FICHA 01 — resolução

DPC

1. A prevenção da propagação da fractura por fadiga em estruturas de aeronaves é um importante elemento de segurança. Um estudo de engenharia para investigar a fractura por fadiga em $n = 9$ asas carregadas ciclicamente reportou os seguintes comprimentos (em mm) de fractura: $2.13; 2.96; 3.02; 1.82; 1.15; 1.37; 2.04; 2.47; 2.60$.

   (a) Calcule a média da amostra.

   (b) Calcule a variância e o desvio-padrão da amostra.

   Resolução:

   (a) $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = 2.1733$.

   (b) $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = 0.4304$, $s = \sqrt{s^2} = 0.6560$.

2. Considere a quantidade $\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2$. Sendo x_i, $i = 1..n$ conhecidos, qual o valor de a que minimiza essa quantidade?

   Resolução:
   Seja $L(a) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2$, $a \in \mathbf{R}$, a função que queremos minimizar. Trata-se de uma função quadrática com segunda derivada positiva, pelo que existe um minimizante único e global a^*. Assim,

   $$\frac{dL}{da}(a^*) = 0 \Leftrightarrow -2\sum_{i=1}^{n}(x_i - a^*) = 0 \Leftrightarrow a^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

   Concluímos, então, que a^* é igual à média de $x_1, x_2, ..., x_n$. $\square$

3. Dada uma amostra de valores x_i, $\quad i = 1, \cdots, n$, mostre que a mediana é a solução de

   $$\arg\min_a \sum_{i=1}^{n} |x_i - a|.$$

   Resolução:
   Seja $L_n(a) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - a|$, $a \in \mathbf{R}$, a sucessão das funções que queremos minimizar. Pretende-se demonstrar que, para cada $n \in \mathbf{N}$, a função $L_n(a)$ é mínima para $a = \text{mediana}(x_1, x_2, ..., x_n)$. Neste caso, apesar de contínua, a função $L_n(a)$ não é diferenciável, pelo que não podemos utilizar o mesmo método que no exercício 2. (procurar os pontos onde a derivada é nula). Começamos então por assumir que $x_1 \leq x_2 \leq ... \leq x_n$, sem perda de generalidade (porquê?). Faremos agora a demonstração tratando separadamente os casos em que n é ímpar e em que n é par.

   <u>n ímpar:</u>
   Se n é ímpar, então existe um inteiro k tal que $n = 2k+1$. Note ainda que $\text{mediana}(x_1, x_2, ..., x_{2k+1}) = x_k$. Assim, temos:

   $$L_n(a) = L_{2k+1}(a) = \sum_{i=1}^{2k+1} |x_i - a| = |x_1 - a| + |x_{2k+1} - a| + \sum_{i=2}^{2k} |x_i - a|.$$

   Observando que $L_{2k+1}(a)$ cresce à medida que a se afasta do intervalo $[x_1,\ x_{2k+1}]$, conclui-se que os pontos de mínimo terão de ocorrer necessariamente nesse intervalo. Assim, para $a \in [x_1, x_{2k+1}]$, temos $|x_1 - a| + |x_{2k+1} - a| = (a - x_1) + (x_{2k+1} - a) = x_{2k+1} - x_1$ e $L_{2k+1}(a) = x_{2k+1} - x_1 + \sum_{i=2}^{2k} |x_i - a|$.

Aplicando o mesmo raciocínio recursivamente, conclui-se que o mínimo terá de ocorrer em $[x_{k-1}, x_k]$ e, para a neste intervalo, temos:

$$L_{2k+1}(a) = |x_k - a| + \underbrace{(x_{2k+1} - x_1) + (x_{2k} - x_2) + ... + (x_{k+1} - x_{k-1})}_{\text{constante}}.$$

Daqui, é imediato observar que $a^* = x_k$ é o minimizante global de $L_{2k+1}(a)$.

n par:

A prova segue um raciocínio idêntico ao anterior. Neste caso, $n = 2k$ para algum inteiro k e, assim, mediana$(x_1, x_2, ..., x_{2k}) = \frac{1}{2}(x_k + x_{k+1})$. Aplicando o mesmo raciocínio recursivo que anteriormente, observamos que $L_{2k}(a)$ será mínima para todo o $a \in [x_k,\ x_{k+1}]$, que contém a mediana (ponto médio do intervalo). $\square$

4. Construa, relativamente a cada uma das experiências aleatórias a seguir indicadas, o espaço de resultados e classifique-o quanto ao número de elementos:

   (a) lançamento de uma moeda;

   (b) lançamento de uma moeda até aparecer "coroa";

   (c) escolha de um número real no intervalo $[0; 10]$.

   Resolução:

   (a) {"cara", "coroa"}, conjunto discreto e finito.

   (b) {"coroa", "cara"-"coroa", "cara"-"cara"-"coroa", ...}, conjunto discreto e infinito.

   (c) $\{x : x \in [0,\ 10]\}$, conjunto infinito não numerável.

5. Suponha que o espaço amostral Ω é formado pelos inteiros positivos de 1 a 10. Sejam $A = \{2, 3, 4\}, B = \{3, 4, 5\}$, e $C = \{5, 6, 7\}$. Enumere os elementos dos seguintes conjuntos:

   (a) $\bar{A} \cap B$;

   (b) $\bar{A} \cup B$;

   (c) $\overline{\bar{A} \cap \bar{B}}$;

   (d) $\overline{A \cap (B \cup C)}$;

   Resolução:

   (a) $\bar{A} \cap B = \{5\}$.

   (b) $\bar{A} \cup B = \{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} = \Omega \setminus \{2\}$.

   (c) $\overline{\bar{A} \cap \bar{B}} = A \cup B = \{2, 3, 4, 5\}$.

   (d) $\overline{A \cap (B \cup C)} = \Omega \setminus \{3, 4\}$.

6. Um sistema electrónico é formado por dois sub-sistemas A e B. De ensaios anteriores, sabe-se que:

   - a probabilidade de A falhar é 20%;
   - a probabilidade de B falhar sozinho é 15%;
   - a probabilidade de A e B falharem é 15%.

   Determine a probabilidade de:

   (a) B falhar;

   (b) falhar apenas A;

   (c) falhar A ou B;

   (d) não falhar nem A nem B;

(e) A e B não falharem simultaneamente.

Resolução:
Sejam A e B os acontecimentos "sistema A falhar"e "sistema B falhar", respetivamente. Do enunciado, temos $P(A) = 0.20$, $P(B \cap \bar{A}) = 0.15$ e $P(A \cap B) = 0.15$.

(a) $P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A}) = 0.15 + 0.15 = 0.30.$

(b) $P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) = 0.20 - 0.15 = 0.05.$

(c) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.20 + 0.30 - 0.15 = 0.35.$

(d) $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0.35 = 0.65.$

(e) $P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0.15 = 0.85.$

7. Um conjunto de letras de plástico A-Z (23 letras) é colocado num vaso. Tirando 4 letras ao acaso sem reposição, qual a probabilidade de obtermos PEST (por esta ordem)?

Solução:

$$\text{Prob(obter PEST)} = \frac{1}{{}^{23}A_4} = \frac{1}{23 \times 22 \times 21 \times 20}.$$

8. Numa sala de jogos há duas máquinas análogas; uma delas funciona normalmente e oferece uma probabilidade de ganho de 0.2; a outra, como está avariada, permite uma probabilidade de ganho de 0.6. No entanto, não sabemos distingui-las "a priori". Escolhemos uma máquina ao acaso. Qual é a probabilidade de que seja a máquina avariada,

(a) Antes de iniciar o jogo?

(b) Depois de haver jogado uma partida que ganhamos?

(c) Depois de haver jogado uma partida que perdemos?

(d) Depois de haver jogado duas partidas que ganhamos?

(e) Depois de haver jogado duas partidas, das quais ganhamos a primeira e perdemos a segunda?

Resolução:
Vamos definir os seguintes acontecimentos: $A-$ escolher a máquina avariada, G_i- ganhar a partida i, $i \in \{1, 2, 3, \cdots\}$. Temos $P(G_i \mid A) = 0.6$ e $P(G_i \mid \bar{A}) = 0.2$, de onde se obtém imediatamente $P(\bar{G}_i \mid A) = 0.4$ e $P(\bar{G}_i \mid \bar{A}) = 0.8$.

(a) $P(A) = 0.5.$

(b) A probabilidade pedida é $P(A \mid G_1)$ e é obtida pela aplicação direta do teorema de Bayes:

$$\begin{aligned} P(A \mid G_1) &= \frac{P(A \cap G_1)}{P(G_1)} = \frac{P(G_1 \mid A)P(A)}{P(G_1 \cap A) + P(G_1 \cap \bar{A})} = \frac{P(G_1 \mid A)P(A)}{P(G_1 \mid A)P(A) + P(G_1 \mid \bar{A})P(\bar{A})} \\ &= \frac{0.6 \times 0.5}{0.6 \times 0.5 + 0.2 \times 0.5} = 0.75. \end{aligned}$$

(c)

$$P(A \mid \bar{G}_1) = \frac{P(\bar{G}_1 \mid A)P(A)}{P(\bar{G}_1 \mid A)P(A) + P(\bar{G}_1 \mid \bar{A})P(\bar{A})} \approx 0.333.$$

(d) Agora, é-nos dito que ganhámos duas partidas, pelo que a probabilidade pedida é $P(A \mid G_1 \cap G_2)$:

$$P(A \mid G_1 \cap G_2) = \frac{P(A \cap G_1 \cap G_2)}{P(G_1 \cap G_2)} = \frac{P(G_1 \cap G_2 \mid A)P(A)}{P(G_1 \cap G_2 \mid A)P(A) + P(G_1 \cap G_2 \mid \bar{A})P(\bar{A})}.$$

Para prosseguirmos a resolução, temos de assumir que, em cada máquina, o resultado de uma jogada não influencia o resultado da jogada seguinte, ou seja, que G_1 e G_2 são acontecimentos independentes dados os acontecimentos A ou $\bar{A}$. Desta forma, temos $P(G_1 \cap G_2 \mid A) = P(G_1 \mid A)P(G_2 \mid A) = 0.6^2$ e $P(G_1 \cap G_2 \mid \bar{A}) = P(G_1 \mid \bar{A})P(G_2 \mid \bar{A}) = 0.2^2$ e, finalmente, $P(A \mid G_1 \cap G_2) = 0.9$.

Nota: Em cálculos intermédios, obtivemos $P(G_1) = P(G_2) = 0.4$ e $P(G_1 \cap G_2) = 0.2$, pelo que $P(G_1 \cap G_2) \neq P(G_1)P(G_2)$. Assim, verificamos que os acontecimentos G_1 e G_2 não são independentes. No entanto, antes tínhamos argumentado que G_1 e G_2 eram independentes dados os acontecimentos A ou $\bar{A}$. Este fenómeno, no qual dois acontecimentos dependentes (G_1 e G_2) se tornam independentes dado um terceiro acontecimento (A ou $\bar{A}$), tem o nome de *independência condicional*. Apesar de aparentemente pouco intuitivo, a sua explicação é bastante simples. Quando não sabemos em qual das máquinas estamos a jogar (A e $\bar{A}$ não são dados), o facto de ganharmos a primeira partida (G_1) faz aumentar a probabilidade de estarmos a jogar na máquina avariada (A, onde é mais provável ganhar) o que, por sua vez, torna mais provável ganharmos a segunda partida (G_2). Por outro lado, quando sabemos em que máquina estamos a jogar (isto é, quando A ou $\bar{A}$ são dados), ganhar a primeira partida nada nos diz sobre a probabilidade de ganharmos a segunda, pelo que G_1 e G_2 se tornam independentes.

Também é possível (e talvez ainda menos intuitivo!) que dois acontecimentos independentes se tornem dependentes quando condicionados num terceiro acontecimento. Por outras palavras, dados três acontecimentos A, B e C, é possível que $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ e $P(A \cap B \mid C) \neq P(A \mid C)P(B \mid C)$. Consegue encontrar alguma situação prática em que isto aconteça?

(e)

$$P(A \mid G_1 \cap \bar{G_2}) = \frac{P(G_1 \mid A)P(\bar{G_2} \mid A)P(A)}{P(G_1 \mid A)P(\bar{G_2} \mid A)P(A) + P(G_1 \mid \bar{A})P(\bar{G_2} \mid \bar{A})P(\bar{A})} = 0.6.$$

9. O Professor Aleatório ensina PEST há muitos anos. Ele concluiu que 80% dos alunos que resolvem as fichas práticas passam ao exame, enquanto 10% dos alunos que não resolvem as fichas práticas passa ao exame. Sabe-se que 60% dos alunos resolvem as fichas práticas. Entre os alunos que passam ao exame, qual a percentagem dos que resolve as fichas práticas?

Resolução:

$R-$ aluno resolve as fichas práticas, $E-$ aluno passa ao exame. $P(E \mid R) = 0.80$, $P(E \mid \bar{R}) = 0.10$, $P(R) = 0.60$.

$$P(R \mid E) = \frac{P(E \mid R)P(R)}{P(E \mid R)P(R) + P(E \mid \bar{R})P(\bar{R})} \approx 0.92.$$

10. Prove que $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B \mid A)P(C \mid A \cap B)$.

Resolução:

A expressão do lado direito da igualdade só está definida se $P(A) > 0$ e $P(A \cap B) > 0$, pelo que assumiremos que estas condições se verificam. Pela definição de probabilidade condicionada, temos $P(A \cap B) = P(A)P(B \mid A)$. De igual modo, $P(A \cap B \cap C) = P(C \cap (A \cap B)) = P(A \cap B)P(C \mid A \cap B) = P(A)P(B \mid A)P(C \mid A \cap B)$. $\square$

Nota: A igualdade demonstrada continua válida para n acontecimentos e é vulgarmente chamada de *regra da cadeia* do cálculo de probabilidades (não confundir com a regra da cadeia para o cálculo de derivadas):

Sejam $A_1, A_2, \cdots, A_n$ acontecimentos de um espaço amostral tais que $P(A_1) > 0, P(A_1 \cap A_2) > 0, \cdots, P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}) > 0$. Então,

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \cdots P(A_n \mid A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}).$$