FICHA 08 – resolução

DPC

1. Mostre que se $\hat{\theta}$ é um estimador centrado (= não tendencioso) de θ, então $\hat{\theta}^2$ não é um estimador centrado de θ^2.

   Resolução:
   Se $\hat{\theta}$ é um estimador centrado de θ, então, por definição, $E(\hat{\theta}) = \theta$. Queremos mostrar que, nestas condições, $\hat{\theta}^2$ é um estimador tendencioso de θ^2, ou seja, que $E(\hat{\theta}^2) \neq \theta^2$. Temos:

   $$V(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}^2) - (E(\hat{\theta}))^2 = E(\hat{\theta}^2) - \theta^2,$$

   Então, $E(\hat{\theta}^2) = \theta^2 \implies V(\hat{\theta}) = 0$, ou seja, $\hat{\theta}^2$ só é um estimador centrado de θ^2 se a sua variância for nula, o que significa que $\hat{\theta}$ seria determinístico (isto é, não aleatório). Como $\hat{\theta}$ é, em geral, obtido a partir de amostras aleatórias $X_1, X_2, \cdots, X_n$ de uma distribuição f_X (com variância não nula), $\hat{\theta}$ é ele próprio uma v.a. com variância não nula, logo $\hat{\theta}^2$ é um estimador tendencioso de θ^2.

2. Considere uma amostra de tamanho n de uma variável aleatória X com distribuição Poisson (função de probabilidade a seguir).

   $$f_X(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, ...$$

   Calcule o estimador de λ pelo método dos momentos.

   Resolução:
   Seja $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ a amostra obtida, de tamanho n, da v.a. X com função (densidade) de probabilidade f_X. Suponha que f_X tem k parâmetros desconhecidos $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k$, os quais queremos estimar a partir da amostra observada. Para cada $j \in \{1, 2, \cdots\}$, seja $\mu_j = E(X^j)$ (chamado *momento de ordem j* da v.a. X) e seja $\hat{\mu}_j = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^j$ (momento de ordem j estimado a partir da amostra). O método dos momentos encontra estimativas $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \cdots, \hat{\theta}_k$, respetivas aos k parâmetros desconhecidos, resolvendo o seguinte sistema de equações (com k equações e k incógnitas):

   $$\begin{cases} \mu_1(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \cdots, \hat{\theta}_k) = \hat{\mu}_1 \\ \mu_2(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \cdots, \hat{\theta}_k) = \hat{\mu}_2 \\ \quad\vdots \\ \mu_k(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \cdots, \hat{\theta}_k) = \hat{\mu}_k \end{cases}$$

   Neste exercício, queremos estimar um único parâmetro, λ. Temos $\mu_1(\lambda) = E(X) = \lambda$ e, assim, pelo método dos momentos:

   $$\mu_1(\hat{\lambda}) = \hat{\mu}_1 \Leftrightarrow \hat{\lambda} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i, \quad \text{(estimativa)}$$

   $$\hat{\lambda} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i. \quad \text{(estimador)}$$

   Nota: Por abuso de notação, utilizamos a mesma letra ($\hat{\lambda}$) para designar a estimativa e o estimador. Note, no entanto, que estimativa e estimador correspondem a conceitos diferentes, embora relacionados. A estimativa é o resultado de um processo de estimação, sendo por isso um valor numérico, calculado a partir dos valores observados na amostra recolhida, $x_1, x_2, \cdots, x_n$. O estimador é a regra (função) que permite calcular a estimativa. Escreve-se como uma função das variáveis aleatórias $X_1, X_2, \cdots, X_n$, que representam o processo de amostragem aleatória. Por esse motivo, o próprio estimador é uma variável aleatória.

Por outras palavras, a estimativa é o resultado obtido quando se avalia o estimador para o caso particular em que as variáveis aleatórias $X_1, X_2, \cdots, X_n$ tomam os valores numéricos $x_1, x_2, \cdots, x_n$.

3. Considere uma amostra de tamanho n de uma variável aleatória com distribuição uniforme no intervalo $[0, a]$. Calcule

   (a) O estimador de a pelo método dos momentos.

   (b) Discuta se este é um estimador sem tendência (=estimador centrado).

   Resolução:

   (a) $X \sim U(0, a) \Leftrightarrow f_X(x) = 1/a$, $0 \leq x \leq a$, amostra $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$.

$$\mu_1(a) = E(X) = \frac{a}{2},$$

$$\mu_1(\hat{a}) = \hat{\mu}_1 \Leftrightarrow \frac{\hat{a}}{2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \Leftrightarrow \hat{a} = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

   (b) Para estudarmos a tendência do estimador $\hat{a}$, temos de calcular o seu valor esperado. Isso faz-se assumindo que cada X_i segue a mesma distribuição que X (notação: $X_i \stackrel{d}{=} X$), ou seja, assumindo que $f_{X_i} = f_X$ para todo o i. Temos então $E(X_i) = E(X) = a/2$ e:

$$E(\hat{a}) = E\left(\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{a}{2} = \frac{2}{n} n \frac{a}{2} = a,$$

   logo $\hat{a}$ é um estimador centrado de a.

4. Para estimar a probabilidade de sair cara, p, associada ao lançamento de uma dada moeda, repete-se a experiência n vezes de forma independente e conta-se o número de sucessos (Y). Se X for uma variável aleatória com

$$\begin{cases} X = 1, \text{ se sai cara} \\ X = 0, \text{ se sai coroa} \end{cases}$$

   então $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

   Considere os seguintes dois estimadores de p: $\hat{P}_1 = Y/n$ e $\hat{P}_2 = (Y+1)/(n+2)$.

   (a) Averigue se $\hat{P}_1$ e $\hat{P}_2$ são estimadores centrados de p.

   (b) Calcule o erro quadrático médio de $\hat{P}_1$ e de $\hat{P}_2$. Verifique que o de $\hat{P}_2$ é inferior ao de $\hat{P}_1$ quando $p = 0.5$.

   Resolução:

   (a)

$$E(X) = 1 \times p + 0 \times (1-p) = p,$$

$$E(Y) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} p = np,$$

$$E(\hat{P}_1) = E\left(\frac{Y}{n}\right) = \frac{E(Y)}{n} = p,$$

$$E(\hat{P}_2) = E\left(\frac{Y+1}{n+2}\right) = \frac{E(Y)+1}{n+2} = \frac{np+1}{n+2},$$

   logo $\hat{P}_1$ é centrado e $\hat{P}_2$ é tendencioso.

(b) O erro quadrático médio de um estimador $\hat{\theta}$ define-se por $E\left[(\hat{\theta}-\theta)^2\right]$ e pode ser calculado através da fórmula:

$$E\left[(\hat{\theta}-\theta)^2\right] = \left(E(\hat{\theta})-\theta\right)^2 + V(\hat{\theta}). \quad \text{(demonstre!)}$$

O termo $|E(\hat{\theta})-\theta|$ é conhecido por *tendência* ou *viés* do estimador e é nulo se $\hat{\theta}$ for um estimador centrado. O segundo termo é a variância do estimador. Assim, o erro quadrático médio pode ser reduzido encontrando um estimador com menor tendência e/ou menor variância. Infelizmente, em muitas situações, estimadores com menor tendência apresentam maior variância e vice-versa. Este exercício ilustrará isso mesmo.

$$V(X) = E\left[(X-p)^2\right] = (1-p)^2p + (0-p)^2(1-p) = p(1-p),$$

$$V(Y) = V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) = np(1-p), \quad \text{(a 2ª igualdade assume } X_i \text{ indep.)}$$

$$\begin{aligned}
E(\hat{P}_1) = p &\implies \left(E(\hat{P}_1)-p\right)^2 = 0,\\
V(\hat{P}_1) &= V\left(\frac{Y}{n}\right) = \frac{V(Y)}{n^2} = \frac{p(1-p)}{n},\\
E\left[(\hat{P}_1-p)^2\right] &= \frac{p(1-p)}{n}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(\hat{P}_2) = \frac{np+1}{n+2} &\implies \left(E(\hat{P}_2)-p\right)^2 = \left(\frac{np+1}{n+2}-p\right)^2 = \left(\frac{1-2p}{n+2}\right)^2,\\
V(\hat{P}_2) &= V\left(\frac{Y+1}{n+2}\right) = \frac{V(Y+1)}{(n+2)^2} = \frac{V(Y)}{(n+2)^2} = \frac{np(1-p)}{(n+2)^2},\\
E\left[(\hat{P}_2-p)^2\right] &= \left(\frac{1-2p}{n+2}\right)^2 + \frac{np(1-p)}{(n+2)^2}.
\end{aligned}$$

Agora, assumindo $p = 0.5$ (caso em que a variância de X é máxima), teríamos:

$$\begin{aligned}
E\left[(\hat{P}_1-0.5)^2\right] &= \frac{0.25}{n},\\
E\left[(\hat{P}_2-0.5)^2\right] &= \frac{0.25n}{(n+2)^2},
\end{aligned}$$

logo, apesar de $\hat{P}_1$ ser centrado e $\hat{P}_2$ tendencioso, temos $E\left[(\hat{P}_2-0.5)^2\right] < E\left[(\hat{P}_1-0.5)^2\right]$ (para todo o $n \geq 1$).

5. Considere a seguinte fdp

$$f(x) = c(1+\theta x), \quad -1 \leq x \leq 1$$

(a) Calcule o valor da constante c.

(b) Utilize o método dos momentos para calcular o estimador de θ.

(c) Demonstre que $\hat{\theta} = 3\bar{X}$ é um estimador de θ sem tendência.

Resolução:

(a) Se f é uma função densidade de probabilidade, então:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} c(1+\theta x)\,dx = c\left[x+\theta\frac{x^2}{2}\right]_{x=-1}^{1} = 2c \implies c = \frac{1}{2}.$$

(b)

$$\mu_1(\theta) = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} \frac{x}{2}(1+\theta x)\,dx = \frac{\theta}{3}.$$

$$\mu_1(\hat{\theta}) = \hat{\mu}_1 \Leftrightarrow \frac{\hat{\theta}}{3} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \Leftrightarrow \hat{\theta} = \frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

(c) Note que $\bar{X}$ é uma notação habitual para designar a v.a. que representa a média amostral, ou seja, $\bar{X} = (1/n)\sum_{i=1}^{n} X_i$. Assim,

$$E(\hat{\theta}) = E(3\bar{X}) = E\left(\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{3}{n} n \frac{\theta}{3} = \theta,$$

logo $\hat{\theta} = 3\bar{X}$ é um estimador sem tendência.

6. Considere uma amostra de tamanho n de uma variável aleatória com distribuição

$$f(x) = \frac{1}{\theta^2} x e^{-x/\theta}, \quad 0 \leq x < \infty$$

Calcule o estimador pelo método dos momentos de θ.

Resolução:

$$\begin{aligned}
\mu_1(\theta) = E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx = \int_0^{\infty} \frac{1}{\theta^2} x^2 e^{-x/\theta}\, dx && \text{(int. p/ partes: } u' = e^{-x/\theta},\ v = x^2) \\
&= -\frac{1}{\theta}\left[x^2 e^{-x/\theta}\right]_{x=0}^{\infty} + \frac{1}{\theta}\int_0^{\infty} 2x e^{-x/\theta}\, dx && \text{(int. p/ partes: } u' = e^{-x/\theta},\ v = x) \\
&= -2\left[x e^{-x/\theta}\right]_{x=0}^{\infty} + 2\int_0^{\infty} e^{-x/\theta}\, dx \\
&= -2\theta\left[e^{-x/\theta}\right]_{x=0}^{\infty} = 2\theta,
\end{aligned}$$

$$\mu_1(\hat{\theta}) = \hat{\mu}_1 \Leftrightarrow 2\hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \Leftrightarrow \hat{\theta} = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

7. Uma variável aleatória X tem fdp $f(x) = (\beta + 1)x^{\beta}, 0 < x < 1$.

(a) Determine a estimativa do método dos momentos de β baseado numa amostra de tamanho n.

(b) Calcule a estimativa quando os valores amostrais forem $0.3; 0.8; 0.27; 0.35; 0.62; 0.55; 0.4; 0.6$. Sabe-se que a soma destes valores é 3.89, o produto é 0.0019, o logaritmo da soma é 1.3584 e o logaritmo do produto é -6.2893.

Resolução:

(a)

$$\mu_1(\beta) = E(X) = \int_0^1 x(\beta + 1)x^{\beta}\, dx = \frac{\beta + 1}{\beta + 2},$$

$$\mu_1(\hat{\beta}) = \hat{\mu}_1 \Leftrightarrow \frac{\hat{\beta} + 1}{\hat{\beta} + 2} = \hat{\mu}_1 \Leftrightarrow \hat{\beta} = \frac{2\hat{\mu}_1 - 1}{1 - \hat{\mu}_1},$$

onde $\hat{\mu}_1 = (1/n)\sum_{i=1}^{n} x_i$.

(b) Temos $n = 8$, $\sum_{i=1}^{8} x_i = 3.89$, logo a estimativa de β é:

$$\hat{\beta} = \frac{2 \times 3.89/8 - 1}{1 - 3.89/8} \approx -0.054.$$