שאלה 1

יהי L שפה ח"ה מעל Σ כלשהי אזי קיים $n\in\mathbb{N}$ כך שלכל $z\in L$ כך ש $|z|\geq n$

מתקיים כי קיים פירוק למילה z מהצורה $z=uvwxy$, $u,v,w,x,y\in\Sigma^*$

כך שמתקיימים התנאים:

- $|vwx|\leq n$
- $|vx|\geq 1$
- לכל $i\in\mathbb{N}$ מתקיים $uv^iwx^iy\in L$

לפני שאוכיח את המשפט אני אוכיח למה עזר:

למה עזר: יהי דקדוק חסר הקשר בצורה הנורמלית של חומסקי, G, ~~[illegible]~~ ועבור מילה z שנגזרת מהדקדוק מתקיים כי גובה עץ הגזירה של המילה הוא לפחות $\lceil\log_2|z|\rceil+1$.

ניסוח שקול: עבור עץ גזירה של דקדוק G בגובה h מתקיים כי מילות החזית של העץ, z, מקיימות $|z|\leq 2^{h-1}$

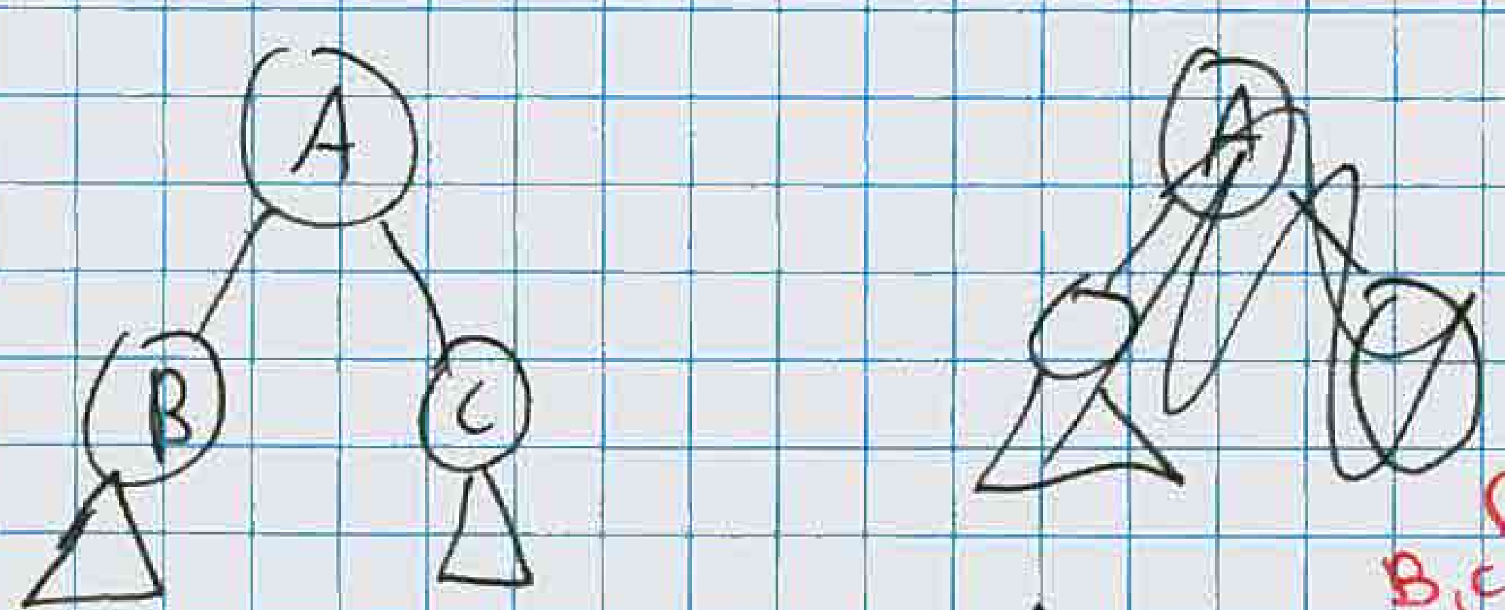
נוכיח באינדוקציה:

בסיס: עבור ~~[illegible]~~ עץ גזירה בגובה 1 מתקיים שהוא נראה כך שכן בצורה הנורמלית של חומסקי הכללים שגוזרים טרמינל הם מהצורה $A\to a$ $A\in V, a\in\Sigma$

כלומר מילות החזית של עץ בגובה 1 הן באורך $|z|=1 \leq 1 = 2^{1-1}$

צעד: נניח כי לכל עץ בגובה קטן או שווה ל-h הטענה מתקיימת ונוכיח עבור עץ בגובה $h+1\geq 2$. נסתכל על הגזירה הראשונה שמופעלת, היא חייבת להיות מהצורה $A\to BC$ שכן הדקדוק הוא בצורה הנורמלית של חומסקי וכן גובה העץ חסום לפחות ב-2

כלומר העץ נראה כך:



נשים לב כי הגובה של תתי העצים שמושרשים ב B,C הם לכל היותר h. ולכן

לא נכון להפריד הכל אם $B,C\notin\Sigma$

לפי הנחת האינדוקציה המילה שנגזרת מתת העץ שמושרש ב B, b, מקיימת כי $|b|\leq 2^{h-1}$

וגם המילה שנגזרת מתת העץ שמושרש ב C, נקרא לה c, מקיימת $|c|\leq 2^{h-1}$. המילה שנגזרת מהעץ שמושרש ב A נגזרת היא bc והיא מקיימת

$$|bc|\leq|b|+|c|\leq 2^{h-1}+2^{h+1}=2\cdot 2^{h-1}=2^h$$

כלומר מתקיים את הטענה

כעת נעבור להוכחת למת הניפוח.

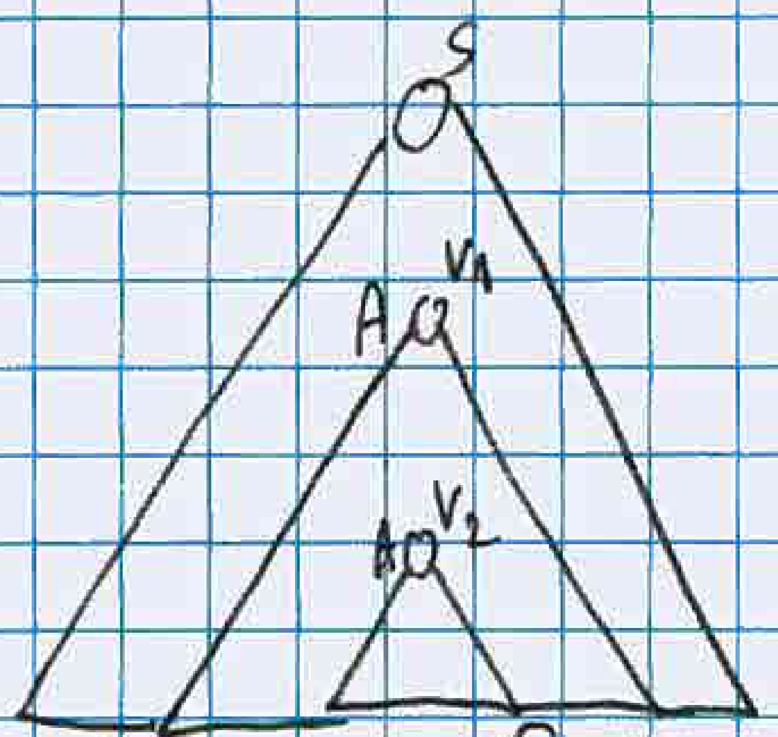
עבור שפה ח"ה L, ניתן ליצור דקדוק בצורה הנורמלית של חומסקי עבור $L/\{\varepsilon\}$ (מתייחס ל-ε בנפרד). כאשר נקבל את הדקדוק $G=(V,T,P,S)$ בצורה הנורמלית של חומסקי.

נסמן ב- $k=|V|$ מספר המשתנים, ונבחר את $n=2^k$, ~~[illegible]~~

~~[illegible]~~

כעת עבור G ו- $z\in L$ וגם $n\le|z|$ כאשר $|z|\ge 2^k$ מתקיים, לפי הטענה שהוכחנו כי גובה עץ הגזירה עבור המילה הזו לפחות $k+1=\log_2(2^k)+1$, ולכן קיים מסלול מהשורש לעלה שאורכו לפחות $k+1$ כלומר הוא עובר לפחות ב- $k+2$ צמתים כך שהצומת האחרון הוא עלה ולכן מסלול זה עובר לפחות $k+1$ צמתים פנימיים שהם משתנים של הדקדוק.

נלך במסלול זה מהעלה אל השורש ונעצור בפעם הראשונה שראינו משתנה פעמיים, מובטח לנו שקיים משתנה כזה שכן יש לנו k משתנים ואנו עוברים על לפחות $k+1$ משתנים. נקרא למשתנה זה A. נסמן את הצומת הראשון שפגשנו בו את A ב- v_2 ואת הצומת השני שראינו בו את A נסמן ב- v_1.



נקרא למילה הנגזרת מ- v_2 ~~[illegible]~~ שורשו w ולפי משפט (***) מתקיים $A\Rightarrow^* w$.

בנוסף מתקיים כי v_2 הוא תת עץ של v_1 ולכן לפי משפט המילה הנגזרת של v_2 היא תת מילה של המילה הנגזרת של תת העץ ששורשו v_1, כלומר קיימים $v,x\in T^*$ כך ש- $A\Rightarrow^* vwx$. בנוסף ~~[illegible]~~ משתנה A נמצא לכל אורך תת העץ של v_2 הנגזר ולכן גם מתקיים כי $A\Rightarrow^* vAx$ (**).

בנוסף העץ ששורשו הוא v_1 הוא תת עץ של העץ ששורשו S ולכן לפי משפט המילה הנגזרת של v_1 היא תת מילה של המילה הנגזרת של S כאשר קיימים $u,y\in T^*$ כך ש- $S\Rightarrow^* uvwxy$ וגם מתקיים כי $S\Rightarrow^* uAy$ (*) (כאשר S במקום לגזור את תת העץ של v_1).

נראה כי הפירוק $z=uvwxy$ מקיים את התנאים של הלמה בדף הבא:

1) $|vwx| \le n$ - vwx היא מילה המתקבלת ~~...~~ מתת העץ ששורשו V_1.
לפי הנבחר V_1 מקיים כי הגובה של תת עץ זה הינו לכל היותר $k+1$ שכן
זה הקודקוד הראשון מהעלה שלנו בפעם הראשונה ~~...~~ שחוזר פעמיים.
ולכן לפי טענת העזר שהוכחנו מתקיים כי $|vwx| \le 2^{k+1-1} = 2^k = n$ ולכן תנאי זה מתקיים.

2) $|vx| \ge 1$ - ~~...~~ נבחין כי הקודקוד V_1 גם גוזר $B,C \in V$ שכן לא ייתכן להיות
~~...~~ שעבור הקודקוד V_1 הופעל כלל $A \to a$ שכן V_2 הוא תת עץ שלו. לכן
~~...~~ עבור הקודקוד V_1 הופעל הכלל $A \to BC$ וכעת יש שתי אפשרויות
או שהקודקוד V_2 שייך לתת עץ ששורשו C ולכן B גוזר לפחות ~~...~~ אות טרמינלית
אחת ולכן $|v| \ge 1$, או ש-V_2 שייך לתת עץ ששורשו B ולכן C גוזר לכל הפחות
אות טרמינלית ולכן $|x| \ge 1$, ובסה"כ $|vx| \ge 1$.

3) לכל $i \in N$ $uv^iwx^iy \in L$.
נוכיח ~~...~~ את הטענה כי $S \Rightarrow^* uv^iAx^iy$ באינדוקציה!
בסיס: עבור $i=0$ מתקיים לפי (*) כי $S \Rightarrow^* uAy$ ולכן הטענה נכונה. עבור $i=0$.
צעד: נניח כי ~~...~~ הטענה נכונה עבור $j < i$ ונוכיח עבור i
לפי הנחת האינדוקציה מתקיים כי

$$S \Rightarrow^* uv^{i-1}Ax^{i-1}y$$

בנוסף לפי (**) מתקיים $A \Rightarrow^* vAx$ ולכן:

$$S \Rightarrow^* uv^{i-1}Ax^{i-1}y \Rightarrow^* uv^{i-1}vAxx^{i-1}y = uv^iAx^iy$$

כעת עבור כל $i \in N$, לפי הטענה מתקיים כי

$$S \Rightarrow^* uv^iAx^iy \Rightarrow^* uv^iwx^iy$$

לפי (***) $A \Rightarrow^* w$

כלומר $uv^iwx^iy \in L$ ~~...~~ לכל $i \in N$.

* לגבי ה-ε מהגדרה, מתקיים כי $|V| \ge 0$ ולכן ה-n שבחרנו $n = 2^k \ge 1$ ~~...~~ ומתקיים
הטענה כי $|\varepsilon| = 0 < 1 \le n$ ולכן ... לה קשר.

מצוין! :)
19/20

מספר ת.ז.:

שאלה 2

נניח ש-L רגולרית היא מקיימת את למת הניפוח לשפות רגולריות, כלומר קיים n כך שעבור כל $z \in L$ כך ש- $|z| \geq n$ קיים פירוק $z = uvw$ כך ש-

- $|uv| \leq n$
- $|v| \geq 1$
- לכל i: $uv^iw \in L$

נבחר, עבור כל מילה $z \in L$ וגם $|z| \geq n$ קיים פירוק $z = uvw$ כך ש- $|v| \geq 1$ וגם $uv^iw \in L$. כלומר כל המילים w שייכות ל-L ולכן קיים להם פירוק שבכל הן בהכרח מקיימות $|w| < n$ (גם קיימות מילים כאלו). כלומר ~~[illegible]~~ עבור כל $u \in L'$ מתקיים $|u| < n$.

נגדיר את ~~[illegible]~~

$$L_n = \{ w \in \Sigma^* \mid |w| < n \}$$

מתקיים כי L_n סופית שכן $|L_n| = \sum_{i=0}^{n-1} |\Sigma|^i$ שזה מספר סופי.

בנוסף ניתן לראות כי $L' \subseteq L_n$ ולכן נקבל $|L'| \leq |L_n|$ כלומר $|L'|$ ~~[illegible]~~ בהכרח מספר סופי. ~~[illegible]~~ לכן לפי משפט מההרצאה כל שפה סופית היא רגולרית ולכן מניחים ש- L' היא סופית ולכן היא רגולרית.

10/10

שאלה 3

א) נראה כי המודל החדש שקול למודל האוטומט סופי דטרמיניסטי.

$\Leftarrow$: נניח כי לכל אוטומט A' במודל החדש, קיים אוטומט A כך $L(A)=L(A')$. נשים לב כי האוטומט A' הוא בעצם אוטומט אי-דטרמיניסטי, ולמדנו בהרצאה שבהינתן אוטומט אי-דטרמיניסטי A' ניתן לבנות את האוטומט A (שהוא אוטומט דטרמיניסטי) כך ש-A הוא אס"ד כך ש-$L(A)=L(A')$, ולכן לכל A' אוטומט במודל החדש קיים אס"ד A כך ש-$L(A)=L(A')$

$\Rightarrow$: נניח כי לכל אס"ד A, קיים אוטומט A' במודל החדש כך ש- $L(A)=L(A')$

בהינתן A אס"ד כך ש $A=(Q,\Sigma,q_0,\delta,F)$ נבנה את A' כך ש-$A'=(Q,\Sigma,q_0,\delta',F)$ כך ש-δ' מוגדרת כך:

$$\delta'(q,\sigma)=\{\delta(q,\sigma)\} \qquad \forall q\in Q \quad \forall \sigma\in\Sigma$$

האוטומט A' הוא א"ד ללא מעברי ε, נראה שהוא אכן שייך למודל החדש. מתקיים כי לכל $q\in Q$:

$$\left|\bigcup_{\sigma\in\Sigma}\delta'(q,\sigma)\right| \underset{1}{\leq} |\Sigma|\cdot 1=|\Sigma|$$

(1) לכל $\sigma\in\Sigma$ מתקיים כי $|\delta'(q,\sigma)|=1$ וזה נכון ישירות מהגדרת δ', ~~...~~ $\leq$ מכיוון שיכול להיות שישנן איחודים נוספים לאותו מצב, ולכן זה בסדר לפי הגדרה ישר.

אין צורך, ראיתם את התשובה הסופית.

צ"ל כי $L(A)=L(A')$. לשם כך נוכיח את הטענה $\hat{\delta}'(q_0,w)=\{\hat{\delta}(q_0,w)\}$ לכל $w\in\Sigma^*$. נוכיח באינדוקציה על אורך המילה:

בסיס: $|w|=0$ כלומר $w=\varepsilon$, מתקיים כי $\hat{\delta}'(q_0,\varepsilon)=\{q_0\}$ לפי הגדרת המורחבת לפונקציה δ' (אין מעברי ε - ל-δ' לא קיימים מעברי ε לפי הגדרתה). וגם $\hat{\delta}(q_0,\varepsilon)=q_0$ שזה לפי הגדרת $\hat{\delta}$ כלומר $\hat{\delta}'(q_0,w)=\{\hat{\delta}(q_0,w)\}$ עבור $|w|=0$.

צעד: נניח הכל

צעד: נניח כי הטענה נכונה עבור מילים $w\in\Sigma^*$ $n\le|w|$ ונוכיח עבור $|w|=n+1\ge1$

הוכחה: נכתוב את $w=x\sigma$ כאשר $x\in\Sigma^*$, $\sigma\in\Sigma$. מתקיים

$$\hat\delta'(q_0,w)\underset{w=x\sigma}{=}\hat\delta'(q_0,x\sigma)\underset{\text{לפי הגדרה } \hat\delta}{=}\bigcup_{q\in\hat\delta'(q_0,x)}\delta'(q,\sigma)=$$

$$\underset{|x|\le n \text{ לפי הנחת האינדוקציה}}{=}\delta'(\hat\delta(q_0,x),\sigma)\underset{\text{לפי הגדרה } \delta'}{=}\{\delta(\hat\delta(q_0,x),\sigma)\}\underset{\text{לפי הגדרה } \hat\delta}{=}\{\hat\delta(q_0,x\sigma)\}$$

$$\hat\delta'(q_0,x)=\{\hat\delta(q_0,x)\}$$

$$\underset{w=x\sigma}{=}\{\hat\delta(q_0,w)\}$$

הוכחה לא נדרשה

לסיכום לכל $w\in\Sigma^*$ מתקיים $w\in L(A)\Leftrightarrow$

$\hat\delta(q_0,w)\in F\Leftrightarrow$ ~~לפי~~ לפי הגדרת קבלה עבור דס"ד

$\hat\delta'(q_0,w)=\{\hat\delta(q_0,w)\}\Leftrightarrow$ לפי מה שהוכחנו

$\hat\delta'(q_0,w)\cap F\neq\emptyset\Leftrightarrow\hat\delta(q_0,w)\in F$

$w\in L(A')\Leftrightarrow$ לפי הגדרת קבלה, עבור אס"ד

ולכן

$L(A)=L(A')$.

באופן כללי, המודל הזה שקול לדס"ד. בהרצאה הוכחנו כי דס"ד שקול לאוטומט אי דטרמיניסטי אס"ד עם מסעי ε ולכן המודל הנתון שקול למודלים המוכרים שמצגנו.

12/12

ג) לא יודע

חבל !!

0/8

המשך ←

המשך ←

שאלה 4

א) עבור $x,y\in\Sigma^*$ שקולים כי $xR_Ly \iff (\forall z\in\Sigma^*\ xz\in L \iff yz\in L)$

ב) ~~[illegible]~~ אם לכל $x,y\in\Sigma^*$ $xRy \Rightarrow xR'y$

ג) נכון. נפרד למקרים:

• אם $L\neq\Sigma^*$: אזי נבחר $L'=\Sigma^*$ מתקיים כי $L'\neq L$ וגם R_L מעדנת את $R_{L'}$.
ליחס $R_{L'}$ יש מחלקת שקילות אחת, A, והיא Σ^* כולה כאשר, קודם כל מתקיים כי איחוד ~~[illegible]~~ מחלקות השקילות של $R_{L'}$ נותן את Σ^* ובנוסף B במחלקת השקילות A של $R_{L'}$
כולה (שכן יש רק אחת) וגם אף אחת לא ריקה.
עבור $x,y\in A$ שקולים כי $x,y\in\Sigma^*$ כמובן ולכן ~~[illegible]~~ לכל $z\in\Sigma^*$ מתקיים כי $xz,yz\in\Sigma^*$
ולכן $xz\in L' \iff yz\in L'$ כלומר $xR_{L'}y$.
עתה נשים לב כי אם $L\neq\Sigma^*$ R_L מעדנת את $R_{L'}$ שכן

$$\forall x,y\in\Sigma^* \quad xR_Ly \Rightarrow x\in\Sigma^*\wedge y\in\Sigma^* \Rightarrow xR_{L'}y$$

כלומר עבור המקרה שבו $L\neq\Sigma^*$ ~~[illegible]~~ הטענה מתקיימת.

• אם $L=\Sigma^*$. אזי נבחר $L'=\emptyset$ מתקיים כי $L'\neq L$ וגם R_L מעדנת את $R_{L'}$.
ליחס $R_{L'}$ יש מחלקת שקילות אחת, A, והיא Σ^*. מתקיים כי במחלקות השקילות
של $R_{L'}$ כולה ואיחודן Σ^* וגם אף אחת מהן לא ריקה.
עבור $x,y\in A$ מתקיים כי כמובן $x,y\in\Sigma^*$ ולכן לכל $z\in\Sigma^*$ מתקיים כי $xz,yz\in\Sigma^*$
מכיוון ש $L'=\emptyset$ מתקיים ששום מילה לא שייכת אליה ובפרט $xz\notin L'$ וגם $yz\notin L'$ ולכן
מתקיים כי לכל $z\in\Sigma^*$ $xz\in L'\iff yz\in L'$ כלומר $xR_{L'}y$.
~~[illegible]~~ כמו כן, לכל $x,y\in\Sigma^*$ מתקיים

$$xR_Ly \Rightarrow x,y\in\Sigma^* \Rightarrow xR_{L'}y$$

~~[illegible]~~ כמו כן Σ^* ו- $\emptyset$ הן שפות רגולריות כפי שראינו בהרצאה ולכן
הוכחנו כי לכל שפה L קיימת שפה L' רגולרית כך ש $L\neq L'$ וגם R_L
מעדנת את ~~[illegible]~~ $R_{L'}$

ד) לא נכון

~~נניח בשלילה שהטענה נכונה. ונבחר את L להיות ... כי ... שפה רגולרית. ... לפי הטענה~~

נניח בשלילה שהטענה נכונה, נבחר את L להיות שפה רגולרית. לפי משפט נרוד אנחנו יודעים כי $index(R_L)$ סופי.

עם זאת, אנו יודעים שקיימת שפה לא רגולרית L' כך ש- R_L מעדן את $R_{L'}$, ולכן $index(R_L) \geq index(R_{L'})$ (שכן ל-$R_{L'}$ יש לכל היותר מס' מחלקות שקילות כמס' מחלקות השקילות של R_L שכן הוא מעדן אותו).

אבל מכיוון ש- $index(R_L)$ סופי, נסיק מכך כי גם $index(R_{L'})$ סופי ולפי משפט נרוד נקבל כי L' היא שפה רגולרית בסתירה לכך שהיא לא רגולרית
כלומר קיבלנו סתירה ולכן הטענה אינה נכונה.

שאלה 3

נניח בשלילה כי $L_\$$ רגולרית

א) לא נכון! השפות $\{a\}$, $\{b\}$, ~~[illegible]~~ רגולריות שכן הן ~~[illegible]~~ סופיות ולפי משפט הרגולריות השפות $\{a\}^*, \{b\}^*$ רגולריות שכן שפות רגולריות סגורות לאיטרציה.

כעת נגדיר את $L=\{a\}^*\{b\}^*$ מעל $\Sigma=\{a,b\}$ ולכן נקבל כי L רגולרית מסגירות שפות רגולריות לשרשור

$$L_\$ = \{x\$y : \exists\sigma\in\Sigma,\ x\sigma y\in L \wedge x,y\in\Sigma^* \wedge |x|=|y|\}$$

נגדיר את השפה L' מעל $\Sigma'=\{a,b,\$\}$ כך:

$$L' = \{a\}^*\{\$\}\{b\}^*$$

L' רגולרית כי $\{\$\}$ רגולרית כי היא סופית וגם מסגירות שפות רגולריות לשרשור.

נגדיר את L'' כך:

$$L'' = L_\$ \cap L' = \{a^n\$b^n : n\in N\}$$

L'' רגולרית שכן שפות רגולריות סגורות לחיתוך.

כעת נגדיר את ההומו' $h:\Sigma'\to\Sigma'^*$ שמוגדרת:

$h(a)=a$

$h(b)=b$

$h(\$)=\varepsilon$

ונגדיר כעת את L''' כך:

$$L'''=h(L'')$$

שמקיים כי $L'''=\{a^nb^n \mid n\in N\}$ אבל $\{a^nb^n \mid n\in N\}$ אינה רגולרית כפי שראינו

וזו סתירה לכך ש $L_\$$ רגולרית שכן כדי להגיע ל L''' השתמשנו בסגירות

טענה על שפות רגולריות.

נניח בשלילה כי $L_\$$ ח"ה

ב) לא נכון! נגדיר $L_{ab}=\{a^nb^n \mid n\in N\}$ כפי שראינו בהרצאה שפה זו ח"ה, נשים כי $\{c\}$, $\{d\}$ הן שפות ~~[illegible]~~ רגולריות שכן הן סופיות ולכן בפרט ח"ה לפי ההיררכיה של חומסקי!

בנוסף $\{c\}^*$ גם רגולרית שכן שפות רגולריות סגורות לאיטרציה ולכן ח"ה.

נגדיר את L שלנו להיות

$$L = L_{ab}\cdot\{d\}\cdot\{c\}^*$$

L שפה ח"ה כשרשור של שפות ח"ה שכן זו תכונת סגירות של שפות ח"ה.

נגדיר כעת את השפה $L'=\{a\}^*\{b\}^*\{c\}^*$ - זו שפה רגולרית שכן $\{a\}^*\{b\}^*$ הן רגולריות כפי שראינו בסעיף הקודם וגם $\{c\}^*$ רגולרית, ובנוסף שפות רגולריות סגורות לשרשור

ולכן L' רגולרית

במקום להבין צריך $L_\$$ הוא שמוחק את ה-$\$$

כעת נגדיר את השפה L''

$$L'' = L_\$ \cap L' = \{a^n b^n c^{2n} \mid n \in \mathbb{N}\}$$

הערה חשובה! אין לי זמן להסביר למה מגיעים לזה אבל בעיקרון זה בגלל שמנו את a ו-b בהתאם מילה ב-L ולכן זה מכניח שב-$L_\$$ נבחר מחרוזת רק שהמילה תהיה בתוך $\{a\}^*\{b\}^*\{a\}^*$.

L'' היא שפה ח"ה שכן הוכחנו למעלה כי $L_\$$ ח"ה וגם L' רגולרית ושפות ח"ה סגורות לחיתוך עם שפה רגולרית

נגדיר את ההומו' $h: \Sigma \to \Sigma^*$ כך:

$h(a) = a$
$h(b) = b$
$h(c) = cc$

ונגדיר את השפה $\tilde{L}$ כך:

$$\tilde{L} = h^{-1}(L'') = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

משמע כי $\tilde{L}$ ח"ה שכן שפות ח"ה סגורות להומומורפיזם הפוך, אולם השפה $\{~~a^n b^n~~ a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ אינה ח"ה כפי שראינו ולכן סתירה לאמור ש-$L_\$$ אינה ח"ה.

2/10

<u>שאלה 6</u>

א) נגדיר את R_Σ באינדוקציה:

בסיס: $r=\emptyset$ $r\in R_\Sigma$

$r=\varepsilon$ $r\in R_\Sigma$

$\forall\sigma\in\Sigma$ $r=\sigma$ $r\in R_\Sigma$

צעד: יהיו $r_1, r_2\in R_\Sigma$ ~~R_Σ ...~~ אז:

$r=(r_1+r_2)$ $r\in R_\Sigma$

5/5

$r=(r_1\cdot r_2)$ $r\in R_\Sigma$

$r=$ ~~...~~ (r_1^*) $r\in R_\Sigma$

ב) נכון. נגדיר דקדוק ח"ה $G=(\{S\},\Delta,P,S)$ כך ש-P מוגדר כך:

① $S\to(S+S)\mid(S\cdot S)\mid(S^*)$

יפה

② $S\to\sigma$ $\forall\sigma\in\Sigma$

③ $S\to\varepsilon\mid\emptyset$

10/10

טענה $L(G)=R_\Sigma$. נימוק:

$L(G)\subseteq R_\Sigma$: נשים לב שבכל שלב הגזירה של G מתאימים לגזירה שבה קיבלנו בגדרה אינדוקטיבית של R_Σ.

כאשר S מייצג ביטוי רגולרי. כאשר נגזר את S לביטוי רגולרי שהוא אחד מ σ ($\forall\sigma\in\Sigma$), ε, $\emptyset$ (כלל גזירה ③②)

או שהוא חיבור של שני ביטויים רגולריים כך שיש סוגריים שמקיפים אותם ~~...~~ $r=(r_1+r_2)$ או

שהוא שרשור של שני כאלו או שהוא איטרציה של ביטוי רגולרי ולכן ש... מתאים ~~...~~ לכלל גזירה ①.

ולכן כל מה ש-S מייצר הוא ביטוי רגולרי ולכן $L(G)\subseteq R_\Sigma$.

$R_\Sigma\subseteq L(G)$: מכיוון שהגדרנו R_Σ מוגדרת בצורה אינדוקטיבית אז לכל $r\in R_\Sigma$ יש נוסחת גזירה שהיא

סדרה של פעולות בנייה ~~...~~ או פעולות בסיסיות ולכן ניתן ~~...~~ לפרש סדרה זו של

גזירה. גזירה של G ולייצר את r ולכן $R_\Sigma\subseteq L(G)$.

מספר
ת.ז.: