שאלה 3)

א) לפי הגדרה משתנה מקרי בדיד הוא משתנה המקבל ערכים ממספר בן-מניה של ערכים ,כיוון שהערכים ש-Y מקבל הם r_i ל $1 \leq \mathrm{i} \leq \mathrm{K}$ כמובן שהטווח הוא בן מניה לכן Y משתנה בדיד לפי ההגדרה.

$$P_Y(y) = P(x\epsilon[D_{i-1}, D_i]) = \int_{D_{i-1}}^{D_i} P_X(x)dx$$

בנוסף הגדרה זאת של $P_Y(y)$ מקיימת את התנאי הבא:

$$\sum_{i=1}^{k} \int_{D_{i-1}}^{D_i} P_X(x)dx = \int_{x\in X} P_X(x)dx = 1$$

ב)

$$\sum_{i=1}^{k} \int_{D^{opt}{}_{i-1}}^{D^{opt}{}_i} \left(x - r_i^{opt}\right)^2 P_X(x)dx =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} (\int_{D^{opt}{}_{i-1}}^{D^{opt}{}_i} x^2 P_X(x)dx$$

$$- 2\sum_{i=1}^{k} \int_{D^{opt}{}_{i-1}}^{D^{opt}{}_i} x r_i^{opt} P_X(x)dx + \sum_{i=1}^{k} \int_{D^{opt}{}_{i-1}}^{D^{opt}{}_i} r_i^{opt\,2} P_X(x)dx) =$$

הצבת $(\int_{D^{opt}{}_{i-1}}^{D^{opt}{}_i} xP_X(x)dx) = r_i^{opt}\ (\int_{D^{opt}{}_{i-1}}^{D^{opt}{}_i} P_X(x)dx)$ באיבר האמצעי:

$$= E(X^2) - 2\sum_{i=1}^{k} r_i^{opt\,2} \int_{D^{opt}{}_{i-1}}^{D^{opt}{}_i} P_X(x)dx) + \sum_{i=1}^{k} r_i^{opt\,2} \int_{D^{opt}{}_{i-1}}^{D^{opt}{}_i} P_X(x)dx) =$$

$$= E(X^2) - \sum_{i=1}^{k} r_i^{opt\,2} \int_{D^{opt}{}_{i-1}}^{D^{opt}{}_i} P_X(x)dx) =$$

$$= E(X^2) - \sum_{i=1}^{k} y^2 P_Y(y) = E(X^2) - E(Y^2)$$

נשים לב כי :

$$\mathrm{E}(X) = \int_{x \in X} x P_X(x) dx$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \int_{D^{opt}_{i-1}}^{D^{opt}_{i}} x P_X(x) dx) = \sum_{i=1}^{k} r_i^{opt} \int_{D^{opt}_{i-1}}^{D^{opt}_{i}} P_X(x) dx) = \sum_{i=1}^{k} y P_Y(y) = E(Y)$$

לכן גם $E(X)^2 = E(Y)^2$

לכן $E(X)^2 - E(Y)^2 = 0$

לכן

$E(X^2) - E(Y^2) =$

$$= E(X^2) - E(X)^2 + E(Y)^2 - E(Y^2) = VAR(X) - VAR(Y)$$