

SUCESIONES

3º ESO

Dani Pérez

November 2024

1 SUCESIÓN DE NÚMEROS REALES

1.1 Definición

Una sucesión de números reales es una secuencia ordenada de números.

1.1.1 Ejemplo: Los 7 primeros números pares

La sucesión de los 7 primeros números pares es:

$$a_n = 2n, \quad n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

$$\{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$$

Se llama término de una sucesión a cada uno de los elementos que constituyen la sucesión. El primer término, que denotamos por a_1 en esta sucesión es 2. El segundo término de la sucesión, a_2 , es 4 y así sucesivamente.

1.2 Término general

Se llama término general de una sucesión al término que ocupa el lugar n -ésimo y se escribe con la letra que denote a la sucesión (por ejemplo a) con subíndice n : a_n .

El término general de una progresión aritmética es:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

Donde:

- a_n : Es el término que ocupa la posición n -ésima en la progresión.
- a_1 : Es el primer término de la progresión.
- n : Es el número de posición del término que se desea calcular.
- d : Es la diferencia común entre términos consecutivos de la progresión.

1.3 Suma de los n primeros términos de una progresión aritmética

En una progresión aritmética, la suma de dos términos equidistantes es constante.

Es decir, si los subíndices naturales p , q , r y s verifican que $p + q = r + s$, entonces se cumple que:

$$a_p + a_q = a_r + a_s$$

La suma de los n primeros términos de una progresión aritmética se calcula utilizando la siguiente fórmula:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n),$$

donde:

- S_n : Es la suma de los n primeros términos de la sucesión.
- n : Es el número total de términos que se están sumando.
- a_1 : Es el primer término de la progresión.
- a_n : Es el n -ésimo término de la progresión, es decir, el último término que estamos sumando.

Explicación de la fórmula

La fórmula se deriva al observar que, si escribimos los n términos de la progresión aritmética en dos filas, una en orden ascendente y la otra en orden descendente, la suma de cada columna formada es constante y equivale a $a_1 + a_n$. Por ejemplo, si sumamos los términos de una progresión aritmética como $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$, y los reordenamos así:

$$\begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_n & a_{n-1} & \dots & a_1 \end{array}$$

Cada columna suma $a_1 + a_n$. Como hay n términos, podemos calcular el doble de la suma total como:

$$2S_n = n(a_1 + a_n).$$

Dividiendo entre 2 para obtener la suma original:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n).$$

1.4 Notas

Dependiendo de los datos que tengamos, calcularemos el término general de una progresión aritmética de una forma u otra:

a) Si conocemos a_1 y d , hemos visto que:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$$

b) Si conocemos un término cualquiera a_k y d , sabemos que:

$$a_n = a_k + (n - k)d$$

c) Si conocemos dos términos cualesquiera a_r y a_s , nos faltaría la diferencia d para poder aplicar la fórmula anterior. Pero, como sabemos que:

$$a_n = a_r + (n - r) \cdot d \quad \text{y} \quad a_n = a_s + (n - s) \cdot d$$

podemos despejar d en función de r , s , a_r y a_s , y nos queda:

$$d = \frac{a_s - a_r}{s - r}.$$

1.5 Ejercicio de ejemplo:

Dada la sucesión $a_n = 11, 19, 27, 35, 43, \dots$, responde las siguientes preguntas:

1. Determina el término general a_n de la sucesión.
2. Calcula el valor del término a_{27} .
3. Si un término de la sucesión es 403, determina qué posición n ocupa.
4. Calcula la suma de los primeros 100 términos de la sucesión.

Solución

1. Término general: La sucesión es una progresión aritmética con primer término $a_1 = 11$ y diferencia común $d = 19 - 11 = 8$. Por tanto, el término general es:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d = 11 + (n - 1) \cdot 8 = 11 + 8n - 8 = 8n + 3.$$

2. Término a_{27} : Sustituimos $n = 27$ en el término general:

$$a_{27} = 8 \cdot 27 + 3 = 216 + 3 = 219.$$

3. Determinar el valor de n para $a_n = 403$: Igualamos el término general a 403 y despejamos n :

$$403 = 8n + 3 \quad \Rightarrow \quad 403 - 3 = 8n \quad \Rightarrow \quad 400 = 8n \quad \Rightarrow \quad n = \frac{400}{8} = 50.$$

Por lo tanto, el término 403 ocupa la posición $n = 50$.

4. Suma de los primeros 100 términos: La suma de los primeros n términos de una progresión aritmética está dada por la fórmula:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n).$$

Sustituimos $n = 100$, $a_1 = 11$, y calculamos a_{100} usando el término general:

$$a_{100} = 8 \cdot 100 + 3 = 800 + 3 = 803.$$

Ahora calculamos la suma:

$$S_{100} = \frac{100}{2}(11 + 803) = 50 \cdot 814 = 40,700.$$

Por lo tanto, la suma de los primeros 100 términos es $S_{100} = 40,700$.

2 Ejercicios Propuestos

2.1

Dada la sucesión $a_n = 3, 9, 15, 21, 27, \dots$, responde las siguientes preguntas:

1. Determina el término general a_n de la sucesión.
2. Calcula el valor del término a_{20} .
3. Si un término de la sucesión es 51, determina qué posición n ocupa.
4. Calcula la suma de los primeros 60 términos de la sucesión.

2.2

Dada la sucesión $a_n = 50, 45, 40, 35, 30, \dots$, responde las siguientes preguntas:

1. Determina el término general a_n de la sucesión.
2. Calcula el valor del término a_{12} .
3. Si un término de la sucesión es 20, determina qué posición n ocupa.
4. Calcula la suma de los primeros 30 términos de la sucesión.

2.3

Halla el primer término y el término general de una progresión aritmética, sabiendo que el sexto término es -12 y la diferencia común es -4 .

2.4

Halla el primer término y la diferencia de una progresión aritmética, sabiendo que el cuarto término es 39 y el noveno término es 84 .

2.5

En una progresión aritmética, los términos segundo y tercero suman 19 , y los términos quinto y séptimo suman 40 . Halla los términos solicitados.

2.6

Un coronel manda $5\ 050$ soldados y quiere formar con ellos un triángulo para una exhibición, de modo que la primera fila tenga un soldado, la segunda dos, la tercera tres, etc. ¿Cuántas filas tienen que haber?

2.7

Ana paga por el alquiler de un piso $3\ 600\text{€}$ el primer año. En el contrato establece que habrá una subida de 80€ cada año.

1. ¿Cuánto pagaremos el décimo año?
2. Calcula la cantidad total que pagaremos durante esos 10 años.

2.8

Imagina que te ofrecen un contrato de trabajo con las siguientes condiciones: el primer día cobras 15 € y cada día aumentas 60 céntimos.

1. ¿Cuánto te pagarán por trabajar el día 30 del mes?
2. ¿Cuánto cobras en total si el mes tiene 30 días?