FICHA 06 – resolução

DPC

1. Seja (X, Y) um par aleatório discreto associado à tabela seguinte:

$X\backslash Y$	1	2	3
0	0	1/4	0
1	1/4	3/8	0
2	0	0	1/8

(a) Calcule as funções de probabilidade e as funções de distribuição marginais de X e de Y.

(b) Calcule a função de distribuição acumulada do par (X, Y).

(c) Determine o coeficiente de correlação entre X e Y.

Resolução:

(a) A tabela dá-nos a função de probabilidade conjunta do par (X, Y): $f_{X,Y}(x, y) = P(X = x \wedge Y = y)$. As funções de probabilidade marginais de X e Y serão, respetivamente,

$$f_X(x) = P(X = x) = \sum_{\forall y} P(X = x \wedge Y = y) = \sum_{\forall y} f_{X,Y}(x, y),$$
$$f_Y(y) = P(Y = y) = \sum_{\forall x} P(X = x \wedge Y = y) = \sum_{\forall x} f_{X,Y}(x, y).$$

Assim, no caso de a função de probabilidade conjunta ser dada por uma tabela, determinar as funções de probabilidade marginais resume-se a somar os valores ao longo de cada linha (obtendo, neste caso, f_X) e ao longo de cada coluna da tabela (obtendo, neste caso, f_Y). As funções de distribuição acumulada F_X e F_Y obtêm-se imediatamente a partir das funções de probabilidade marginais.

$X\backslash Y$	1	2	3	f_X	F_X
0	0	1/4	0	1/4	1/4
1	1/4	3/8	0	5/8	7/8
2	0	0	1/8	1/8	1
f_Y	1/4	5/8	1/8	-	-
F_Y	1/4	7/8	1	-	-

(b) A função de distribuição acumulada do par (X, Y) é, por definição, $F_{X,Y}(x, y) = P(X \leq x \wedge Y \leq y)$. Assim, a respetiva tabela é:

$X\backslash Y$	1	2	3
0	0	1/4	1/4
1	1/4	5/8	7/8
2	1/4	7/8	1

(c) O coeficiente de correlação do par (X, Y) é dado por:

$$\rho(X, Y) = \frac{\operatorname{cov}(X, Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}}, \quad \operatorname{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y).$$

Temos então de calcular os valores necessários:

$$E_{f_{X,Y}}(XY) = \sum_{\forall x} \sum_{\forall y} xy f_{X,Y}(x, y)$$
$$= 0 \times 2 \times \frac{1}{4} + 1 \times 1 \times \frac{1}{4} + 1 \times 2 \times \frac{3}{8} + 2 \times 3 \times \frac{1}{8} = \frac{7}{4},$$

$$
\begin{aligned}
E_{f_{X,Y}}(X) &= \sum_{\forall x}\sum_{\forall y} x f_{X,Y}(x,y) \\
&= \sum_{\forall x} x \sum_{\forall y} f_{X,Y}(x,y) \\
&= \sum_{\forall x} x f_X(x) = E_{f_X}(X) \quad \text{(ver nota no final)} \\
&= 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{5}{8} + 2 \times \frac{1}{8} = \frac{7}{8},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&E_{f_{X,Y}}(Y) = E_{f_Y}(Y) = \sum_{\forall y} y f_Y(y) = 1 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{5}{8} + 3 \times \frac{1}{8} = \frac{15}{8}, \\
&E_{f_{X,Y}}(X^2) = E_{f_X}(X^2) = 0^2 \times \frac{1}{4} + 1^2 \times \frac{5}{8} + 2^2 \times \frac{1}{8} = \frac{9}{8}, \\
&E_{f_{X,Y}}(Y^2) = E_{f_Y}(Y^2) = 1^2 \times \frac{1}{4} + 2^2 \times \frac{5}{8} + 3^2 \times \frac{1}{8} = \frac{31}{8}, \\
&V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{9}{8} - \left(\frac{7}{8}\right)^2 = \frac{23}{64}, \\
&V(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = \frac{31}{8} - \left(\frac{15}{8}\right)^2 = \frac{23}{64}, \\
&\rho(X,Y) = \frac{7/4 - (7/8)(15/8)}{\sqrt{(23/64)(23/64)}} = \frac{7}{23}.
\end{aligned}
$$

Nota: Na resolução deste exercício, demonstrámos que $E_{f_{X,Y}}(X) = E_{f_X}(X)$ e, de igual modo, $E_{f_{X,Y}}(Y) = E_{f_Y}(Y)$. No caso geral, para qualquer função g, tem-se sempre $E_{f_{X,Y}}[g(X)] = E_{f_X}[g(X)]$ e $E_{f_{X,Y}}[g(Y)] = E_{f_Y}[g(Y)]$. Assim, quando a função g cujo valor esperado queremos calcular depende apenas de uma das variáveis aleatórias (X ou Y) podemos utilizar sempre a função de probabilidade marginal da v.a. respetiva (f_X ou f_Y) no cálculo desse valor esperado, em vez de utilizarmos a função de probabilidade conjunta ($f_{X,Y}$). Na prática, isso traduz-se em menos termos no somatório do valor esperado, facilitando os cálculos. Para além disso, este resultado demonstra que podemos utilizar as notações simplificadas $E[g(X)]$ e $E[g(Y)]$ sem ambiguidade.

2. Considere o vetor aleatório (X,Y) com a seguinte função de probabilidade conjunta: $f(x,y) = \left(\frac{1}{4}\right)^{x+y}$, para $(x,y) = (0,2),(1,1),(2,0),(2,-1),(0,1),(1,0),(3,-1)$. Determine:

   (a) As distribuições marginais de X e Y.

   (b) O valor médio de X e o valor médio de Y.

   (c) $E(X+Y)$, $V(X+Y)$, $E(XY)$ e $\rho(X,Y)$.

   (d) Analise a independência entre as variáveis.

   Resolução:

   (a)

$X\backslash Y$	-1	0	1	2	f_X
0	0	0	1/4	1/16	5/16
1	0	1/4	1/16	0	5/16
2	1/4	1/16	0	0	5/16
3	1/16	0	0	0	1/16
f_Y	5/16	5/16	5/16	1/16	-

   (b) $E(X) = 9/8$, $E(Y) = 1/8$.

   (c) O valor esperado é um operador linear, ou seja, para quaisquer constantes $a, b, c \in \mathbf{R}$, tem-se sempre $E(aX + bY + c) = aE(X) + bE(Y) + c$ (demonstre!). Assim, $E(X+Y) = E(X) + E(Y) = 5/4$.

$$
E(XY) = \sum_{x=0}^{3}\sum_{y=-1}^{2} xy f_{X,Y}(x,y) = -\frac{5}{8},
$$

$$E(X^2) = \sum_{x=0}^{3} x^2 f_X(x) = \frac{17}{8}, \quad E(Y^2) = \sum_{y=-1}^{2} y^2 f_Y(y) = \frac{7}{8},$$

$$\begin{aligned} V(X+Y) &= E[(X+Y)^2] - (E(X+Y))^2 \\ &= E(X^2) + E(Y^2) + 2E(XY) - (E(X)+E(Y))^2 \\ &= \frac{3}{16}, \end{aligned}$$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{55}{64}, \quad V(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = \frac{55}{64},$$

$$\rho(X,Y) = \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}} = -\frac{49}{55}.$$

(d) Duas v.a. X e Y dizem-se independentes se satisfazem $P(X = x \wedge Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$ para todo o (x, y). De forma equivalente, podemos dizer que X e Y são independentes se e só se $f_{X,Y}(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$ para todo o (x, y). Como $f_{X,Y}(0, 0) = 0 \neq (5/16)(5/16) = f_X(0)f_Y(0)$, concluímos de imediato que X e Y não são independentes.

O seguinte resultado também poderia ser utilizado para verificar que X e Y não são independentes:

$$X, Y \text{ independentes} \implies \rho(X,Y) = 0.$$

Como vimos que $\rho(X,Y) \neq 0$, concluímos que X e Y não são independentes. Note, no entanto, que a implicação é válida apenas num sentido! Assim, é possível termos $\rho(X,Y) = 0$ e X, Y dependentes.

3. Retiram-se ao acaso e sem reposição duas cartas de uma caixa que contem 5 cartas numeradas 1, 1, 2, 2, 3. Seja X a soma e Y o máximo dos dois números retirados.

(a) Calcular a função de probabilidade conjunta de (X, Y) e as leis marginais de X e de Y.

(b) Calcular a função de probabilidade da variável aleatória $Z = XY$. Calcular o seu valor esperado. Deduzir $\text{cov}(X, Y)$.

(c) Sabendo-se que a maior carta extraída tinha o valor 2, diga qual a distribuição da soma das duas cartas.

Resolução:

(a) $C-$ conjunto de cartas retirado. Vamos construir a tabela de probabilidade de C e, para cada conjunto de cartas, indicamos os valores de X e Y correspondentes:

C	$P(C)$	$X = \text{soma}(C)$	$Y = \max(C)$
$\{1,1\}$	1/10	2	1
$\{1,2\}$	2/5	3	2
$\{1,3\}$	1/5	4	3
$\{2,2\}$	1/10	4	2
$\{2,3\}$	1/5	5	3

ex.:

$$P(C = \{1,3\}) = \frac{\binom{2}{1}\binom{1}{1}}{\binom{5}{2}} = \frac{1}{5}$$

Desta tabela, é imediato obter a tabela de probabilidade conjunta de (X, Y) e as marginais de X e de Y:

$X \backslash Y$	1	2	3	f_X
2	1/10	0	0	1/10
3	0	2/5	0	2/5
4	0	1/10	1/5	3/10
5	0	0	1/5	1/5
f_Y	1/10	1/2	2/5	-

(b)

X	Y	$Z = XY$	f_Z
2	1	2	1/10
3	2	6	2/5
4	3	12	1/5
4	2	8	1/10
5	3	15	1/5

$$\begin{aligned} E(Z) &= \sum_{z\in\{2,6,8,12,15\}} z f_Z(z) = \frac{44}{5}, \\ E(X) &= \frac{18}{5}, \quad E(Y) = \frac{23}{10}, \\ \operatorname{cov}(X,Y) &= E(XY) - E(X)E(Y) \\ &= E(Z) - E(X)E(Y) = \frac{13}{25}. \end{aligned}$$

(c) Queremos determinar $P(X = x \mid Y = 2)$ para cada valor de x, ou seja, queremos a função de probabilidade condicional de X dado $Y = 2$, que vamos denotar por $f_{X|Y=2}$:

$$\begin{aligned} f_{X|Y=2}(x) = P(X = x \mid Y = 2) &= \frac{P(X = x \wedge Y = 2)}{P(Y = 2)} = \frac{f_{X,Y}(x,2)}{f_Y(2)} = \frac{f_{X,Y}(x,2)}{1/2} \\ &= \begin{cases} 4/5, & x = 3, \\ 1/5, & x = 4, \\ 0, & \text{outros valores de } x. \end{cases} \end{aligned}$$

4. Dado o par aleatório (X, Y) com função densidade conjunta

$$f(x,y) = \begin{cases} kxy & 0 < x < 1 \wedge 0 < y < 1 \\ 0 & \text{restantes valores em } \mathbf{R}^2 \end{cases}$$

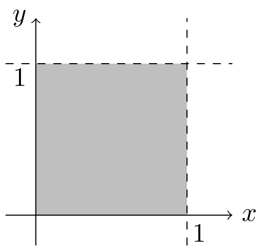
(a) Determine o valor de k.

(b) Determine $P(0 < X + Y < 1)$.

(c) Determine $P(X \le Y \mid Y \le (3/2)X)$.

Resolução:

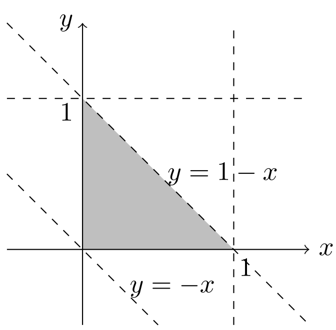
(a) Neste caso, X e Y são v.a. contínuas, logo temos uma função densidade de probabilidade conjunta, que, por definição, satisfaz $\iint_{\mathbf{R}^2} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = 1$. Vamos utilizar esta propriedade para determinar k. A primeira coisa a fazer será esboçar o suporte de $f_{X,Y}$, isto é, esboçar a região do plano onde $f_{X,Y}(x,y) > 0$:



Assim,

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1\int_0^1 kxy\,dx\,dy = \frac{k}{4} \implies k = 4.$$

(b) Agora, esboçamos a região $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : f_{X,Y}(x,y) > 0 \wedge 0 < x + y < 1\}$ e de imediato calculamos a probabilidade pedida:

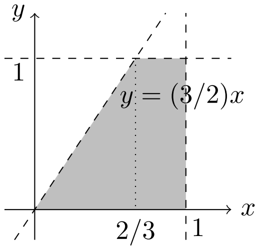


$$P(0 < X+Y < 1) = \int_0^1\int_0^{1-x} 4xy\,dy\,dx = \frac{1}{6}.$$

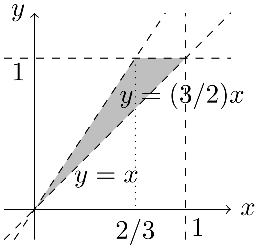
(c)

$$P\left(X \leq Y \mid Y \leq \frac{3}{2}X\right) = \frac{P(X \leq Y \leq (3/2)X)}{P(Y \leq (3/2)X)}.$$

Agora, calculamos as probabilidades em numerador e em denominador separadamente e obtemos o resultado final.



$$P\left(Y \leq \frac{3}{2}X\right) = \int_0^1 \int_{(2/3)y}^1 4xy\,dx\,dy = \frac{7}{9},$$



$$P\left(X \leq Y \leq \frac{3}{2}X\right) = \int_0^1 \int_{(2/3)y}^y 4xy\,dx\,dy = \frac{5}{18},$$

$$P\left(X \leq Y \mid Y \leq \frac{3}{2}X\right) = \frac{5/18}{7/9} = \frac{5}{14}.$$

5. O vetor aleatório bidimensional (X, Y) tem função densidade conjunta constante para os pontos pertencentes ao triângulo de vértices (0,0), (0,2) e (2,2). Determine:

   (a) A função densidade conjunta.

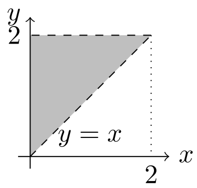
   (b) As funções densidade marginais de X e de Y.

   (c) As seguintes probabilidades: $P(Y < 1)$; $P(X < 1 \cap Y < 1)$; $P(X < Y)$.

   (d) $E(X), E(Y), V(X), V(Y), \mathrm{cov}(X, Y)$ e $\rho(X, Y)$.

Resolução:

(a)



$f_{X,Y}(x, y) = k$ para todo o (x, y) no interior do triângulo dado (e $f_{X,Y}(x, y) = 0$ para outros $(x, y) \in \mathbf{R}^2$).

$$1 = \int_0^2 \int_0^y k\,dx\,dy = 2k \implies k = \frac{1}{2}.$$

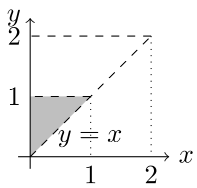
(b)

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y)\,dy = \int_x^2 \frac{1}{2}\,dy = 1 - \frac{x}{2}, \quad 0 < x < 2,$$

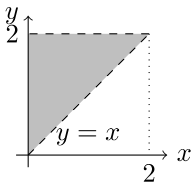
$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y)\,dx = \int_0^y \frac{1}{2}\,dx = \frac{y}{2}, \quad 0 < y < 2.$$

(c)

$$P(Y < 1) = \int_{-\infty}^1 f_Y(y)\,dy = \int_0^1 \frac{y}{2}\,dy = \frac{1}{4},$$



$$P(X < 1 \wedge Y < 1) = \int_0^1 \int_0^y \frac{1}{2} = \frac{1}{4},$$



Como vemos pela figura ao lado, a condição $X < Y$ não impõe nenhuma restrição adicional e, assim, a região de integração é exatamente a mesma que em (a), logo $P(X < Y) = 1$.

(d) Tínhamos visto que, no caso discreto, $E_{f_{X,Y}}[g(X)] = E_{f_X}[g(X)]$ e $E_{f_{X,Y}}[g(Y)] = E_{f_Y}[g(Y)]$ (ver ex. 1). Estas propriedades mantêm-se válidas no caso contínuo.

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx = \int_0^2 x\left(1-\frac{x}{2}\right)\,dx = \frac{2}{3},\\
E(Y) &= \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y)\,dy = \int_0^2 \frac{y^2}{2}\,dy = \frac{4}{3},\\
\cdots\ V(X) &= V(Y) = \frac{2}{9}, \quad \mathrm{cov}(X,Y) = \frac{1}{9}, \quad \rho(X,Y) = \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

6. Seja (X, Y) um par aleatório com f.d.p. conjunta

$$
f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} ax & 0 < 2x < y < 2 \\ 0 & \text{restantes valores em } \mathbf{R}^2 \end{cases}
$$

(a) Determine o valor da constante a.

(b) X e Y serão independentes? Justifique.

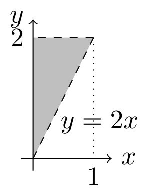
(c) Determine as funções densidade condicionais.

(d) Sabe-se que a v.a. X vale 0.5, qual a probabilidade da v.a. Y estar entre 1 e 2?

Resolução:

$0 < 2x < y < 2 \Leftrightarrow 0 < 2x < y \wedge y < 2$

(a)



$$\int_0^1 \int_{2x}^2 ax\,dy\,dx = 1 \Leftrightarrow a = 3.$$

(b) De forma análoga ao caso discreto, X e Y são independentes se e só se $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$ para todo o $(x,y) \in \mathbf{R}^2$.

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy = \int_{2x}^2 3x\,dy = 6x(1-x), \quad 0 < x < 1,$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx = \int_0^{y/2} 3x\,dx = \frac{3}{8}y^2, \quad 0 < y < 2,$$

logo $f_X(x)f_Y(y) \neq f_{X,Y}(x,y)$, portanto X e Y não são independentes.

(c) Existem duas funções densidade de probabilidade condicionais: a função densidade de probabilidade condicional de X dado Y, denotada por $f_{X|Y}$, e a função densidade de probabilidade condicional de Y dado X, denotada por $f_{Y|X}$.

$$
\begin{aligned}
f_{X|Y}(x,y) &= \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)},\ f_Y(y) \neq 0\\
&= \frac{3x}{(3/8)y^2},\ 0 < 2x < y < 2 \wedge 0 < y < 2\\
&= \frac{8x}{y^2},\ 0 < 2x < y < 2,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_{Y|X}(x,y) &= \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)},\ f_X(x) \neq 0\\
&= \frac{3x}{6x(1-x)},\ 0 < 2x < y < 2 \wedge 0 < x < 1\\
&= \frac{1}{2(1-x)},\ 0 < 2x < y < 2.
\end{aligned}
$$

Nota: Observe que, para cada y, a função densidade de probabilidade condicional de X dado $Y = y$ é uma função densidade de probabilidade na v.a. X. De igual modo, para cada x, a função densidade de probabilidade condicional de Y dado $X = x$ é uma função densidade de probabilidade na v.a. Y. Assim, temos sempre:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{X|Y}(x,y)\,dx = 1,\ \forall y, \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f_{Y|X}(x,y)\,dy = 1,\ \forall x. \quad \text{(verifique!)}$$

Naturalmente, no caso de v.a. discretas, os resultados análogos aplicam-se às respetivas funções de probabilidade condicionais:

$$\sum_{\forall x} f_{X|Y}(x,y) = 1,\ \forall y, \quad \text{e} \quad \sum_{\forall y} f_{Y|X}(x,y) = 1,\ \forall x.$$

(d)

$$P(1 \le Y \le 2 \mid X = 0.5) = \int_1^2 f_{Y|X}(0.5,y)\,dy = \int_1^2 \left.\frac{1}{2(1-x)}\right|_{x=0.5} dy = \int_1^2 dy = 1.$$

7. Uma urna contém três bolas brancas e duas bolas vermelhas. Retiram-se duas bolas da urna, uma após a outra, sem reposição. Seja X igual a 0 ou 1, conforme a primeira bola retirada seja vermelha ou branca, e seja Y igual a 0 ou 1, conforme a segunda bola retirada seja vermelha ou branca. Determine:

   (a) a função de probabilidade conjunta de X e Y.

   (b) as funções de distribuição marginais.

   (c) se X e Y são independentes.

   (d) $E(2X + 8Y)$.

   (e) a covariância entre X e Y.

   Resolução:

   (a)

$$f_{X,Y}(x,y) = P(X = x \wedge Y = y) = P(X = x)P(Y = y \mid X = x)$$

$$f_{X,Y}(0,0) = P(X = 0)P(Y = 0 \mid X = 0) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$$

$$f_{X,Y}(1,0) = P(X = 1)P(Y = 0 \mid X = 1) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$$

$$\vdots$$

   (b)

$X \backslash Y$	0	1	f_X	F_X
0	1/10	3/10	2/5	2/5
1	3/10	3/10	3/5	1
f_Y	2/5	3/5	-	-
F_Y	2/5	1	-	-

   (c) Não são independentes, pois, por exemplo, $f_{X,Y}(0,0) \neq f_X(0)f_Y(0)$.

   (d) $E(X) = 3/5$, $E(Y) = 3/5$, $E(2X + 8Y) = 2E(X) + 8E(Y) = 6$.

   (e) $E(XY) = 3/10$, $\text{cov}(X,Y) = -3/50$.

8. Uma farmácia possui uma quantidade X de centenas de unidades de um certo remédio no início de cada mês. Durante o mês, vendem-se Y centenas de unidades desse remédio. Suponha que a função densidade conjunta das variáveis aleatórias X e Y é dada por $f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 2/9 & 0 < y < x < 3 \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$

   (a) Mostre que de facto $f_{X,Y}$ é uma função densidade de probabilidade conjunta.

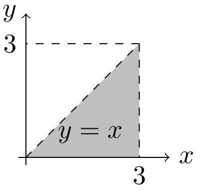
   (b) Determine as funções de distribuição marginais.

   (c) Calcule a probabilidade de que ao final do mês a farmácia tenha vendido pelo menos metade das unidades que havia inicialmente.

   (d) Dado que foram vendidas cem unidades, qual a probabilidade de que havia pelo menos duzentas unidades no começo do mês?

Resolução:

(a) A função $f_{X,Y}$ é uma função densidade de probabilidade conjunta se satisfaz $f_{X,Y}(x,y) \geq 0,\ \forall (x,y) \in \mathbf{R}^2$ e $\iint_{\mathbf{R}^2} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = 1$. A primeira condição é obviamente satisfeita, resta-nos verificar a segunda:



$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = \int_0^3 \int_y^3 \frac{2}{9}\,dx\,dy = 1. \quad \square$$

(b)

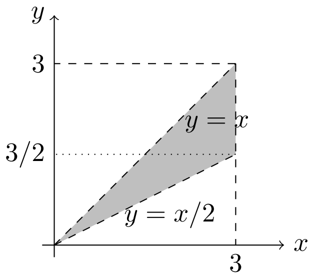
$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy = \int_0^x \frac{2}{9}\,dy = \frac{2}{9}x, \quad 0 < x < 3,$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx = \int_y^3 \frac{2}{9}\,dx = \frac{2}{9}(3-y), \quad 0 < y < 3,$$

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x')\,dx' = \begin{cases} 0,\ x \leq 0, \\ \int_0^x (2/9)x'\,dx' = x^2/9,\ 0 \leq x \leq 3, \\ 1,\ x \geq 3. \end{cases}$$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = \int_{-\infty}^{y} f_Y(y')\,dy' = \begin{cases} 0,\ y \leq 0, \\ \int_0^y \frac{2}{9}(3-y')\,dy' = (2/3)y - (y^2/9),\ 0 \leq y \leq 3, \\ 1,\ y \geq 3. \end{cases}$$

(c) A probabilidade pedida é $P(Y \geq X/2)$:



$$P\left(Y \geq \frac{X}{2}\right) = \int_0^3 \int_{x/2}^{x} \frac{2}{9}\,dy\,dx = \frac{1}{2}.$$

(d) Agora, pede-se $P(X \geq 2 \mid Y = 1)$. Começamos por calcular a função densidade de probabilidade de X dado $Y = 1$ e, a partir desta, calculamos a probabilidade pedida:

$$\begin{aligned} f_{X|Y=1}(x) &= \frac{f_{X,Y}(x,1)}{f_Y(1)} = \left.\frac{2/9}{\frac{2}{9}(3-y)}\right|_{y=1}, \quad 0 < y < x < 3\Big|_{y=1} \\ &= \frac{1}{2}, \quad 1 < x < 3. \end{aligned}$$

$$P(X \geq 2 \mid Y = 1) = \int_2^{\infty} f_{X|Y=1}(x)\,dx = \int_2^3 \frac{1}{2}\,dx = \frac{1}{2}.$$