FICHA 03 – resolução

DPC

1. Se $p(k) = \alpha q^k, \quad k = 2, 3, \cdots$ é uma função de probabilidade válida, quais são os valores possíveis de α e q?

   Resolução:
   Se p é uma função de probabilidade válida, então α e q devem ser tais que $0 \leq p(k) \leq 1$, para todo o $k \geq 2$, e $\sum_{k=2}^{\infty} p(k) = 1$.
   $$p(k) \geq 0 \; \forall \; k \geq 2 \implies \alpha \geq 0, \; q \geq 0.$$
   $$\sum_{k=2}^{\infty} p(k) = 1 \Leftrightarrow \alpha \sum_{k=2}^{\infty} q^k = 1 \implies \alpha \neq 0, \, q \neq 0.$$
   A série acima converge se e só se $|q| < 1$ e a sua soma é conhecida (série geométrica). Aplicando a fórmula respetiva, vem:
   $$1 = \alpha \sum_{k=2}^{\infty} q^k = \alpha \frac{q^2}{1-q} \Leftrightarrow \alpha = \frac{1-q}{q^2}.$$
   Tendo em conta as restrições anteriores, concluimos então que $0 < q < 1$ e $\alpha = (1-q)/q^2$.

2. Uma senhora reivindica que consegue adivinhar se, numa chávena de chá com leite, foi colocado primeiro o chá ou o leite. Para testar a sua reivindicação foi realizada uma experiência em que se colocava o leite ou o chá em primeiro lugar de uma forma aleatória. Esta experiência foi repetida 10 vezes. Quão provável seria a senhora identificar corretamente em 8 das 10 vezes, sabendo-se que estava a adivinhar à sorte?

   Resolução:
   $p \in [0, 1]-$ probabilidade de a senhora adivinhar se se colocou o leite ou o chá em primeiro lugar em cada experiência; $X \in \{0, 1, 2, \cdots, 10\}-$ número de vezes que a senhora adivinhou em 10 experiências.
   Dado o valor de p, a probabilidade de a senhora acertar exatamente x vezes em 10 tentativas segue uma distribuição binomial, pois temos 10 experiências independentes e, em cada uma delas, a probabilidade de sucesso é p. Assim,
   $$P(X = x \mid p) = \binom{10}{x} p^x (1-p)^{10-x}.$$
   Se a senhora está a adivinhar "à sorte", então, em cada tentativa, tem a mesma probabilidade de acertar e de errar, ou seja, $p = 0.5$. Assim, a probabilidade pedida é:
   $$P(X = 8 \mid p = 0.5) = \binom{10}{8} 0.5^8 (1-0.5)^{10-8} \approx 4.4\%.$$

3. A procura semanal de certo bem perecível segue, em dado estabelecimento, a seguinte lei de probabilidade:

X	3	4	5	6	7
$f(x)$	0.1	0.3	0.3	0.1	0.2

   O preço de custo é 5.00Eur e o preço de venda 7.50Eur. O abastecimento é feito no início de cada semana, sabendo-se que o bem se torna irrecuperável se não for vendido na semana em causa. Admitindo um stock inicial de 5 unidades, calcule:

   (a) A probabilidade de haver "falhas" de stock.

   (b) A probabilidade de haver "sobras" de stock.

   (c) A tabela de probabilidade do lucro semanal.

Resolução:

(a) Há falha de stock se a procura (X unidades) exceder o stock inicialmente disponível (5 unidades), logo a probabilidade pedida é $P(X > 5) = P(X = 6) + P(X = 7) = f(6) + f(7) = 0.3$.

(b) Prob(haver sobras) $= P(X < 5) = 0.4$.

(c) O lucro semanal é função da procura semanal X, que é uma variável aleatória. Assim sendo, o lucro semanal L torna-se ele próprio uma variável aleatória, cuja função (ou tabela) de probabilidade pode ser obtida a partir da função (ou tabela) de probabilidade de X. Em primeiro lugar, temos de escrever a função g que nos dá o lucro (L, em euros) em função da procura (X unidades):

$$L = g(X) = \begin{cases} 7.50X - 5.00 \times 5 = 7.5X - 25, \text{ se } X \leq 5, \\ 12.50, \text{ se } X \geq 5. \end{cases}$$

Daqui, conclui-se que $X = 3 \implies L = -2.50$Eur, $X = 4 \implies L = 5.00$Eur e $X \geq 5 \implies L = 12.50$Eur, logo $P(L = -2.50) = P(X = 3)$, $P(L = 5.00) = P(X = 4)$ e $P(L = 12.50) = P(X \geq 5)$:

L (Eur)	-2.50	5.00	12.50
$P(L)$	0.1	0.3	0.6

4. De uma variável aleatória X sabe-se que:

- os valores possíveis são 0, 2 e 4;
- $P(X = 0 \vee X = 2) = 80\%$;
- $f_X(0) = (3/2)f_X(4)$, onde f_X é a função de probabilidade de X.

(a) Construa a tabela de probabilidade de X e represente graficamente $f_X(x)$.

(b) Determine a função distribuição e utilize-a para calcular as seguintes probabilidades:

i. $P(X \leq 1)$;

ii. $P(X < 4)$;

iii. $P(X \geq 1)$;

iv. $P(X \geq 4)$;

v. $P(0 < X \leq 2)$;

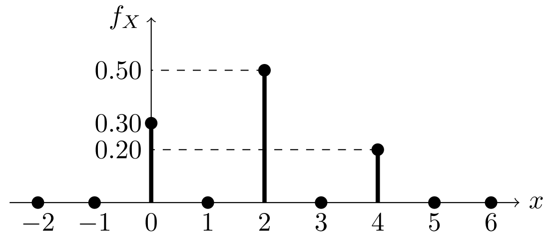
Resolução:

(a)

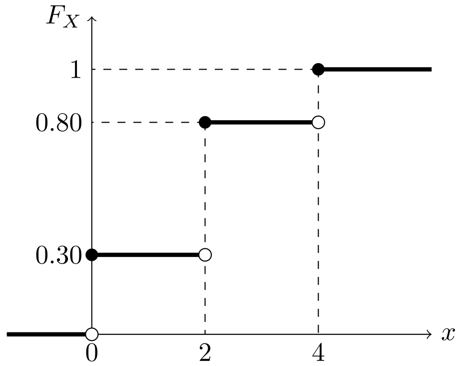
$$P(X = 0 \vee X = 2) = 80\% \Leftrightarrow f_X(0) + f_X(2) = 0.80,$$

$$\sum_{x \in \{0,2,4\}} f_X(x) = 1 \Leftrightarrow f_X(0) + f_X(2) + f_X(4) = 1 \Leftrightarrow 0.80 + f_X(4) = 1 \Leftrightarrow f_X(4) = 0.20,$$

$$f_X(0) = (3/2)f_X(4) = 0.30, \quad f_X(2) = 0.80 - 0.30 = 0.50.$$



(b)



$$F_X(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0, \ x < 0 \\ 0.30, \ 0 \leq x < 2, \\ 0.80, \ 2 \leq x < 4, \\ 1, \ x \geq 4 \end{cases}$$

i. $P(X \leq 1) = F_X(1) = 0.30$;

ii. $P(X < 4) = F_X(4^-) = \lim_{x \to 4^-} F_X(x) = 0.80$;

iii. $P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - F_X(1^-) = 1 - 0.30 = 0.70$;

iv. $P(X \geq 4) = 1 - P(X < 4) = 1 - 0.80 = 0.20$;

v. $P(0 < X \leq 2) = P(X \leq 2) - P(X \leq 0) = F_X(2) - F_X(0) = 0.80 - 0.30 = 0.50$.

5. Alípio pretende oferecer um jantar a Zenão. Como não tem dinheiro para comprar comida, resolve então ir pescar 5 peixinhos no lago que existe em frente de sua casa. Neste lago existem 14 peixes, dos quais 6 são vermelhos e 8 são dourados. Só os dourados são comestíveis. Além disso, a água está turva e Alípio só consegue distinguir a cor dos peixes depois de os ter pescado. Seja X a variável aleatória que representa o número de peixes vermelhos pescados por Alípio.

   (a) Determine a função de probabilidade da variável aleatória X.

   (b) Calcule $P(1 \leq X \leq 2)$.

   Resolução:

   (a) Como só os peixes dourados são comestíveis, os 5 peixes que Alípio irá servir no jantar têm de ser dourados. Assim, Alípio terá de pescar peixes sucessivamente até obter 5 peixes dourados. A variável aleatória X (número de peixes vermelhos pescados) pode assim tomar cada valor no conjunto $\{0, 1, \cdots, 6\}$. Vamos assumir que Alípio só devolve os peixes vermelhos ao lago (para não os matar) após pescar os 5 peixes dourados que pretende, ou seja, assumimos que todo o processo decorre sem reposição. Para resolver o problema, é útil imaginar que os 14 peixes se colocam aleatoriamente em fila e que irão ser pescados pela ordem que ocupam nessa fila imaginária. Alípio irá assim retirar peixes da fila por ordem até encontrar o 5º peixe dourado e, nessa altura, para.

   Casos possíveis:

   O número de casos possíveis é dado pelo número de formas de colocar os 14 peixes em fila, isto é, pelo número de permutações de 14 elementos: $14 \times 13 \times \cdots \times 1 = 14!$

   Casos favoráveis:

   Temos 14 peixes na fila, 8 dourados e 6 vermelhos. Alípio vai pescar (isto é, retirar da fila imaginária) um total de $5+x$ peixes, dos quais 5 são dourados e x são vermelhos. Assim, temos de garantir que, nas $5+x$ primeiras posições da fila, temos exatamente 5 peixes dourados e x vermelhos. Assumindo que os x primeiros peixes eram vermelhos e os 5 seguintes eram dourados, teríamos ${}^6A_x {}^8A_5$ permutações possíveis. Como tal não é garantido, temos ainda de considerar as permutações entre cores. Há então $5+x$ posições e, a cada uma delas, temos de atribuir a cor dourada (5 vezes) ou vermelha (x vezes), sendo que a última posição terá obrigatoriamente cor dourada. Assim, das $4+x$ posições que falta colorir, escolhemos 4 para terem cor dourada (e as restantes x ficam com cor vermelha). Esta escolha pode ser feita de $\binom{4+x}{4}$ formas distintas. A ordem dos restantes $14-5-x = 9-x$ peixes na fila é arbitrária, pelo que todas as $(9-x)!$ permutações são admissíveis. Assim, o número de casos favoráveis é dado, em função de x (número de peixes vermelhos pescados), por ${}^6A_x {}^8A_5 \binom{4+x}{4}(9-x)!$

   A função de probabilidade de X é, então:

$$f_X(x) = P(X = x) = \frac{{}^6A_x {}^8A_5 \binom{4+x}{4}(9-x)!}{14!} = \frac{{}^6A_x {}^8A_5 \binom{4+x}{4}}{{}^{14}A_{5+x}}, \quad x \in \{0, 1, \cdots, 6\}.$$

Nota: Para facilitar a compreensão deste exercício, pode ser-lhe útil considerar, em primeiro lugar, uma versão simplificada do problema, onde ignora a informação de que "só os peixes dourados são comestíveis". Nesse caso, Alípio pesca um total de 5 peixes (de qualquer cor) e o problema reduz-se a calcular a probabilidade de x deles serem vermelhos. A solução seria então dada por uma distribuição hipergeométrica:

$$P(X = x) = \frac{\binom{6}{x}\binom{8}{5-x}}{\binom{14}{5}}, \quad x \in \{0, 1, \cdots, 5\}.$$

(b) $P(1 \leq X \leq 2) = f_X(1) + f_X(2) \approx 0.268$.

6. A liga de futebol de um país tem quatro equipas: equipa 1, equipa 2, equipa 3 e equipa 4. Uma equipa estrangeira em excursão pelo país vai jogar um amigável contra cada uma das equipas 1, 2 e 3. Suponha que contra a equipa 1 esta equipa tem probabilidade 1/4 de conquistar a vitória, enquanto que essa probabilidade vale 1/2 quando o adversário é a equipa 2 e vale 2/5 quando o adversário é a equipa 3. Assuma também que os resultados dos três amigáveis são independentes. Seja X o número de vitórias conquistadas pela equipa estrangeira nos três amigáveis.

   (a) Obtenha a função de probabilidade de X.

   (b) Qual a probabilidade de que a equipa obtenha pelo menos uma vitória?

   Suponha agora que, dependendo do seu desempenho nos três amigáveis, a equipa estrangeira decidirá fazer um quarto jogo, contra a equipa 4. Caso conquiste três vitórias nos três amigáveis, jogará contra a equipa 4; caso obtenha exatamente duas vitórias, fará o quarto jogo com probabilidade 4/5 e não realizará o quarto jogo caso obtenha apenas uma vitória ou não vença nenhum dos três amigáveis.

   (c) Determine a probabilidade de que o quarto jogo seja realizado.

   (d) Dado que o quarto jogo se realizou, qual a probabilidade de que a equipa estrangeira tenha vencido os três amigáveis iniciais?

   Resolução:

   (a) $X \in \{0, 1, 2, 3\}$. Definimos ainda as variáveis aleatórias binárias $V_i \in \{0, 1\}-$ perder ($V_i = 0$) ou ganhar ($V_i = 1$) o jogo contra a equipa i, $i \in \{1, 2, 3\}$. Assim, $X = V_1 + V_2 + V_3$. Do enunciado, $P(V_1 = 1) = 1/4$, $P(V_2 = 1) = 1/2$ e $P(V_3 = 1) = 2/5$ e sabemos que V_1, V_2 e V_3 são independentes.

$$\begin{aligned}
f_X(0) &= P(X = 0) = P(V_1 + V_2 + V_3 = 0) = P(V_1 = 0 \wedge V_2 = 0 \wedge V_3 = 0) \\
&= P(V_1 = 0)P(V_2 = 0)P(V_3 = 0) \qquad \text{(v.a. indep.)} \\
&= \left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{2}{5}\right) = \frac{9}{40}, \\
f_X(1) &= P(X = 1) = P(V_1 + V_2 + V_3 = 1) \\
&= P(V_1 = 1 \wedge V_2 = 0 \wedge V_3 = 0) + P(V_1 = 0 \wedge V_2 = 1 \wedge V_3 = 0) + P(V_1 = 0 \wedge V_2 = 0 \wedge V_3 = 1) \\
&= P(V_1 = 1)P(V_2 = 0)P(V_3 = 0) \\
&\quad + P(V_1 = 0)P(V_2 = 1)P(V_3 = 0) \\
&\quad + P(V_1 = 0)P(V_2 = 0)P(V_3 = 1) = \frac{9}{20}, \\
f_X(2) &= \cdots = \frac{11}{40}, \quad f_X(3) = P(X = 3) = P(V_1 = 1)P(V_2 = 1)P(V_3 = 1) = \frac{1}{20}.
\end{aligned}$$

   (b) $P(X \geq 1) = 1 - f_X(0) = 31/40$.

   (c) J_4- acontecimento "realizar quarto jogo". Do enunciado, $P(J_4 \mid X = 3) = 1$, $P(J_4 \mid X = 2) = 4/5$, $P(J_4 \mid X \leq 1) = 0$.

$$\begin{aligned}
P(J_4) &= P(J_4 \cap \{X = 0\}) + P(J_4 \cap \{X = 1\}) + P(J_4 \cap \{X = 2\}) + P(J_4 \cap \{X = 3\}) \\
&= \sum_{x=0}^{3} P(J_4 \cap \{X = x\}) = \sum_{x=0}^{3} P(J_4 \mid X = x)P(X = x) = \frac{27}{100}.
\end{aligned}$$

(d) $P(X=3 \mid J_4) = \frac{P(J_4 \cap \{X=3\})}{P(J_4)} = \frac{P(J_4|X=3)P(X=3)}{P(J_4)} = 5/27$.

7. Considere um jogo de perguntas onde são dadas duas perguntas a uma pessoa e ela deve decidir a qual responder primeiro. A pergunta 1 será respondida correctamente com probabilidade 0.8 e a pessoa recebe um prémio de 100Eur se acertar; a pergunta 2 será respondida correctamente com probabilidade 0.5 e a pessoa recebe 200Eur se acertar. Se a pessoa falhar na primeira pergunta que tente o jogo termina. Se acertar na primeira pergunta tentada a pessoa pode tentar a outra. Que pergunta deve ser tentada inicialmente para maximizar o valor esperado do prémio total?

Resolução:
A definição de valor esperado de uma função g da variável aleatória discreta X com função de probabilidade f_X é:

$$E_{f_X}[g(X)] = \sum_{\forall x} g(x) f_X(x).$$

Como a função de probabilidade (f_X) utilizada no cálculo do valor é esperado é quase sempre óbvia pelo contexto, muitas vezes escrevemos simplesmente $E[g(X)]$. Quando falamos em valor esperado da variável aleatória X, referimo-nos a $E_{f_X}(X)$ (ou, simplesmente, $E(X)$). Note que esse é um caso particular da definição acima, no qual g é a função identidade (isto é, $g(x) = x$).

No presente exercício, sejam X_1 e X_2 as variáveis aleatórias que designam os prémios totais obtidos quando se responde em primeiro lugar à questão 1 ou 2, respetivamente. Queremos comparar os valores esperados $E(X_1)$ e $E(X_2)$. Para isso, temos de determinar as funções de probabilidade de X_1 e X_2, denotadas por f_{X_1} e f_{X_2}, respetivamente. Sejam A_i os acontecimentos "acertar na resposta à pergunta $i \in \{1, 2\}$". Temos $P(A_1) = 0.8$ e $P(A_2) = 0.5$. Desta forma,

$$\begin{aligned}
&f_{X_1}(0) = P(A_1') = 0.2, \quad f_{X_1}(100) = P(A_1)P(A_2') = 0.4, \quad f_{X_1}(300) = P(A_1)P(A_2) = 0.4,\\
&f_{X_2}(0) = P(A_2') = 0.5, \quad f_{X_2}(200) = P(A_2)P(A_1') = 0.1, \quad f_{X_2}(300) = P(A_2)P(A_1) = 0.4,
\end{aligned}$$

e então,

$$E(X_1) = \sum_{x \in \{0,100,300\}} x f_{X_1}(x) = 0 f_{X_1}(0) + 100 f_{X_1}(100) + 300 f_{X_1}(300) = 160\text{Eur},$$

$$E(X_2) = \sum_{x \in \{0,200,300\}} x f_{X_2}(x) = 0 f_{X_2}(0) + 200 f_{X_2}(200) + 300 f_{X_2}(300) = 140\text{Eur}.$$

$E(X_1) > E(X_2)$, logo a opção que maximiza o prémio esperado é começar pela pergunta 1.

8. Suponha que à entrada do seu apartamento a luz falha. Tem cinco chaves no bolso, das quais somente uma abre a porta. Tirando ao acaso e sucessivamente as chaves do bolso, calcule a probabilidade de

(a) abrir a porta à quarta tentativa;

(b) abrir a porta à quinta tentativa, sabendo que não abriu às três primeiras.

(c) Qual o número esperado de tentativas para abrir a porta?

Resolução:
$X \in \{1, 2, 3, 4, 5\}-$ número de tentativas até abrir a porta.

(a) Todas as cinco chaves têm a mesma probabilidade de abrir a porta, logo $P(X = 4) = 1/5$.

(b) Se as três primeiras chaves não abriram a porta, então a chave correta terá de ser uma das duas que sobram e ambas têm igual probabilidade, logo $P(X = 5 \mid X > 3) = 1/2$. Pode ser elucidativo resolver o exercício pela definição de probabilidade condicionada e ver que se obtém o mesmo resultado:

$$P(X = 5 \mid X > 3) = \frac{P(X = 5 \wedge X > 3)}{P(X > 3)} = \frac{P(X = 5)}{P(X = 4) + P(X = 5)} = \frac{1/5}{1/5 + 1/5} = \frac{1}{2}.$$

(c) Temos $f_X(x) = 1/5$, $x \in \{1, 2, \cdots, 5\}$. Assim, $E(X) = \sum_{x=1}^{5} x/5 = 3$.

9. Uma tabacaria faz a seguinte promoção sobre o preço de um dado: o cliente, ao passar pelo caixa, lança o dado. Se sair face 6 tem um desconto de 20% sobre o preço. Se sair 5 ou 4 o desconto é de 15%. Se ocorrerem faces 1, 2 ou 3 o desconto é de 5%.

   (a) Qual a função de probabilidade da variável X que representa o desconto no preço do dado?

   (b) Qual o desconto médio que um cliente pode ter sobre o preço do dado?

   (c) Qual a probabilidade de um cliente ter um desconto com dois dígitos, sabendo que o cliente obteve face ímpar no lançamento do dado?

Resolução:

(a) Seja $D \in \{1, 2, \cdots, 6\}$ a v.a. que representa o resultado do lançamento do dado. O desconto obtido, $X \in \{5, 15, 20\}$ (em percentagem), é uma função (determinística) de D:

$$X = g(D) = \begin{cases} 5\%, & \text{se } 1 \leq D \leq 3, \\ 15\%, & \text{se } 4 \leq D \leq 5, \\ 20\%, & \text{se } D = 6. \end{cases}$$

Assim, X torna-se também uma variável aleatória. Sejam f_D e f_X as funções de probabilidade de D e de X, respetivamente. Assumindo que o dado é equilibrado, $f_D(d) = 1/6$, $d \in \{1, 2, \cdots, 6\}$. Relativamente a X, temos:

$$P(X = 5\%) = P(1 \leq D \leq 3) \Leftrightarrow f_X(5) = f_D(1) + f_D(2) + f_D(3) = \frac{1}{2},$$
$$P(X = 15\%) = P(4 \leq D \leq 5) \Leftrightarrow f_X(15) = f_D(4) + f_D(5) = \frac{1}{3},$$
$$P(X = 20\%) = P(D = 6) \Leftrightarrow f_X(20) = f_D(6) = \frac{1}{6}.$$

(b) Visto que já determinámos f_X, poderíamos calcular o valor esperado do desconto diretamente pela respetiva definição, $E_{f_X}(X) = \sum_{\forall x} x f_X(x)$. A resolução por esse método é imediata e deixada como exercício. Em alternativa, vamos utilizar f_D e o facto de que $X = g(D)$. Temos:

$$\begin{aligned} E_{f_X}(X) = E_{f_D}[g(D)] &= \sum_{d=1}^{6} g(d) f_D(d) \\ &= (g(1) + g(2) + g(3) + g(4) + g(5) + g(6)) \frac{1}{6} \\ &= (3 \times 5\% + 2 \times 15\% + 20\%) \frac{1}{6} \approx 10.83\%. \end{aligned}$$

Nota: Utilizámos, sem demonstração, a igualdade $E_{f_X}(X) = E_{f_D}[g(D)]$. Se resolver o exercício como sugerido anteriormente (isto é, utilizando diretamente a definição de $E_{f_X}(X)$), terá de obter o mesmo resultado. De facto, a igualdade é verdadeira no caso geral:

Considere uma v.a. X, com função de probabilidade f_X, e uma função g. Seja Y a v.a. obtida através de $Y = g(X)$ e seja f_Y a respetiva função de probabilidade. Então, $E_{f_Y}(Y) = E_{f_X}[g(X)]$. Consegue demonstrar este resultado?

(c)

$$\begin{aligned} \text{Prob(desconto 2 dígitos} \mid \text{face ímpar no dado)} &= P(X \in \{15, 20\} \mid D \in \{1, 3, 5\}) \\ &= P(D \in \{4, 5, 6\} \mid D \in \{1, 3, 5\}) \\ &= \frac{P(D = 5)}{P(D \in \{1, 3, 5\})} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$