= \int_{x_A}^{x_B} \delta F d\Omega = \int_{x_i}^{x_j} \sum_{e=1}^M \delta F^e d\Omega_e \\ \delta I &= \sum_{e=1}^M \delta I^e = \sum_{e=1}^M \int_{x_i}^{x_j} \delta F^e(u_k) dx \end{aligned} \quad (6. 257)$$



Como o domínio foi dividido em três subdomínios, pode-se escrever:

$$\bar{I} = I^1 + I^2 + I^3 \quad (6. 258)$$

E, portanto,

$$\delta \bar{I} = \delta I^1 + \delta I^2 + \delta I^3 \quad (6. 259)$$

## 6.7 – Exemplos e Aplicações

### 6.7.1 – Exemplo satisfazendo condições de contorno essenciais:

Dado o funcional

$$I = \int_0^1 \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{d^2 u}{dx^2} \right)^2 + \frac{u^2}{2} \right] dx. \quad (6.260)$$

Obter uma solução aproximada que atenda às *condições de contorno essenciais*:

$$u|_{x=0} = 0 \quad , \quad u|_{x=1} = 1. \quad (6.261)$$

Dividir o intervalo (domínio)  $[0 ; 1]$  em três sub-intervalos (subdomínios) de mesmo comprimento.

*Solução*

O primeiro passo consiste em escolher qual a variação de  $u$  em cada elemento.

Adotando uma variação linear, pode-se escrever, para cada elemento:

$$\bar{u} = \alpha_1 + \alpha_2 x = [1 \quad x] \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}. \quad (6.262)$$

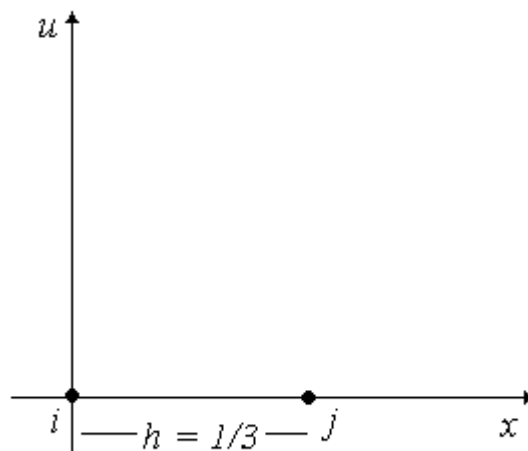


Figura - 6. 9.

Aplicando aos pontos nodais  $i$  e  $j$ , temos:

$$\begin{aligned} u_i &= \alpha_1 \\ u_j &= \alpha_1 + \alpha_2 h \end{aligned} \quad (6.263)$$

Ou

$$\underset{\sim}{U}^e = \underset{\sim}{C} \underset{\sim}{\alpha} \quad (6.264)$$

logo

$$\underset{\sim}{U}^e = \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \underset{\sim}{C} \underset{\sim}{\alpha} \quad (6.265)$$

Invertendo a expressão (6.265) anterior, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} h & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix} \quad (6.266)$$

Combinando-se as expressões (6.262) com (6.266), tem-se:

$$\bar{u} = \begin{bmatrix} 1 & x \end{bmatrix} \frac{1}{h} \begin{bmatrix} h & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix} \quad (6.267)$$

Ou

$$\bar{u} = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} (h-x) & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix} = \left(1 - \frac{x}{h}\right) u_i + \frac{x}{h} u_j \quad (6.268)$$

Ou ainda

$$\bar{u} = N_i u_i + N_j u_j \quad (6.269)$$

Onde

$$\begin{cases} N_i = 1 - \frac{x}{h} \\ N_j = \frac{x}{h} \end{cases} \quad 0 \leq x \leq h \quad (6.270)$$

A derivada primeira de  $u$  é:



$$\frac{d\bar{u}}{dx} = \frac{dN_i}{dx} u_i + \frac{dN_j}{dx} u_j \quad (6.271)$$

E

$$\frac{d\bar{u}}{dx} = -\frac{1}{h} u_i + \frac{1}{h} u_j = \begin{bmatrix} -\frac{1}{h} & \frac{1}{h} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix} \quad (6.272)$$

Ou

$$\frac{d\bar{u}}{dx} = N_x U^e = U^{e,T} N_x^T \quad (6.273)$$

onde

$$\frac{dN_{i,j}}{dx} = N_x \quad (6.274)$$

Para o cálculo do funcional deve-se calcular  $(du/dx)^2$ :

$$\left( \frac{d\bar{u}}{dx} \right)^2 = U^{e,T} N_x^T N_x U^e \quad (6.275)$$

e  $u^2$ ,

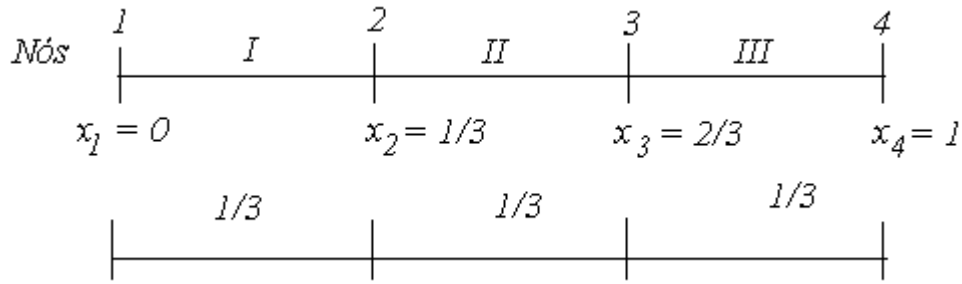
$$\bar{u}^2 = U^{e,T} N^T N U^e \quad (6.276)$$

Onde o funcional de um elemento é:

$$I^e = \frac{1}{2} \int_{x_i}^{x_j} \left[ U^{e,T} N_x^T N_x U^e + U^{e,T} N^T N U^e \right] dx \quad (6.277)$$

Da condição de ponto estacionário

$$\delta I^e = \frac{1}{2} \int_{x_i}^{x_j} \left[ \delta U^{e,T} N_x^T N_x U^e + \delta U^{e,T} N^T N U^e \right] dx \quad (6.278)$$



Como o domínio foi dividido em três subdomínios, pode-se escrever:

$$\bar{I} = I^1 + I^2 + I^3 \quad (6.279)$$

E, portanto,

$$\delta \bar{I} = \delta I^1 + \delta I^2 + \delta I^3 \quad (6.280)$$

Vejamos isto de forma prática a partir da equação (6.271). Particularizando a notação em termos do exemplo, temos:

$$\frac{d\bar{u}}{dx} = -\frac{1}{h}u_i + \frac{1}{h}u_j = \frac{u_j - u_i}{h} \quad (6.281)$$

E

$$\left(\frac{d\bar{u}}{dx}\right)^2 = \frac{1}{h}(u_i^2 - 2u_i u_j + u_j^2) \quad (6.282)$$

Se

$$\bar{u} = \left(1 - \frac{x}{h}\right)u_i + \frac{x}{h}u_j \quad (6.283)$$

então

$$\bar{u}^2 = \left(1 - \frac{x}{h}\right)^2 u_i^2 - 2\left(1 - \frac{x}{h}\right)\frac{x}{h}u_i u_j + \left(\frac{x}{h}\right)^2 u_j^2 \quad (6.284)$$

E

$$I = \frac{1}{2} \int_0^h \left\{ \frac{(u_j^2 - 2u_i u_j + u_i^2)}{h^2} + \left[ \left(1 - \frac{x}{h}\right)^2 u_i^2 - 2\left(1 - \frac{x}{h}\right)\frac{x}{h}u_i u_j + \left(\frac{x}{h}\right)^2 u_j^2 \right] \right\} dx \quad (6.285)$$

$$I = \frac{1}{2} \frac{(u_j^2 - 2u_i u_j + u_i^2)}{h^2} x \Big|_0^1 + \frac{1}{2} \int_0^h \left[ \left( 1 - \frac{2x}{h} + \frac{x^2}{h^2} \right) u_i^2 - 2 \left( \frac{x}{h} - \frac{x^2}{h^2} \right) u_i u_j + \left( \frac{x}{h} \right)^2 u_j^2 \right] dx \quad (6.286)$$

$$I = \frac{(u_j^2 - 2u_i u_j + u_i^2)}{2h} + \frac{1}{2} \left[ x - \frac{2x^2}{2h} + \frac{x^3}{3h^2} \right]_0^h u_i^2 - 2 \left[ \frac{x^2}{2h} - \frac{x^3}{3h^2} \right]_0^h u_i u_j + \frac{x^3}{3h^2} \Big|_0^h u_j^2 \quad (6.287)$$

$$I = \frac{1}{2h} (u_j^2 - 2u_i u_j + u_i^2) + \frac{1}{2} \left[ \frac{h}{3} u_i^2 + 2 \frac{h}{6} u_i u_j + \frac{h}{3} u_j^2 \right] \quad (6.288)$$

Então as condições são:

$$\frac{\partial I}{\partial u_i} = \frac{1}{2h} (2u_i - 2u_j) + \frac{1}{2} \left[ \frac{2h}{3} u_i + \frac{h}{3} u_j \right] = 0 \quad (6.289)$$

$$\frac{\partial I}{\partial u_j} = \frac{1}{2h} (-2u_i + 2u_j) + \frac{1}{2} \left[ \frac{2h}{3} u_i + \frac{h}{3} u_j \right] = 0 \quad (6.290)$$

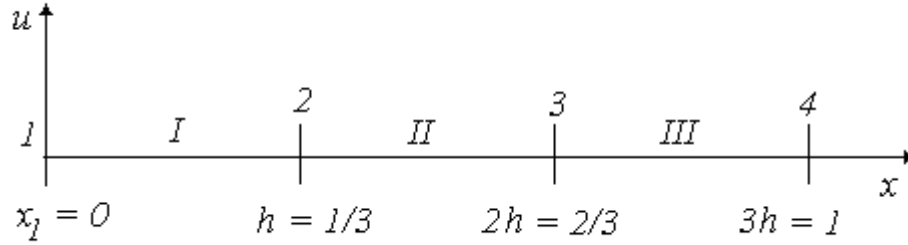
$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{h} + \frac{h}{3} \right) u_i + \left( -\frac{1}{h} + \frac{h}{6} \right) u_j &= 0 \\ \left( -\frac{1}{h} + \frac{h}{6} \right) u_i + \left( \frac{1}{h} + \frac{h}{3} \right) u_j &= 0 \end{aligned} \quad (6.291)$$

Na forma matricial temos:

$$\begin{bmatrix} \left( \frac{1}{h} + \frac{h}{3} \right) & \left( -\frac{1}{h} + \frac{h}{6} \right) \\ \left( -\frac{1}{h} + \frac{h}{6} \right) & \left( \frac{1}{h} + \frac{h}{3} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.292)$$

onde

$$U_{\sim}^1 = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} ; \quad U_{\sim}^2 = \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} ; U_{\sim}^3 = \begin{bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} \quad (6.293)$$



Considerando que o elemento 1 é limitado pelos nós 1 e 2, correspondentes a  $x = 0$  e  $x = h$ , pode-se escrever:

$$K_{\sim}^1 U_{\sim}^1 = 0 \quad (6.294)$$

ou

$$\begin{bmatrix} \left( \frac{1}{h} + \frac{h}{3} \right) & \left( -\frac{1}{h} + \frac{h}{6} \right) \\ \left( -\frac{1}{h} + \frac{h}{6} \right) & \left( \frac{1}{h} + \frac{h}{3} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.295)$$

Para o elemento 2, limitado pelos nós 2 e 3, correspondentes a  $x = h$  e  $x = 2h$ .

Assim:

$$K_{\sim}^2 U_{\sim}^2 = 0 \quad (6.296)$$

ou

$$\begin{bmatrix} \left( \frac{1}{h} + \frac{h}{3} \right) & \left( -\frac{1}{h} + \frac{h}{6} \right) \\ \left( -\frac{1}{h} + \frac{h}{6} \right) & \left( \frac{1}{h} + \frac{h}{3} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.297)$$

Para o elemento 3, limitado pelos nós 3 e 4, correspondentes a  $x = 2h$  e  $x = 3h$ .

Assim:

$$K_{\sim}^3 U_{\sim}^3 = 0 \quad (6.298)$$

ou

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{1}{h} + \frac{h}{3}\right) & \left(-\frac{1}{h} + \frac{h}{6}\right) \\ \left(-\frac{1}{h} + \frac{h}{6}\right) & \left(\frac{1}{h} + \frac{h}{3}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.299)$$

Observe que:

$$K_{\sim}^1 = K_{\sim}^2 = K_{\sim}^3 \quad (6.300)$$

Agrupando as matrizes

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{1}{h} + \frac{h}{3}\right) & \left(-\frac{1}{h} + \frac{h}{6}\right) & 0 & 0 \\ \left(-\frac{1}{h} + \frac{h}{6}\right) & 2\left(\frac{1}{h} + \frac{h}{6}\right) & \left(-\frac{1}{h} + \frac{h}{6}\right) & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{h} + \frac{h}{6}\right) & 2\left(\frac{1}{h} + \frac{h}{3}\right) & \left(-\frac{1}{h} + \frac{h}{6}\right) \\ 0 & 0 & \left(-\frac{1}{h} + \frac{h}{6}\right) & \left(\frac{1}{h} + \frac{h}{3}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.301)$$

Como  $u_1 = 0$  e  $u_4 = 1$ , o sistema se reduz à:

$$\begin{aligned} 2\left(\frac{1}{h} + \frac{h}{3}\right)u_2 + \left(-\frac{1}{h} + \frac{h}{6}\right)u_3 &= 0 \\ \left(-\frac{1}{h} + \frac{h}{6}\right)u_2 + 2\left(\frac{1}{h} + \frac{h}{3}\right)u_3 &= -\left(-\frac{1}{h} + \frac{h}{6}\right) \end{aligned} \quad (6.302)$$

Substituindo  $h = 1/3$  obtém-se:

$$\begin{aligned} u_2 &= 0,288546 \\ u_3 &= 0,609750 \end{aligned} \quad (6.303)$$

A solução analítica é:

$$u(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e - e^{-1}}. \quad (6.304)$$

e

$$\begin{aligned} u(x=1/3) &= 0,288921 \\ u(x=2/3) &= 0,610243 \end{aligned} \quad (6.305)$$

## 6.8 – Um Caso Especial de Elementos Finitos

Seja a *sentença de resíduos ponderados* de caráter global (onde as funções de aproximação são válidas em  $\Omega$  e em  $\Gamma$ ):

$$\int_{\Omega} w_l \varepsilon_{\Omega} d\Omega + \int_{\Gamma} \bar{w}_l \varepsilon_{\Gamma} d\Gamma = 0. \quad (6.306)$$

Para o caso onde os erros cometidos são dados por:

No domínio:

$$\varepsilon_{\Omega} = \mathbf{L}(\bar{u}) - b \quad (6.307)$$

E no contorno:

$$\varepsilon_{\Gamma} = \mathbf{S}(\bar{u}) - g \quad (6.308)$$

Sendo:

$$\bar{u} = \sum_{m=1}^{M+1} u_m N_m \quad (6.309)$$

no domínio:

$$\varepsilon_{\Omega} = \mathbf{L}\left(\sum_{m=1}^{M+1} u_m N_m\right) - b \quad em \Omega \quad (6.310)$$

e no contorno:

$$\varepsilon_{\Gamma} = \mathbf{S}\left(\sum_{m=1}^{M+1} u_m N_m\right) - g \quad em \Gamma \quad (6.311)$$

Como  $\mathbf{L}$  e  $\mathbf{S}$  são operadores lineares temos:

no domínio:

$$\varepsilon_{\Omega} = \sum_{m=1}^{M+1} u_m \mathbf{L}(N_m) - b \quad em \Omega \quad (6.312)$$

e no contorno:

$$\varepsilon_{\Gamma} = \sum_{m=1}^{M+1} u_m \mathbf{S}(N_m) - g \quad em \Gamma \quad (6.313)$$

Se o domínio  $\Omega$  é dividido em  $E$  subdomínios,  $\Omega_e$ , tais que:

$$\Omega = \sum_{e=1}^E \Omega_e \quad (6.314)$$

E se, em correspondência a divisão do domínio, o contorno,  $\Gamma$ , é dividido em  $B$  partes,  $\Gamma_b$  tais que:

$$\Gamma = \sum_{b=1}^B \Gamma_b. \quad (6.315)$$

A *sentença de resíduos ponderados* de carácter global é substituída por:

$$\sum_{e=1}^E \int_{\Omega_e} w_{le} \varepsilon_{\Omega_e} d\Omega_e + \sum_{b=1}^B \int_{\Gamma_b} \bar{w}_{lb} \varepsilon_{\Gamma_b} d\Gamma_b = 0 \quad (6.316)$$

onde as funções de aproximação são definidas localmente, sendo válidas somente para  $\Omega_e$  e  $\Gamma_b$  não mais para  $\Omega$  e  $\Gamma$ . Logo, a *sentença de resíduos ponderados local* é dada por:

$$\int_{\Omega_e} w_{le} \varepsilon_{\Omega_e} d\Omega_e + \int_{\Gamma_b} \bar{w}_{lb} \varepsilon_{\Gamma_b} d\Gamma_b = 0 \quad (6.317)$$

Portanto, temos:

$$\varepsilon_{\Omega_e} = \sum_{m=1}^{M+1} u_m \mathbf{L}(N_m) - \bar{b} \quad \text{em } \Omega_e \quad (6.318)$$

e no contorno

$$\varepsilon_{\Gamma_e} = \sum_{m=1}^{M+1} u_m \mathbf{S}(N_m) = \bar{g} \quad \text{em } \Gamma_b \quad (6.319)$$

A *sentença de resíduos ponderados global* fica:

$$\int_{\Omega_e} w_{le} \left[ \sum_{e=1}^E \sum_{m=1}^{M+1} u_m \mathbf{L}(N_m) - b \right] d\Omega_e = 0 \quad (6.320)$$

A *sentença de resíduos ponderados local* fica:

$$\int_{\Omega_e} w_{le} \left[ \sum_{m=1}^{M+1} u_m \mathbf{L}(N_m) - b \right] d\Omega_e = 0 \quad (6.321)$$



### 6.8.1 – Método da Colocação por Subdomínios Modificado

Se a função de ponderação  $w_l$  for a função Delta de Dirac temos:

$$\sum_{e=1}^E \int_{\Omega_e} \delta(x - x_l) \varepsilon_{\Omega_e} d\Omega_e + \sum_{b=1}^B \int_{\Gamma_b} \delta(x - x_l) \varepsilon_{\Gamma_b} d\Gamma_b = 0 \quad (6.322)$$

Temos:

$$\begin{aligned} \sum_{e=1}^E \int_{\Omega_e} \delta(x - x_l) \varepsilon_{\Omega_e} d\Omega_e &= \sum_{e=1}^E \varepsilon_{\Omega_e} \Big|_{x=x_l} \\ \sum_{b=1}^B \int_{\Gamma_b} \delta(x - x_l) \varepsilon_{\Gamma_b} d\Gamma_b &= \sum_{b=1}^B \varepsilon_{\Gamma_b} \Big|_{x=x_l} \end{aligned} \quad (6.323)$$

Logo, a sentença de resíduos ponderados fica:

$$\varepsilon_{\Omega_{el}} + \varepsilon_{\Gamma_{el}} = \left[ \sum_{e=1}^E \sum_{m=1}^{M+1} u_m \mathbf{L}(N_m)_{x=x_l} - b \right] + \left[ \sum_{b=1}^B \sum_{m=1}^{M+1} u_m \mathbf{S}(N_m)_{x=x_l} - g \right] = 0 \quad (6.324)$$

Para o caso do operador  $\mathbf{L}$  dado pela seguinte equação diferencial:

$$\frac{d^2 u(x)}{dx^2} - u = 0 \quad (6.325)$$

Definida em  $[0 ; 1]$  e com *condições de contorno naturais* dado pelo operador  $\mathbf{S}$ , temos:

$$\varepsilon_{\Omega_{el}} + \varepsilon_{\Gamma_{el}} = \sum_{m=1}^{M+1} u_m \left\{ \sum_{e=1}^E \left[ \frac{d^2 N_m}{dx^2} - N_m \right]_{x=x_l} + \sum_{b=1}^B \left[ \frac{dN_m}{dx} - g \right]_{x=x_l} \right\} = 0 \quad (6.326)$$

Para este caso precisamos definir derivadas de ordem superiores contínuas, isto nos leva a definir funções de interpolação para elementos finitos quadráticos. Ou se preferir, utilizamos elementos lineares, porém, é necessário utilizar a *Formulação Fraca dos Resíduos Ponderados*.

### *6.8.2 – Formulação Fraca do Método dos Resíduos Ponderados para os Elementos Finitos*

### 6.8.3 - Funções de Interpolação Local Quadráticas

Na sentença básica de resíduos ponderados aparecem derivadas de ordem dois, consequentemente, é necessário que as funções de aproximação possuam derivadas de ordem um contínuas. Neste caso, devemos utilizar elementos quadráticos para as funções de interpolação.

Adotando uma variação quadrática, pode-se escrever, para cada elemento:

$$\bar{u}_e = \alpha_i + \alpha_j \chi_e + \alpha_k \chi_e^2. \quad (6.327)$$

Ou matricialmente

$$\bar{u}_e = [1 \quad \chi_e \quad \chi_e^2] \begin{bmatrix} \alpha_i \\ \alpha_j \\ \alpha_k \end{bmatrix}. \quad (6.328)$$

Onde

$$\chi_e = x - x_e. \quad (6.329)$$

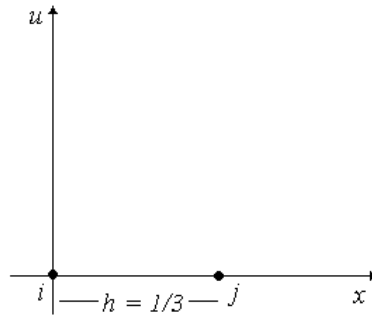


Figura - 6. 10. Elemento Finito Quadrático entre três pontos

Aplicando aos pontos nodais  $i$  e  $j$ , temos:

$$\begin{aligned} u_i &= \alpha_i \\ u_j &= \alpha_i + \alpha_j h^e \\ u_k &= \alpha_i + \alpha_j h^e + \alpha_k h^{e^2} \end{aligned} \quad (6.330)$$

Onde matricialmente temos:

$$\underset{\sim}{U}^e = \underset{\sim}{C} \underset{\sim}{\alpha} \quad (6.331)$$

ou

$$\underset{\sim}{U}^e = \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & h^e & 0 \\ 1 & h^e & h^{e^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_i \\ \alpha_j \\ \alpha_k \end{bmatrix} = \underset{\sim}{C} \underset{\sim}{\alpha}. \quad (6.332)$$

Invertendo a expressão (6.265) anterior, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} \alpha_i \\ \alpha_j \\ \alpha_k \end{bmatrix} = \frac{1}{h^{e^3}} \begin{bmatrix} h^{e^3} & 0 & 0 \\ -h^{e^2} & h^{e^2} & 0 \\ 0 & -h^e & h^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_k \end{bmatrix}. \quad (6.333)$$

Combinando-se as expressões (6.262) com (6.266), tem-se:

$$\bar{u}_e = [1 \quad \chi_e \quad \chi_e^2] \frac{1}{h^{e^3}} \begin{bmatrix} h^{e^3} & 0 & 0 \\ -h^{e^2} & h^{e^2} & 0 \\ 0 & -h^e & h^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_k \end{bmatrix} \quad (6.334)$$

Ou

$$\bar{u}_e = \left[ 1 - \frac{\chi_e}{h^e} \quad \frac{\chi_e}{h^e} - \frac{\chi_e^2}{h^{e^2}} \quad \frac{\chi_e^2}{h^{e^2}} \right] \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_k \end{bmatrix} \quad (6.335)$$

Logo

$$\bar{u}_e = (1 - \chi_e)u_i + \left( \frac{\chi_e}{h^e} - \frac{\chi_e^2}{h^{e^2}} \right)u_j + \frac{\chi_e^2}{h^{e^2}}u_k \quad (6.336)$$

Ou ainda

$$\bar{u}_e = N_i^e u_i + N_j^e u_j + N_k^e u_k \quad (6.337)$$

Onde

$$\begin{cases} N_i^e = 1 - \chi_e \\ N_j^e = \frac{\chi_e}{h^e} - \frac{\chi_e^2}{h^{e2}} \\ N_k^e = \frac{\chi_e^2}{h^{e2}} \end{cases} \quad 0 \leq x \leq h^e \quad (6.338)$$

A derivada primeira de  $\bar{u}_e$  é:

$$\frac{d\bar{u}_e}{dx} = \frac{dN_i^e}{dx} u_i + \frac{dN_j^e}{dx} u_j + \frac{dN_k^e}{dx} u_k \quad (6.339)$$

E

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{u}_e}{dx} &= -\frac{d\chi_e}{dx} u_i + \left[ \frac{1}{h^e} - \frac{2\chi_e}{h^{e2}} \right] \frac{d\chi_e}{dx} u_j + \frac{2\chi_e}{h^{e2}} \frac{d\chi_e}{dx} u_k \\ \frac{d\bar{u}_e}{dx} &= \begin{bmatrix} -1 & \left( \frac{1}{h^e} - \frac{2\chi_e}{h^{e2}} \right) & \frac{2\chi_e}{h^{e2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_k \end{bmatrix} \frac{d\chi_e}{dx} \end{aligned} \quad (6.340)$$

Ou matricialmente

$$\frac{d\bar{u}_e}{dx} = \underset{\sim}{N}_x U^e = \underset{\sim}{U}^{e,T} \underset{\sim}{N}_x^T \quad (6.341)$$

onde

$$\frac{dN_{i,j}^e}{dx} = \underset{\sim}{N}_x \quad (6.342)$$

Na formação do sistema de equações (6.42), as contribuições de um elemento típico  $e$ , associado aos nós  $i$  e  $j$ , quando se adota uma aproximação local quadrática, podem ser calculados de uma maneira geral, levando em conta a equação (6.38) e (6.43). Onde

$$\chi_i = x - x_i \quad ; \quad h^e = x_j - x_i \quad ; \quad 0 \leq x \leq h^e \quad (6.343)$$

Para o elemento  $e$ :

$$N_i = N_i^e = 1 - \chi_e = 1 - x + x_i \quad 0 \leq x \leq h^e \quad (6.344)$$

e

$$N_j = N_j^e = \frac{\chi_e}{h^e} - \frac{\chi_e^2}{h^{e2}} = \frac{(x - x_i)}{h^e} - \frac{(x - x_i)^2}{h^{e2}} \quad 0 \leq x \leq h^e \quad (6.345)$$

e

$$N_k = N_k^e = \frac{\chi_e^2}{h^{e2}} = \frac{(x - x_i)^2}{h^{e2}} \quad 0 \leq x \leq h^e \quad (6.346)$$

Cujas derivadas são:

$$\frac{dN_i}{dx} = -\frac{d\chi_e}{dx} \quad (6.347)$$

e

$$\frac{dN_j}{dx} = \frac{dN_j^e}{dx} = \left[ \frac{1}{h^e} - \frac{2\chi_e}{h^{e2}} \right] \frac{d\chi_e}{dx} = \left[ \frac{1}{h^e} - \frac{2(x - x_i)}{h^{e2}} \right] \left( 1 - \frac{dx_i}{dx} \right) \quad (6.348)$$

e

$$\frac{dN_k}{dx} = \frac{dN_k^e}{dx} = \frac{2\chi_e}{h^{e2}} \frac{d\chi_e}{dx} = \left[ \frac{2(x - x_i)}{h^{e2}} \right] \left( 1 - \frac{dx_i}{dx} \right) \quad (6.349)$$

E as derivadas segundas são:

$$\frac{d^2N_i}{dx^2} = \frac{d^2N_i^e}{dx^2} = -\frac{d^2\chi_e}{dx^2} = \frac{d^2x_i}{dx^2} \quad (6.350)$$

e

$$\frac{d^2N_j}{dx^2} = \frac{d^2N_j^e}{dx^2} = -\frac{2}{h^{e2}} \left( \frac{d\chi_e}{dx} \right)^2 + \left[ \frac{1}{h^e} - \frac{2\chi_e}{h^{e2}} \right] \frac{d^2\chi_e}{dx^2} = -\frac{2}{h^{e2}} \left( \frac{dx_i}{dx} \right)^2 + \left[ \frac{1}{h^e} - \frac{2x_i}{h^{e2}} \right] \frac{d^2x_i}{dx^2} \quad (6.351)$$

e

$$\frac{d^2N_k}{dx^2} = \frac{d^2N_k^e}{dx^2} = \frac{1}{h^{e2}} \left[ 2 \left( \frac{d\chi_e}{dx} \right)^2 + 2\chi_e \frac{d^2\chi_e}{dx^2} \right] = \frac{1}{h^{e2}} \left[ 2 \left( 1 - \frac{dx_i}{dx} \right)^2 - 2(x - x_i) \frac{d^2x_i}{dx^2} \right] \quad (6.352)$$

Observe que para um único elemento finito, temos:

$$\chi_e = h^e = x_j - x_i = x \quad (6.353)$$

E neste caso:

$$N_i = N_i^e = 1 - x \quad 0 \leq x \leq h^e \quad (6.354)$$

e

$$N_j = N_j^e = \frac{x}{h^e} - \frac{x^2}{h^{e2}} \quad 0 \leq x \leq h^e \quad (6.355)$$

e

$$N_k = N_k^e = \frac{x^2}{h^{e2}} \quad 0 \leq x \leq h^e \quad (6.356)$$

E as derivadas primeiras são:

$$\frac{dN_i}{dx} = \frac{dN_i^e}{dx} = -1 \quad (6.357)$$

e

$$\frac{dN_j}{dx} = \frac{dN_j^e}{dx} = \left[ \frac{1}{h^e} - \frac{2x}{h^{e2}} \right] \quad (6.358)$$

e

$$\frac{dN_k}{dx} = \frac{dN_k^e}{dx} = \frac{2\chi_e}{h^{e2}} \frac{d\chi_e}{dx} = \frac{2x}{h^{e2}} \quad (6.359)$$

E as derivadas segundas são:

$$\frac{d^2 N_i}{dx^2} = \frac{d^2 N_i^e}{dx^2} = \frac{d^2 \chi_e}{dx^2} = -\frac{d^2 x}{dx^2} = 0 \quad (6.360)$$

$$\frac{d^2 N_j}{dx^2} = \frac{d^2 N_j^e}{dx^2} = -\frac{2}{h^e} \left( \frac{d\chi_e}{dx} \right)^2 + \left[ \frac{1}{h^e} - \frac{2\chi_e}{h^{e^2}} \right] \frac{d^2 \chi_e}{dx^2} = -\frac{2}{h^e} \left( \frac{dx}{dx} \right)^2 + \left[ \frac{1}{h^e} - \frac{2x}{h^{e^2}} \right] \frac{d^2 x}{dx^2} = -\frac{2}{h^e} \quad (6.361)$$

e

$$\frac{d^2 N_k}{dx^2} = \frac{d^2 N_k^e}{dx^2} = \frac{1}{h^e} \left[ 2 \left( \frac{d\chi_e}{dx} \right)^2 + 2\chi_e \frac{d^2 \chi_e}{dx^2} \right] = \frac{1}{h^e} \left[ 2 \left( \frac{dx}{dx} \right)^2 + 2x \right] = \frac{2}{h^e} \quad (6.362)$$

e

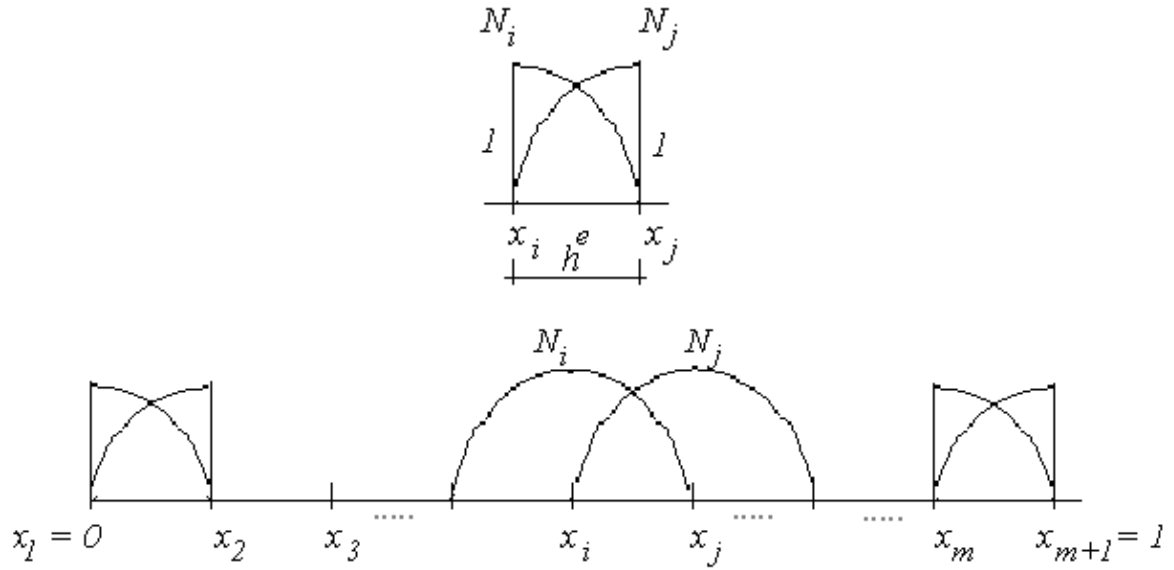


Figura - 6. 11. Estruturação unidimensional dos Elementos Finitos Quadráticos.

Do ponto de vista global, as únicas funções de aproximação não nulas do elemento  $e$  são as funções  $N_i$  e  $N_j$ ; consequentemente,  $N_l = 0$  se  $l \neq i$  ou se  $l \neq j$ . De maneira geral,  $N_l = 0$  se  $l \notin$  ao elemento  $e$ .

#### 6.8.4 – Método das Diferenças Finitas

A sentença de resíduos ponderados global é dada por:

$$\int_{\Omega} w_l \varepsilon_{\Omega} d\Omega = 0 \quad (6.363)$$

Para um domínio  $\Omega$  discretizado em  $E$  elementos temos:



$$\sum_{e=1}^E \int_{\Omega_e} w_{le} \varepsilon_{\Omega_e} d\Omega_e = 0 \quad (6.364)$$

Logo, a *sentença de resíduos ponderados local* é dada por:

$$\int_{\Omega_e} w_{le} \varepsilon_{\Omega_e} d\Omega_e = 0 \quad (6.365)$$

Para o caso onde

$$\varepsilon_{\Omega_e} = \mathbf{L}(\bar{u}) - b \quad (6.366)$$

e

$$\bar{u} = \sum_{m=1}^{M+1} u_m N_m \quad (6.367)$$

Onde

$$\varepsilon_{\Omega} = \sum_{m=1}^{M+1} u_m \mathbf{L}(N_m) - b = 0 \quad (6.368)$$

A *sentença de resíduos ponderados global* fica:

$$\int_{\Omega_e} w_{le} \left[ \sum_{e=1}^E \sum_{m=1}^{M+1} u_m \mathbf{L}(N_m) - b \right] d\Omega_e = 0 \quad (6.369)$$

A *sentença de resíduos ponderados local* fica:

$$\int_{\Omega_e} w_{le} \left[ \sum_{m=1}^{M+1} u_m \mathbf{L}(N_m) - b \right] d\Omega_e = 0 \quad (6.370)$$

Se a função de ponderação  $w_l$  for a função Delta de Dirac a *sentença de resíduos ponderados local* fica:

$$\int_{\Omega_e} \delta(x - x_l) \varepsilon_{\Omega_e} d\Omega_e = \varepsilon_{\Omega_{el}} = 0 \quad (6.371)$$

ou

$$\int_{\Omega_e} \delta(x - x_l) \left[ \sum_{m=1}^{M+1} u_m \mathbf{L}(N_m) - b \right] d\Omega_e = \sum_{l=1}^{M+1} u_l \mathbf{L}(N_l) - b = 0 \quad (6.372)$$

A sentença global fica:

$$\sum_{e=1}^E \int_{\Omega_e} \delta(x - x_l) \varepsilon_{\Omega_e} d\Omega_e = \sum_{e=1}^E \varepsilon_{\Omega_{el}} \quad (6.373)$$

Ou

$$\sum_{e=1}^E \int_{\Omega_e} \delta(x - x_l) \left[ \sum_{m=1}^{M+1} u_m \mathbf{L}(N_m) - b \right] d\Omega_e = \sum_{l=1}^{M+1} u_l \mathbf{L}(N_l) - b = 0 \quad (6.374)$$

Logo a sentença de resíduos ponderados fica:

$$\varepsilon_{\Omega_l} = \sum_{e=1}^E \varepsilon_{\Omega_{el}} = \sum_{e=1}^E \sum_{l=1}^{M+1} u_l \mathbf{L}(N_l) - b = 0 \quad (6.375)$$

Para o caso do operador  $\mathbf{L}$  dado pela seguinte equação diferencial:

$$\frac{d^2 u(x)}{dx^2} - u = 0 \quad (6.376)$$

Definida em  $[0 ; 1]$  e com *condições de contorno naturais* dado pelo operador  $\mathbf{S}$ , temos:

$$\varepsilon_{\Omega_{el}} = \sum_{m=1}^{M+1} u_m \sum_{e=1}^E \left[ \frac{d^2 N_m}{dx^2} - N_m \right]_{x=x_l} = 0 \quad (6.377)$$

Escrevendo para um elemento  $e$  genérico temos:

$$\varepsilon_{\Omega_{el}} = \sum_{m=1}^{M+1} u_m \left[ \frac{d^2 N_m^e}{dx^2} - N_m^e \right]_{x=x_l} = 0 \quad (6.378)$$

Substituindo de (6.344) a (6.346) e de (6.250) a (6.252) em (6.326) temos:

$$\sum_{m=1}^{M+1} u_m \left[ \frac{2}{h^{e^2}} - \left( 1 - \frac{(x - x_l)}{h^{e^2}} \right) \right]_{x=x_l} = 0 \quad (6.379)$$

E

$$\left[ \frac{2}{h^{e^2}} \left( \frac{u_{l+1}}{2} \right) - \frac{2u_l}{h^{e^2}} + \frac{2}{h^{e^2}} \frac{u_{l-1}}{2} - u_l \right] = 0 \quad (6.380)$$

logo

$$\left[ \frac{(u_{l+1} - u_l)}{2} - \frac{(u_l - u_{l-1})}{2} \right] \frac{2}{h^{e^2}} - u_l = 0 \quad (6.381)$$

## **6.9 – Exercícios e Problemas**

# *Capítulo – VII*

## MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

### *RESUMO*

Neste capítulo será visto a origem do Método dos Elementos de Contorno. Este método se apresenta como uma alternativa ao Método dos Elementos Finitos.

### **7.1 - Objetivos do capítulo**

- i) Entender a origem do Método dos Elementos de Contorno
- ii) Saber aplicar o Método dos Elementos de Contorno nas suas mais diferentes formas
- iii) Resolver problemas de equações diferenciais pertinentes ao método.

### **7.2 - Introdução**

Este método foi a princípio chamado de *Método das Equações Integrais*. Mas para distingui-lo dos outros métodos que envolviam também equações integrais, ele foi finalmente chamado de *Método dos Elementos de Contorno*.

O Método dos Elementos de Contorno (MEC) tem sido estabelecido como um método numérico alternativo ao Método dos Elementos Finitos (MEF). Isto se deve a sua simplicidade e redução na dimensionalidade do problema. Por exemplo, um problema bidimensional se reduz somente a linha unidimensional de contorno do domínio necessário a ser discretizado dentro dos elementos e, um problema tridimensional se reduz a uma superfície do domínio que necessita ser discretizado. Isto significa que, comparado à análise de um domínio tipo MEF, uma análise de contorno resulta em uma substancial redução na

preparação dos dados e, um sistema algébrico de equações muito menor a ser resolvido numericamente.

### 7.3 – Precursores do Método de Elementos de Contorno

O *Método dos Elementos de Contorno* teve como precursores matemáticos para o seu desenvolvimento os seguintes Métodos mostrados na Figura - 7. 1. Junto com esses métodos, o *Método de Green*, é utilizado no desenvolvimento matemático do *Método dos Elementos de Contorno*, como uma formulação básica necessária para a *solução da equação integral do problema singular equivalente* na variável,  $w$ , a qual é a função de ponderação. Ou seja, a *Função de Green* do operador diferencial do problema original, é a função de ponderação,  $w$ , conforme veremos no desenvolvimento a seguir:

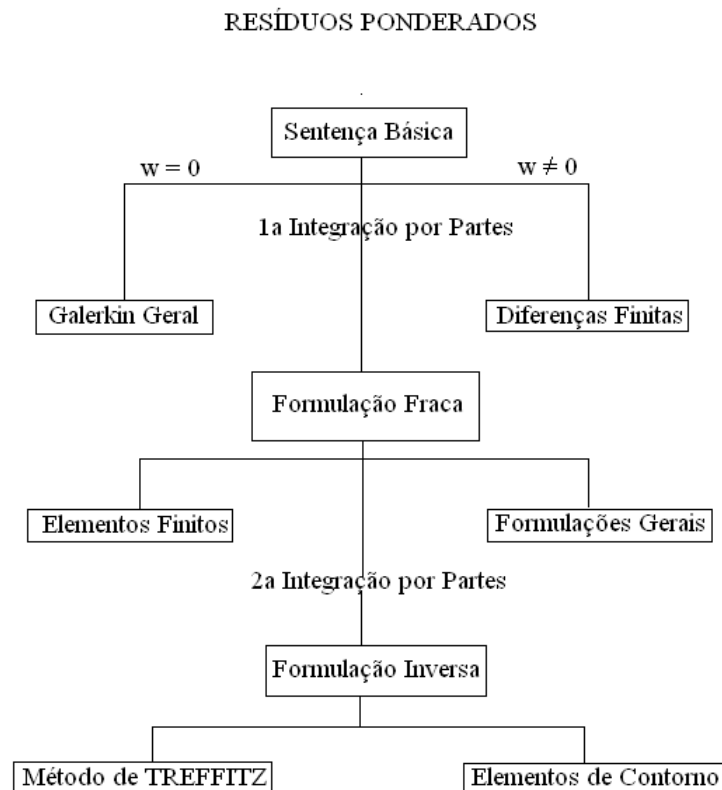


Figura - 7. 1. Resumo da Evolução dos Métodos Aproximados baseados nos Resíduos Ponderados

### 7.3.1 – Método das Funções de Green

Seja a equação diferencial linear não homogênea, válida para todo  $x$ , na qual não são impostas *condições de contorno*.

$$\mathbf{L}[u(x)] = f(x) \quad (7.1)$$

onde  $\mathbf{L}$  é um operador linear com coeficientes constantes.

Quando o termo  $f(x)$  é substituído por  $\delta(x - x')$ , função delta de Dirac, na qual  $x'$  é um parâmetro, a equação (7. 1) é reescrita como:

$$\mathbf{L}[G(x, x')] = \delta(x - x') \quad (7.2)$$

A função  $G(x, x')$ , solução da equação (7. 2), chama-se *Função de Green* para o operador  $\mathbf{L}$  e representa o efeito, em  $x$ , devido a uma função delta de Dirac que atua em  $x'$ , (o ponto  $x$  é chamado de campo e o ponto  $x'$  é chamado de fonte).

Para resolver (7. 1) com o auxílio de (7. 2) os termos à esquerda e à direita em (7. 2) são inicialmente multiplicados por  $f(x')$ , em seguida efetua-se a integração no domínio  $-\infty < x' < \infty$ . Assim:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{L}[G(x, x')] f(x') dx' = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x') f(x') dx' = f(x) \quad (7.3)$$

Trocando, em (7. 3), a ordem do operador diferencial e do sinal de integração, obtém-se:

$$\mathbf{L} \int_{-\infty}^{\infty} [G(x, x')] f(x') dx' = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x') f(x') dx' = f(x) \quad (7.4)$$

Comparando-se as equações (7. 4) e (7. 1), conclui-se que a solução da equação (7. 1) pode ser escrita como:

$$u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} [G(x, x')] f(x') dx' \quad (7.5)$$

No *Método dos Elementos de Contorno* as *Funções de Green* são as *Funções de Ponderação*.

### 7.3.2 – Integração por Partes em duas dimensões

Seja a integral

$$\int_{\Omega} \phi \frac{\partial \psi}{\partial x} d\Omega = \iint_{x,y} \phi \frac{\partial \psi}{\partial x} dx dy \quad (7.6)$$

Conforme mostra a Figura - 7. 2, onde  $\phi = \phi(x, y)$  e  $\psi = \psi(x, y)$ ;

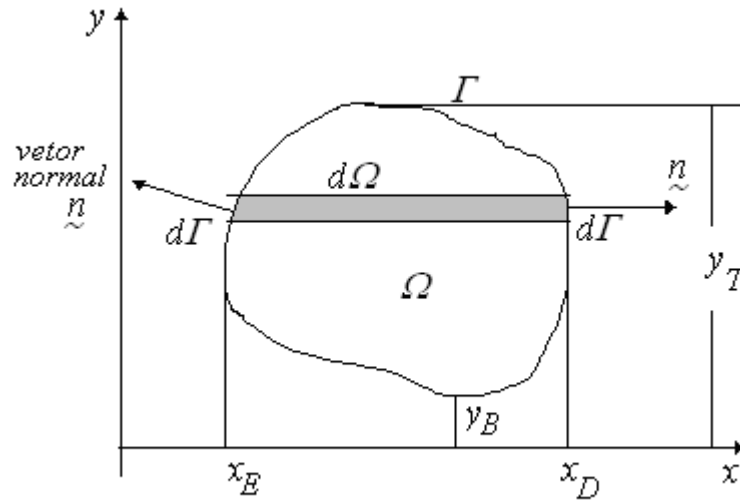


Figura - 7. 2. Integral por partes em duas dimensões em relação a x.

Integrando por partes em relação a x:

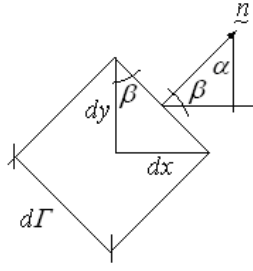
$$\begin{aligned} u &= \phi \quad ; \quad du = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx \\ dv &= \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad ; \quad v = \psi \end{aligned} \quad (7.7)$$

Logo

$$\iint_{y,x} \phi \frac{\partial \psi}{\partial x} dx dy = \int_{y_B}^{y_T} \left[ \phi \psi \Big|_{x=x_D} - \phi \psi \Big|_{x=x_E} \right] dy - \iint_{y,x} \psi \frac{\partial \phi}{\partial x} dx dy \quad (7.8)$$

Para  $x = x_D$ , tem-se:





Considerando um elemento de contorno,  $d\Gamma$ , quando  $x = x_D$ , tem-se:

$$\left. \begin{array}{l} \cos \beta = n_x \\ \cos \beta = \frac{dy}{d\Gamma} \end{array} \right\} dy = d\Gamma n_x \quad (7.9)$$

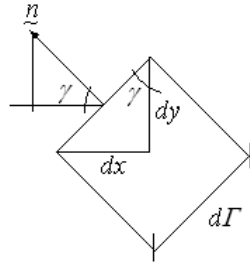
Onde  $n_x$  é o cosseno diretor da normal  $\tilde{n}$  ao contorno,  $\Gamma$ , em relação ao eixo  $x$ .

$$\tilde{n} = n_x \tilde{i} + n_y \tilde{j} \quad (7.10)$$

Assim, o primeiro termo à direita em (7.8) pode ser interpretado como uma integral, no sentido anti-horário, ao longo do contorno,  $\Gamma$ . Portanto,

$$\int_{\Omega} \phi \frac{\partial \psi}{\partial x} d\Omega = \int_{\Gamma} \phi \psi n_x d\Gamma - \int_{\Omega} \frac{\partial \phi}{\partial x} \psi d\Omega \quad (7.11)$$

Para  $x = x_E$ , tem-se:



Da mesma maneira, considerando um elemento de contorno,  $d\Gamma$ , quando  $x = x_E$ , tem-se:

$$\left. \begin{array}{l} \cos \beta = n_x = -\cos \gamma \\ \cos \gamma = \frac{dy}{d\Gamma} \end{array} \right\} dy = -d\Gamma n_x \quad (7.12)$$

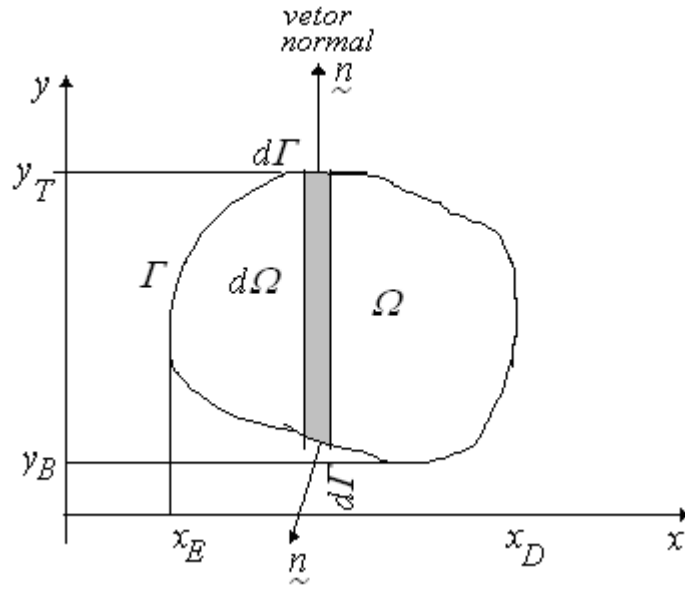


Figura - 7. 3. Integral por partes em duas dimensões em relação a y.

Analogamente, o segundo termo à direita em (7. 8) pode ser interpretado como uma integral, no sentido horário, ao longo de  $\Gamma$ . Portanto,

$$\int_{\Omega} \phi \frac{\partial \psi}{\partial y} d\Omega = \int_{\Gamma} \phi \psi n_y d\Gamma - \int_{\Omega} \frac{\partial \phi}{\partial y} \psi d\Omega \quad (7. 13)$$

As integrais (7. 11) e (7. 13) serão utilizadas no desenvolvimento do Método dos Elementos de Contorno, a seguir. Unindo (7. 11) com (7. 13) obtemos a primeira identidade de Green.

$$\int_{\Omega} \phi \left[ \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \right] d\Omega = \int_{\Gamma} \phi \psi (n_x + n_y) d\Gamma - \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \right] \psi d\Omega \quad (7. 14)$$

Ou simplesmente:

$$\int_{\Omega} (\phi \nabla \psi + \psi \nabla \phi) d\Omega = \int_{\Gamma} \phi \psi \vec{n} d\Gamma \quad (7. 15)$$

Utilizando esses precursores matemáticos podemos a partir de agora elaborar o desenvolvimento matemático do Método dos Elementos de Contorno.

## 7.4 – Definição Matemática e Desenvolvimento do Método

Considere a *Equação de Poisson* em duas dimensões:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + b = 0 \text{ em } \Omega \quad (7.16)$$

Com as *condições de contorno*:

$$\text{Essenciais} \quad u = \hat{u} \text{ em } \Gamma_u \quad (7.17)$$

e

$$\text{Naturais} \quad q = \frac{\partial u}{\partial n} = \hat{q} \text{ em } \Gamma_q \quad (7.18)$$

Onde

$$\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_q \quad (7.19)$$

e  $n$  é a normal ao contorno, dirigida para fora do contorno.

Sendo  $\bar{u}$  uma solução aproximada do problema, que não atende as *condições de contorno*, três tipos de resíduos, ou erros, são gerados:

a) em  $\Omega$

$$\varepsilon_{\Omega} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + b \neq 0 \quad (7.20)$$

b) em  $\Gamma_u$

$$\varepsilon_{\Gamma_u} = \bar{u} - \hat{u} \neq 0 \quad (7.21)$$

c) em  $\Gamma_q$

$$\varepsilon_{\Gamma_q} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} - \frac{\partial u}{\partial n} = \bar{q} - \hat{q} \neq 0 \quad (7.22)$$

os quais devem ser ponderados

A *sentença básica de resíduos ponderados* é escrita como:

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 u + b) w d\Omega + \int_{\Gamma_u} (\bar{u} - \hat{u}) \bar{w} d\Gamma + \int_{\Gamma_q} (\bar{q} - \hat{q}) \bar{w} d\Gamma = 0 \quad (7.23)$$

onde o Laplaciano  $\nabla^2$  é dado por:

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (7.24)$$

As funções de ponderação  $w, \bar{w}$ , e  $\bar{\bar{w}}$  podem ser escolhidas convenientemente, de maneira a simplificar o problema.

Integrando por partes, a integral que contém o Laplaciano em (7.23), obtém-se:

$$\int_{\Omega} \nabla^2 u w d\Omega = \int_{\Omega} \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \right) w d\Omega = \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} n_x + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} n_y \right) w d\Gamma - \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} \right) d\Omega : \quad (7.25)$$

Onde

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} n_x + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} n_y = \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} n = \bar{q} \quad (7.26)$$

Integrando novamente por partes, a integral de domínio à direita em (7.25), tem-se:

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} \right) d\Omega = \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial w}{\partial x} n_x + \frac{\partial w}{\partial y} n_y \right) \bar{u} d\Gamma - \int_{\Omega} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \bar{u} d\Omega \quad (7.27)$$

Onde

$$(7.28)$$

Substituindo, agora, (7.27) em (7.25) temos:

$$\int_{\Omega} \nabla^2 \bar{u} w d\Omega + \int_{\Gamma} \bar{q} w d\Gamma - \int_{\Gamma} \bar{u} \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma = \int_{\Omega} \nabla^2 w \bar{u} d\Omega \quad (7.29)$$

Substituindo agora, (7.28) em (7.24) temos:

$$\int_{\Omega} \nabla^2 w \bar{u} d\Omega + \int_{\Omega} b w d\Omega + \int_{\Gamma} \bar{q} w d\Gamma - \int_{\Gamma} \bar{u} \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma + \int_{\Gamma_u} (\bar{u} - \hat{u}) \bar{w} d\Gamma + \int_{\Gamma_q} (\bar{q} - \hat{q}) \bar{w} d\Gamma \quad (7.30)$$

Observando agora que  $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_q$ , pode-se escrever:

$$\int_{\Gamma} \bar{q} w d\Gamma = \int_{\Gamma_u} \bar{q} w d\Gamma + \int_{\Gamma_q} \bar{q} w d\Gamma \quad (7.31)$$

$$\int_{\Gamma} \bar{u} \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma = \int_{\Gamma_u} \bar{u} \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma + \int_{\Gamma_q} \bar{u} \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma \quad (7.32)$$

Substituindo (7.31) e (7.32) em (7.30) temos:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla^2 w \bar{u} d\Omega + \int_{\Omega} b w d\Omega + \int_{\Gamma_u} \bar{q} w d\Gamma + \int_{\Gamma_q} \bar{q} w d\Gamma - \int_{\Gamma_u} \bar{u} \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma \\ - \int_{\Gamma_q} \bar{u} \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma + \int_{\Gamma_u} \bar{u} \bar{\bar{w}} d\Gamma + \int_{\Gamma_u} \hat{u} \bar{\bar{w}} d\Gamma + \int_{\Gamma_q} \bar{q} \bar{\bar{w}} d\Gamma - \int_{\Gamma_q} \hat{q} \bar{\bar{w}} d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (7.33)$$

A expressão (7.33) pode ser simplificada fazendo  $\bar{\bar{w}} = -w$  e, anulando-se respectivamente as integrais em  $\Gamma_q$  que contém os valores aproximados  $\bar{q}$ , e  $\bar{\bar{w}} = \frac{\partial w}{\partial n}$ , anulando-se as integrais em  $\Gamma_u$  que contém os valores aproximados  $\bar{u}$ . A expressão resultante é denominada *Formulação Inversa de Resíduos Ponderados*.

$$\int_{\Omega} \nabla^2 w \bar{u} d\Omega + \int_{\Omega} b w d\Omega = \int_{\Gamma_u} \hat{u} \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma + \int_{\Gamma_q} \bar{u} \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Gamma_q} \hat{q} w d\Gamma - \int_{\Gamma_u} \bar{q} w d\Gamma \quad (7.34)$$

Ou, simplificando as expressões para as integrais de contorno:

$$\int_{\Omega} \nabla^2 w \bar{u} d\Omega + \int_{\Omega} b w d\Omega = \int_{\Gamma} \bar{u} \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Gamma} \bar{q} w d\Gamma \quad (7.35)$$

Nas integrais de contorno em (7.35), deve-se substituir  $\bar{u}$  por  $\hat{u}$  em  $\Gamma_u$  na primeira integral e  $\bar{q}$  por  $\hat{q}$ , na segunda integral.

OBS:

- 1) Sabendo-se que  $\bar{\bar{w}} = -w$  e que  $\bar{\bar{w}} = \frac{\partial w}{\partial n}$ , a sentença básica de resíduos ponderados, equação (7.24), pode ser escrita como:
- 2) De (7.25) e (7.35) pode-se escrever a forma fraca da sentença de resíduos ponderados como:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \bar{q} w d\Gamma - \int_{\Gamma_u} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} \right) d\Gamma + \int_{\Omega} b w d\Omega = \\ \int_{\Gamma_q} (\bar{q} - q) w d\Gamma - \int_{\Gamma_u} (\bar{u} - \hat{u}) \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma \end{aligned} \quad (7.36)$$

Considerando que:

$$\int_{\Gamma} \bar{q} w d\Gamma = \int_{\Gamma_u} \bar{q} w d\Gamma + \int_{\Gamma_q} \bar{q} w d\Gamma \quad (7.37)$$

A expressão (7.36) pode ser escrita como:

$$\int_{\Gamma_u} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} \right) d\Gamma = \int_{\Gamma_u} \bar{q} w d\Gamma + \int_{\Gamma_q} \hat{q} w d\Gamma - \int_{\Gamma_u} (\bar{u} - \hat{u}) \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma + \int_{\Omega} b w d\Omega \quad (7.38)$$

Como alguns termos se anulam temos:

$$\int_{\Gamma_u} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} \right) d\Gamma = \int_{\Gamma_q} \hat{q} w d\Gamma + \int_{\Gamma_u} \bar{u} \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma + \int_{\Omega} b w d\Omega \quad (7.39)$$

Nós havíamos visto que:

$$\int_{\Omega} \nabla^2 w \bar{u} d\Omega + \int_{\Omega} b w d\Omega = \int_{\Gamma} \bar{u} \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Gamma} \bar{q} w d\Gamma \quad (7.40)$$

No *Método dos Elementos de Contorno*, a função de ponderação,  $w$  é solução do problema singular-equivalente, isto é, ela é a *Função de Green* do operador diferencial.

Para a equação de Poisson, a função de Green para o operador,  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$

representada por  $u^*(\xi, X)$ , é a solução do problema, ou seja,

$$\nabla^2 u^*(\xi, X) = -\delta(\xi - X) \quad (7.41)$$

O ponto  $X$  é denominado *ponto campo*, e, o ponto  $\xi$  é denominado *ponto fonte*. Assim,  $u^*(\xi, X)$ , denominada, *solução fundamental*, pode ser interpretada como o efeito, no *ponto campo*, de uma *fonte concentrada* aplicada no *ponto fonte*.

Em duas dimensões,  $X$  é o ponto de coordenadas  $(x, y) = (x_1, x_2)$  e  $\xi$  é o ponto de coordenadas  $(\xi x, \xi y) = (\xi_1, \xi_2)$ . A expressão para  $u^*$  é:

$$u^*(\xi, X) = -\frac{1}{2\pi} \ln r \quad (7.42)$$

Onde  $r$  é a distância entre  $\xi$  e  $X$ .

Em três dimensões,  $X$  é o ponto de coordenadas  $(x, y, z) = (x_1, x_2, x_3)$  e  $\xi$  é o ponto de coordenadas  $(\xi x, \xi y, \xi z) = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ . A expressão  $u^*$  é:

$$u^*(\xi, X) = -\frac{1}{4\pi r} \quad (7.43)$$

Conhecida a solução fundamental, a sua derivada em relação à direção da normal ao contorno é calculada como:

$$q^*(\xi, X) = \frac{\partial u^*}{\partial n}(\xi, X) \quad (7.44)$$

Ou

$$q^*(\xi, X) = \frac{\partial u^*}{\partial r}(\xi, X) \frac{\partial r}{\partial n} \quad (7.45)$$

As expressões de  $q^*(\xi, X)$ , em três e em duas dimensões, são:

$$q^*(\xi, X) = -\frac{1}{4\pi r^2} \frac{\partial r}{\partial n} \quad (3D) \quad (7.46)$$

e

$$q^*(\xi, X) = -\frac{1}{2\pi r} \frac{\partial r}{\partial n} \quad (2D) \quad (7.47)$$

Onde, em (7.46)

$$\frac{\partial r}{\partial n} = \frac{\partial r}{\partial x} n_x + \frac{\partial r}{\partial y} n_y + \frac{\partial r}{\partial z} n_z \quad (7.48)$$

E em (7.47)

$$\frac{\partial r}{\partial n} = \frac{\partial r}{\partial x} n_x + \frac{\partial r}{\partial y} n_y \quad (7.49)$$

Utilizando a notação do método dos elementos de contorno, a equação (7.35) pode ser reescrita fazendo,

$$\begin{aligned} \bar{u} &\rightarrow u \\ \bar{q} &\rightarrow q \end{aligned} \quad (7.50)$$

Como:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla^2 u^*(\xi, X) u(X) d\Omega(X) + \int_{\Omega} u^*(\xi, X) b(X) d\Omega(X) = \\ = \int_{\Gamma} q^*(\xi, X) u(X) d\Gamma(X) - \int_{\Gamma} u^*(\xi, X) q(X) d\Gamma(X) \end{aligned} \quad (7.51)$$

Em (7.51),  $u(x) = \bar{u}(x)$  e  $q(x) = \bar{q}(X)$

Como  $\nabla^2 u^*(\xi, X) = -\delta(\xi - X)$ , a primeira integral de domínio à esquerda de (7.51) se reduz a:

$$\int_{\Omega} \nabla^2 u^*(\xi, X) u(X) d\Omega(X) = -\int_{\Omega} \delta(\xi - X) u(X) d\Omega(X) = -u(\xi) \quad (7.52)$$

Da substituição de (7.52) em (7.51) resulta a equação integral de contorno:

$$\begin{aligned} u(\xi) = \int_{\Gamma} u^*(\xi, X) q(X) d\Gamma(X) - \int_{\Gamma} q^*(\xi, X) u(X) d\Gamma(X) \\ + \int_{\Omega} u^*(\xi, X) b(X) d\Omega(X) \quad ; \quad \xi \in \Omega \end{aligned} \quad (7.53)$$

Lembrando que:

$$\Gamma = \underset{\substack{\downarrow \\ u=\hat{u}}}{\Gamma_u} \cup \underset{\substack{\downarrow \\ q=\hat{q}}}{\Gamma_q} \quad (7.54)$$

Onde:

$$\begin{aligned} \Gamma_u &\rightarrow u = \hat{u} \quad (\text{prescrito}); \quad q = ? \quad (\text{incógnita}) \\ \Gamma_q &\rightarrow q = \hat{q} \quad (\text{prescrito}); \quad u = ? \quad (\text{incógnita}) \end{aligned} \quad (7.55)$$

Vejamos o exemplo:



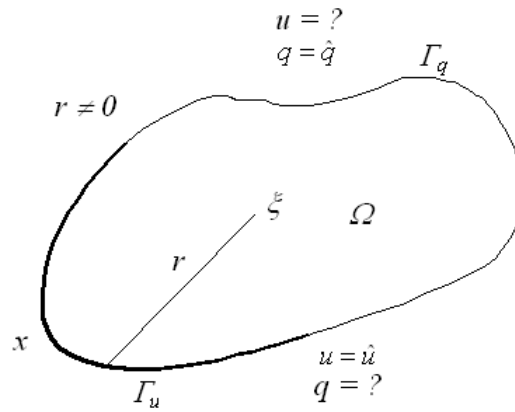


Figura - 7. 4. Exemplo de um domínio,  $\Omega$ , com raio,  $r$ , e ponto fonte,  $\xi$ , e contorno  $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_q$ .

Embora a equação integral de contorno represente a solução do problema para pontos,  $\xi$ , pertencentes ao domínio,  $\Omega$ , ela não pode ser utilizada enquanto os valores de  $q(X)$  em  $\Gamma_u$  e de  $u(X)$  em  $\Gamma_q$  não forem conhecidos. Para resolver esse problema, torna-se necessário encontrar uma expressão limite da equação, na qual o ponto  $\xi \in \Gamma$ . Para a obtenção da expressão limite, que torna possível a solução do problema, o ponto  $\xi$  é levado até o contorno e, aí, exclui-se do domínio uma esfera de raio  $\varepsilon$  e centro em  $\xi$  (caso 3D) ou um círculo (ou setor circular) de raio  $\varepsilon$  e centro em  $\xi$  (caso 2D). Em seguida, calcula-se o limite quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

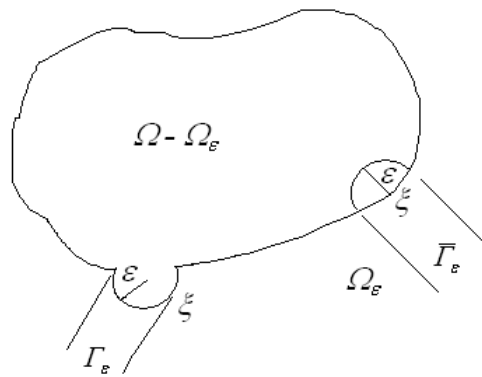


Figura - 7. 5. Solução geométrica para o problema do ponto fonte,  $\xi$ , o qual é transferido do interior do domínio para o contorno.

OBS:

- 1) Se  $\Omega_\varepsilon$  é o domínio excluído, em  $\Omega - \Omega_\varepsilon$ , tem-se,  $\nabla^2 u * (\xi, X) = 0$  pois  $\xi \notin (\Omega - \Omega_\varepsilon)$

2) As integrais de contorno devem ser avaliadas em  $(\Gamma - \bar{\Gamma}_\varepsilon)$ , onde  $\bar{\Gamma}_\varepsilon$  representa o contorno que foi excluído, e em  $\Gamma_\varepsilon$ , que representa o contorno da esfera ou do setor circular.

A equação , quando , é escrita como:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}_\varepsilon} q^* u d\Gamma + \int_{\Gamma_\varepsilon} q^* u d\Gamma - \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}_\varepsilon} u^* q d\Gamma - \int_{\Gamma_\varepsilon} u^* q d\Gamma + \int_{\Omega - \Omega_\varepsilon} u^* b d\Omega \right) = 0 \quad (7.56)$$

As integrais em podem ser calculadas como (note que  $r = \varepsilon = \text{constante}$ ,  $d\Gamma = \varepsilon d\theta$ ).

1)

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} u^* q d\Gamma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^\alpha \left( -\frac{1}{2\pi} \right) \ln \varepsilon . q . \varepsilon d\theta = 0 \quad (7.57)$$

2)

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} q^* u d\Gamma &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_\varepsilon} q^* [u(x) - u(\xi)] d\Gamma + u(\xi) \int_{\Gamma_\varepsilon} q^* d\Gamma \right\} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(\xi) \int_0^\alpha \left( -\frac{1}{2\pi\varepsilon} \right) (-1) . \varepsilon d\theta = \frac{\alpha u(\xi)}{2\pi} \end{aligned} \quad (7.58)$$

O termo  $\alpha/2\pi$  é designado por  $C(\xi)$ ; Assim

$$C(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{se } (\xi \notin \Omega) \text{ é ponto externo a } \Omega \\ \frac{1}{2} & \text{se } \xi \text{ é contorno suave} \\ 1 & \text{se } (\xi \in \Omega) \text{ ponto de domínio (ponto interno)} \end{cases} \quad (7.59)$$

As integrais em  $(\Gamma - \bar{\Gamma}_\varepsilon)$  devem ser avaliados no sentido de *Valor Principal de Cauchy*. A integral em  $(\Omega - \Omega_\varepsilon)$  não requer nenhum trabalho especial.

A equação integral básica do método dos elementos de contorno,  $(\xi \in \Gamma)$  é escrita como:

$$C(\xi)u(\xi) = \int_{\Gamma} u^*(\xi, X)q(X)d\Gamma(X) - \int_{\Gamma^+} q^*(\xi, X)u(X)d\Gamma(X) + \int_{\Omega} u^*(\xi, X)b(X)d\Omega(X) \quad (7.60)$$

Esta é a Equação de Laplace na formulação integral, da qual a equação ( ) pode ser considerada um caso particular.

#### 7.4.1 - Valor Principal de Cauchy

Definição: Integrais de funções que se tornam infinitas em um ponto do intervalo de integração; são integrais impróprias:

Dada a integral imprópria:

$$I = \int_a^b f(x)dx \quad (7.61)$$

que apresenta uma assintota vertical (uma descontinuidade infinita) em  $x = c$ ,  $a < b < c$ , então  $I$  pode ser calculada como:

$$I = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{c+\delta}^b f(x)dx \quad (7.62)$$

Se dois limites existem a integral converge, ou é chamada convergente. Se por outro lado:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx &= \pm\infty \\ \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{c+\delta}^b f(x)dx &= \pm\infty \end{aligned} \quad (7.63)$$

Então a integral diverge, ou é chamada não-convergente (divergente).

Fazendo-se  $\delta = \varepsilon$  a integral imprópria não convergente (divergente) pode existir no sentido de *Valor Principal de Cauchy*, possuindo um valor finito.

$$VP: \int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx \right] \quad (7.64)$$

Embora

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx = \pm\infty \quad (7.65)$$

e/ou

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{c+\varepsilon}^b f(x) dx = \pm \infty \quad (7.66)$$

Por exemplo, se

$$f(x) = 1/x^\alpha \quad (7.67)$$

Então  $x = 0$  é uma assíntota vertical da curva e a integral:

$$I = \int_{-1}^1 \frac{1}{x^\alpha} dx \quad (7.68)$$

deve ser avaliada como:

$$\begin{aligned} I &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{x^\alpha} dx + \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\delta}^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left. \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right|_{-1}^{-\varepsilon} + \lim_{\delta \rightarrow 0} \left. \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right|_{\delta}^1 = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{1-\alpha} (-\varepsilon)^{1-\alpha} - (-1)^{1-\alpha} \right\} + \lim_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{1-\alpha} [1 - \delta^{1-\alpha}] \right\} \end{aligned} \quad (7.69)$$

Se  $\alpha < 1$ , então  $k = 1 - \alpha > 0$  e a integral imprópria converge, pois:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (-\varepsilon)^k = 0 \text{ e } \lim_{\delta \rightarrow 0} \delta^k = 0 \quad (7.70)$$

$$\text{Se } \alpha = 3 \quad ; \quad f(x) = \frac{1}{x^3}$$

$$\left. \begin{aligned} e \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (-\varepsilon)^{-2} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon^2} = \infty \\ \lim_{\delta \rightarrow 0} (\delta^{-2}) &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta^2} = \infty \end{aligned} \right\} \text{a integral é divergente} \quad (7.71)$$

Calculando o Valor Principal de Cauchy

$$VP: \int_{-1}^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = \frac{1}{1-\alpha} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [(-\varepsilon)^{1-\alpha} - (-1)^{1-\alpha} + 1 - \varepsilon^{1-\alpha}] \quad (7.72)$$

Quando  $\alpha = 3$

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^3} dx = \frac{1}{1-3} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [(-\varepsilon)^{1-3} - (-1)^{1-3} + 1 - \varepsilon^{1-3}] \quad (7.73)$$

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^3} dx = -\frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [(-\varepsilon)^{-2} - (-1)^{-2} + 1 - \varepsilon^{-2}] \quad (7.74)$$

ou

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{1}{x^3} dx &= -\frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{(-\varepsilon)^2} - 1 + 1 - \frac{1}{\varepsilon^2} \right] = 0 \\ \int_{-1}^1 \frac{1}{x^3} dx &= -\frac{1}{2} [-1 + 1] = 0 \end{aligned} \quad (7.75)$$

#### 7.4.2 – Solução Numérica da Equação de Laplace

Para a solução numérica da equação integral (7.60) associada a equação de Laplace, a equação é reescrita para um número finito de pontos  $\xi$  selecionados. Essas equações particularizadas são obtidas utilizando o *Método da Colocação* no qual a equação (7.60), com  $b(x) = 0$  é ponderada ao longo do contorno  $\Gamma'(\xi)$ . Utiliza-se, portanto, como função de ponderação o Delta de Dirac  $\delta(\xi - \xi_0)$  onde  $\xi_0$  corresponde à posição selecionada. Pode-se escrever (admitindo  $b(x) = 0$ ):

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma'} C(\xi) u(\xi) \delta(\xi - \xi_0) d\Gamma'(\xi) &= \int_{\Gamma} \left[ \int_{\Gamma} u^*(\xi, X) q(X) dT(X) \right] \delta(\xi - \xi_0) d\Gamma'(\xi) \\ &- \int_{\Gamma} \left[ \int_{\Gamma} u^*(\xi, X) q(X) dT(X) \right] \delta(\xi - \xi_0) d\Gamma'(\xi) \end{aligned} \quad (7.76)$$

Invertendo a ordem da integração:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma'} C(\xi) u(\xi) \delta(\xi - \xi_0) d\Gamma'(\xi) &= \int_{\Gamma} \int_{\Gamma'} u^*(\xi, X) q(X) \delta(\xi - \xi_0) d\Gamma'(\xi) d\Gamma(X) \\ &- \int_{\Gamma} \int_{\Gamma'} q^*(\xi, X) u(X) \delta(\xi - \xi_0) d\Gamma'(X) d\Gamma(\xi) \end{aligned} \quad (7.77)$$

Aplicando a propriedade da função Delta de Dirac, a equação (7. 77) é escrita como:

$$C(\xi_0)u(\xi_0) = \int_{\Gamma} u^*(\xi_0, X)q(X)d\Gamma(X) - \int_{\Gamma} q^*(\xi_0, X)u(X)d\Gamma(X) \quad (7. 78)$$

O domínio  $\Omega$  deve ficar sempre a esquerda do sentido do percurso do contorno, de tal forma que o vetor normal à superfície de contorno seja dirigido para fora do contorno, conforme mostra a Figura - 7. 6

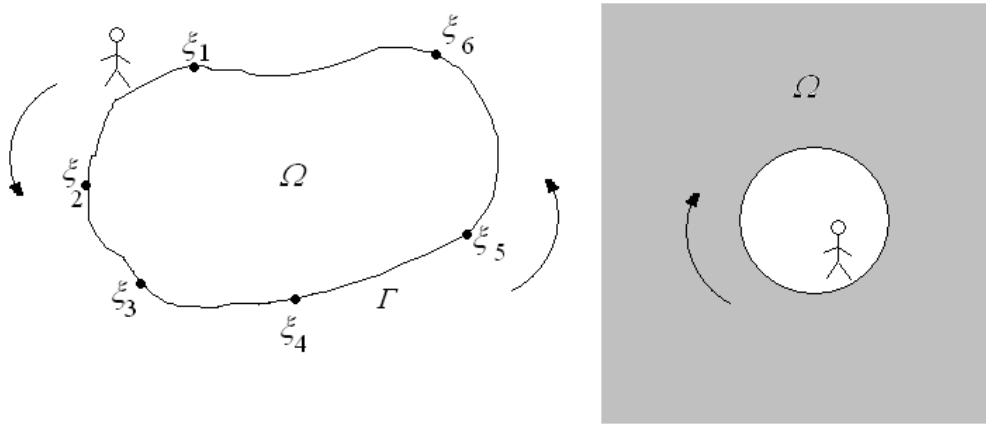


Figura - 7. 6. Aplicação da propriedade da função delta de Dirac sobre o ponto fonte  $\xi$ , sobre o contorno.

## 7. 5 – Discretização do Contorno

Para a obtenção de um sistema de equações algébricas a partir de (7. 78), cuja solução forneça os valores de  $q(X)$  em  $\Gamma_u$  e de  $u(X)$  em  $\Gamma_q$ , o contorno  $\Gamma$  é aproximado ou discretizado por elementos de geometria conhecida, denominada elementos de contorno.

Os tipos mais comuns são os lineares e os quadráticos. Na aproximação linear os elementos são segmentos de reta, definidos por dois *nós geométricos*. Na discretização (ou aproximação) quadrática os elementos são parabólicos e, são necessários definir três *nós geométricos*.

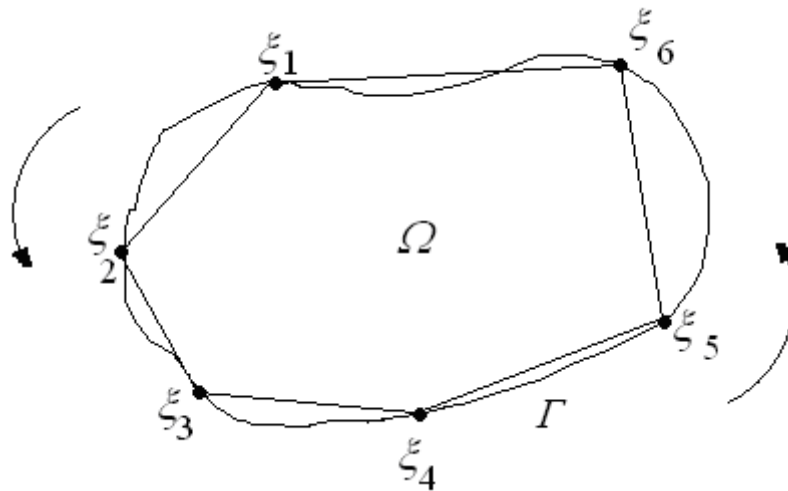


Figura - 7. 7. Discretização linear do contorno de um domínio,  $\Omega$ .

Pode-se utilizar, para representar a variação de  $u(X)$  e de  $q(X)$ , funções de forma (ou de interpolação) em cada elemento, que pode ser constante linear ou quadrática, dependendo do número de *nós funcionais*. Os *nós funcionais* são os nós onde os valores de  $u(X)$  e de  $q(X)$  são conhecidos ou prescritos. Assim, no caso de elemento constante, há somente um *nó funcional*, situado no meio do elemento. No caso do elemento constante ou linear, a situação mais comum ocorre quando os dois *nós funcionais* coincidem com os *nós geométricos*. Quando a discretização for linear, no caso do *elemento quadrático*, os *nós funcionais* também coincidem com os nós geométricos da discretização quadrática.

Por exemplo:

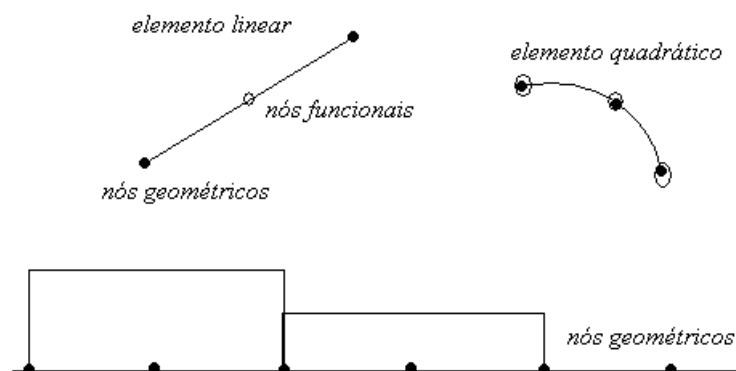


Figura - 7. 8. Tipos de elementos de contorno, linear ou parabólico e tipos de nós, geométricos e funcionais, onde os nós funcionais podem ou não coincidir com os nós geométricos.

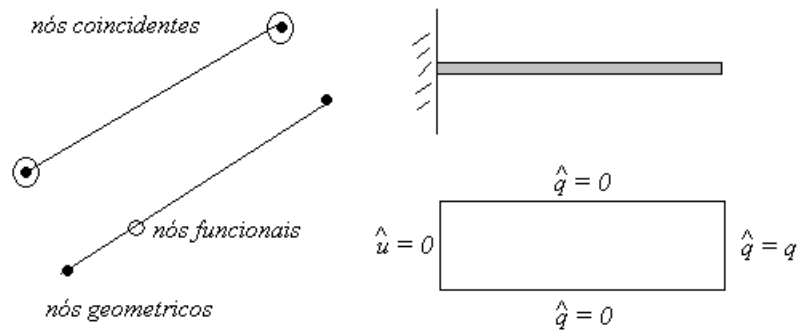


Figura - 7. 9. Esquematização de nós para o problema de uma barra engastada.

### 7.5.1 - Elemento Constante – Discretização Linear

Para um elemento constante e uma discretização linear temos o exemplo da Figura - 7. 10.

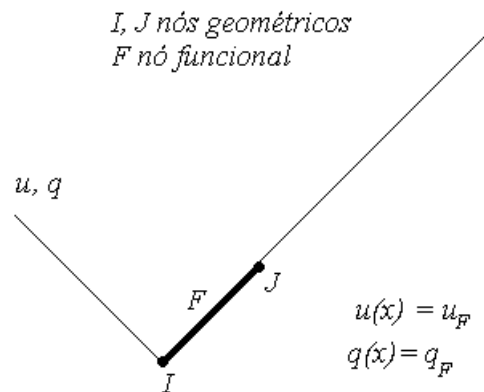


Figura - 7. 10.

$$u(X) = \frac{(\Gamma - \Gamma_F)}{(\Gamma_I - \Gamma_F)} u_I + \frac{(\Gamma - \Gamma_I)}{(\Gamma_F - \Gamma_I)} u_F \quad (7. 79)$$

e

$$q(X) = \frac{(\Gamma - \Gamma_F)}{(\Gamma_I - \Gamma_F)} q_I + \frac{(\Gamma - \Gamma_I)}{(\Gamma_F - \Gamma_I)} q_F \quad (7. 80)$$



### 7.5.2 - Elemento Linear – Discretização Linear

Para um elemento linear e uma discretização linear temos o exemploda Figura - 7.

11.

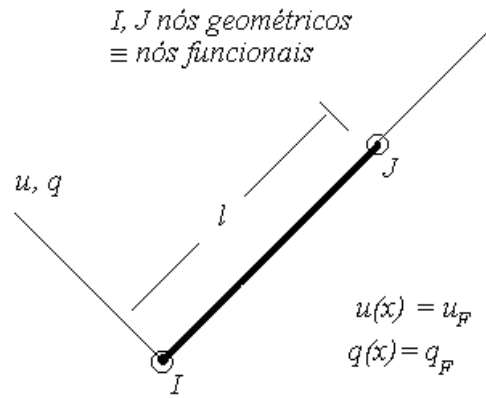


Figura - 7. 11.

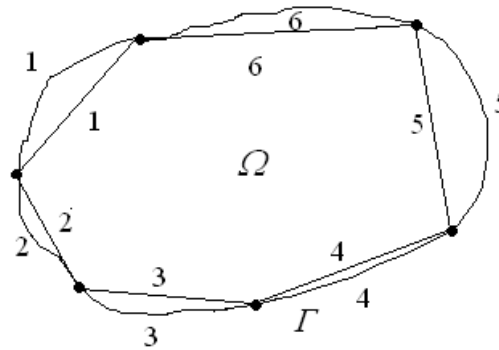


Figura - 7. 12. Discretização do contorno,  $\Gamma$ .

Se o contorno é discretizado (aproimado) em  $n$  elementos constantes, a versão discretizada da equação (7. 78), para um ponto fonte,  $\xi_i$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots, n$  (situado no meio de cada elemento) é escrita como:

$$C_i u_i + \sum_{j=1}^n \int_{\Gamma_j} q_i * u_j d\Gamma_j = \sum_{j=1}^n u_i * q_j d\Gamma_j \quad (7. 81)$$

Onde

$$\left. \begin{array}{lll} C_i = C(\xi_i) & u_i^* = u_i^*(\xi, x) & u_j = u(X) \\ u_i = u(\xi_i) & q_i^* = q_i^*(\xi, x) & q_j = q(X) \end{array} \right\} X \in \Gamma_j \quad (7.82)$$

Como  $u_j$  e  $q_i$  são constantes  $\Gamma_j$  pode-se escrever:

$$\int_{\Gamma} u_i^* q_i d\Gamma_i = \int_{\Gamma} u_i^* d\Gamma_j q_j \quad (7.83)$$

E

$$\int_{\Gamma} q_i^* u_j d\Gamma_j = \int_{\Gamma} q_i^* d\Gamma_j u_j \quad (7.84)$$

Por exemplo, para 8 elementos temos:

$$\begin{aligned} C_1 u_1 + h_{11} u_1 + h_{12} u_2 + \dots + h_{18} u_8 &= g_{11} q_1 + g_{12} q_2 \dots + g_{18} q_8 \\ : \\ C_8 u_8 + h_{81} u_1 + h_{82} u_2 + \dots + h_{88} u_8 &= g_{81} q_1 + g_{82} q_2 \dots + g_{88} q_8 \end{aligned} \quad (7.85)$$

Como o contorno é suave em cada elemento, temos:

$$C(\xi_i) = C_i = \frac{1}{2} \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (7.86)$$

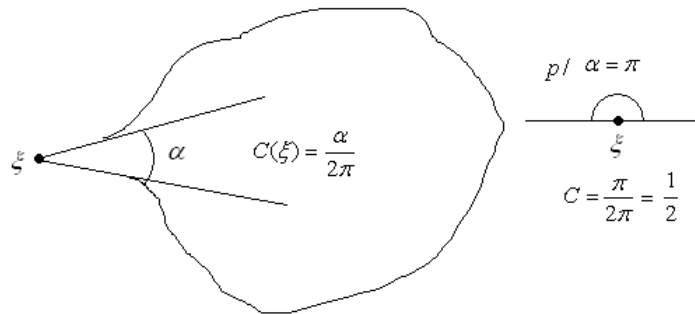


Figura - 7. 13. Cálculo do coeficiente  $C(\xi_i)$  para um ângulo  $\alpha$  qualquer.

Onde

$$C(\xi) = \frac{\alpha}{2\pi} \quad p / \text{---} \cap \text{---} \alpha = \pi \quad C = \frac{1}{2} \quad (7.87)$$

Substituindo (7. 83), (7. 84) (7. 86) em (7. 81) temos:

$$\frac{1}{2}u_i + \sum_{j=1}^n \int_{\Gamma_j} q_i * d\Gamma_j u_j = \sum_{j=1}^n u_i * d\Gamma_j q_j \quad (7.88)$$

Fazendo

$$\hat{h}_{ij} = \int_{\Gamma_j} q_i * d\Gamma_j \quad e \quad g_{ij} = \int_{\Gamma_j} u_i * d\Gamma_j \quad (7.89)$$

A equação (7.88) é escrita como:

$$\frac{1}{2}u_i + \sum_{j=1}^n \hat{h}_{ij} u_j = \sum_{j=1}^n g_{ij} q_j \quad (7.90)$$

Agrupando as  $n$  equações (7.90) escrita para  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ , obtém-se um sistema do tipo:

$$\underset{\sim}{H} \underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{G} \underset{\sim}{q} \quad (7.91)$$

No qual os elementos da matriz  $\underset{\sim}{H}$  são definidos como:

$$h_{ij} = \begin{cases} \hat{h}_{ij} & \text{se } i \neq j \quad (\text{elemento não singular}) \\ \hat{h}_{ij} + \frac{1}{2} & \text{se } i = j \quad (\text{elemento singular}) \end{cases} \quad (7.92)$$

De forma geral temos:

$$\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1n-2} & h_{1n-1} & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \dots & h_{2n-2} & h_{2n-1} & h_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h_{n-21} & h_{n-22} & \dots & h_{n-2n-2} & h_{n-2n-1} & h_{n-2n} \\ h_{n-11} & h_{n-12} & \dots & h_{n-1n-2} & h_{n-1n-1} & h_{n-1n} \\ h_{n1} & h_{n2} & \dots & h_{nn-2} & h_{nn-1} & h_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ \hat{u}_{n-2} \\ u_{n-1} \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \dots & g_{1n-2} & g_{1n-1} & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \dots & g_{2n-2} & g_{2n-1} & g_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g_{n-21} & g_{n-22} & \dots & g_{n-2n-2} & g_{n-2n-1} & g_{n-2n} \\ g_{n-11} & g_{n-12} & \dots & g_{n-1n-2} & g_{n-1n-1} & g_{n-1n} \\ g_{n1} & g_{n2} & \dots & g_{nn-2} & g_{nn-1} & g_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{q}_1 \\ \hat{q}_2 \\ \vdots \\ q_{n-2} \\ \hat{q}_{n-1} \\ \hat{q}_n \end{bmatrix} \quad (7.93)$$

$$\underset{\sim}{H} \underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{G} \underset{\sim}{q}$$

Um exemplo para 6 elementos a matriz se reduz a:

$$\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} & h_{14} & h_{15} & h_{16} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} & h_{24} & h_{25} & h_{26} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} & h_{34} & h_{35} & h_{36} \\ h_{41} & h_{42} & h_{43} & h_{44} & h_{45} & h_{46} \\ h_{51} & h_{52} & h_{53} & h_{54} & h_{55} & h_{56} \\ h_{61} & h_{62} & h_{63} & h_{64} & h_{65} & h_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \hat{u}_3 \\ \hat{u}_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} & g_{15} & g_{16} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} & g_{25} & g_{26} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & g_{34} & g_{35} & g_{36} \\ g_{41} & g_{42} & g_{43} & g_{44} & g_{45} & g_{46} \\ g_{51} & g_{52} & g_{53} & g_{54} & g_{55} & g_{56} \\ g_{61} & g_{62} & g_{63} & g_{64} & g_{65} & g_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{q}_1 \\ \hat{q}_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ \hat{q}_5 \\ \hat{q}_6 \end{Bmatrix} \quad (7.94)$$

$$\underset{\sim}{H} \underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{G} \underset{\sim}{q}$$

Após a imposição das *condições de contorno*, obtém-se um sistema do tipo:

$$\underset{\sim}{A} \underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{f} \quad (7.95)$$

é obtido, no qual a matriz  $\underset{\sim}{A}$  é constituída pelas colunas de  $\underset{\sim}{H}$  e  $\underset{\sim}{G}$  associados aos valores incógnitas de  $u$  e  $q$ , agora armazenados nos vetores  $\underset{\sim}{y}$ , e  $\underset{\sim}{f}$  é o vetor que contém as contribuições de contorno,  $\underset{\sim}{A}$ , intercambiando os valores conhecidos da matriz, com os sinais trocados, conforme mostra o esquema abaixo:

$$\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & -g_{13} & -g_{14} & h_{15} & h_{16} \\ h_{21} & h_{22} & -g_{23} & -g_{24} & h_{25} & h_{26} \\ h_{31} & h_{32} & -g_{33} & -g_{34} & h_{35} & h_{36} \\ h_{41} & h_{42} & -g_{43} & -g_{44} & h_{45} & h_{46} \\ h_{51} & h_{52} & -g_{53} & -g_{54} & h_{55} & h_{56} \\ h_{61} & h_{62} & -g_{63} & -g_{64} & h_{65} & h_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & -h_{13} & -h_{14} & g_{15} & g_{16} \\ g_{21} & g_{22} & -h_{23} & -h_{24} & g_{25} & g_{26} \\ g_{31} & g_{32} & -h_{33} & -h_{34} & g_{35} & g_{36} \\ g_{41} & g_{42} & -h_{43} & -h_{44} & g_{45} & g_{46} \\ g_{51} & g_{52} & -h_{53} & -h_{54} & g_{55} & g_{56} \\ g_{61} & g_{62} & -h_{63} & -h_{64} & g_{65} & g_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{q}_1 \\ \hat{q}_2 \\ \hat{u}_3 \\ \hat{u}_4 \\ \hat{q}_5 \\ \hat{q}_6 \end{Bmatrix} \quad (7.96)$$

$$\underset{\sim}{A} \underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{f}$$

Os valores de  $q$  conhecidos (ou prescritos)  $q = \hat{q}$  pelos valores de  $q$  a ser calculados (ou não prescritos)  $q = q$ .

Os valores de  $u$  conhecidos (ou prescritos)  $u = \hat{u}$  pelos valores de  $u$  a ser calculados (ou não prescritos)  $u = u$ .

## 7.6 – Exemplos e Aplicações

1) Resolva a equação :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u = 0$$

com as seguintes condições :

$$\begin{aligned}\hat{u}(0) &= 0, \\ \hat{u}(1) &= 1.\end{aligned}$$

Solução:

A solução fundamental do problema é a solução da equação :

$$\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2} - u^* = \delta(x - \xi)$$

é igual a

$$u^* = \frac{\sinh(x - \xi)}{2}$$

Da equação:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \nabla^2 u^* \bar{u} d\Omega + \int_{\Omega} b u^* d\Omega - \int_{\Gamma} \bar{u} \frac{du^*}{dn} d\Gamma - \int_{\Gamma} \bar{p} u^* d\Gamma \\
& \int_0^3 \left( \underbrace{\frac{d^2 u^*}{dx^2} - u^*}_{\delta(x-\xi)} \right) \bar{u} dx = \bar{u} \frac{du^*}{dn} \Big|_{x=3} + \bar{u} \frac{du^*}{dn} \Big|_{x=0} + \bar{u} \frac{du^*}{dn} \Big|_{x=3} - \bar{p} u^* \Big|_{x=3} + \bar{p} u^* \Big|_{x=0} \\
& \bar{u}(\xi) = \bar{u} p^* \Big|_{x=3} + \bar{u} p^* \Big|_{x=0} - \bar{p} u^* \Big|_{x=3} - \bar{p} u^* \Big|_{x=0} \\
& p^* = \frac{du^*}{dn} \\
& x > \xi \\
& u^* = \frac{\sinh(x - \xi)}{2} \\
& \frac{du^*}{dn} = \frac{du^*}{dx} \frac{dx}{dn} = \frac{\cosh(x - \xi)}{2} \quad (1) \\
& x < \xi \\
& u^* = \frac{\sinh(\xi - x)}{2} \\
& \frac{du^*}{dn} = \frac{du^*}{dx} \frac{dx}{dn} = -\frac{\cosh(\xi - x)}{2} (-1) = \frac{\cosh(\xi - x)}{2} \\
& p^* = \frac{\cosh|x - \xi|}{2} \\
& u(0) = u(3) \cdot \frac{\cosh(3-0)}{2} + u(0) \cdot \frac{\cosh(0-0)}{2} - p(3)u(3) \cdot \frac{\sinh(3-0)}{2} - p(0) \cdot \frac{\sinh(0-0)}{2} \\
& u(3) = u(3) \cdot \frac{\cosh(3-3)}{2} + u(0) \cdot \frac{\cosh(3-0)}{2} - p(3)u(3) \cdot \frac{\sinh(3-3)}{2} - p(0) \cdot \frac{\sinh(3-0)}{2} \\
& 0 = 1 \cdot u(0) \cdot \frac{\cosh 3}{2} - p(3) \frac{\sinh 3}{2} \\
& 1 = 1 \cdot u(0) \cdot \frac{1}{2} - p(0) \frac{\sinh 3}{2} \\
& p(3) = \frac{\cosh 3}{\sinh 3} = \frac{e^3 + e^{-3}}{e^3 - e^{-3}} \\
& p(0) = \frac{-1}{\sinh 3} = \frac{-2}{e^3 - e^{-3}} \\
& \xi = x_o \\
& u^* = \frac{\sinh(\xi - x)}{2} \\
& \frac{du^*}{dn} = \frac{du^*}{dx} \frac{dx}{dn} = -\frac{\cosh(\xi - x)}{2} \cdot (-1) = \frac{\cosh(\xi - x)}{2} \\
& p^* = \frac{\cosh|x - \xi|}{2} \\
& u(x_o) = u(3) \cdot \frac{\cosh(3 - x_o)}{2} + u(0) \cdot \frac{\cosh(x_o - 0)}{2} - p(3)u(3) \cdot \frac{\sinh(3 - x_o)}{2} - p(0) \cdot \frac{\sinh(x_o - 0)}{2} \\
& u(x_o) = 1 \cdot \frac{\cosh(3-3)}{2} + \frac{\cosh 3}{\sinh 3} \cdot \frac{\sinh(3-3)}{2} + \frac{1}{\sinh 3} \cdot \frac{\sinh(x_o)}{2} \\
& \cosh(A \pm B) = \cosh A \cdot \cosh B \pm \sinh A \cdot \sinh B \\
& \sinh(A \pm B) = \sinh A \cdot \cosh B \pm \cosh A \cdot \sinh B \\
& u(x_o) = \left( \frac{\cosh 3 \cdot \cosh x_o - \cosh 3 \sinh x_o}{2} \right) - \frac{\cosh 3}{\sinh 3} \cdot \left( \frac{\sinh 3 \cdot \cosh x_o - \cosh 3 \sinh x_o}{2} \right) + \left( \frac{1}{\sinh 3} \cdot \frac{\sinh(x_o)}{2} \right) \\
& u(x_o) = \frac{1}{2} \cdot \left[ \cosh 3 \cdot \cosh x_o - \cosh 3 \cdot \sinh x_o - \cosh 3 \cdot \cosh x_o + \frac{(\cosh 3)^2 \cdot \sinh x_o}{\sinh 3} + \frac{\sinh 3}{\sinh x_o} \right] \\
& u(x_o) = \frac{1}{2} \cdot \left[ \frac{\sinh x_o \cdot \left( \underbrace{\cosh^2 3 - \sinh^2 3}_1 \right) + \sinh x_o}{\sinh 3} \right] = \frac{\sinh x_o}{\sinh 3} = \frac{e^{x_o} + e^{-x_o}}{e^3 - e^{-3}}
\end{aligned}$$

# *Capítulo – VIII*

## MÉTODO DOS VOLUMES FINITOS

### *RESUMO*

Neste capítulo será visto a origem do Método dos Volumes Finitos. Este método se apresenta como uma alternativa ao Método dos Elementos Finitos.

### **8. 1 - Objetivos do capítulo**

- i) Entender a origem do Método dos Volumes Finitos
- ii) Saber aplicar o Método dos Volumes Finitos nas suas mais diferentes formas
- iii) Resolver problemas de equações diferenciais pertinentes ao método.

### **8. 2 – Introdução**

O *Método dos Volumes Finitos* é uma extensão para o volume do Método dos Elementos Finitos

### **8.3 – Definição Matemática e Desenvolvimento do Método**

*(8.1)*



## **8.4 – Exemplos e Aplicações**

## **8.5 – Exercícios e Problemas**

# Apêndices

## A. 1 – Conceitos de Engenharia

### A.1.1 - Problema de uma Viga

Considere uma viga apoiada e deflexionada sob seu próprio peso conforme mostra a Figura - A. 1.

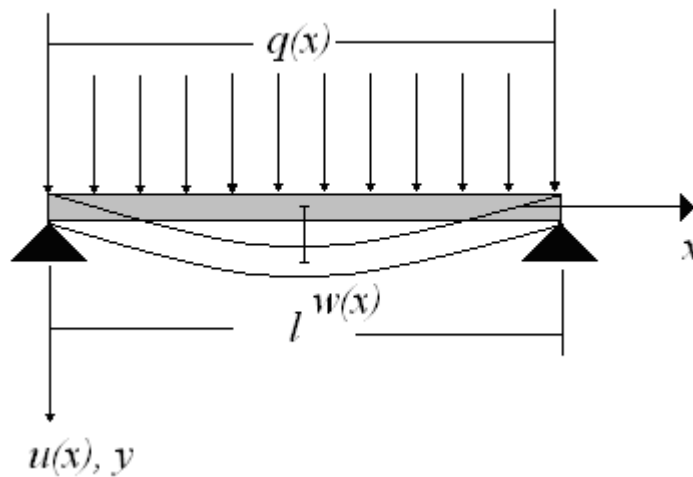


Figura - A. 1. Viga bi-apoiada sujeita a deformação pelo seu próprio peso.

Onde  $q(x)$  é a força peso, distribuída por unidade de comprimento e  $w(x)$  é a componente vertical (altura) da deflexão, da viga em função da posição horizontal,  $x$ .

A equação do Momento Cortante,  $Q$ , que atua sobre a viga para condição de equilíbrio, é dado por:

$$\frac{dQ}{dx} + q = 0 \quad (\text{A. 1})$$

A relação entre o Força Cortante,  $Q$ , e o Momento Fletor,  $M$  é dada por:

$$Q = \frac{dM}{dx} \quad (\text{A. 2})$$

A equação do Momento Fletor que atua sobre a viga é dado por:

$$\frac{d^2M}{dx^2} + q = 0 \quad (\text{A. 3})$$

Como o Momento Fletor é dado pela deflexão  $w(x)$ , temos:

$$M = -EI \frac{d^2w(x)}{dx^2} \quad (\text{A. 4})$$

onde  $E$ : é o módulo de Elasticidade;  $I$ : o momento de Inércia da secção transversal da viga; Logo,

$$\frac{d^4w(x)}{dx^4} - \frac{q}{EI} = 0 \quad (\text{A. 5})$$

Esta equação também pode ser obtida do calculo variacional da equação da energia potencial total do sistema, dada por:

$$I_p = \int_0^l \left[ \frac{EI}{2} \left( \frac{d^2w}{dx^2} \right)^2 - qw \right] dx. \quad (\text{A. 6})$$

onde  $\frac{EI}{2} \left( \frac{d^2w}{dx^2} \right)^2$ : é a Energia Potencial de Deformação;  $qw(x)$ : é a Energia Potencial da carga Atuante; quando aplicada sobre o funcional (A. 6) a equação de Euler Lagrange, da seguinte forma:

Seja  $F$  dado por:

$$F = F(x, w, w'') = \frac{EI}{2} \left( \frac{d^2w}{dx^2} \right)^2 - qw \quad (\text{A. 7})$$

Pelo Princípio da Energia Potencial mínima, a configuração de equilíbrio corresponde à extremização do funcional.

Da equação de Euler-Lagrange:

$$\frac{d^3}{dx^3} \left( \frac{\partial F}{\partial w'''} \right) - \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{\partial F}{\partial w''} \right) + \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial w'} \right) - \frac{\partial F}{\partial w} = 0 \quad (A. 8)$$

como

$$\frac{d^3}{dx^3} \left( \frac{\partial F}{\partial w'''} \right) = 0 \quad e \quad \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial w'} \right) = 0 \quad (A. 9)$$

Temos:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{\partial F}{\partial w''} \right) + \frac{\partial F}{\partial w} = 0 \quad (A. 10)$$

Logo

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{\partial F}{\partial w''} \right) = \frac{d^2 (EI w'')}{dx^2} \quad ; \quad \frac{\partial F}{\partial w} = EI w'' \quad (A. 11)$$

e

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{\partial F}{\partial w''} \right) = EI \frac{d^4 w}{dx^4} \quad e \quad \frac{\partial F}{\partial w} = -q \quad (A. 12)$$

Então substituindo em (4. 115) temos:

$$\frac{d^4 w}{dx^4} = \frac{q}{EI} \quad (A. 13)$$

A equação diferencial da linha elástica.

## A. 2 – Movimento transverso de uma membrana retangular sob velocidade inicial prescrita

Este apêndice trata da obtenção das expressões matemáticas para representar o movimento transverso de uma membrana retangular analisada na secção – 3.8. Os deslocamentos são nulos sobre o contorno e a velocidade inicial  $v_0$  é prescrito sobre uma área retangular  $A_0$ , mostrado na

Figura - A. 2. .

A solução analítica para este problema específico foi derivado usando expressões gerais dadas na referencia { }.

O deslocamento transverso  $u(x_1, x_2, t)$  em qualquer ponto dentro do domínio definido pela membrana e as trações  $p(a, x_2, t)$  em qualquer ponto sobre a linha  $x_1 = a$  pode ser calculada a partir de:

$$u(x_1, x_2, t) = \frac{2v_0}{\pi^3} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{mnv_{mn}} \sin\left(\frac{m\pi x_1}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi x_2}{b}\right) G_{mn} \quad (A. 14)$$

e

$$p(a, x_2, t) = \frac{2v_0}{a\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nv_{mn}} \cos(m\pi) \sin\left(\frac{n\pi x_2}{b}\right) G_{mn} \quad (A. 15)$$

onde

$$G_{mn} = \left[ \cos\left(\frac{n\pi b_2}{b}\right) - \cos\left(\frac{n\pi b_1}{b}\right) \right] \left[ \cos\left(\frac{m\pi a_2}{a}\right) - \cos\left(\frac{m\pi a_1}{a}\right) \right] \sin(2\pi v_{mn} t) \quad (A. 16)$$

E as frequências naturais  $v_{mn}$  são dadas por:

$$v_{mn} = \left(\frac{c}{2}\right) \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2} \quad (A. 17)$$

No caso da membrana analisada no capítulo 3,  $\left(a = b, a' = b' = \frac{a}{5}\right)$  as séries de expressões (A. 14) e (A. 15) foram calculadas com oito e cem termos respectivamente.

## A. 3 – Implementações para o Método das Diferenças Finitas usando a Planilha do EXCEL – Microsoft, com código de cores nas células

### A.2.1 – Sub VerCorPre

Descrição da Macro	Subrotina e Linhas de Comando
	<pre> ' Sub VerCorPre() ' VerCorPre Macro ' Macro gravada em 2/5/2006 por Orlando Olympio ' Lenzi Filho ' ' Atalho do teclado: Ctrl+v ' ' Mostrando numero das cores  ' Colocando valores nos elementos da matriz preenchendo por linha cor = 1 For nlin = 1 To 6   For ncol = 1 To 10     Cells(nlin, ncol) = cor     cor = cor + 1   Next ncol Next nlin  ' Colocando cor no preenchimento da célula de acordo com o valor  For nlin = 1 To 6   For ncol = 1 To 10     Cells(nlin, ncol).Select     With Selection.Interior       If Cells(nlin, ncol).Value &gt; 56 Then         cor = 56       Else         cor = Cells(nlin, ncol).Value       End If       .ColorIndex = cor       .Pattern = xlSolid       .PatternColorIndex = xlAutomatic     End With   Next ncol Next nlin End Sub </pre>



### A.2.2 - SubMultcorpad

'Descrição da Macro	Subrotina e Linhas de Comando
	<pre> Sub multcorpad() ' multcor Macro ' Macro gravada em 2/5/2006 por Orlando Olympio Lenzi Filho ' ' Atalho do teclado: Ctrl+m ' ' As colunas [A,J] e as linhas [1,15] serão tratadas como uma matriz (15,10) ' As letras [A,B,C,D...,J] das colunas assumem os valores [1,2,3,4...,10] ' Então as células terão as seguintes associações: ' Célula-Índice Célula-Índice Célula-Índice Célula- Índice ' (3,A)- (3,1) (7,D)- (7,4) (10,I)-(10,9) (6,G)- (6,6) ' (15,J)-(15,10) (9,B)- (9,2) (3,C)- (3,3) (13,H)- (13,8)  ' Colocando valores nos elementos da matriz preenchendo por coluna For ncol = 1 To 10     For nlin = 1 To 15         Cells(nlin, ncol) = ncol + nlin     Next nlin Next ncol  ' Colocando cor no preenchimento da célula de acordo com o valor ' Os valores de 3 a 24 terão cores associadas ao próprio valor ' O valor 2 e os valores maiores que 24 terão a cor 30  For nlin = 1 To 15     For ncol = 1 To 10         Cells(nlin, ncol).Select         If Cells(nlin, ncol).Value = 2 Then             With Selection.Interior                 .ColorIndex = Cells(nlin, ncol).Value                 .Pattern = xlLightVertical                 .PatternColorIndex = xlAutomatic             End With         End If         If Cells(nlin, ncol).Value &gt; 2 And Cells(nlin, ncol).Value &lt;= 5 Then             With Selection.Interior                 .ColorIndex = Cells(nlin, ncol).Value                 .Pattern = xlGray8                 .PatternColorIndex = xlAutomatic             End With         End If         If Cells(nlin, ncol).Value &gt; 5 And Cells(nlin, ncol).Value &lt;= 7 Then             With Selection.Interior                 .ColorIndex = Cells(nlin, ncol).Value                 .Pattern = xlHorizontal                 .PatternColorIndex = xlAutomatic             End With         End If     Next ncol Next nlin </pre>

	<pre> End With End If  If Cells(nlin, ncol).Value &gt; 7 And Cells(nlin, ncol).Value &lt;= 16 Then     With Selection.Interior         .ColorIndex = Cells(nlin, ncol).Value         .Pattern = xlLightHorizontal         .PatternColorIndex = xlAutomatic     End With End If If Cells(nlin, ncol).Value &gt; 16 And Cells(nlin, ncol).Value &lt;= 20 Then     With Selection.Interior         .ColorIndex = Cells(nlin, ncol).Value         .Pattern = xlVertical         .PatternColorIndex = xlAutomatic     End With End If If Cells(nlin, ncol).Value &gt; 20 Then     With Selection.Interior         .ColorIndex = Cells(nlin, ncol).Value         .Pattern = xlGray75         .PatternColorIndex = xlAutomatic     End With End If  Next ncol Next nlin End Sub </pre>
--	---

### A.2.3 - Sub multcor

Descrição da Macro	Subrotina e Linhas de Comando
	<pre> 'Sub multcor() ' multcor Macro ' Macro gravada em 2/5/2006 por Orlando Olympio Lenzi Filho ' ' Atalho do teclado: Ctrl+m ' ' As colunas [A,J] e as linhas [1,15] serão tratadas como uma matriz (15,10) ' As letras [A,B,C,D.....,J] das colunas assumem os valores [1,2,3,4,...,10] ' Então as células terão as seguintes associações: ' Célula-Índice Célula-Índice Célula-Índice Célula- Índice ' (3,A)- (3,1) (7,D)- (7,4) (10,I)-(10,9) (6,G)- (6,6) ' (15,J)-(15,10) (9,B)- (9,2) (3,C)- (3,3) (13,H)- (13,8) ' Colocando valores nos elementos da matriz preenchendo por coluna For ncol = 1 To 10     For nlin = 1 To 15 </pre>

	<pre> Cells(nlin, ncol) = ncol + nlin Next nlin Next ncol  ' Colocando cor no preenchimento da célula de acordo com o valor ' Os valores de 3 a 24 terão cores associadas ao próprio valor ' O valor 2 e os valores maiores que 24 terão a cor 30  For nlin = 1 To 15   For ncol = 1 To 10     Cells(nlin, ncol).Select     If Cells(nlin, ncol).Value &lt; 22 And Cells(nlin, ncol).Value &gt; 2 Then       With Selection.Interior         .ColorIndex = Cells(nlin, ncol).Value         .Pattern = xlSolid         .PatternColorIndex = xlAutomatic       End With     Else       With Selection.Interior         .ColorIndex = 30         .Pattern = xlSolid         .PatternColorIndex = xlAutomatic       End With     End If   Next ncol Next nlin End Sub </pre>
--	--

#### A.2. 4 - Sub geradora

Descrição da Macro	Subrotina e Linhas de Comando
	<pre> Sub geradora() ' geradora Macro ' Macro gravada em 2/5/2006 por Orlando Olympio Lenzi Filho '  ' Atalho do teclado: Ctrl+g  numlin = InputBox("Digite o número de linhas do seu espaço", "DEFININDO O ESPAÇO") numcol = InputBox("Digite o número de colunas do seu espaço", "DEFININDO O ESPAÇO") amplif = InputBox("Digite o valor da amplificação", "DEFININDO O ESPAÇO") Cells(31, 14).Value = Cells(1, 1).Value * amplif ' Cells(32, 1).Value = numlin ' Cells(32, 2).Value = numcol For valor = 1 To 10 Cells(1, 1).Value = valor valmax = Cells(1, 1).Value valmin = Cells(1, 1).Value For nlin = 1 To numlin For ncol = 1 To numcol If Cells(nlin, ncol).Value &lt; valmin Then </pre>

	<pre> valmin = Cells(nlin, ncol).Value End If If Cells(nlin, ncol).Value &gt; valmax Then valmax = Cells(nlin, ncol).Value End If increment = (valmax - valmin) / 50 + 0.00001  ' Cells(32, 3).Value = valmax ' Cells(32, 4).Value = valmin ' Cells(32, 5).Value = increment  Next ncol Next nlin For nlin = 1 To numlin     For ncol = 1 To numcol         Cells(nlin, ncol).Select         interv = Abs(Int((valmax - Cells(nlin, ncol).Value) / increment)) + 3         If Cells(nlin, ncol).Value &lt;&gt; 0 Then             With Selection.Interior                 .ColorIndex = interv                 .Pattern = xlSolid                 .PatternColorIndex = xlAutomatic             End With         Else             With Selection.Interior                 .ColorIndex = 2                 .Pattern = xlSolid                 .PatternColorIndex = xlAutomatic             End With         End If     Next ncol Next nlin Next valor  End Sub </pre>
--	---

## A. 4 – Implementação Numérica em FORTRAN do Método de Diferenças Finitas para a solução do Problema da Barra Engastada

	<i>Arquivo de entrada</i>
	101                    (número de pontos na corda em que foram calculados os valores de $u$ ) 2000                   (número de intervalos de tempo) 1                        (valor da constante $c$ ) 0.005                ( $\Delta t$ ) 0.01                    ( $\Delta x$ )  Considerou-se que a barra possui 1 metro.
	<i>Programa Fonte</i>
	<pre> PROGRAM MDF_ONDA_1D USE PORTLIB REAL, ALLOCATABLE, DIMENSION (:,)::U INTEGER i,j,N,M,VER REAL c, DELTA_T, DELTA_X,ALFA !***** !***** ! Programa para resolver o problema: <math>d^2u/dx^2=(1/c^2)*(d^2u/dt^2)</math>  ! !                               <math>u(t,0)=0</math> <math>u(t,L)/dx=1</math> <math>u(0,x)=0</math> <math>du(0,x)/dt=0</math> ! <math>U(j,i) \rightarrow</math> matriz contendo os valores de <math>U</math> no tempo <math>j</math> e na posição <math>i</math>  ! <math>j=1</math> corresponde ao instante inicial (<math>t=0</math>) ! O cálculo de <math>U(j,i)</math> para <math>j=2</math> envolve o valor de <math>U</math> em um tempo fora do domínio (<math>t&lt;0</math>) ! <math>i=1</math> corresponde a posição inicial (<math>x=0</math>) ! O cálculo de <math>U(j,i)</math> para <math>i=N</math> (<math>x=L</math>) envolve o valor de <math>U</math> em um ponto fora do domínio (<math>N+1</math>) !***** !***** OPEN(10, file="entrada.txt") READ(10,*) N READ(10,*) M READ(10,*) c READ(10,*) DELTA_T READ(10,*) DELTA_X CLOSE(10)  ALLOCATE(U(M,N))  OPEN(20, file="du(t,0)_dx.txt") OPEN(25, file="u(t,0.5L).txt") OPEN(30, file="u(t,L).txt")  !Laço para impor condicao de contorno <math>U(t,1)=0.0</math>, ou seja, para qualquer tempo na posicao <math>x=0</math> !(<math>i=1</math>), <math>U=0</math> DO j=1,3       U(j,1)=0.0 END DO  !Laço para impor condicao inicial <math>U(1,i)=0.0</math>, ou seja, em <math>t=0</math> (<math>j=1</math>), <math>U=0</math> para </pre>

	<pre> qualquer posicao. DO i=1,N     U(1,i)=0.0 END DO  !Definindo uma constante ALFA=(c*c*DELTA_T*DELTA_T)/(DELTA_X*DELTA_X)  !Laço para calcular os deslocamentos quando j=2.Surgem aqui os valores de u em um tempo fora !do domínio. DO i=2,N     IF(i==N) THEN         U(2,i)=ALFA/2.0*(2*DELTA_X+2*U(1,i-1)- 2*U(1,i))+U(1,i)     ELSE         U(2,i)=ALFA/2.0*(U(1,i+1)-2*U(1,i)+U(1,i-1))+U(1,i)     END IF END DO  !Laço para calcular os deslocamentos em diferentes pontos da corda em diferentes instantes de !tempo !j começa em 3 porque j=1 (t=0) e j=2 (t=1) já foram calculados. DO j=3,M     DO i=2,N         IF(i==N)THEN             U(3,i)=ALFA*(2*DELTA_X+2*U(2,i-1)- 2*U(2,i))+2*U(2,i)-U(1,i)         ELSE             U(3,i)=ALFA*(U(2,i+1)-2*U(2,i)+U(2,i- 1))+2*U(2,i)-U(1,i)         END IF     END DO     !Laço para salvar em arquivo os deslocamentos dos pontos que serão plotados e para passar !os valores de U(2,i) para U(1,i) e de U(3,i) para U(2,i)     DO i=1,N         IF (i == 1)      WRITE(20,10) (j-2)*DELTA_T,(U(1,i+1)- U(1,i))/DELTA_X         IF (i == (N-1)/2) WRITE(25,10) (j-2)*DELTA_T,U(1,i)         IF (i == N)      WRITE(30,10) (j-2)*DELTA_T,U(1,i)         U(1,i)=U(2,i)         U(2,i)=U(3,i)     END DO END DO 10 FORMAT (F6.2,F6.2) CLOSE(20) CLOSE(25) CLOSE(30)  !Comandos para chamar o gnuplot e fazer os gráficos VER=SYSTEM("Wgnuplot comandos1.txt") VER=SYSTEM("Wgnuplot comandos2.txt") VER=SYSTEM("Wgnuplot comandos3.txt")  END PROGRAM MDF_ONDA_1D </pre>
--	---

### *A.3.1 - Arquivos de comandos do Gnuplot*

comandos1.txt	comandos2.txt	comandos3.txt
set xlabel "tempo"	set xlabel "tempo"	set xlabel "tempo"
set ylabel "du/dx"	set ylabel "deslocamento"	set ylabel "deslocamento"
set title "du(t,0)_dx X t"	set title "u(t,0.5L) X t"	set title "u(t,L) X t"
set grid	set grid	set grid
set data style linespoints	set data style linespoints	set data style linespoints
set pointsize 0.2	set pointsize 0.2	set pointsize 0.2
plot "du(t,0)_dx.txt"	plot "u(t,0.5L).txt"	plot "u(t,L).txt"

## **A. 5 – Solução Analítica das oscilações em uma Membrana Retangular**

*A.4.1 - Movimento transverso de uma sob velocidade inicial prescrita*



## A. 6 – Implementação Algébrica para o Método Variacional de Euler-Lagrange usando o Maple – 9.

A.5.1 – Para o funcional do menor caminho entre dois pontos

> **restart;**

> **z(x):=diff(y(x),x);**

$$z(x) := \frac{d}{dx} y(x)$$

Seja o funcional:

> **L(x,y(x),z(x)):=sqrt(1+(z(x))^2);**

$$L\left(x, y(x), \frac{d}{dx} y(x)\right) := \sqrt{1 + \left(\frac{d}{dx} y(x)\right)^2}$$

> **Ip:=int(L(x,y(x),z(x)),x);**

$$I_p := \int \sqrt{1 + \left(\frac{d}{dx} y(x)\right)^2} dx$$

> **L(x,y,z):=sqrt(1+(z)^2);**

$$L(x, y, z) := \sqrt{1 + z^2}$$

> **p:=diff(L(x,y,z),z);**

$$p := \frac{z}{\sqrt{1 + z^2}}$$

> **Q(x):=implicitdiff(p,m(x),x);**

$$Q(x) := 0$$

> **F(x):=diff(L(x,y,z),y);**

$$F(x) := 0$$

> **z:=solve(p=c,z);**

$$z := c \sqrt{-\frac{1}{c^2 - 1}}$$

> **y:=int(z,x);**

$$y := c \sqrt{-\frac{1}{c^2 - 1}} x$$

A.5.2 – Para o funcional  $L(x,y,z) = xz + z^2$

> **restart;**

Seja o funcional:

> **Ip:=int(L(x,y(x),z(x)),x);**

$$I_p := \int L(x, y(x), z(x)) dx$$

> **L(x,y,z):=x\*z+z^2;**

$$L(x, y, z) := x z + z^2$$

> **L(x,y(x),z):=L(x,y,z);**

$$L(x, y(x), z) := x z + z^2$$

> **Ip:=int(L(x,y(x),z(x)),x);**

$$I_p := \int L(x, y(x), z(x)) dx$$

> **P:=diff(L(x,y(x),z),z);**

$$P := x + 2 z$$

> **F:=-diff(L(x,y(x),z),y);**

$$F := 0$$

> **z:=diff(y(x),x);**

$$z := \frac{d}{dx} y(x)$$

> **DtP:=diff(P,x);**

$$DtP := 1 + 2 \left( \frac{d^2}{dx^2} y(x) \right)$$

> **C:=DtP+F;**

$$C := 1 + 2 \left( \frac{d^2}{dx^2} y(x) \right)$$

> **H(z):=C;**

$$H\left(\frac{d}{dx} y(x)\right) := 1 + 2 \left( \frac{d^2}{dx^2} y(x) \right)$$

> **g(x):=int(C,x);**

$$g(x) := x + 2 \left( \frac{d}{dx} y(x) \right)$$

> **h(x):=solve(g(x)=0,diff(y(x),x));**

$$h(x) := -\frac{x}{2}$$

> **y:=int(h(x),x);**

$$y := -\frac{x^2}{4}$$

## A. 7 – Implementação Algébrica para o Método de Rayleigh-Ritz usando o Maple – 9.

A.6.1 – Para  $n = 1$

> **restart;**

Seja o funcional:

> **L(x):=((E\*I)/2)\*(diff(w(x),x,x))^2-q\*w(x);**

$$L(x) := \frac{1}{2} I E \left( \frac{d^2}{dx^2} w(x) \right)^2 - q w(x)$$

> **Ip(x):=int(L(x), x=x1..x2);**

$$Ip(x) := \int_{x1}^{x2} \frac{1}{2} I E \left( \frac{d^2}{dx^2} w(x) \right)^2 - q w(x) dx$$

> **w(x):=alpha1\*x\*(x-l);**

$$w(x) := \alpha_1 x (x - l)$$

> **w(0):=0;**

$$w(0) := 0$$

> **w(1):=1;**

$$w(1) := 1$$

Solução:

Derivando as funções w(x) para substituir no funcional

> **d1(x):=diff(w(x),x);**

$$d1(x) := \alpha_1 (x - l) + \alpha_1 x$$

> **d2(x):=diff(w(x),x,x);**

$$d2(x) := 2 \alpha_1$$

> **L(x):=((E\*I)/2)\*((d2(x))^2)-q\*w(x);**

$$L(x) := 2 I E \alpha_1^2 - q \alpha_1 x (x - l)$$

> **Ia(alpha1):=int(L(x),x=0..l);**

$$Ia(\alpha_1) := \frac{q \alpha_1 l^3}{6} + 2 I E \alpha_1^2 l$$

> **Dia(alpha1):=diff(Ia(alpha1),alpha1);**

$$Dia(\alpha_1) := \frac{q l^3}{6} + 4 I E \alpha_1 l$$

> **alpha1:=solve(Dia(alpha1)=0,alpha1);**

$$\alpha_1 := \frac{\frac{1}{24} I q l^2}{E}$$

Portanto:

> **w(x):=alpha1\*x\*(x-l);**

$$w(x) := \frac{\frac{1}{24} I q l^2 x (x-l)}{E}$$

> **L(x):=(E\*I/2)\*diff(w(x),x,x)-q\*w(x);**

$$L(x) := -\frac{q l^2}{24} - \frac{\frac{1}{24} I q^2 l^2 x (x-l)}{E}$$

> **Ip(x):=int(L(x), x=x1..x2);**

$$Ip(x) := -\frac{\frac{1}{72} I q^2 l^2 (x2^3 - x1^3)}{E} + \frac{\frac{1}{48} I q^2 l^3 (x2^2 - x1^2)}{E} - \frac{q l^2 (x2 - x1)}{24}$$

> **x1:=0;**

$$x1 := 0$$

> **x2:=l;**

$$x2 := l$$

> **Ip(x):=int(L(x), x=x1..x2);**

$$Ip(x) := \frac{\frac{1}{144} I q^2 l^5}{E} - \frac{q l^3}{24}$$

*A.6.2 – Para  $n = 2$*

> **restart;**

Seja o funcional:

> **L(x):=(E\*I/2)\*(diff(w(x),x,x))^2-q\*w(x);**

$$L(x) := \frac{1}{2} I E \left( \frac{d^2}{dx^2} w(x) \right)^2 - q w(x)$$

> **Ip(x):=int(L(x), x=x1..x2);**

$$Ip(x) := \int_{x1}^{x2} \frac{1}{2} I E \left( \frac{d^2}{dx^2} w(x) \right)^2 - q w(x) dx$$

> **phi1:=x\*(x-l);**

$$\phi1 := x (x-l)$$

> **phi2:=x^2\*(x-l);**

$$\phi2 := x^2 (x-l)$$

> **x2:=l;**

$$x2 := l$$

> **w(x):=alpha1\*phi1+alpha2\*phi2;**

$$w(x) := \alpha1 x (x-l) + \alpha2 x^2 (x-l)$$

> **w(0):=0;**

$$w(0) := 0$$

> **w(1):=1;**

$$w(1) := 1$$

Solução:

Derivando as funções  $w(x)$  para substituir no funcional

> **d1(x):=diff(w(x),x);**

$$d1(x) := \alpha_1 (x - l) + \alpha_1 x + 2 \alpha_2 x (x - l) + \alpha_2 x^2$$

> **d2(x):=diff(w(x),x,x);**

$$d2(x) := 2 \alpha_1 + 2 \alpha_2 (x - l) + 4 \alpha_2 x$$

> **L(x):=(E\*I/2)\*((d2(x))^2)-q\*w(x);**

$$L(x) := \frac{1}{2} I E (2 \alpha_1 + 2 \alpha_2 (x - l) + 4 \alpha_2 x)^2 - q (\alpha_1 x (x - l) + \alpha_2 x^2 (x - l))$$

> **Ia(alpha1):=int(L(x),x=0..l);**

$$Ia(\alpha_1) := -\frac{q \alpha_2 l^4}{4} + \frac{(18 I E \alpha_2^2 - q (\alpha_1 - \alpha_2 l)) l^3}{3} \\ + \frac{(6 I E (2 \alpha_1 - 2 \alpha_2 l) \alpha_2 + q \alpha_1 l) l^2}{2} + \frac{1}{2} I E (2 \alpha_1 - 2 \alpha_2 l)^2 l$$

> **Ib(alpha2):=int(L(x),x=0..l);**

$$Ib(\alpha_2) := -\frac{q \alpha_2 l^4}{4} + \frac{(18 I E \alpha_2^2 - q (\alpha_1 - \alpha_2 l)) l^3}{3} \\ + \frac{(6 I E (2 \alpha_1 - 2 \alpha_2 l) \alpha_2 + q \alpha_1 l) l^2}{2} + \frac{1}{2} I E (2 \alpha_1 - 2 \alpha_2 l)^2 l$$

> **DIa(alpha1):=diff(Ia(alpha1),alpha1);**

$$DIa(\alpha_1) := -\frac{q l^3}{3} + \frac{(12 I E \alpha_2 + q l) l^2}{2} + 2 I E (2 \alpha_1 - 2 \alpha_2 l) l$$

> **DIb(alpha2):=diff(Ib(alpha2),alpha2);**

$$DIb(\alpha_2) := -\frac{q l^4}{4} + \frac{(36 I E \alpha_2 + q l) l^3}{3} + \frac{(-12 I E l \alpha_2 + 6 I E (2 \alpha_1 - 2 \alpha_2 l)) l^2}{2} \\ - 2 I E (2 \alpha_1 - 2 \alpha_2 l) l^2$$

> **alpha1:=solve(DIa(alpha1)=0,alpha1);**

$$\alpha_1 := \frac{\frac{1}{24} I l (12 I E \alpha_2 + q l)}{E}$$

> **alpha2:=solve(DIb(alpha2)=0,alpha2);**

$$\alpha_2 := \frac{\frac{1}{48} I (q l^2 + 24 I E \alpha_1)}{l E}$$

Portanto:

> **w(x):=alpha1\*phi1+alpha2\*phi2;**

```

Error, too many levels of recursion

> L(x):=(E*I/2)*(diff(w(x),x,x))^2-q*w(x);

$$L(x) := \frac{1}{2} I E (2 \alpha_1 + 2 \alpha_2 (x - l) + 4 \alpha_2 x)^2 - q (\alpha_1 x (x - l) + \alpha_2 x^2 (x - l))$$


> Ip(x):=int(L(x), x=x1..x2);
Error, (in ProcessOptions) too many levels of recursion

> x1:=0;

$$x1 := 0$$


$$x1 := 0$$


> x2:=l;

$$x2 := l$$


> Ip(x):=int(L(x), x=x1..x2);

$$\begin{aligned} Ip(x) := & -\frac{q \alpha_2 l^4}{4} + \frac{(18 I E \alpha_2^2 - q (\alpha_1 - \alpha_2 l)) l^3}{3} \\ & + \frac{(6 I E (2 \alpha_1 - 2 \alpha_2 l) \alpha_2 + q \alpha_1 l) l^2}{2} + \frac{1}{2} I E (2 \alpha_1 - 2 \alpha_2 l)^2 l \end{aligned}$$


```

## A. 8 – Implementação Algébrica para o Método dos Resíduos Ponderados usando o Maple – 9.

### A.7.1 – Método da Colocação para $n = 1$ com um parâmetro $\alpha$

Seja a Equação Diferencial:

> **restart;**

> **L(x):=diff(u(x),x,x)-u(x);**

$$L(x) := \left( \frac{d^2}{dx^2} u(x) \right) - u(x)$$

com condições de contorno

$x_1 = 0$  e  $x_2 = 1$  com  $u(x_1) = 0$  e  $u(x_2) = 1$ ;

Solução:

> **u(x):=beta+alpha\*phi;**

$$u(x) := \beta + \alpha \phi$$

> **beta:=x;**

$$\beta := x$$

> **phi:=x\*(x-1);**

$$\phi := x(x-1)$$

> **u(x):=beta+alpha\*phi;**

$$u(x) := x + \alpha x(x-1)$$

Derivando as funções  $w(x)$  para substituir no funcional

> **d1(x):=diff(u(x),x);**

$$d1(x) := 1 + \alpha(x-1) + \alpha x$$

> **d2(x):=diff(u(x),x,x);**

$$d2(x) := 2\alpha$$

o erro  $\epsilon(x)$  é dado por:

> **epsilon(x):=d2(x)-u(x);**

$$\epsilon(x) := 2\alpha - x - \alpha x(x-1)$$

A sentença básica de resíduos ponderados pode ser escrita como:

> **Ia(alpha):=int(Dirac(x-1/2)\*epsilon(x),x=0..1);**

$$Ia(\alpha) := \frac{9\alpha}{4} - \frac{1}{2}$$

> **alpha:=solve(Ia(alpha)=0,alpha);**

$$\alpha := \frac{2}{9}$$

Portanto:

> **u(x):=beta+alpha\*phi;**

$$u(x) := x + \frac{2x(x-1)}{9}$$

> **d2:=d2(x);**

$$d2 := 2\alpha$$

> **L(x):=d2-u(x);**

$$L(x) := \frac{4}{9} - x - \frac{2x(x-1)}{9}$$

> **x1:=0;**

$$x1 := 0$$

> **x2:=1;**

$$x2 := 1$$

> **u1:=eval(u(x),x=x1);**

$$u1 := 0$$

> **u2:=eval(u(x),x=x2);**

$$u2 := 1$$

> **L(x1):=d2-u1;**

$$L(0) := \frac{4}{9}$$

> **L(x2):=d2-u2;**

$$L(1) := \frac{-5}{9}$$

### A.7.2 – Método da Colocação para $n = 2$ com dois parâmetros $\alpha_1$ e $\alpha_2$

Seja a Equação Diferencial:

> **restart;**

> **L(x):=diff(u(x),x,x)-u(x);**

$$L(x) := \left( \frac{d^2}{dx^2} u(x) \right) - u(x)$$

com condições de contorno

$x_1 = 0$  e  $x_2 = 1$  com  $u(x_1) = 0$  e  $u(x_2) = 1$ ;

Solução:

> **u(x):=beta+alpha1\*phi1+alpha2\*phi2;**

$$u(x) := \beta + \alpha_1 \phi_1 + \alpha_2 \phi_2$$

> **beta:=x;**

$$\beta := x$$

> **phi1:=x\*(x-1);**

$$\phi_1 := x(x-1)$$

> **phi2:=x^2\*(x-1);**

$$\phi_2 := x^2(x-1)$$



```
> u(x):=beta+alpha1*phi1+alpha2*phi2;
      u(x) := x + α1 x (x - 1) + α2 x2 (x - 1)
```

Derivando as funções w(x) para substituir no funcional

```
> d1(x):=diff(u(x),x);
      d1(x) := 1 + α1 (x - 1) + α1 x + 2 α2 x (x - 1) + α2 x2
```

```
> d2(x):=diff(u(x),x,x);
      d2(x) := 2 α1 + 2 α2 (x - 1) + 4 α2 x
```

o erro epsilonOmega(x) é dado por:

```
> epsilon(x):=d2(x)-u(x);
      ε(x) := 2 α1 + 2 α2 (x - 1) + 4 α2 x - x - α1 x (x - 1) - α2 x2 (x - 1)
```

A sentença básica de resíduos ponderados pode ser escrita como:

```
> Ia(alpha1):=int(Dirac(x-1/3)*epsilon(x),x=0..1);
      Ia(α1) :=  $\frac{20 \alpha_1}{9} - \frac{1}{3} + \frac{2 \alpha_2}{27}$ 
```

```
> Ib(alpha2):=int(Dirac(x-2/3)*epsilon(x),x=0..1);
      Ib(α2) :=  $\frac{20 \alpha_1}{9} + \frac{58 \alpha_2}{27} - \frac{2}{3}$ 
```

```
> alpha1:=solve(Ia(alpha1)=0,alpha1);
      α1 :=  $\frac{3}{20} - \frac{\alpha_2}{30}$ 
```

```
> alpha2:=solve(Ib(alpha2)=0,alpha2);
      α2 :=  $-\frac{30 \alpha_1}{29} + \frac{9}{29}$ 
```

```
> with(LinearAlgebra):
> A:=(<<1,30/29>|<1/30,1>>);
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{30} \\ \frac{30}{29} & 1 \end{bmatrix}$$

```
> alpha := <3/20,9/29>;
```

$$\alpha := \begin{bmatrix} \frac{3}{20} \\ \frac{9}{29} \end{bmatrix}$$

```
> M:=MatrixInverse(A,method=pseudo);
      M :=  $\begin{bmatrix} \frac{29}{28} & -\frac{29}{840} \\ -\frac{15}{14} & \frac{29}{28} \end{bmatrix}$ 
```

```
> MatrixVectorMultiply(M,alpha);
```

$$\begin{bmatrix} \frac{81}{560} \\ \frac{9}{56} \end{bmatrix}$$

> **alpha1:=81/560; alpha2:=9/56;**

$$\alpha 1 := \frac{81}{560}$$

$$\alpha 2 := \frac{9}{56}$$

Portanto:

> **u=u(x);**

$$u = x + \alpha 1 \, x \, (x - 1) + \alpha 2 \, x^2 \, (x - 1)$$

> **d2:=d2(x);**

$$d2 := -\frac{9}{280} + \frac{27}{28} x(x)$$

> **L(x):=d2(x)-u(x);**

$$L(x) := -\frac{9}{280} + \frac{27}{28} x(x)(x) - x - \alpha 1 \, x \, (x - 1) - \alpha 2 \, x^2 \, (x - 1)$$

> **x1:=0;**

$$x1 := 0$$

> **x2:=1;**

$$x2 := 1$$

> **u1:=eval(u(x),x=x1);**

$$u1 := 0$$

> **u2:=eval(u(x),x=x2);**

$$u2 := 1$$

> **L:=d2-u1;**

$$L := -\frac{9}{280} + \frac{27}{28} x(x)$$

> **L:=d2-u2;**

$$L := -\frac{289}{280} + \frac{27}{28} x(x)$$

### A.7.3 – Método da Colocação por Subdomínios para $n = 1$ com um parâmetro $\alpha$

Seja a Equação Diferencial:

> **restart;**

> **L(x):=diff(u(x),x,x)-u(x);**

$$L(x) := \left( \frac{d^2}{dx^2} u(x) \right) - u(x)$$

com condições de contorno

$x_1 = 0$  e  $x_2 = 1$  com  $u(x_1) = 0$  e  $u(x_2) = 1$ ;

Solução:

> **u(x):=beta+alpha\*phi;**

$$u(x) := \beta + \alpha \phi$$

> **beta:=x;**

$$\beta := x$$

> **phi:=x\*(x-1);**

$$\phi := x(x-1)$$

> **u(x):=beta+alpha\*phi;**

>

$$u(x) := x + \alpha x(x-1)$$

Derivando as funções  $w(x)$  para substituir no funcional

> **d1(x):=diff(u(x),x);**

$$d1(x) := 1 + \alpha(x-1) + \alpha x$$

> **d2(x):=diff(u(x),x,x);**

$$d2(x) := 2\alpha$$

o erro  $\epsilon(x)$  é dado por:

> **epsilon(x):=d2(x)-u(x);**

$$\epsilon(x) := 2\alpha - x - \alpha x(x-1)$$

A sentença básica de resíduos ponderados pode ser escrita como:

> **Ia(alpha):=int(1\*epsilon(x),x=0..1);**

$$Ia(\alpha) := \frac{13\alpha}{6} - \frac{1}{2}$$

> **alpha:=solve(Ia(alpha)=0,alpha);**

$$\alpha := \frac{3}{13}$$

Portanto:

> **u(x):=beta+alpha\*phi;**

$$u(x) := x + \frac{3x(x-1)}{13}$$

```

> d2:=d2(x);
                                 $d2 := 2 \alpha$ 

> L(x):=d2-u(x);
                                 $L(x) := \frac{6}{13} - x - \frac{3x(x-1)}{13}$ 

> x1:=0;
                                 $x1 := 0$ 

> x2:=1;
                                 $x2 := 1$ 

> u1:=eval(u(x),x=x1);
                                 $u1 := 0$ 

> u2:=eval(u(x),x=x2);
                                 $u2 := 1$ 

> L(x1):=d2-u1;
                                 $L(0) := \frac{6}{13}$ 

> L(x2):=d2-u2;
                                 $L(1) := \frac{-7}{13}$ 

```

#### A.7.4 – Método da Colocação por Subdomínios para $n = 2$ com dois parâmetros $\alpha_1$ e $\alpha_2$

Seja a Equação Diferencial:

```

> restart;
> L(x):=diff(u(x),x,x)-u(x);
                                 $L(x) := \left( \frac{d^2}{dx^2} u(x) \right) - u(x)$ 

```

com condições de contorno

$x_1 = 0$  e  $x_2 = 1$  com  $u(x_1) = 0$  e  $u(x_2) = 1$ ;

Solução:

```

> u(x):=beta+alpha1*phi1+alpha2*phi2;
                                 $u(x) := \beta + \alpha_1 \phi_1 + \alpha_2 \phi_2$ 

> beta:=x;
                                 $\beta := x$ 

> phi1:=x*(x-1);
                                 $\phi_1 := x(x-1)$ 

> phi2:=x^2*(x-1);
                                 $\phi_2 := x^2(x-1)$ 

```

```
> u(x):=beta+alpha1*phi1+alpha2*phi2;
      u(x) := x + α1 x (x - 1) + α2 x2 (x - 1)
```

Derivando as funções w(x) para substituir no funcional

```
> d1(x):=diff(u(x),x);
      d1(x) := 1 + α1 (x - 1) + α1 x + 2 α2 x (x - 1) + α2 x2
```

```
> d2(x):=diff(u(x),x,x);
      d2(x) := 2 α1 + 2 α2 (x - 1) + 4 α2 x
```

o erro epsilonOmega(x) é dado por:

```
> epsilon(x):=d2(x)-u(x);
      ε(x) := 2 α1 + 2 α2 (x - 1) + 4 α2 x - x - α1 x (x - 1) - α2 x2 (x - 1)
```

A sentença básica de resíduos ponderados pode ser escrita como:

```
> Ia(alpha1):=int(1*epsilon(x),x=0..1/2);
      Ia(α1) := - $\frac{43 \alpha_2}{192}$  +  $\frac{13 \alpha_1}{12}$  -  $\frac{1}{8}$ 
```

```
> Ib(alpha2):=int(1*epsilon(x),x=1/2..1);
      Ib(α2) :=  $\frac{251 \alpha_2}{192}$  +  $\frac{13 \alpha_1}{12}$  -  $\frac{3}{8}$ 
```

```
> alpha1:=solve(Ia(alpha1)=0,alpha1);
      α1 :=  $\frac{43 \alpha_2}{208}$  +  $\frac{3}{26}$ 
```

```
> alpha2:=solve(Ib(alpha2)=0,alpha2);
      α2 := - $\frac{208 \alpha_1}{251}$  +  $\frac{72}{251}$ 
```

```
> with(LinearAlgebra):
```

```
> A:=(<<1,208/251>|-43/208,1>>);
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & -\frac{43}{208} \\ \frac{208}{251} & 1 \end{bmatrix}$$

```
> alpha := <3/26,72/251>;
```

$$\alpha := \begin{bmatrix} \frac{3}{26} \\ \frac{72}{251} \end{bmatrix}$$

```
> M:=MatrixInverse(A,method=pseudo);
```

$$M := \begin{bmatrix} \frac{251}{294} & \frac{10793}{61152} \\ -\frac{104}{147} & \frac{251}{294} \end{bmatrix}$$

```
> alphas:=MatrixVectorMultiply(M,alpha);
```

$$alphas := \begin{bmatrix} \frac{95}{637} \\ \frac{8}{49} \end{bmatrix}$$

> **alpha1:=95/637; alpha2:=8/49;**

$$\alpha 1 := \frac{95}{637}$$

$$\alpha 2 := \frac{8}{49}$$

Portanto:

> **u=u(x);**

$$u = x + \alpha 1 \, x \, (x - 1) + \alpha 2 \, x^2 \, (x - 1)$$

> **d2:=d2(x);**

$$d2 := 2 \, \alpha 1 + 2 \, \alpha 2 \, (x - 1) + 4 \, \alpha 2 \, x$$

> **L(x):=d2(x)-u(x);**

$$L(x) := -\frac{18}{637} + \frac{48}{49} x(x) - x - \alpha 1 \, x \, (x - 1) - \alpha 2 \, x^2 \, (x - 1)$$

> **x1:=0;**

$$x1 := 0$$

> **x2:=1;**

$$x2 := 1$$

> **u1:=eval(u(x),x=x1);**

$$u1 := 0$$

> **u2:=eval(u(x),x=x2);**

$$u2 := 1$$

> **L(x):=d2(x)-u1;**

$$L(x) := -\frac{18}{637} + \frac{48}{49} x(x)$$

> **L(x):=d2(x)-u2;**

$$L(x) := -\frac{655}{637} + \frac{48}{49} x(x)$$

### A.7.5 – Método dos Momentos para $n = 1$ com um parâmetro $\alpha$

Seja a Equação Diferencial:

> **restart;**

> **L(x):=diff(u(x),x,x)-u(x);**

$$L(x) := \left( \frac{d^2}{dx^2} u(x) \right) - u(x)$$

com condições de contorno

$x_1 = 0$  e  $x_2 = 1$  com  $u(x_1) = 0$  e  $u(x_2) = 1$ ;

Solução:

> **u(x):=beta+alpha\*phi;**

$$u(x) := \beta + \alpha \phi$$

> **beta:=x;**

$$\beta := x$$

> **phi:=x\*(x-1);**

$$\phi := x(x-1)$$

> **u(x):=beta+alpha\*phi;**

$$u(x) := x + \alpha x(x-1)$$

Derivando as funções  $w(x)$  para substituir no funcional

> **d1(x):=diff(u(x),x);**

$$d1(x) := 1 + \alpha(x-1) + \alpha x$$

> **d2(x):=diff(u(x),x,x);**

$$d2(x) := 2\alpha$$

o erro  $\epsilon(x)$  é dado por:

> **epsilon(x):=d2(x)-u(x);**

$$\epsilon(x) := 2\alpha - x - \alpha x(x-1)$$

A sentença básica de resíduos ponderados pode ser escrita como:

> **Ia(alpha):=int(1\*epsilon(x),x=0..1);**

$$Ia(\alpha) := \frac{13\alpha}{6} - \frac{1}{2}$$

> **alpha:=solve(Ia(alpha)=0,alpha);**

$$\alpha := \frac{3}{13}$$

Portanto:

> **u(x):=beta+alpha\*phi;**

$$u(x) := x + \frac{3x(x-1)}{13}$$

> **d2:=d2(x);**

$$d2 := \frac{6}{13}$$

> **L(x):=d2-u(x);**

$$L(x) := \frac{6}{13} - x - \frac{3x(x-1)}{13}$$

> **x1:=0;**

$$x1 := 0$$

> **x2:=1;**

$$x2 := 1$$

> **u1:=eval(u(x),x=x1);**

$$u1 := 0$$

> **u2:=eval(u(x),x=x2);**

$$u2 := 1$$

> **L(x1):=d2-u1;**

$$L(0) := \frac{6}{13}$$

> **L(x2):=d2-u2;**

$$L(1) := \frac{-7}{13}$$

#### A.7.6 – Método dos Momentos para $n = 2$ com dois parâmetros $\alpha_1$ e $\alpha_2$

Seja a Equação Diferencial:

> **restart;**

> **L(x):=diff(u(x),x,x)-u(x);**

$$L(x) := \left( \frac{d^2}{dx^2} u(x) \right) - u(x)$$

com condições de contorno

$x1 = 0$  e  $x2 = 1$  com  $u(x1) = 0$  e  $u(x2) = 1$ ;

Solução:

> **u(x):=beta+alpha1\*phi1+alpha2\*phi2;**

$$u(x) := \beta + \alpha_1 \phi_1 + \alpha_2 \phi_2$$

> **beta:=x;**

$$\beta := x$$

> **phi1:=x\*(x-1);**

$$\phi_1 := x(x-1)$$

> **phi2:=x^2\*(x-1);**

$$\phi_2 := x^2(x-1)$$

> **u(x):=beta+alpha1\*phi1+alpha2\*phi2;**



$$u(x) := x + \alpha_1 x(x-1) + \alpha_2 x^2(x-1)$$

Derivando as funções  $w(x)$  para substituir no funcional

> **d1(x):=diff(u(x),x);**

$$d1(x) := 1 + \alpha_1(x-1) + \alpha_1 x + 2\alpha_2 x(x-1) + \alpha_2 x^2$$

> **d2(x):=diff(u(x),x,x);**

$$d2(x) := 2\alpha_1 + 2\alpha_2(x-1) + 4\alpha_2 x$$

o erro  $\epsilon(x)$  é dado por:

> **epsilon(x):=d2(x)-u(x);**

$$\epsilon(x) := 2\alpha_1 + 2\alpha_2(x-1) + 4\alpha_2 x - x - \alpha_1 x(x-1) - \alpha_2 x^2(x-1)$$

A sentença básica de resíduos ponderados pode ser escrita como:

> **Ia(alpha1):=int(1\*epsilon(x),x=0..1);**

$$Ia(\alpha_1) := \frac{13\alpha_2}{12} + \frac{13\alpha_1}{6} - \frac{1}{2}$$

> **Ib(alpha2):=int(x\*epsilon(x),x=0..1);**

$$Ib(\alpha_2) := \frac{21\alpha_2}{20} + \frac{13\alpha_1}{12} - \frac{1}{3}$$

> **alpha1:=solve(Ia(alpha1)=0,alpha1);**

$$\alpha_1 := -\frac{\alpha_2}{2} + \frac{3}{13}$$

> **alpha2:=solve(Ib(alpha2)=0,alpha2);**

$$\alpha_2 := -\frac{65\alpha_1}{63} + \frac{20}{63}$$

> **with(LinearAlgebra):**

> **A:=(<<1,65/63>|<1/2,1>>);**

$$A := \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{65}{63} & 1 \end{bmatrix}$$

> **alpha := <3/13,20/63>;**

$$\alpha := \begin{bmatrix} \frac{3}{13} \\ \frac{20}{63} \end{bmatrix}$$

> **M:=MatrixInverse(A,method=pseudo);**

$$M := \begin{bmatrix} \frac{126}{61} & \frac{-63}{61} \\ \frac{-130}{61} & \frac{126}{61} \end{bmatrix}$$

> **alphas:=MatrixVectorMultiply(M,alpha);**

$$alphas := \begin{bmatrix} \frac{118}{793} \\ \frac{10}{61} \end{bmatrix}$$

> **alpha1:=118/793; alpha2:=10/61;**

$$\alpha 1 := \frac{118}{793}$$

$$\alpha 2 := \frac{10}{61}$$

Portanto:

> **u=u(x);**

$$u = x + \alpha 1 \, x \, (x - 1) + \alpha 2 \, x^2 \, (x - 1)$$

> **d2:=d2(x);**

$$d2 := 2 \, \alpha 1 + 2 \, \alpha 2 \, (x - 1) + 4 \, \alpha 2 \, x$$

> **L(x):=d2(x)-u(x);**

$$L(x) := -\frac{24}{793} + \frac{60}{61} x(x) - x - \alpha 1 \, x \, (x - 1) - \alpha 2 \, x^2 \, (x - 1)$$

> **x1:=0;**

$$x1 := 0$$

> **x2:=1;**

$$x2 := 1$$

> **u1:=eval(u(x),x=x1);**

$$u1 := 0$$

> **u2:=eval(u(x),x=x2);**

$$u2 := 1$$

> **L(x):=d2(x)-u1;**

$$L(x) := -\frac{24}{793} + \frac{60}{61} x(x)$$

> **L(x):=d2(x)-u2;**

$$L(x) := -\frac{817}{793} + \frac{60}{61} x(x)$$

### A.7.7 – Método de Galerkin para $n = 1$ com um parâmetro $\alpha$

Seja a Equação Diferencial:

> **restart;**

> **L(x):=diff(u(x),x,x)-u(x);**

$$L(x) := \left( \frac{d^2}{dx^2} u(x) \right) - u(x)$$

com condições de contorno

$x_1 = 0$  e  $x_2 = 1$  com  $u(x_1) = 0$  e  $u(x_2) = 1$ ;

Solução:

> **u(x):=beta+alpha\*phi;**

$$u(x) := \beta + \alpha \phi$$

> **beta:=x;**

$$\beta := x$$

> **phi:=x\*(x-1);**

$$\phi := x(x-1)$$

> **u(x):=beta+alpha\*phi;**

>

$$u(x) := x + \alpha x(x-1)$$

Derivando as funções  $w(x)$  para substituir no funcional

> **d1(x):=diff(u(x),x);**

$$d1(x) := 1 + \alpha(x-1) + \alpha x$$

> **d2(x):=diff(u(x),x,x);**

$$d2(x) := 2\alpha$$

o erro  $\epsilon(x)$  é dado por:

> **epsilon(x):=d2(x)-u(x);**

$$\epsilon(x) := 2\alpha - x - \alpha x(x-1)$$

A sentença básica de resíduos ponderados pode ser escrita como:

> **Ia(alpha):=int(phi\*epsilon(x),x=0..1);**

$$Ia(\alpha) := -\frac{11\alpha}{30} + \frac{1}{12}$$

> **alpha:=solve(Ia(alpha)=0,alpha);**

$$\alpha := \frac{5}{22}$$

Portanto:

> **u(x):=beta+alpha\*phi;**

$$u(x) := x + \frac{5x(x-1)}{22}$$

> **d2:=d2(x);**

```

                                 $d2 := 2 \alpha$ 
> L(x):=d2-u(x);
                                 $L(x) := \frac{5}{11} - x - \frac{5 x (x - 1)}{22}$ 
> x1:=0;
                                 $x1 := 0$ 
> x2:=1;
                                 $x2 := 1$ 
> u1:=eval(u(x),x=x1);
                                 $u1 := 0$ 
> u2:=eval(u(x),x=x2);
                                 $u2 := 1$ 
> L(x1):=d2-u1;
                                 $L(0) := \frac{5}{11}$ 
> L(x2):=d2-u2;
                                 $L(1) := \frac{-6}{11}$ 

```

#### A.7.8 – Método de Galerkin para $n = 2$ com dois parâmetros $\alpha_1$ e $\alpha_2$

Seja a Equação Diferencial:

```

> restart;
> L(x):=diff(u(x),x,x)-u(x);
                                 $L(x) := \left( \frac{d^2}{dx^2} u(x) \right) - u(x)$ 

```

com condições de contorno

$x_1 = 0$  e  $x_2 = 1$  com  $u(x_1) = 0$  e  $u(x_2) = 1$ ;

Solução:

```

> u(x):=beta+alpha1*phi1+alpha2*phi2;
                                 $u(x) := \beta + \alpha_1 \phi_1 + \alpha_2 \phi_2$ 
> beta:=x;
                                 $\beta := x$ 
> phi1:=x*(x-1);
                                 $\phi_1 := x (x - 1)$ 
> phi2:=x^2*(x-1);
                                 $\phi_2 := x^2 (x - 1)$ 
> u(x):=beta+alpha1*phi1+alpha2*phi2;
>

```

$$u(x) := x + \alpha_1 x(x-1) + \alpha_2 x^2(x-1)$$

Derivando as funções  $w(x)$  para substituir no funcional

> **d1(x):=diff(u(x),x);**

$$d1(x) := 1 + \alpha_1(x-1) + \alpha_1 x + 2\alpha_2 x(x-1) + \alpha_2 x^2$$

> **d2(x):=diff(u(x),x,x);**

$$d2(x) := 2\alpha_1 + 2\alpha_2(x-1) + 4\alpha_2 x$$

o erro  $\epsilon(x)$  é dado por:

> **epsilon(x):=d2(x)-u(x);**

$$\epsilon(x) := 2\alpha_1 + 2\alpha_2(x-1) + 4\alpha_2 x - x - \alpha_1 x(x-1) - \alpha_2 x^2(x-1)$$

A sentença básica de resíduos ponderados pode ser escrita como:

> **Ia(alpha1):=int(phi1\*epsilon(x),x=0..1);**

$$Ia(\alpha_1) := -\frac{11\alpha_2}{60} - \frac{11\alpha_1}{30} + \frac{1}{12}$$

> **Ib(alpha2):=int(phi2\*epsilon(x),x=0..1);**

$$Ib(\alpha_2) := -\frac{\alpha_2}{7} - \frac{11\alpha_1}{60} + \frac{1}{20}$$

> **alpha1:=solve(Ia(alpha1)=0,alpha1);**

$$\alpha_1 := -\frac{\alpha_2}{2} + \frac{5}{22}$$

> **alpha2:=solve(Ib(alpha2)=0,alpha2);**

$$\alpha_2 := -\frac{77\alpha_1}{60} + \frac{7}{20}$$

> **with(LinearAlgebra):**

> **A:=(<<1,77/60>|<1/2,1>>);**

$$A := \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{77}{60} & 1 \end{bmatrix}$$

> **alpha := <5/22,7/20>;**

$$\alpha := \begin{bmatrix} \frac{5}{22} \\ \frac{7}{20} \end{bmatrix}$$

> **M:=MatrixInverse(A,method=pseudo);**

$$M := \begin{bmatrix} \frac{120}{43} & -\frac{60}{43} \\ -\frac{154}{43} & \frac{120}{43} \end{bmatrix}$$

> **alphas:=MatrixVectorMultiply(M,alpha);**

$$alphas := \begin{bmatrix} \frac{69}{473} \\ \frac{7}{43} \end{bmatrix}$$

> **alpha1:=69/473; alpha2:=7/43;**

$$\alpha 1 := \frac{69}{473}$$

$$\alpha 2 := \frac{7}{43}$$

Portanto:

> **u=u(x);**

$$u = x + \alpha 1 \, x \, (x - 1) + \alpha 2 \, x^2 \, (x - 1)$$

> **d2:=d2(x);**

$$d2 := 2 \, \alpha 1 + 2 \, \alpha 2 \, (x - 1) + 4 \, \alpha 2 \, x$$

> **L(x):=d2(x)-u(x);**

$$L(x) := -\frac{16}{473} + \frac{42}{43} x(x) - x - \alpha 1 \, x \, (x - 1) - \alpha 2 \, x^2 \, (x - 1)$$

> **x1:=0;**

$$x1 := 0$$

> **x2:=1;**

$$x2 := 1$$

> **u1:=eval(u(x),x=x1);**

$$u1 := 0$$

> **u2:=eval(u(x),x=x2);**

$$u2 := 1$$

> **L(x):=d2(x)-u1;**

$$L(x) := -\frac{16}{473} + \frac{42}{43} x(x)$$

> **L(x):=d2(x)-u2;**

$$L(x) := -\frac{489}{473} + \frac{42}{43} x(x)$$

## ***Bibliografia***

- 1 – Eugene Butkov, *Física Matemática*, LTC – Livros Técnicos e Científicos Editora, 1988
- 2 – L. Esgoltz, *Ecuaciones Diferenciales y Cálculo Variacionais*, Editora MIR, 1977.
- 3 – Márcia A Gomes Ruggiero; Vera Lúcia da Rocha Gomes; *Cálculo Numérico*; Makron Books.
- 4 – Décio Esperandio; João Teixeira mendes; Luiz Henry Monken e Silva, *Cálculo Numérico*, Pearson/Pretice Hall.
- 5 – C. A. Brebbia, J. C. F. Telles, L. C. Wrobel , *Boundary Elements Method*, Springer – Verlag, 1984.
- 6- Abramovich, (Livro que contém fórmulas completas para Diferenças Finitas de derivadas de qualquer ordem.
- 7 – <http://www.cesec.ufpr.br/~tc710>
- 8 – Zienkiewicz, *Finite Elements Method*,
- 9 – Apostilas – UNESP, UNICAMP e UnB
- 10 – Livro MDF
- 11 – MDF e Critérios de implementação Computacional.