FICHA 04 – resolução

DPC

1. A probabilidade $P(k)$ é dada pela distribuição binomial. Se $n = 10$, para que valor de p é P(3) máximo? Explique.

   Resolução:
   $P \equiv \text{Binom}(n, p) \Leftrightarrow P(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, $0 \leq p \leq 1$, $k \in \{0, 1, \cdots, n\}$. Queremos encontrar o valor de p que maximiza a probabilidade de obter 3 sucessos ($k = 3$) em 10 repetições ($n = 10$):

   $$P(3) = \binom{10}{3} p^3 (1-p)^7 = \mathcal{L}(p).$$

   Seja p^* o maximizante procurado. Visto que $\mathcal{L}$ é diferenciável, p^* tem de satisfazer:

   $$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{L}}{dp}(p^*) = 0 &\Leftrightarrow 3{p^*}^2(1-p^*)^7 - 7{p^*}^3(1-p^*)^6 = 0 \\ &\Leftrightarrow p^* = 0 \ \vee \ p^* = 1 \ \vee \ 3(1-p^*) - 7p^* = 0 \\ &\Leftrightarrow p^* = 0 \ \vee \ p^* = 1 \ \vee \ p^* = \frac{3}{10}. \end{aligned}$$

   As soluções $p^* = 0$ e $p^* = 1$ são descartadas, pois são minimizantes (note que $\mathcal{L}(0) = \mathcal{L}(1) = 0$). Concluimos assim que o valor de p que maximiza a probabilidade de obter $k = 3$ sucessos em $n = 10$ repetições independentes é 3/10. Este resultado surpreende-o ou vai ao encontro da sua intuição inicial? Porquê?

2. Seja X uma v.a. com distribuição binomial, baseada em 10 repetições de uma experiência. Se $p = 0.3$, calcule:

   (a) $P(X \leq 8)$

   (b) $P(X = 7)$

   (c) $P(X > 6)$

   Resolução:

   (a) $P(X \leq 8) = 1 - P(X > 8) = 1 - P(X = 10) - P(X = 9) \approx 0.9999$

   (b) $P(X = 7) \approx 0.0090$

   (c) $P(X > 6) \approx 0.0106$

3. Suponha que 5 por cento de todas as peças que saem de uma linha de montagem são defeituosas. Se 10 dessas peças forem escolhidas aleatoriamente e inspeccionadas, qual a probabilidade de que no máximo sejam encontradas 2 defeituosas?

   Resolução:
   Como as peças inspecionadas são selecionadas aleatoriamente entre todas as peças produzidas, os defeitos nas peças selecionadas ocorrem de forma independente. Nestas condições, o número de defeitos observados X em $n = 10$ peças segue uma distribuição binomial de parâmetro $p = 5\%$ ($X \sim \text{Binom}(10, 0.05)$). A probabilidade pedida é então $P(X \leq 2) \approx 0.9885$.

4. Mostre que numa distribuição geométrica com parâmetro p, $E(X) = 1/p$ e $V(X) = (1-p)/p^2$.

Resolução:
$X \sim \text{Geom}(p) \Leftrightarrow f_X(x) = (1-p)^{x-1}p,\ 0<p<1,\ x \in \{1,2,\cdots\}.$

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{x=1}^{\infty} x(1-p)^{x-1}p \\
&= -p\sum_{x=1}^{\infty}\frac{d}{dp}(1-p)^x && \text{(converge uniformemente – teste da razão)} \\
&= -p\frac{d}{dp}\left[\sum_{x=1}^{\infty}(1-p)^x\right] \\
&= -p\frac{d}{dp}\frac{1-p}{p} && \text{(fórmula da série geométrica)} \\
&= \frac{1}{p}.
\end{aligned}$$

A variância de uma v.a. X define-se por $V(X) = E\left[(X-E(X))^2\right]$. Assim,

$$\begin{aligned}
V(X) &= \sum_{\forall x}(x-E(X))^2 f_X(x) \\
&= \sum_{x=1}^{\infty}\left(x-\frac{1}{p}\right)^2(1-p)^{x-1}p \\
&= \sum_{x=1}^{\infty}x^2(1-p)^{x-1}p - \frac{2}{p}\sum_{x=1}^{\infty}x(1-p)^{x-1}p + \frac{1}{p^2}\underbrace{\sum_{x=1}^{\infty}(1-p)^{x-1}p}_{\sum_{\forall x} f_X(x)\,=\,1} \\
&= p\sum_{x=1}^{\infty}(x+1)x(1-p)^{x-1} - \left(\frac{2}{p}+1\right)\underbrace{\sum_{x=1}^{\infty}x(1-p)^{x-1}p}_{E(X)\,=\,1/p} + \frac{1}{p^2} \\
&= p\sum_{x=1}^{\infty}\frac{d^2}{dp^2}(1-p)^{x+1} - \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} \\
&= p\frac{d^2}{dp^2}\left[\sum_{x=1}^{\infty}(1-p)^{x+1}\right] - \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} \\
&= p\frac{d^2}{dp^2}\frac{(1-p)^2}{p} - \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} \\
&= p\frac{2}{p^3} - \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} \\
&= \frac{1-p}{p^2}. \quad \square
\end{aligned}$$

5. De um lote que contém 25 peças, 5 são defeituosas. São escolhidas 4 peças ao acaso. Seja X o número de peças defeituosas encontradas. Estabeleça a distribuição de probabilidade de X, quando:

   (a) as peças forem escolhidas com reposição.

   (b) as peças forem escolhidas sem reposição.

Resolução:

(a) Se as peças são retiradas com reposição, então a probabilidade de retirar uma peça defeituosa em cada repetição é constante e igual a $p = 5/25 = 0.2$. Como são retiradas $n = 4$ peças de forma independente, $X \sim \text{Binom}(4, 0.2)$, ou seja:

$$f_X(x) = \binom{4}{x}0.2^x 0.8^{4-x}, \quad x \in \{0,1,\cdots,4\}.$$

(b) Quando as peças são retiradas sem reposição, a probabilidade de retirar uma peça defeituosa em cada repetição varia e depende das peças que foram retiradas nas repetições anteriores. De um total de $N = 25$ peças, existem $K = 5$ com defeito e irão ser retiradas aleatoriamente $n = 4$ peças sem reposição. Nestas condições, $X \sim \text{Hipergeom}(25, 5, 4)$, ou seja:

$$f_X(x) = \frac{\binom{5}{x}\binom{20}{4-x}}{\binom{25}{4}}, \quad x \in \{0, 1, \cdots, 4\}.$$

6. Lançamos seis vezes uma moeda equilibrada de forma independente. Seja Y a diferença entre o número de caras e coroas obtidas. Encontre a distribuição de Y.

Resolução:
Vamos definir duas v.a. auxiliares: $X-$ número de vezes que saiu "cara", $Z-$ número de vezes que saiu "coroa". Assim, $Y = X - Z$. Claramente, temos $X, Z \in \{0, 1, \cdots, 6\}$. É também garantido que $X + Z = 6$ (porquê?). Temos, assim:

$$\left.\begin{aligned} Y &= X - Z \\ X + Z &= 6 \end{aligned}\right\} \implies Y = 2X - 6.$$

Note que $X \in \{0, 1, \cdots, 6\} \implies Y \in \{-6, -4, -2, \cdots, 6\}$. Conhecendo f_X (ou f_Z) é imediato obter f_Y. Como a moeda é equilibrada, $X \sim \text{Binom}(6, 0.5)$, ou seja, $f_X(x) = \binom{6}{x}0.5^6$, $x \in \{0, 1, \cdots, 6\}$. Assim,

$$\begin{aligned} f_Y(y) = P(Y = y) = P(2X - 6 = y) &= P\left(X = \frac{y}{2} + 3\right) \\ &= f_X\left(\frac{y}{2} + 3\right) = \binom{6}{x}0.5^6\bigg|_{x=(y/2)+3} \\ &= \binom{6}{(y/2)+3}0.5^6, \quad y \in \{-6, -4, \cdots, 6\}. \end{aligned}$$

7. Uma experiência consiste em n tentativas independentes. Admita-se que por causa da 'aprendizagem' a probabilidade de obter um resultado favorável cresce com o número de tentativas realizadas. Especificamente, suponha que P(sucesso na i-ésima repetição) $= (i + 1)/(i + 2)$, $i = 1, 2, \cdots, n$.

   (a) Qual a probabilidade de ter ao menos 3 resultados favoráveis em 8 repetições?

   (b) Qual a probabilidade de que o primeiro resultado favorável ocorra na oitava repetição?

Resolução:

(a) Neste problema, apesar de as tentativas serem independentes, a probabilidade de sucesso em cada tentativa varia, pelo que a distribuição binomial não modela corretamente a distribuição do número de resultados favoráveis. Seja então $Y \in \{0, 1, \cdots, 8\}$ a v.a. que representa o número de resultados favoráveis em 8 repetições e $X_i \in \{0, 1\}$ a v.a. que representa sucesso ($X_i = 1$) ou insucesso ($X_i = 0$) na i-ésima repetição, $i \in \{1, 2, \cdots, 8\}$. Assim, $Y = \sum_{i=1}^{8} X_i$ e o enunciado diz-nos que $P(X_i = 1) = (i + 1)/(i + 2)$, logo $P(X_i = 0) = 1 - P(X_i = 1) = 1/(i + 2)$.

$$\begin{aligned} P(Y \geq 3) &= 1 - P(Y = 0) - P(Y = 1) - P(Y = 2), \\ P(Y = 0) &= P\left(\sum_{i=1}^{8} X_i = 0\right) = P(X_1 = 0 \wedge X_2 = 0 \wedge \cdots \wedge X_8 = 0) \\ &= \prod_{i=1}^{8} P(X_i = 0) = \prod_{i=1}^{8} \frac{1}{i + 2} \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \times \cdots \times \frac{1}{10} \approx 5.5 \times 10^{-7}, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
P(Y=1) = P\left(\sum_{i=1}^{8} X_i = 1\right)
&= P(X_1 = 1 \wedge X_2 = 0 \wedge \cdots \wedge X_8 = 0) \\
&\quad + P(X_1 = 0 \wedge X_2 = 1 \wedge \cdots \wedge X_8 = 0) \\
&\quad + \cdots \\
&\quad + P(X_1 = 0 \wedge X_2 = 0 \wedge \cdots \wedge X_8 = 1) \\
&= \sum_{j=1}^{8} \frac{j+1}{j+2} \prod_{i=1,\, i\neq j}^{8} \frac{1}{i+2} \\
&\approx 2.43 \times 10^{-5},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(Y=2) &= P\left(\sum_{i=1}^{8} X_i = 2\right) \\
&= \sum_{k=1}^{7} \frac{k+1}{k+2} \sum_{j=k+1}^{8} \frac{j+1}{j+2} \prod_{i=1,\, i\neq j,k}^{8} \frac{1}{i+2} \quad \text{(verifique!)} \\
&\approx 4.55 \times 10^{-4}, \\
P(Y \geq 3) &\approx 1 - 4.8 \times 10^{-4}.
\end{aligned}
$$

(b) $P(X_1 = 0 \wedge X_2 = 0 \wedge \cdots \wedge X_7 = 0 \wedge X_8 = 1) = \prod_{i=1}^{7} \frac{1}{i+2} \times \frac{8+1}{8+2} \approx 4.96 \times 10^{-6}$.

8. O número de erros tipográficos numa página de determinado livro é uma variável aleatória com distribuição de Poisson de parâmetro 1/2.

   (a) Encontre a probabilidade de que haja três ou mais erros tipográficos nesta página.

   (b) Calcule a probabilidade anterior dado que há pelo menos um erro nesta página.

   Resolução:
   $X \sim \text{Pois}(\lambda) \Leftrightarrow f_X(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!},\ \lambda > 0,\ x \in \{0, 1, 2, \cdots\}$. Neste caso, $\lambda = 1/2$.

   (a) $P(X \geq 3) = 1 - f_X(0) - f_X(1) - f_X(2) \approx 0.014$.

   (b) $P(X \geq 3 \mid X \geq 1) = P(X \geq 3 \wedge X \geq 1)/P(X \geq 1) = P(X \geq 3)/P(X \geq 1) \approx 0.0366$.

9. Suponhamos que os navios chegam a um porto à razão de 2 navios /hora, e que essa razão é aproximada por um processo de Poisson. Observando o processo por um período de meia hora (t = 1/2), determine a probabilidade de:

   (a) não chegar nenhum navio;

   (b) chegarem 3 navios.

   Resolução:
   X_t- número de navios que chegam ao porto em t horas. Em t horas, chegam, em média, $2t$ navios ao porto, pelo que $X_t \sim \text{Pois}(2t)$, logo $X_{1/2} \sim \text{Pois}(1)$.

   (a) $P(X_{1/2} = 0) = e^{-1} \approx 0.37$.

   (b) $P(X_{1/2} = 3) = e^{-1}/3! \approx 0.061$.

10. Uma máquina produz 9 peças defeituosas a cada 1000 peças produzidas. Calcule a probabilidade de que em um lote que contém:

    (a) 200 peças, sejam encontradas 8 peças defeituosas;

    (b) 500 peças, não haja nenhuma peça defeituosa.

Resolução:
X_n- número de peças defeituosas num lote com n peças. Temos uma probabilidade de defeito em cada peça de $p = 9/1000 = 0.009$, logo, assumindo que os defeitos ocorrem de forma independente em cada peça, $X_n \sim \text{Binom}(n, 0.009)$.

(a) Neste caso, $n = 200$. Como temos n "grande"(digamos, $n \geq 100$), p "pequeno"(digamos, $p \leq 0.01$) e np "não muito grande", (digamos, $np \leq 20$) a distribuição binomial é bem aproximada por uma distribuição de Poisson de parâmetro $\lambda = np = 1.8$. Seja então $\tilde{X}_{200} \sim \text{Pois}(1.8)$. Vamos calcular $P(X_{200} = 8)$ e $P(\tilde{X}_{200} = 8)$ para verificar que realmente têm valores aproximadamente iguais:

$$P(X_{200} = 8) \approx 4.18 \times 10^{-4}, \quad P(\tilde{X}_{200} = 8) \approx 4.52 \times 10^{-4}.$$

(b) Agora, $n = 500$, pelo que a aproximação da distribuição binomial pela de Poisson se mantém válida, desta vez com parâmetro $\lambda = 4.5$. Assim, se $\tilde{X}_{500} \sim \text{Pois}(4.5)$, temos:

$$P(X_{500} = 0) \approx 0.0109, \quad P(\tilde{X}_{500} = 0) \approx 0.0111.$$