FICHA 07 – resolução

DPC

1. Suponha que X seja uniformemente distribuída em $(1, 3)$.

   (a) Ache a fdp das seguintes variáveis aleatórias:

   i. $Y = 3X + 4$

   ii. $Z = e^X$

   (b) Calcule o valor esperado de Z de duas formas diferentes: $E(Z) = \int_z z f_Z(z)\, dz$ e $E(Z) = \int_x e^x f_X(x)\, dx$

   Resolução:

   (a) O seguinte resultado (teorema) permite-nos resolver problemas deste tipo de forma rápida sempre que as respetivas condições se verifiquem:

   Seja X uma v.a. contínua com função densidade de probabilidade f_X e g uma função contínua, diferenciável e injetiva. Nestas condições, a função densidade de probabilidade da v.a. $Y = g(X)$ é dada por:

$$f_Y(y) = f_X\left(g^{-1}(y)\right)\left|\frac{d}{dy}g^{-1}(y)\right|.$$

   i. $X \sim U(1, 3) \Leftrightarrow f_X(x) = 1/2,\ 1 < x < 3$. $Y = g_1(X)$ onde $g_1(x) = 3x + 4$ é diferenciável e injetiva, logo podemos utilizar o teorema.

$$g_1^{-1}(y) = \frac{y-4}{3}, \quad \frac{d}{dy}g_1^{-1}(y) = \frac{1}{3},$$
$$f_Y(y) = \frac{1}{2}\left|\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{6}, \quad 1 < g_1^{-1}(y) < 3 \Leftrightarrow 7 < y < 13.$$

   ii. $Z = g_2(X)$ onde $g_2(x) = e^x$ é diferenciável e injetiva, logo podemos utilizar o teorema.

$$g_2^{-1}(z) = \log(z), \quad \frac{d}{dz}g_2^{-1}(z) = \frac{1}{z},$$
$$f_Z(z) = \frac{1}{2}\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{2|z|}, \quad 1 < g_2^{-1}(z) < 3$$
$$= \frac{1}{2z}, \quad e < z < e^3.$$

   (b) O exercício pede-nos que calculemos os valores esperados $E_{f_Z}(Z)$ e $E_{f_X}[g_2(X)]$ que anteriormente (ex. 5 da Ficha 5) já vimos serem necessariamente iguais.

$$E(Z) = E_{f_Z}(Z) = \int_{-\infty}^{\infty} z f_Z(z)\, dz = \int_e^{e^3} z\frac{1}{2z}\, dz = \frac{e^3 - e}{2},$$
$$E(Z) = E_{f_X}[g_2(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g_2(x) f_X(x)\, dx = \int_1^3 e^x \frac{1}{2}\, dx = \frac{e^3 - e}{2}.$$

2. Uma corrente eléctrica I pode ser considerada como uma variável aleatória uniformemente distribuída no intervalo $(9, 11)$. Se essa corrente passar numa resistência de 2 Ohms, qual será a fdp da potência $P = 2I^2$?

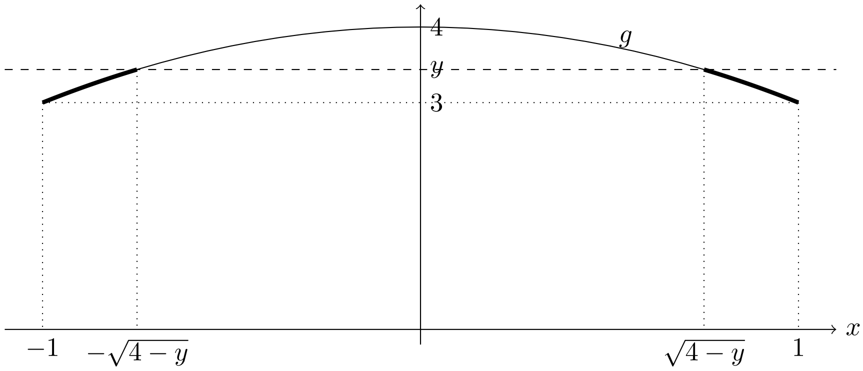
   Resolução:

   $I \sim U(9, 11) \Leftrightarrow f_I(i) = 1/2,\ 9 < i < 11$. Temos $P = g(I)$ onde $g(i) = 2i^2$ é diferenciável e injetiva (no intervalo $9 < i < 11$).

$$g^{-1}(p) = \sqrt{\frac{p}{2}}, \quad \frac{d}{dp}g^{-1}(p) = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{p}},$$
$$f_P(p) = \frac{1}{2}\left|\frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{p}}\right| = \frac{1}{8}\sqrt{\frac{2}{p}}, \quad 9 < g^{-1}(p) < 11 \Leftrightarrow 162 < p < 242.$$

3. Suponha que X seja uniformemente distribuída em $(-1,1)$. Seja $Y = 4 - X^2$. Ache a fdp de Y, $f_Y(y)$. Verifique que $f_Y(y)$ é de facto uma fdp. Sugestão: comece por calcular a função de distribuição acumulada de Y e depois calcule a sua derivada.

   Resolução:
   $X \sim U(-1,1) \Leftrightarrow f_X(x) = 1/2,\ -1 < x < 1$. Temos $Y = g(X)$ onde $g(x) = 4 - x^2$ não é injetiva (para $-1 < x < 1$). Assim, não estamos em condições de utilizar o teorema enunciado anteriormente. Contudo, é fácil determinar a função de distribuição acumulada de Y, denotada por F_Y, e, a partir desta, obtemos a respetiva função densidade de probabilidade, $f_Y = dF_Y/dy$.



$$F_Y(3) = P(Y \le 3) = 0, \quad F_Y(4) = P(Y \le 4) = 1,$$

$$\begin{aligned} 3 \le y \le 4 \implies F_Y(y) &= P(Y \le y) = P(Y < 3) + P(3 \le Y \le y) = P(3 \le Y \le y) \\ &= P\left(-1 \le X \le -\sqrt{4-y}\right) + P\left(\sqrt{4-y} \le X \le 1\right) \\ &= \int_{-1}^{-\sqrt{4-y}} \frac{1}{2}\, dx + \int_{\sqrt{4-y}}^{1} \frac{1}{2}\, dx \\ &= 1 - \sqrt{4-y}. \end{aligned}$$

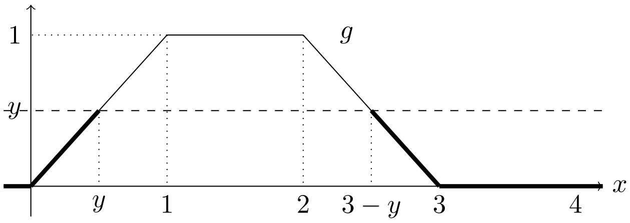
Assim,

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, \text{ se } y \le 3 \\ 1 - \sqrt{4-y}, \text{ se } 3 \le y \le 4 \\ 1, \text{ se } y \ge 4 \end{cases} . \quad \text{(note que } F_Y \text{ é contínua!)}$$

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y}{dy}(y) = \frac{1}{2\sqrt{4-y}}, \quad 3 < y < 4.$$

4. Seja X uniformemente distribuída em $(0,4)$. Seja $Y = g(X)$ com $g(x) = \begin{cases} x & 0 < x < 1 \\ 1 & 1 < x < 2 \\ 3 - x & 2 < x < 3 \\ 0 & \text{restantes valores} \end{cases}$. Ache a função de distribuição acumulada de Y.

   Resolução:
   $X \sim U(0,4) \Leftrightarrow f_X(x) = 1/4,\ 0 < x < 4$. Claramente, neste caso, g não é injetiva.



$$\begin{aligned}F_Y(0) &= P(Y \le 0) = P(Y = 0)\\ &= P(X \le 0) + P(X \ge 3)\\ &= P(3 \le X \le 4)\\ &= \int_3^4 \frac{1}{4}\,dx = \frac{1}{4},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}0 < y < 1 \implies F_Y(y) &= P(Y \le y) = P(Y \le 0) + P(0 < Y \le y)\\ &= \frac{1}{4} + P(0 < X \le y) + P(3-y \le X < 3)\\ &= \frac{1}{4} + \int_0^y \frac{1}{4}\,dx + \int_{3-y}^3 \frac{1}{4}\,dx\\ &= \frac{1}{4} + \frac{y}{2},\\ F_Y(1) &= P(Y \le 1) = 1.\end{aligned}$$

Então,

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, \text{ se } y < 0 \\ 1/4 + y/2, \text{ se } 0 \le y < 1 \\ 1, \text{ se } y \ge 1 \end{cases}.$$

Nota: Suponha que Y tem uma função densidade de probabilidade f_Y. Se isso for verdade, f_Y tem de ser tal que $\int_{-\infty}^{0^-} f_Y(y)\,dy = F_Y(0^-) = 0$ e $\int_{-\infty}^{0^+} f_Y(y)\,dy = F_Y(0^+) = 1/4$. Como não existe nenhuma função que satisfaça ambas as igualdades, concluímos que a v.a. Y não tem função densidade de probabilidade. De facto, no caso geral, quando a função de distribuição acumulada é descontínua, não existe função densidade de probabilidade. Neste exemplo, F_Y é descontínua em $y = 0$ e $y = 1$ e essas descontinuidades resultam de que $P(Y = 0) = 1/4 > 0$ e $P(Y = 1) = 1/4 > 0$.

5. Suponha que T tem uma fdp exponencial com parâmetro r, $f(t) = r\exp(-rt), t > 0$. Calcule a função de probabilidade de floor(T).
Definição da função floor em `https://en.wikipedia.org/wiki/Floor_and_ceiling_functions`

Resolução (ideia):
Definir $Y = \text{floor}(T)$. Observar que o contradomínio da função floor é o conjunto dos números inteiros, logo Y será uma v.a. discreta. Determinar a função de probabilidade de Y notando que, pela definição da função floor, $P(Y = y) = P(y \le T < y + 1)$. No final, deverá ter:

$$f_Y(y) = e^{-ry}(1 - e^{-r}), \quad y \in \{0, 1, 2, \cdots\}.$$

6. Considere que X segue uma distribuição de Poisson. Seja Y tal que $Y = \begin{cases} 1 & \text{se } X \text{ é par} \\ -1 & \text{se } X \text{ é ímpar} \end{cases}$. Calcule a função de probabilidade de Y.

Resolução (ideia):
Tem-se $X \sim \text{Pois}(\lambda)$. Notar que $P(Y = 1) = P(X = 0) + P(X = 2) + P(X = 4) + \cdots = \sum_{x=0}^{\infty} P(X = 2x)$. Escrever a série obtida substituindo o termo geral $P(X = 2x)$ pela expressão respetiva, dada pela função de probabilidade da distribuição de Poisson. Notar que a série obtida tem a forma de uma série de Taylor de uma função conhecida, pelo que a soma da série pode ser escrita à custa dessa função. Obter $P(Y = -1) = 1 - P(Y = 1)$. No final, deverá ter:

$$f_Y(y) = \begin{cases} (1 - e^{-2\lambda})/2, \text{ se } y = -1 \\ (1 + e^{-2\lambda})/2, \text{ se } y = 1 \end{cases}.$$