להחזיר לתא מס׳ 06

עיבוד תמונות ואותות במחשב
236327

תרגיל: 1

הוגש ע״י:

מספר סטודנט	שם
316258706	נוגה בר
300411659	דביר פרי

בתאריך: 27.4.2017

שאלה 1:

א) מינימיזציה של הexpected absolute deviation כפונקציה של רמות הייצוג ורמות ההחלטה:

Minimize $E\{\varepsilon_Q^1\} = \sum_{i=1}^{J} \int_{d_{i-1}}^{d_i} |x - r_i| P(x)dx$

$\frac{\partial}{\partial r_j} \sum_{i=1}^{J} \int_{d_{i-1}}^{d_i} |x - r_i| P(x)dx = 0$

$\frac{\partial}{\partial d_j} \sum_{i=1}^{J} \int_{d_{i-1}}^{d_i} |x - r_i| P(x)dx = 0$

ב) תנאי אופטימליות:

$\frac{\partial}{\partial r_j} E\{\varepsilon_Q^1\} = 0$ for $j=1,\dots,J$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial r_j} E\{\varepsilon_Q^1\} = -\int_{d_{i-1}}^{d_i} sign(x - r_i)dx = -\int_{x>r_i} 1P(x)dx - \int_{x<r_i} -1P(x)dx$$

$$\Rightarrow \int_{x>r_i} P(x)dx = \int_{x<r_i} P(x)dx$$

כלומר תנאי האופטימליות דומה לחציון, כלומר נבחר את רמת הייצוג להיות בנקודה שמחלקת את ההסתברות בתוך האינטרוול באופן שווה. ההסתברות לקבל $x<r_i$ שווה להסתברות לקבל $x>r_i$ עבור x שנמצא בתוך תחומי האינטרוול.

ג) תנאי אופטימליות :

$$\frac{\partial}{\partial d_j} E\{\varepsilon_Q^1\} = 0 \quad \text{for } j=1,\dots,J-1 \;\Rightarrow |d_j - r_j| P(d_j) - |d_j - r_{j+1}| P(d_j) = 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow d_j = \frac{r_j + r_{j+1}}{2}$$

כלומר תנאי האופטימליות הוא שרמות ההחלטה נמצאות באמצע של רמות הייצוג התוחמות אותן. מדובר בממוצע החשבוני של שתי רמות הייצוג הסמוכות.

ד) אלגוריתם :

1)ניחוש ה d_i

2) חישוב ה r_j

3)חישוב ה d_i

4) בדיקה האם השגיאה קטנה אם כן חזרה לשלב 2

2)

א)הערך האופטימלי של $\bar{x}$ הוא הערך שמופיע הכי הרבה פעמים בסט (במידה ויש כמה כאלו אין חשיבות לאיזה מהם ייבחר) כלומר נבחר את השכיח, כיוון שלכל $x \neq y$: $|x-y|^0 = 1$. נקבל שהסכום $\sum_{i=1}^{N}|x_i-\bar{x}|^0$ מינימלי עבור רק עבור $\bar{x}$ שהוא הערך שמופיע הכי הרבה פעמים ,ולכן גם $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}|x_i-\bar{x}|^0$ מינימלי עבור $\bar{x}$ זה.

ב) במקרה הנתון הערך האופטימלי של $\bar{x}$ במקרה זה הוא 5 כיוון שזהו הערך המופיע הכי הרבה פעמים

שאלה 3)

א) לפי הגדרה משתנה מקרי בדיד הוא משתנה המקבל ערכים ממספר בן-מניה של ערכים ,כיוון שהערכים ש-Y מקבל הם r_i ל $1 \le \mathrm{i} \le \mathrm{K}$ כמובן שהטווח הוא בן מניה לכן Y משתנה בדיד לפי ההגדרה.

$$P_Y(y) = P(x\epsilon[D_{i-1}, D_i]) = \int_{D_{i-1}}^{D_i} P_X(x)dx$$

בנוסף הגדרה זאת של $P_Y(y)$ מקיימת את התנאי הבא:

$$\sum_{i=1}^{k} \int_{D_{i-1}}^{D_i} P_X(x)dx = \int_{x\in X} P_X(x)dx = 1$$

ב)

$$\sum_{i=1}^{k} \int_{D^{opt}_{i-1}}^{D^{opt}_i} \left(x - r_i^{opt}\right)^2 P_X(x)dx =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} (\int_{D^{opt}_{i-1}}^{D^{opt}_i} x^2 P_X(x)dx$$

$$- 2\sum_{i=1}^{k} \int_{D^{opt}_{i-1}}^{D^{opt}_i} x r_i^{opt} P_X(x)dx + \sum_{i=1}^{k} \int_{D^{opt}_{i-1}}^{D^{opt}_i} {r_i^{opt}}^2 P_X(x)dx) =$$

הצבת $(\int_{D^{opt}_{i-1}}^{D^{opt}_i} xP_X(x)dx) = r_i^{opt}\,(\int_{D^{opt}_{i-1}}^{D^{opt}_i} P_X(x)dx)$ באיבר האמצעי:

$$= E(X^2) - 2\sum_{i=1}^{k} {r_i^{opt}}^2 \int_{D^{opt}_{i-1}}^{D^{opt}_i} P_X(x)dx) + \sum_{i=1}^{k} {r_i^{opt}}^2 \int_{D^{opt}_{i-1}}^{D^{opt}_i} P_X(x)dx) =$$

$$= E(X^2) - \sum_{i=1}^{k} {r_i^{opt}}^2 \int_{D^{opt}_{i-1}}^{D^{opt}_i} P_X(x)dx) =$$

$$= E(X^2) - \sum_{i=1}^{k} y^2 P_Y(y) = E(X^2) - E(Y^2)$$

נשים לב כי :

$$\mathrm{E}(X) = \int_{x\in X} xP_X(x)dx$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \int_{D^{opt}_{i-1}}^{D^{opt}_i} xP_X(x)dx) = \sum_{i=1}^{k} r_i^{opt} \int_{D^{opt}_{i-1}}^{D^{opt}_i} P_X(x)dx) = \sum_{i=1}^{k} yP_Y(y) = E(Y)$$

לכן גם $E(X)^2 = E(Y)^2$

לכן $E(X)^2 - E(Y)^2 = 0$

לכן

$$E(X^2) - E(Y^2) =$$

$$= E(X^2) - E(X)^2 + E(Y)^2 - E(Y^2) = VAR(X) - VAR(Y)$$

4) a. בהינתן רמות ההחלטה נמצא ביטוי אופטימלי לרמות הייצוג:

על מנת לעשות זאת נפתור את המשוואה הבאה:

$$\frac{\partial}{\partial\theta_l}\frac{1}{N}\sum_{l=1}^{k}\sum_{i=d_{l-1}+1}^{d_l}(x_i-\theta_l)^2=0$$

$$\sum_{i=d_{l-1}+1}^{d_l}\frac{\partial}{\partial\theta_l}(x_i-\theta_l)^2=0$$

$$-2\sum_{l=1}^{k}\sum_{i=d_{l-1}+1}^{d_l}(x_i-\theta_l)=0$$

$$\sum_{i=d_{l-1}+1}^{d_l}x_i=\sum_{i=d_{l-1}+1}^{d_l}\theta_l$$

$$\frac{\sum_{i=d_{l-1}+1}^{d_l}x_i}{\sum_{i=d_{l-1}+1}^{d_l}1}=\theta_l$$

בסה"כ קיבלנו שרמות הייצוג הן ממוצע חשבוני של האיברים בתוך כל אינטרוול .

b. נשתמש בנתון ש- N מחלק את K ללא שארית ובעובדה שמדובר בבעיה שאינה רציפה לכן נקבע שבכל אינטרוול יהיו $\frac{N}{K}$ איברים. ובאופן פורמלי:

$$d_0=0$$

$$d_1=\frac{N}{K}$$

$$d_2=2\frac{N}{K}$$

$$\vdots$$

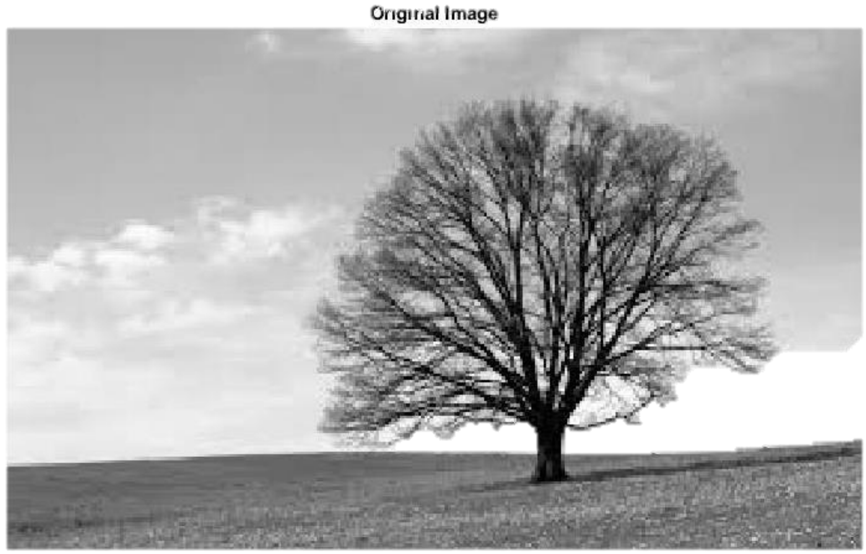
$$d_i=i\frac{N}{K}$$

$$\vdots$$

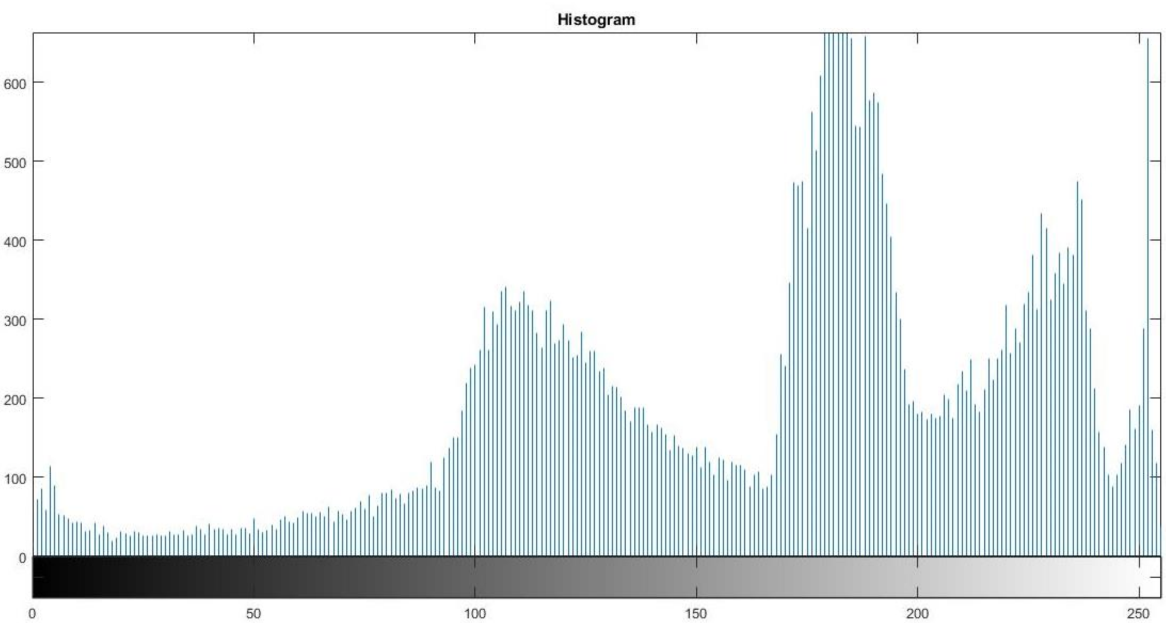
$$d_k=\mathrm{N}$$

חלק MATLAB :

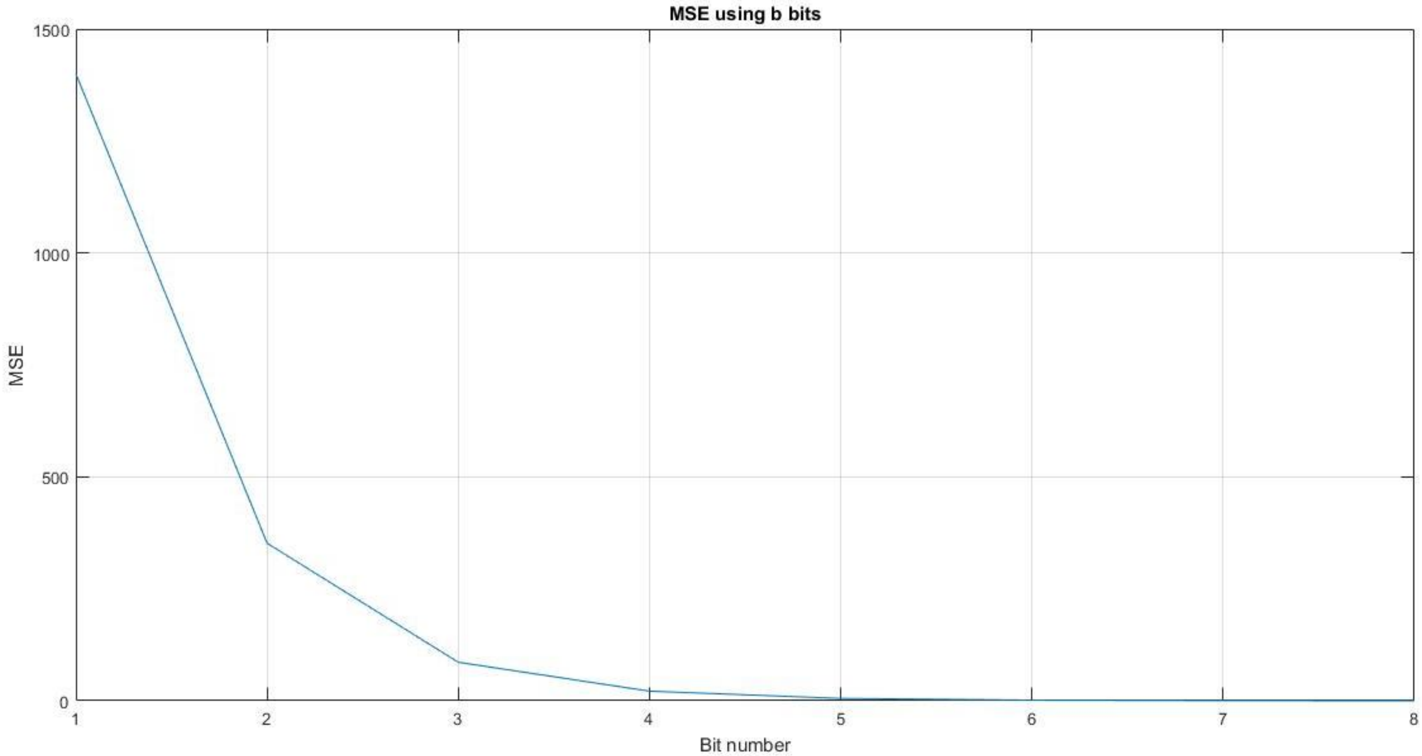
1). התמונה בה נשתמש בשאלה:



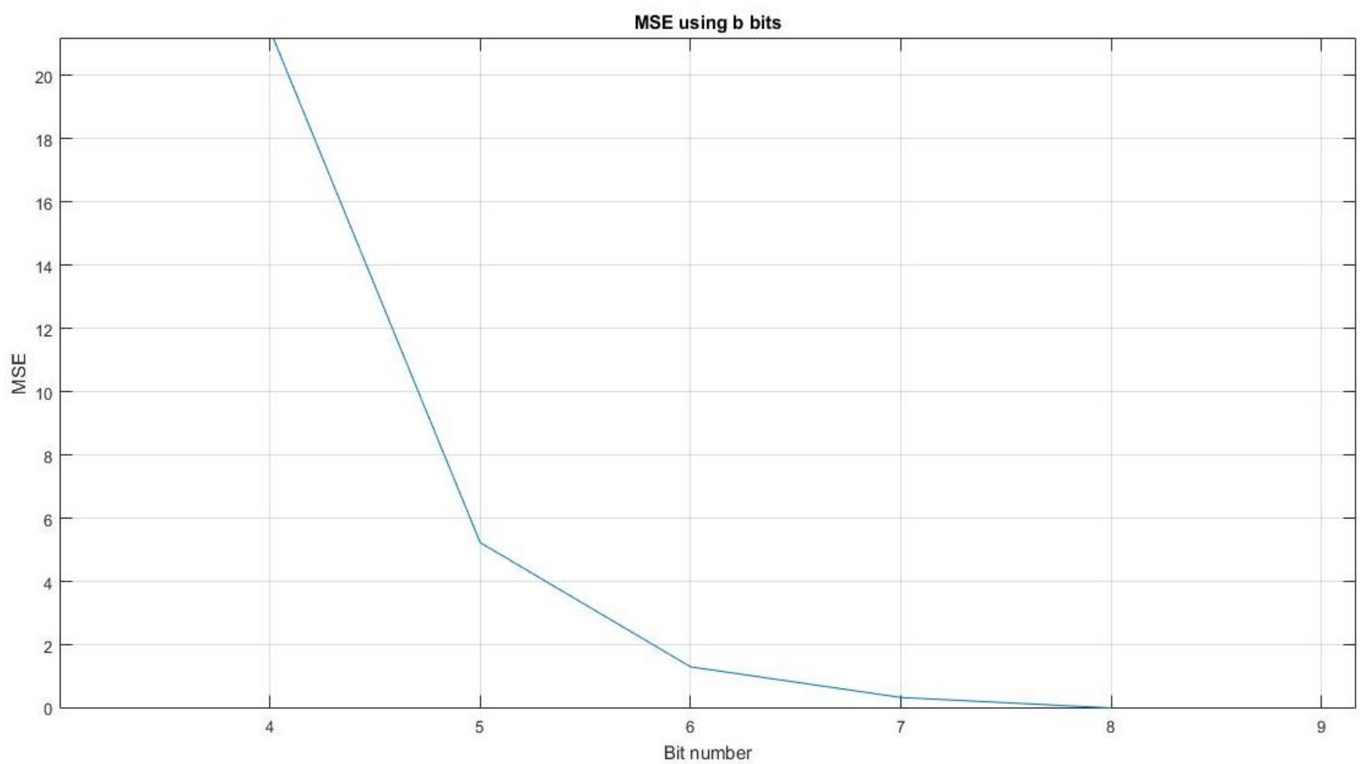
היסטוגרמה של גווני התמונה:



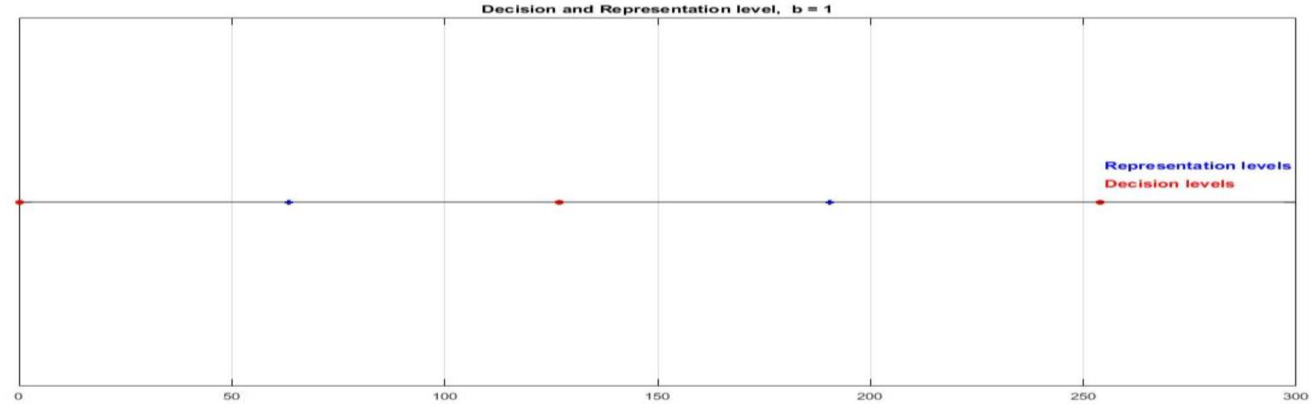
2. a. לאחר הפעלת קוונטיזר יוניפרמי נציג את MSE כתלות במספר הביטים b שבעזרתם התמונה המיוצגת:

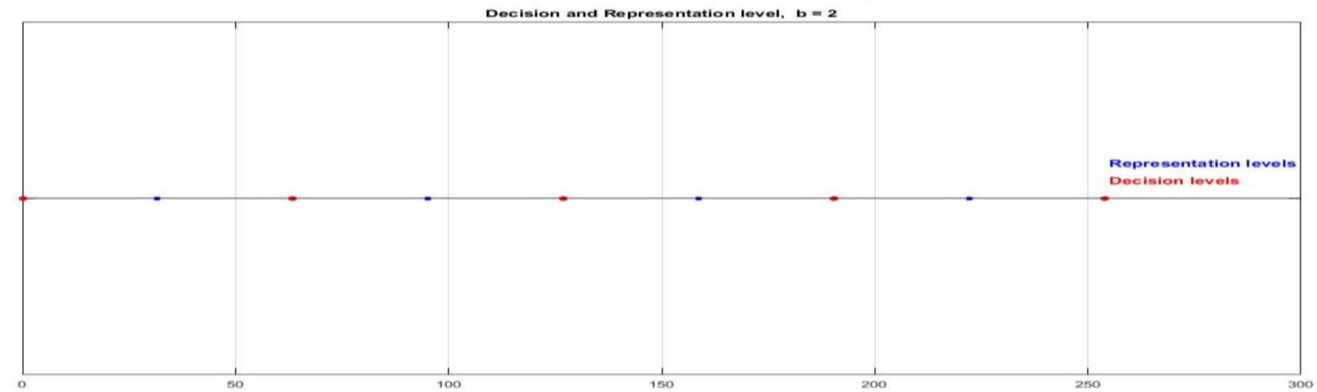


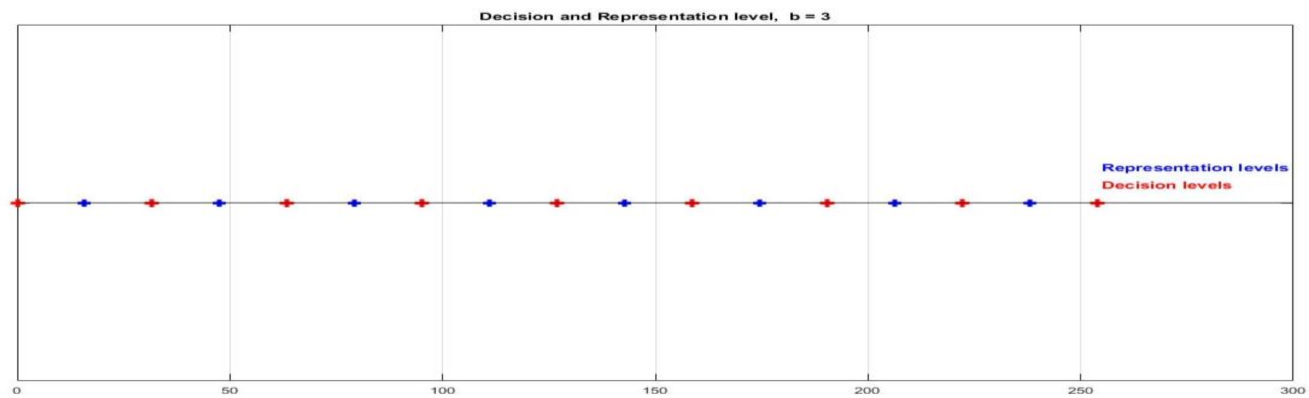
הסתכלות ממוקדת על ביטים 4-8:

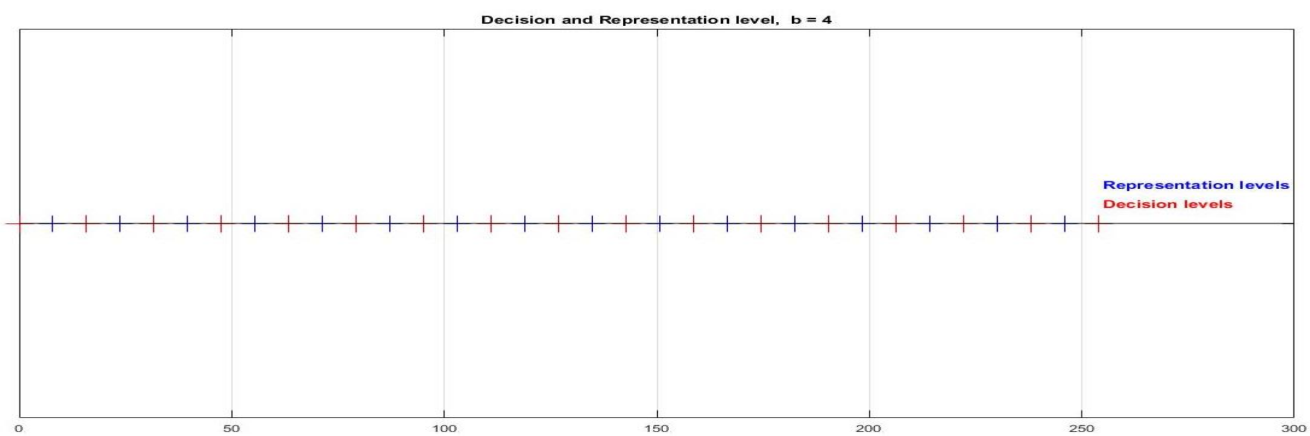


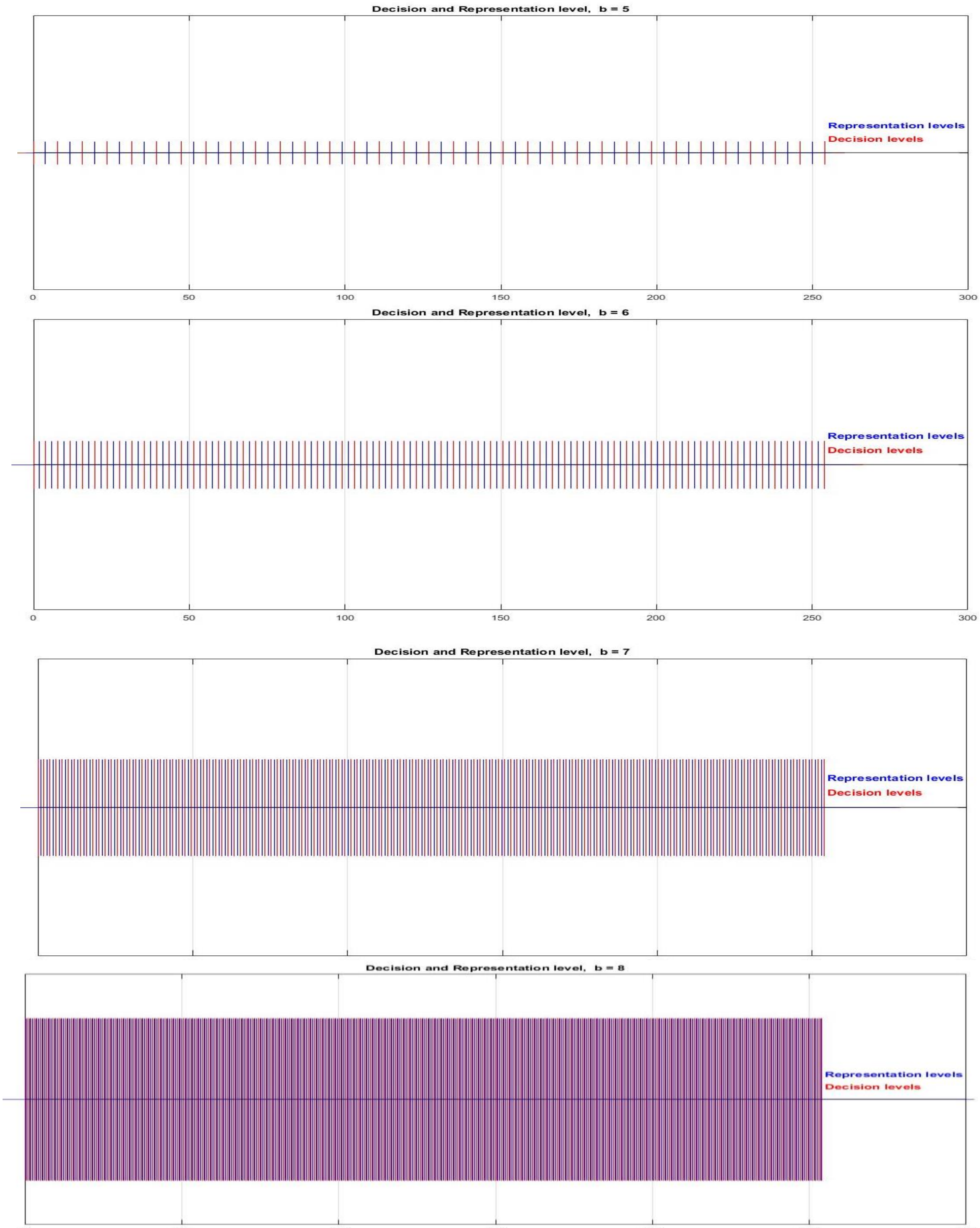
b. הסתכלות על רמות ייצוג ורמות החלטה עבור מס' ביטים שונה:





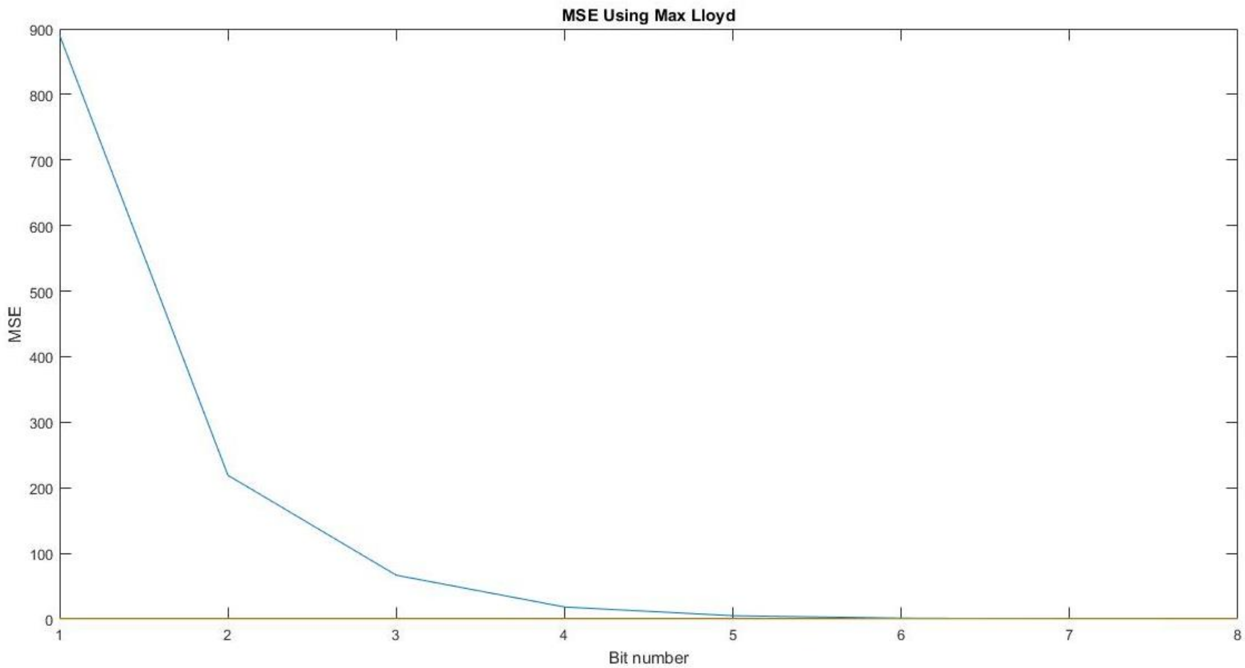




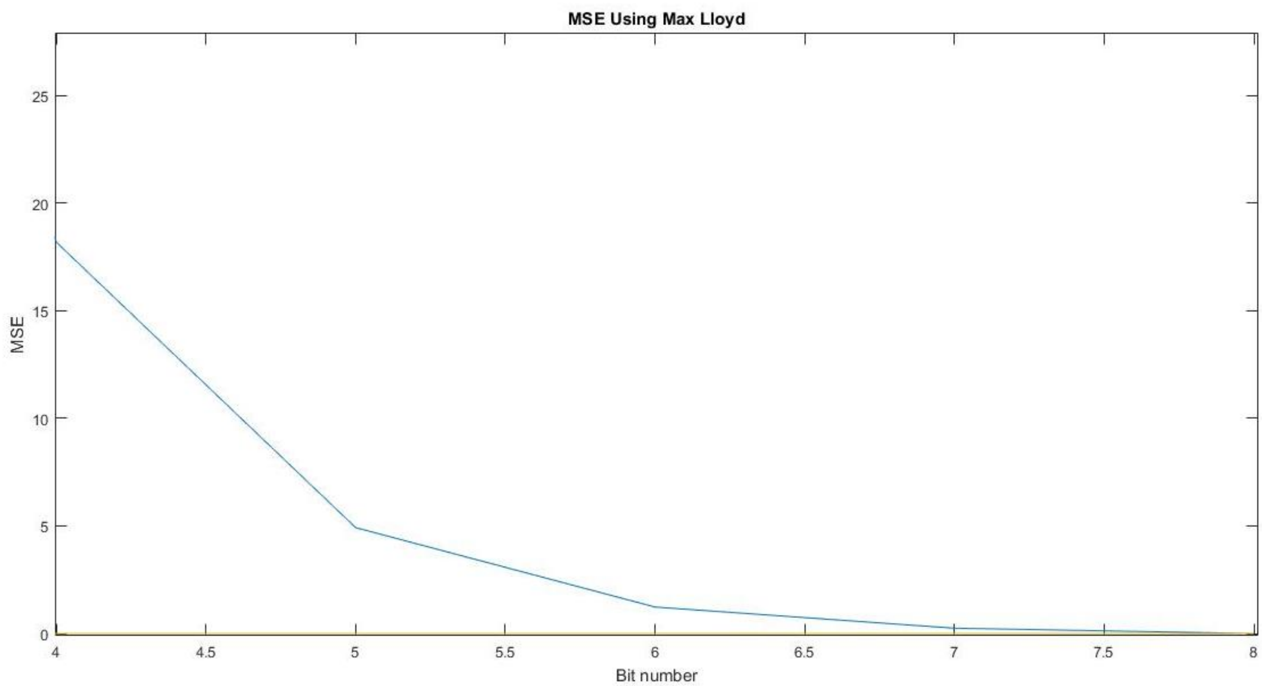


Decision and Representation level, b = 5
Representation levels
Decision levels
0
50
100
150
200
250
300
Decision and Representation level, b = 6
Representation levels
Decision levels
0
50
100
150
200
250
300
Decision and Representation level, b = 7
Representation levels
Decision levels
Decision and Representation level, b = 8
Representation levels
Decision levels
0
50
100
150
200
250
300

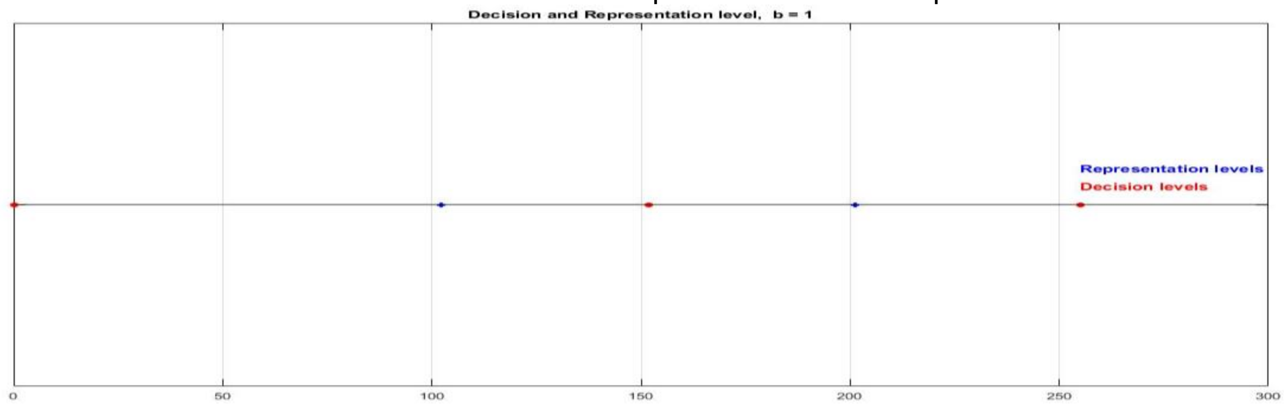
3.a. לאחר הפעלת אלגוריתם מקס-לויד נציג את MSE כתלות במספר הביטים b שבעזרתם התמונה המיוצגת:

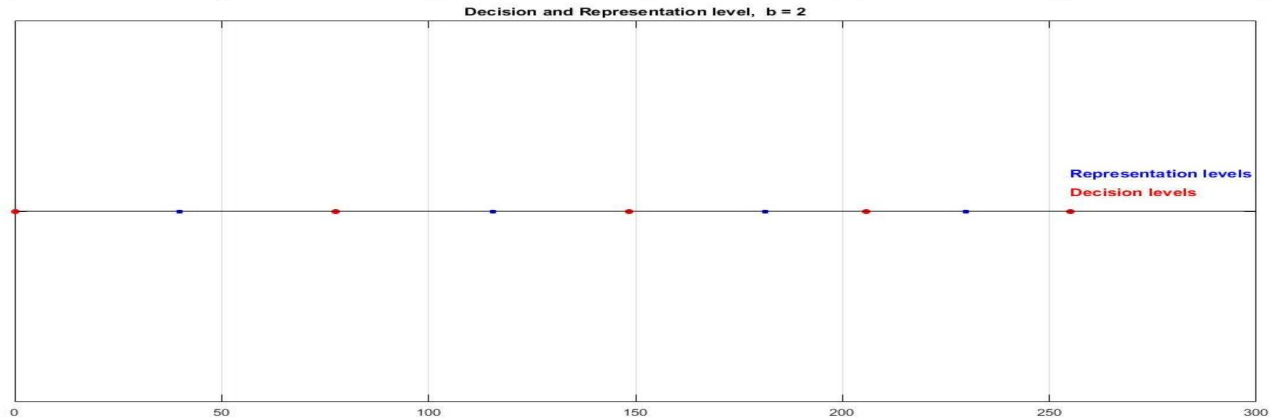


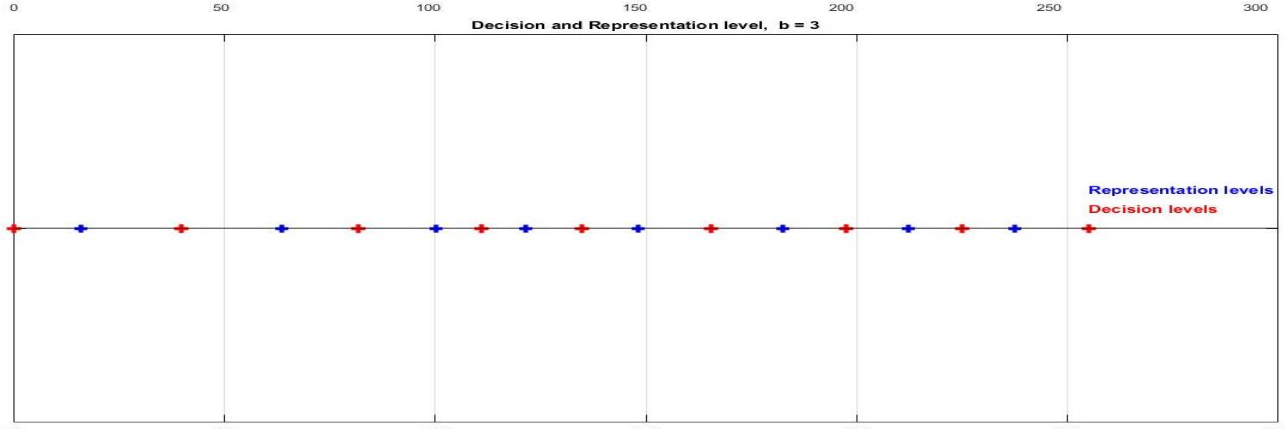
הסתכלות מקרוב על שימוש ב- 4-8 ביטים:

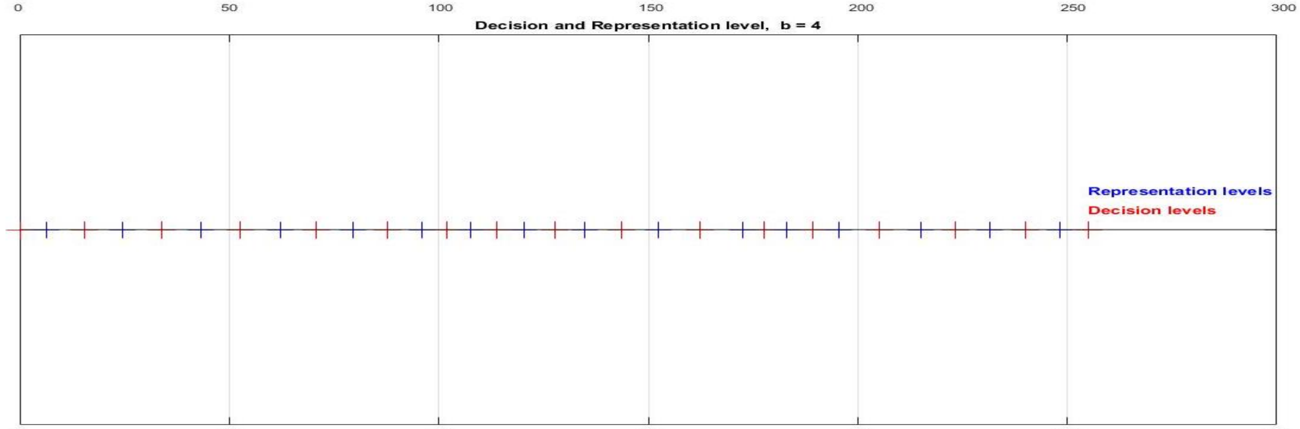


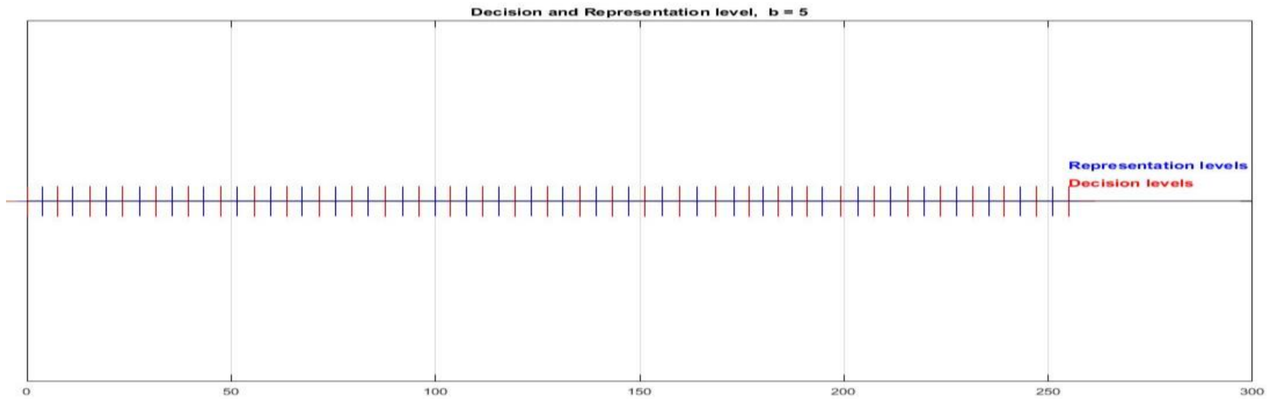
b. רמות ייצוג ורמות החלטה שנקבעו בעזרת אלגוריתם מקס לויד כתלות במספר הביטים שבהם נעה שימוש:

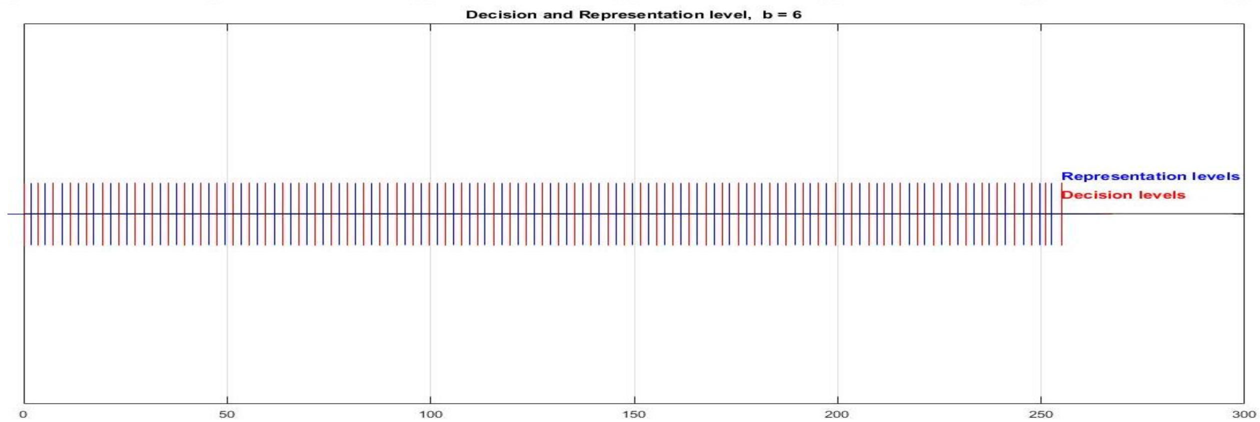


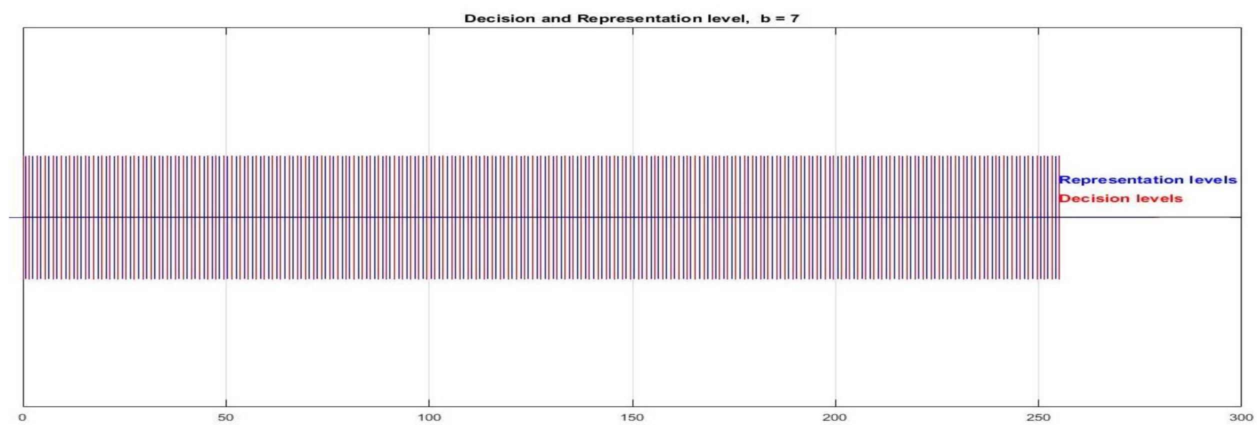


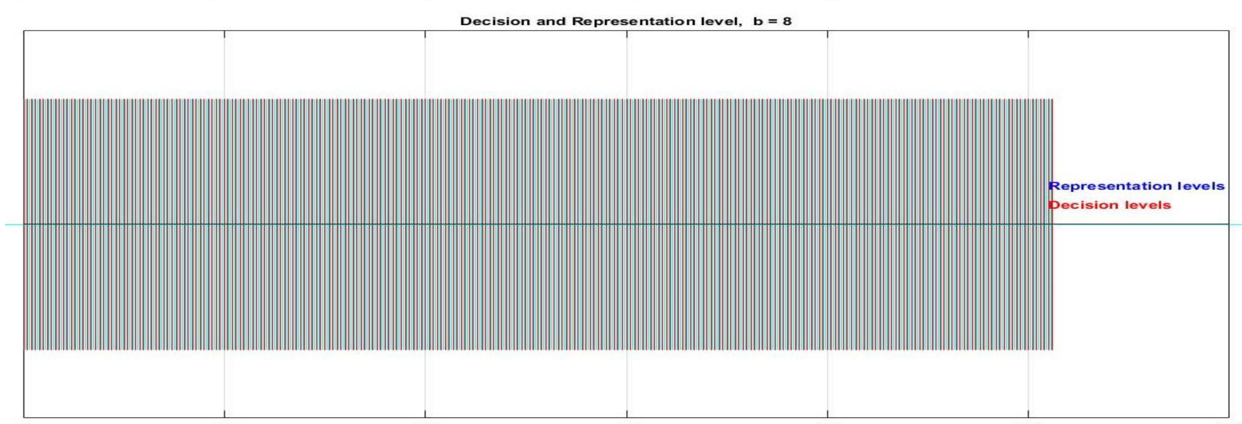




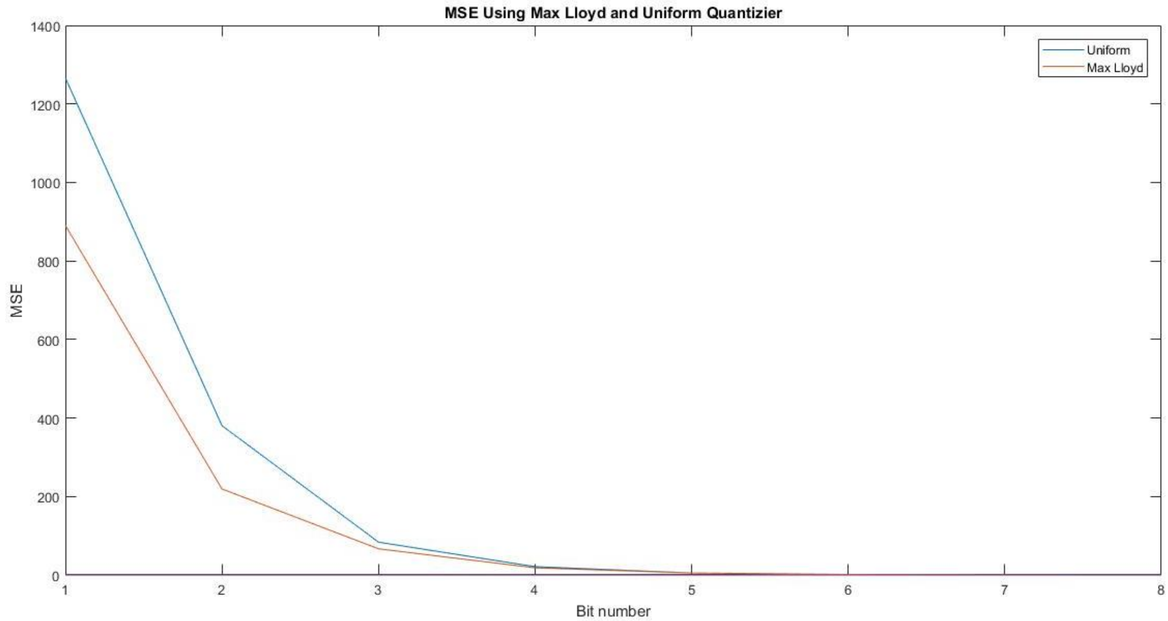

Decision and Representation level, b = 5
Representation levels
Decision levels
0
50
100
150
200
250
300


Decision and Representation level, b = 6
Representation levels
Decision levels
0
50
100
150
200
250
300

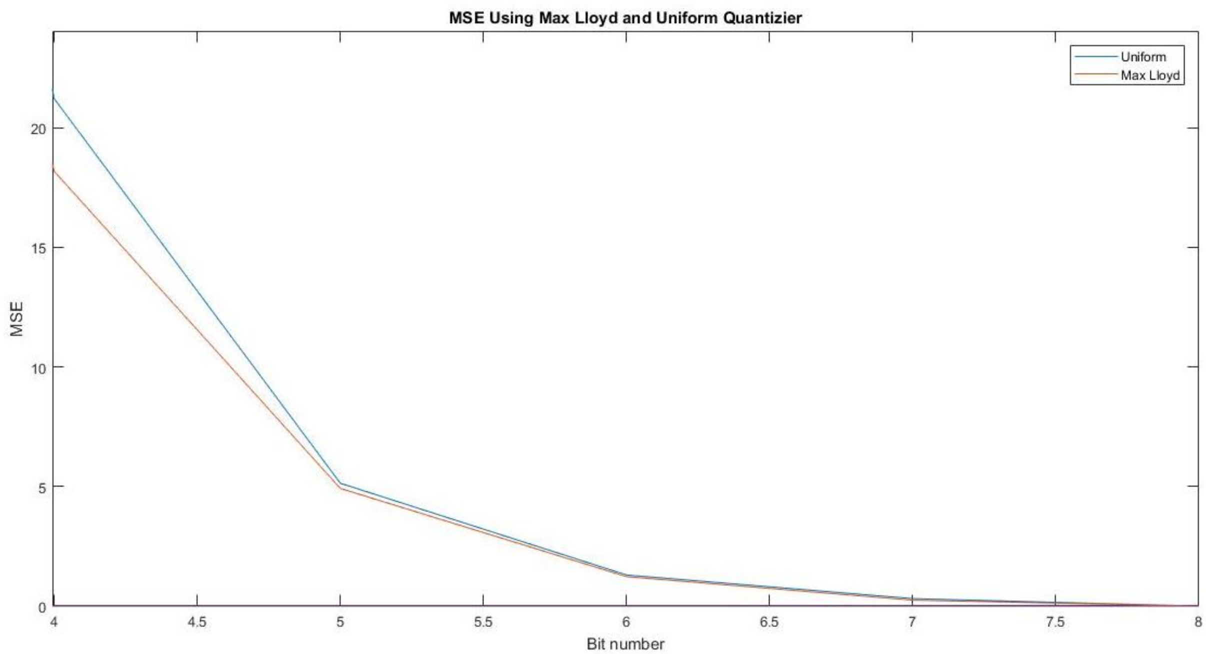

Decision and Representation level, b = 7
Representation levels
Decision levels
0
50
100
150
200
250
300


Decision and Representation level, b = 8
Representation levels
Decision levels
0
50
100
150
200
250
300

c. כעת נשווה בין התוצאות שקיבלנו עבור הקוונטייזר היוניפורמי לבין תוצאות האופטימיזציה:

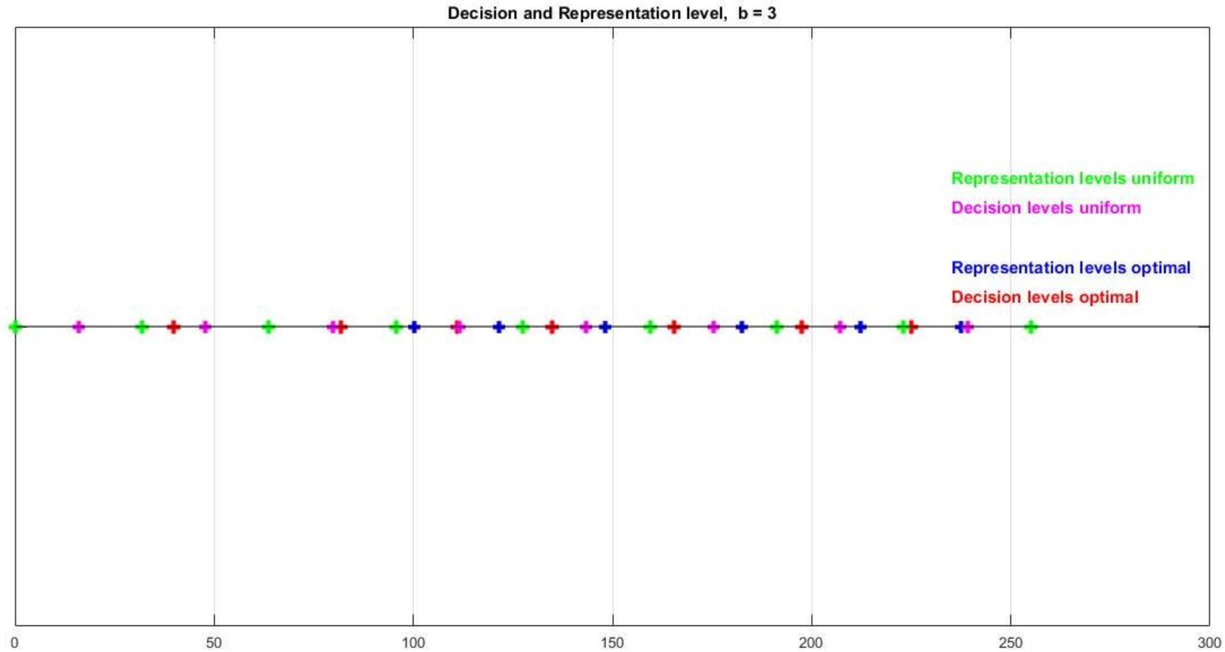


נסתכל מקרוב על 4-8:



בהשוואה זו ניתן לראות כי האופטימיזציה שנעשתה מורידה באופן קונסיסטנטי את התוחלת של השגיאה הריבועית. בנוסף, ככל שמספר הביטים יותר קטן השינוי בשגיאה גדול יותר.

השוואה בין רמות החלטה ורמות ייצוג בין קוונטייזר יוניפורמי לבין הרמות לאחר אופטימיזציה



בהשוואה זו ניתן לראות כי לאחר אופטימיזציה רמות הייצוג וההחלטה צפופות יותר בין 100-240 בהתאם להיסטוגרמה של התמונה. כך קורה גם עבור מספר ביטים שונה, דוגמה זו ניתנה כי קל יותר להבחין בהבדלים במקרה של $b = 3$.