להחזיר לתא מס' 06

עיבוד תמונות ואותות במחשב
236327

תרגיל: 4

הוגש ע"י:

שם	מספר סטודנט
נוגה בר	316258706
דביר פרי	300411659

בתאריך: 11.7.2017

שאלה 1

נראה כי שני אופרטרים LSI הם קומוטטיביים:

נסמן:

$$\mathrm{H}_{\mathrm{LSI}}^{1}=\begin{bmatrix} a_1 & a_N & a_{N-1} & \cdots & a_2 \\ a_2 & a_1 & a_N & & a_3 \\ a_3 & a_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_N & a_{N-1} & a_{N-2} & \dots & a_1 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{H}_{\mathrm{LSI}}^{2}=\begin{bmatrix} b_1 & b_N & b_{N-1} & \cdots & b_2 \\ b_2 & b_1 & b_N & & b_3 \\ b_3 & b_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ b_N & b_{N-1} & b_{N-2} & \dots & b_1 \end{bmatrix}$$

תחילה נחשב:

$$\mathrm{H}_{\mathrm{LSI}}^{1}\mathrm{H}_{\mathrm{LSI}}^{2}=\begin{bmatrix} a_1 & a_N & a_{N-1} & \cdots & a_2 \\ a_2 & a_1 & a_N & & a_3 \\ a_3 & a_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_N & a_{N-1} & a_{N-2} & \dots & a_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 & b_N & b_{N-1} & \cdots & b_2 \\ b_2 & b_1 & b_N & & b_3 \\ b_3 & b_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ b_N & b_{N-1} & b_{N-2} & \dots & b_1 \end{bmatrix}=$$

$\boxed{first\ row\ of\ \mathrm{H}_{\mathrm{LSI}}^{1}\ with\ first\ column\ \ of\ \mathrm{H}_{\mathrm{LSI}}^{2}}$

$\boxed{second\ row\ of\ \mathrm{H}_{\mathrm{LSI}}^{1}\ with\ second\ column\ \ of\ \mathrm{H}_{\mathrm{LSI}}^{2}}$

$$\begin{gathered}=a_1b_1+a_Nb_2+a_{N-1}b_3+\cdots+a_2b_N+a_2b_N+a_1b_1+a_Nb_2+\cdots+a_3b_{N-2}+\cdots \\ =N(a_1b_1+a_Nb_2+a_{N-1}b_3+\cdots+a_2b_N)\end{gathered}$$

נחשב את כפל המטריצות בסדר הפוך באותו אופן:

$$\mathrm{H}_{\mathrm{LSI}}^{2}\mathrm{H}_{\mathrm{LSI}}^{1}=\begin{bmatrix} b_1 & b_N & b_{N-1} & \cdots & b_2 \\ b_2 & b_1 & b_N & & b_3 \\ b_3 & b_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ b_N & b_{N-1} & b_{N-2} & \dots & b_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 & a_N & a_{N-1} & \cdots & a_2 \\ a_2 & a_1 & a_N & & a_3 \\ a_3 & a_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_N & a_{N-1} & a_{N-2} & \dots & a_1 \end{bmatrix}=$$

$$=a_1b_1+a_2b_N+\cdots+a_Nb_2+a_Nb_2+a_1b_1+\cdots+a_{N-1}b_3+\cdots=N(a_1b_1+a_2b_N+\cdots+a_Nb_2)$$

$$\Rightarrow N(a_1b_1+a_Nb_2+a_{N-1}b_3+\cdots+a_2b_N)=N(a_1b_1+a_2b_N+\cdots+a_Nb_2)$$

$$\Rightarrow \mathrm{H}_{\mathrm{LSI}}^{1}\mathrm{H}_{\mathrm{LSI}}^{2}=\mathrm{H}_{\mathrm{LSI}}^{2}\mathrm{H}_{\mathrm{LSI}}^{1}$$

שאלה 2

אופרטורי LSI מייצרים קונבולוציות, בנוסף ידוע לנו שקונבולוציות הן קומוטטיביות, ולכן נוכל לכתוב:

$$\mathrm{H}\{\varphi(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} w(\xi)\varphi(t-\xi)d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} w(t-\xi)\varphi(\xi)d\xi$$

נוכל להחזיר את אופרטור הגזירה לתוך האינטגרל מפני שהאינטגרל אינו תלוי ב- t:

$$D\big\{H\{\varphi(t)\}\big\} = D\left\{\int_{-\infty}^{\infty} w(t-\xi)\varphi(\xi)d\xi\right\} = \frac{d}{dt}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} w(\xi)\varphi(t-\xi)d\xi\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} w(\xi)\frac{d}{dt}\varphi(t-\xi)d\xi =$$

לפי כללי גזירה:

$$= \int_{-\infty}^{\infty} w(\xi)\cdot 1\cdot \varphi'(t-\xi)d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} w(\xi)\varphi'(t-\xi)d\xi = H\{\varphi'(t)\} = H\big\{D\{\varphi(t)\}\big\}$$

שאלה 3

a. נראה ש- DCT יוניטרית.

$$[DCT]^* \cdot [DCT] =$$

$$= \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{1}{N}} & \sqrt{\frac{1}{N}} & \dots & \sqrt{\frac{1}{N}} \\ \sqrt{\frac{2}{N}}\cos\left(\frac{\pi}{2N}\right) & \sqrt{\frac{2}{N}}\cos\left(\frac{3\pi}{2N}\right) & \dots & \sqrt{\frac{2}{N}}\cos\left(\frac{(2N-1)\cdot\pi}{2N}\right) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \sqrt{\frac{2}{N}}\cos\left(\frac{(N-1)\pi}{2N}\right) & \dots & \dots & \sqrt{\frac{2}{N}}\cos\left(\frac{(2N-1)\cdot(N-1)\pi}{2N}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{1}{N}} & \sqrt{\frac{2}{N}}\cos(\frac{\pi}{2N}) & \dots & \sqrt{\frac{2}{N}}\cos(\frac{(N-1)\pi}{2N}) \\ \sqrt{\frac{1}{N}} & \sqrt{\frac{2}{N}}\cos(\frac{3\pi}{2N}) & \dots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \sqrt{\frac{1}{N}} & \sqrt{\frac{2}{N}}\cos(\frac{(2N-1)\cdot\pi}{2N}) & \dots & \sqrt{\frac{2}{N}}\cos(\frac{(2N-1)\cdot(N-1)\pi}{2N}) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} N\cdot\left(\frac{1}{N}\right) & \sum_{n=1}^{N}\frac{\sqrt{2}}{N}\cos\left((2n-1)\cdot\frac{\pi}{2N}\right) & \dots & \sum_{n=1}^{N}\frac{\sqrt{2}}{N}\cos\left((2n-1)\cdot\frac{N\pi}{2N}\right) \\ \sum_{n=1}^{N}\frac{\sqrt{2}}{N}\cos\left((2n-1)\cdot\frac{\pi}{2N}\right) & \sum_{n=1}^{n=N}\frac{2}{N}\cos^2\left((2n-1)\cdot\frac{\pi}{2N}\right) & \dots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \sum_{n=1}^{N}\frac{\sqrt{2}}{N}\cos\left((2n-1)\cdot\frac{(N-1)\pi}{2N}\right) & \dots & \dots & \sum_{n=1}^{n=N}\frac{2}{N}\cos^2\left((2n-1)\cdot\frac{(N-1)\pi}{2N}\right) \end{bmatrix} =$$

נפתח את הסכומים שקיבלנו כאיברי המטריצה:

איבר באלכסון עבור k>1:

$$\sum_{n=1}^{N}\sqrt{\frac{2}{N}}\cos(\frac{\pi(2n-1)(k-1)}{2N})\sqrt{\frac{2}{N}}\cos(\frac{\pi(2n-1)(k-1)}{2N})$$

$$=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{N}(\cos\left(\frac{\pi(2n-1)(k-1)-\pi(2n-1)(k-1)}{2N}\right)+\cos\left(\frac{\pi(2n-1)(k-1)+\pi(2n-1)(k-1)}{2N}\right))$$

$$=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{N}(\cos\left(\frac{0}{2N}\right)+\cos\left(\frac{2\pi(2n-1)(k-1)}{2N}\right))$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}1+\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}cos\left(\frac{2\pi(2n-1)(k-1)}{2N}\right))=1+\frac{1}{N}\sum_{n=2}^{N}cos\left(\frac{\pi(2n-1)(k-1)}{N}\right)$$

$$=1+\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}cos\left(\frac{2nk\pi-2n\pi-k\pi+\pi}{N}\right)$$

$$=1+\frac{1}{2N}\sum_{n=1}^{N}e^{\frac{i(2nk\pi-2n\pi-k\pi+\pi)}{N}}+e^{\frac{-i(2nk\pi-2n\pi-k\pi+\pi)}{N}}$$

$$=1+\frac{1e^{(-k\pi+\pi)i}}{2N}\sum_{n=1}^{N}e^{\frac{i(2n\pi(k-1))}{N}}+\frac{1e^{(-k\pi+\pi)-i}}{2N}\sum_{n=1}^{N}e^{\frac{-i(2n\pi(k-1))}{N}}=1+0+0=1$$

עבור k=1 מתקיים: $\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)^2\cdot N=1$

נעבור לסכומים מחוץ לאלכסון:

מקרה בו k≠l , k>1, l>1

$$\sum_{n=1}^{N}\sqrt{\frac{2}{N}}\cos(\frac{\pi(2n-1)(k-1)}{2N})\sqrt{\frac{2}{N}}\cos(\frac{\pi(2n-1)(l-1)}{2N})$$

$$=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{N}(\cos\left(\frac{\pi(2n-1)(k-1)-\pi(2n-1)(l-1)}{2N}\right)+\cos\left(\frac{\pi(2n-1)(k-1)+\pi(2n-1)(l-1)}{2N}\right))$$

$$=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{N}(\cos\left(\frac{\pi(2n-1)((k-l)}{2N}\right)+\cos\left(\frac{\pi(2n-1)(k+l-2)}{2N}\right))$$

$$=\frac{1}{2N}\sum_{n=1}^{N}e^{\frac{i\pi(2n-1)((k-l)}{2N}}+e^{\frac{i\pi(2n-1)(k+l-2)}{2N}}+e^{\frac{-i\pi(2n-1)((k-l)}{2N}}+e^{\frac{-i\pi(2n-1)(k+l-2)}{2N}}=0$$

מקרה בו k≠l, k=1 or l=1:

$$\frac{1}{\sqrt{N}}\cdot\sqrt{\frac{2}{N}}\sum_{n=1}^{n=N}\cos\left((2n-1)\cdot\frac{(k-1)\pi}{N}\right)$$

$$=\frac{1}{2N}\sum_{n=1}^{N}e^{\frac{i(2nk\pi-2n\pi-k\pi+\pi)}{N}}+e^{\frac{-i(2nk\pi-2n\pi-k\pi+\pi)}{N}}=\frac{1e^{(-k\pi+\pi)i}}{2N}\sum_{n=1}^{N}e^{\frac{i(2n\pi(k-1))}{N}}+\frac{1e^{(-k\pi+\pi)-i}}{2N}\sum_{n=1}^{N}e^{\frac{-i(2n\pi(k-1))}{N}}=0+0=0$$

עבור *k=1* הסכום יוצא זהה ולכן גם במקומות האלה במטריצה מתקבל 0.

$$[DCT]^{*}\cdot[DCT]=\begin{bmatrix}1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 1 & & \vdots\\ \vdots & & \ddots & 0\\ 0 & \dots & 0 & 1\end{bmatrix}=I$$

$$[DCT]^{\cdot}[DCT]^{*}=$$

$$= \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{1}{N}} & \sqrt{\frac{2}{N}}\cos(\frac{2\pi}{2N}) & \dots & \sqrt{\frac{2}{N}}\cos(\frac{(N-1)\pi}{2N}) \\ \sqrt{\frac{1}{N}} & \sqrt{\frac{2}{N}}\cos(\frac{3\cdot 2\pi}{2N}) & \dots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \sqrt{\frac{1}{N}} & \sqrt{\frac{2}{N}}\cos(\frac{(2N-1)\cdot 2\pi}{2N}) & \dots & \sqrt{\frac{2}{N}}\cos(\frac{(2N-1)\cdot N\pi}{2N}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{1}{N}} & \sqrt{\frac{1}{N}} & \dots & \sqrt{\frac{1}{N}} \\ \sqrt{\frac{2}{N}}\cos(\frac{2\pi}{2N}) & \sqrt{\frac{2}{N}}\cos(\frac{3\cdot 2\pi}{2N}) & \dots & \sqrt{\frac{2}{N}}\cos(\frac{(2N-1)\cdot 2\pi}{2N}) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \sqrt{\frac{2}{N}}\cos(\frac{N\pi}{2N}) & \dots & \dots & \sqrt{\frac{2}{N}}\cos(\frac{(2N-1)\cdot N\pi}{2N}) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} N\cdot(\frac{1}{N}) & \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{\sqrt{n}}cos((2n-1)\cdot\frac{2\pi}{2N}) & \dots & \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{\sqrt{n}}cos((2n-1)\cdot\frac{N\pi}{2N}) \\ \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{\sqrt{n}}cos((2n-1)\cdot\frac{2\pi}{2N}) & \sum_{n=1}^{n=N}\frac{2}{N}\cos^2((2n-1)\cdot\frac{2\pi}{2N}) & \dots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{\sqrt{n}}cos((2n-1)\cdot\frac{N\pi}{2N}) & \dots & \dots & \sum_{n=1}^{n=N}\frac{2}{N}\cos^2((2n-1)\cdot\frac{N\pi}{2N}) \end{bmatrix} =$$

מתקבלת בדיוק אותה מטריצה ולכן:

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

b. מטריצת DCT אינה החלק הממשי של DFT. השורה הראשונה של DCT אינה וקטור של $\frac{1}{\sqrt{N}}$ כפי שהיא במטריצת DFT. ניתן לשים לב כי האיברים של ה-DCT הם הזזות בחצי פאזה של האיברים ב-DFT למעט האיברים בעמודה הראשונה. ניתן להציג את האיברים של DCT (ללא כפל בקבוע וללא התייחסות לשורה הראשונה) בתור $Real\{e^{\left(-\frac{\pi i}{N}\left(n-\frac{1}{2}\right)(k-1)\right)}\}$ ואילו החלק הממשי של ה- DFT הוא $Real\{e^{\left(-\frac{\pi i}{N}(n-1)(k-1)\right)}\}$.

c. נלכסן את המטריצה R הנתונה.

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 + \alpha & -\alpha & 0 \\ -\alpha & \lambda - 1 & -\alpha \\ 0 & -\alpha & \lambda - 1 + \alpha \end{vmatrix} = ((\lambda - 1 + \alpha)[(\lambda - 1)(\lambda - 1 + \alpha) - \alpha^2] = \cdots$$
$$= 2\alpha^3 + \alpha^2\lambda - \alpha^2 - 2\alpha\lambda^2 + 4\alpha\lambda - 2\alpha - \lambda^3 + 3\lambda^2 - 3\lambda + 1$$

$$=> \begin{cases} \lambda_1 = 1 + \alpha & v_1 = (1, -2, 1) \\ \lambda_2 = 1 - \alpha & v_2 = (1,0,-1) \\ \lambda_3 = 1 - 2\alpha & v_3 = (1,1,1) \end{cases}$$

ננרמל את הוקטורים ונצור מטריצה יוניטרית שמלכסנת את R הנתונה:

$$\mathrm{U} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

d. מטריצת *DCT* עבור *N=3*:

$$DCT = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

ניתן לראות כי הוקטורים מהם מורכבות שתי המטריצות זהים. כלומר הוקטורים שפורשים את המרחב עבור *DCT* ועבור *U* מצאנו הם זהים אך מסודרים בסדר הפוך.

שאלה 4 :

$$f_x(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}}e^{\frac{-(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}},f_n(n)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}}e^{\frac{-n^2}{2\sigma_n^2}}$$

$$y\sim N(\mu_x,\sigma_x^2+\sigma_n^2)\ \to f_y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_n^2+\sigma_x^2)}}e^{\frac{-(y-\mu_x)^2}{2(\sigma_n^2+\sigma_x^2)}}$$

הוכחה :

$$f_y(y)=f_x*f_n(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f_n(y-x)f_x(x)\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}}e^{\frac{-(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}}e^{\frac{-(y-x)^2}{2\sigma_n^2}}dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}}e^{\frac{-(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}+\frac{-(y-x)^2}{2\sigma_n^2}}dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}}e^{\frac{-(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}+\frac{-(y-x)^2}{2\sigma_n^2}}dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}}e^{\frac{-(\sigma_n^2(x-\mu_x)^2+\sigma_x^2(y-x)^2)}{2\sigma_x^2\sigma_n^2}}dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}}e^{\frac{-(x^2(\sigma_n^2+\sigma_x^2)-2x\left(\sigma_x^2y+\sigma_n^2\mu_x\right)+\sigma_x^2y^2+{\mu_x}^2\sigma_n^2)}{2\sigma_x^2\sigma_n^2}}dx$$

נחלק מונה ומכנה באקספוננט ומחוץ ב$(\sigma_n^2+\sigma_x^2)$:

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_n^2+\sigma_x^2)}}\frac{1}{\sqrt{2\pi\frac{\sigma_x^2\sigma_n^2}{(\sigma_n^2+\sigma_x^2)}}}e^{\frac{-(x^2-2x\frac{\left(\sigma_x^2y+\sigma_n^2\mu_x\right)}{(\sigma_n^2+\sigma_x^2)}+\frac{\sigma_x^2y^2+{\mu_x}^2\sigma_n^2}{(\sigma_n^2+\sigma_x^2)})}{\frac{2\sigma_x^2\sigma_n^2}{(\sigma_n^2+\sigma_x^2)}}}dx$$

נשלים לריבוע באקספוננט ונקבל :,

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_n^2+\sigma_x^2)}}\frac{1}{\sqrt{2\pi\frac{\sigma_x^2\sigma_n^2}{(\sigma_n^2+\sigma_x^2)}}}e^{\frac{-(\left(x-\frac{\left(\sigma_x^2y+\sigma_n^2\mu_x\right)}{(\sigma_n^2+\sigma_x^2)}\right)^2-\frac{\left(\sigma_x^2y+\sigma_n^2\mu_x\right)^2}{(\sigma_n^2+\sigma_x^2)}+\frac{\sigma_x^2y^2+{\mu_x}^2\sigma_n^2}{(\sigma_n^2+\sigma_x^2)})}{\frac{2\sigma_x^2\sigma_n^2}{(\sigma_n^2+\sigma_x^2)}}}dx$$

אחרי הפרדת האקספוננטים והוצאה מחוץ לאינטגרל של החלק שלא תלוי בא:

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_n^2 + \sigma_x^2)}} e^{\frac{-(y-\mu_x)^2}{2(\sigma_n^2+\sigma_x^2)}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi \frac{\sigma_x^2\sigma_n^2}{(\sigma_n^2+\sigma_x^2)}}} e^{\frac{\left(x-\frac{(\sigma_x^2 y+\sigma_n^2\mu_x)}{(\sigma_n^2+\sigma_x^2)}\right)^2}{\frac{2\sigma_x^2\sigma_n^2}{(\sigma_n^2+\sigma_x^2)}}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_n^2 + \sigma_x^2)}} e^{\frac{-(y-\mu_x)^2}{2(\sigma_n^2+\sigma_x^2)}}$$

המעבר האחרון הוא מכיוון שהביטוי בתוך האינטגרל הוא פונקצית צפיפות של x ולכן שווה 1

שאלה 5

תחילה נפתור את בעיית מזעור השגיאה כדי למצוא את H האופטמלית:

$$E\{(x-\hat{x})^T(x-\hat{x})\} = E\left\{\big(x-H(x+n)\big)^T\big(x-H(x+n)\big)\right\} =$$

$$= E\{x^Tx - x^TH(x+n) - (x+n)^TH^Tx + (x+n)^TH^TH(x+n)\} =$$

מלינאריות התוחלת:

$$= E\{x^Tx\} - E\{x^THx + x^THn\} - E\{x^TH^Tx + n^TH^Tx\} + E\{(x+n)^TH^TH(x+n)\} =$$

נחשב הביטויים האלו תוך שימוש בעובדה ש-n ו-x הם בלתי תלויים והם משתנים רנדומיים בעלי תוחלת 0:

$$\mathrm{E}\{n^TH^Tx\} = HE\{n^Tx\}H^TE\{n^T\}E\{x\} = H^T\cdot\bar{0}\cdot\bar{0} = 0$$

$$\mathrm{E}\{x^THn\} = HE\{x^T\}E\{n\} = H\cdot\bar{0}\cdot\bar{0} = 0$$

כעת נחזור לביטוי שאנחנו רוצים לחשב, נשתמש בזהות $x^Tx = trace\{xx^T\}$ שנלמדה בהרצאה:

$$= E\{trace\{xx^T\}\} - E\{trace\{Hxx^T\}\} - E\{trace\{H^Txx^T\}\} + E\{trace\{H(x+n)(x+n)^TH^T\}\} =$$

נשתמש בקומוטטיביות של אופרטורים לינאריים ובהגדרה של R_x כפי שנלמד בהרצאה:

$$= trace\{E\{xx^T\}\} - trace\{E\{Hxx^T\}\} - trace\{E\{H^Txx^T\}\} + trace\{E\{H(x+n)(x+n)^TH^T\}\} =$$

$$= trace\{R_x\} - trace\{HR_x\}\} - trace\{H^TR_x\} + trace\{HR_{x+n}H^T\} =$$

נגזור לפי H ונשווה ל-0:

$$\frac{\partial}{\partial H}[trace\{R_x\} - trace\{HR_x\}\} - trace\{H^TR_x\} + trace\{HR_{x+n}H^T\}]$$
$$= -\frac{\partial}{\partial H}trace\{HR_x\}\} - \frac{\partial}{\partial H}trace\{H^TR_x\} + \frac{\partial}{\partial H}trace\{HR_{x+n}H^T\} = 0$$

נשתמש בזהויות גזירה שהיו בהרצאה R_{x+n} היא מטריצה אלכסונית כי n ו-x רנדומיים:

$$-2R_x + H\cdot 2R_{x+n} = 0$$

$$=> H = R_xR_{x+n}^{-1}$$

לאחר שמצאנו את H האופטימלית נעבור להראות כי $\mathrm{E}\{y^Te\} = 0$ בהתאם למה שנדרש בתרגיל:

$$\mathrm{E}\{y^Te\} = E\{(x+n)^T\big(x-H(x+n)\big)\} = E\{(x+n)^Tx - (x+n)^TH(x+n)\} =$$

$$E\{(x+n)^Tx\} - E\{(x+n)^TH(x+n)\} = E\{x^Tx\} + E\{n^Tx\} - E\{(x+n)^TH(x+n)\} =$$

נשתמש שוב בזהות $x^Tx = trace\{xx^T\}$ ובעובדה $E\{n^Tx\} = 0$:

$$E\{trace\{xx^T\} + 0 - E\{trace\{H(x+n)(x+n)^T\} = trace\{E\{xx^T\} - trace\{HE\{(x+n)(x+n)^T\} =$$

שימוש בקומוטטיביות של אופרטורים לינאריים ושימוש בהגדרת R_x, בנוסף להצבת H שמצאנו קודם:

$$trace\{R_x\} - trace\{HR_x\} = trace\{R_x\} - trace\{R_xR_{x+n}^{-1}R_{x+n}\} = trace\{R_x\} - trace\{R_xI\} =$$

$$trace\{R_x\} - trace\{R_x\} = 0$$

שאלה 6

נחשב תחילה את העקבה של R_x:

נשתמש בעובדה ש-x הוא וקטור רנדומי שבחירת איברי בלתי תלויה:

$$E\{x_i\} = 0 => E\{x_i x_j\} = E\{x_i\}E\{x_j\} = 0$$

נשתמש בתכונה זו:

$$\mathrm{R}_x = E\{xx^T\} = \begin{bmatrix} E(x_i{}^2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E(x_i{}^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E(x_i{}^2) \end{bmatrix} = I\sigma^2$$

$$trace\{R_x\} = N\sigma^2$$

נחשב את העקבה של $\mathrm{R}_{y'}$:

$$\mathrm{R}_{y'} = E\{Ux(Ux)^*) = E\{Uxx^TU^*\} = E\{U\}\begin{bmatrix} E\{x_1^2\} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E\{x_2^2\} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E\{x_N^2\} \end{bmatrix}E\{U^*\} =$$

$$U\begin{bmatrix} E(x_i{}^2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E(x_i{}^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E(x_i{}^2) \end{bmatrix}U^T = UR_xU^* = UI\sigma^2U^*$$

$$trace\{R_{y'}\} = trace\{UR_xU^*\} = trace\{UI\sigma^2U^*\} = \sigma^2 trace\{UU^*\} = \sigma^2 trace\{I\} = N\sigma^2$$

ניתן לראות כי מתקיים: $trace\{R_x\} = trace\{R_{y'}\} = N\sigma^2$ כפי שהתבקשנו להראות בשאלה.