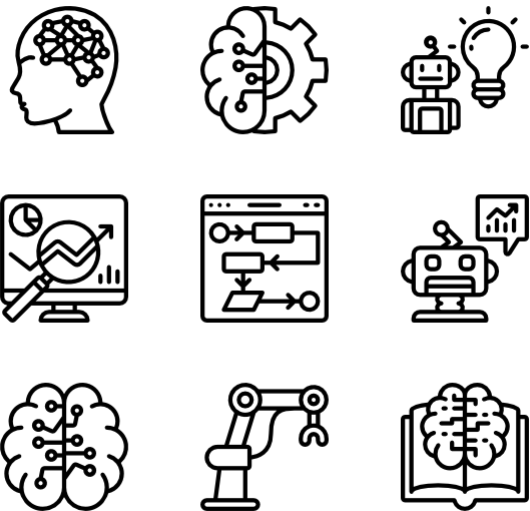


Computer Science for Practicing Engineers

Tree và Binary Search Tree



TS. Huỳnh Bá Diệu

Email: dieuhb@gmail.com

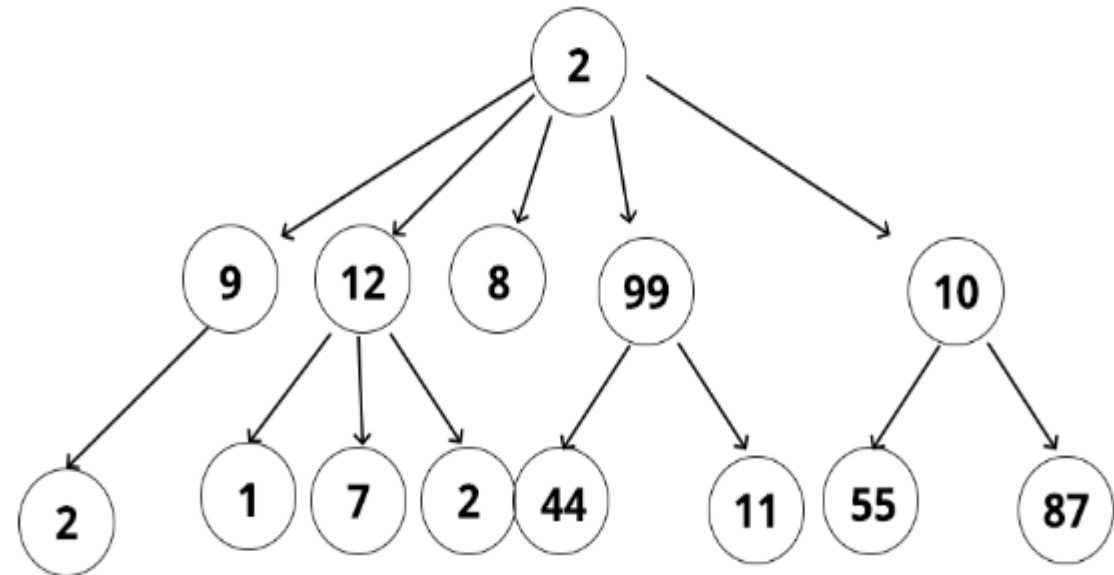
Phone: 0914146868

Nội dung

1. Cây và cây nhị phân
2. Cây nhị phân tìm kiếm
3. Các ứng dụng của cây nhị phân



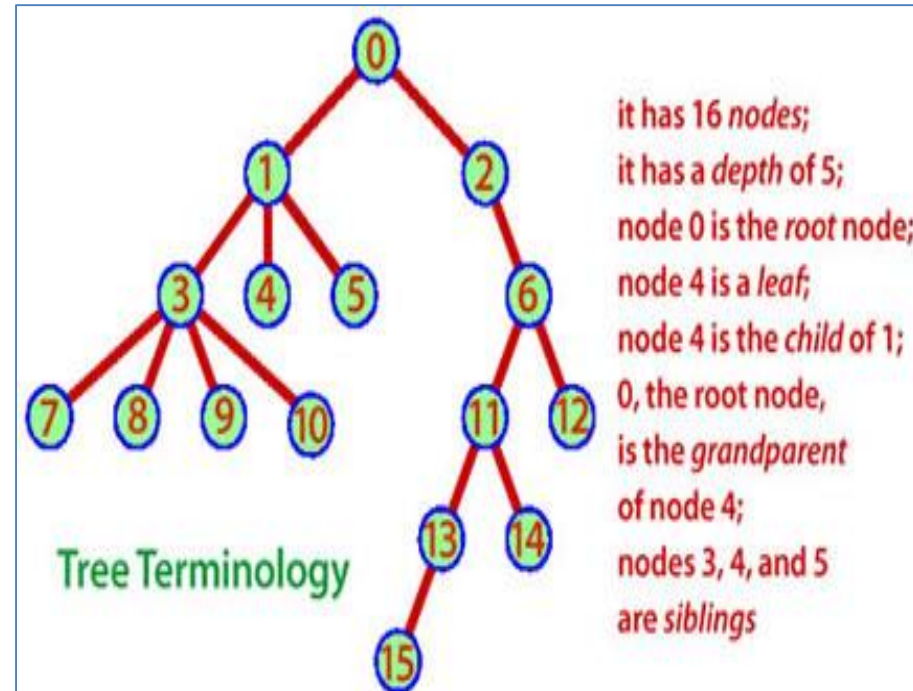
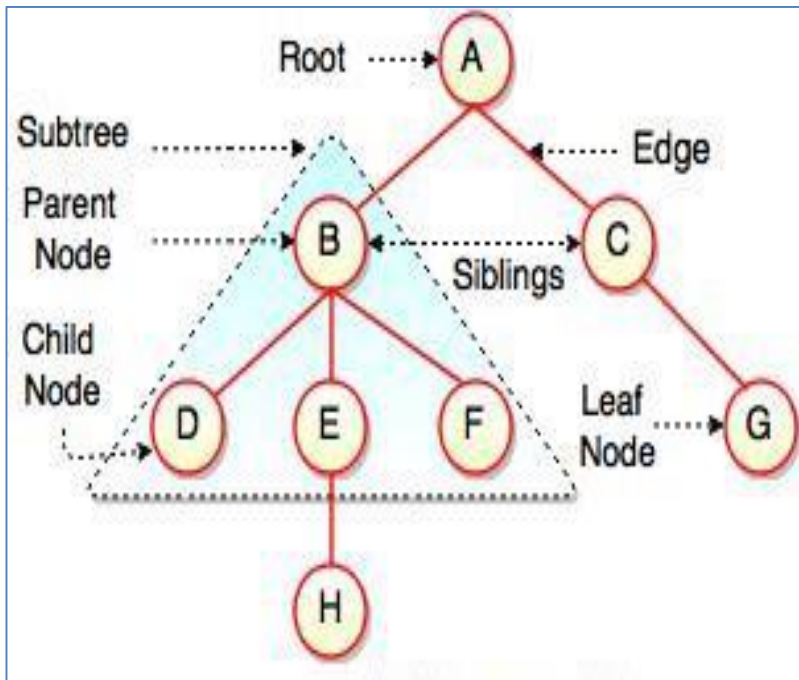
TREES



[illegible]

Cấu trúc dữ liệu Cây

Cây là một cấu trúc dữ liệu gồm một tập hợp các nút được liên kết với nhau theo quan hệ cha-con.



Cây nhị phân

Cây nhị phân là cấu trúc lưu trữ, trong đó các phần tử được gọi là các nốt, mỗi nốt có tối đa 2 con.

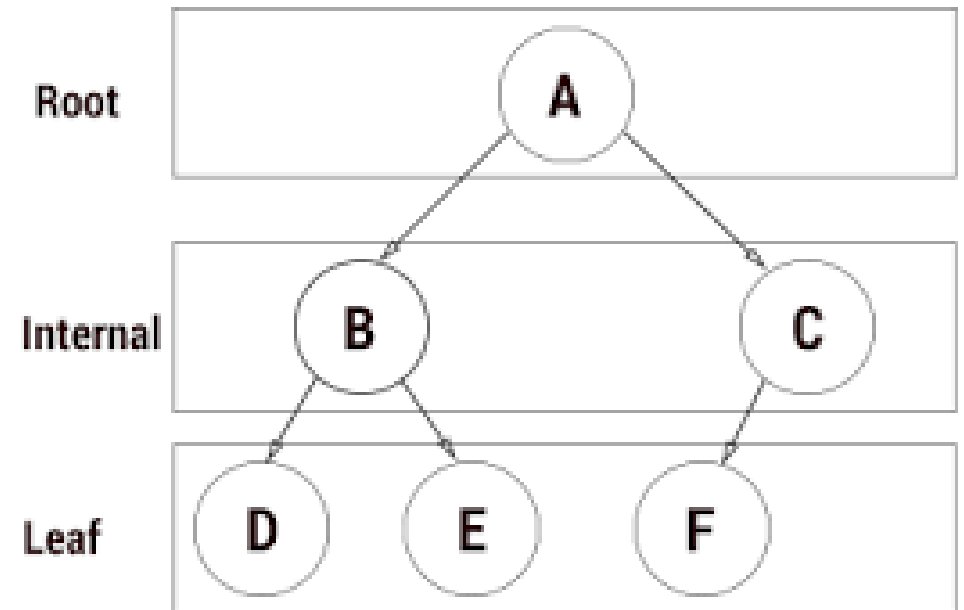
Mỗi nốt gồm các thông tin:

- Dữ liệu của nốt

- Liên kết đến con trái

- Liên kết đến con phải

Cây là cấu trúc lưu phi tuyến.



Cây nhị phân

Khai báo nốt

```
class TNode
```

```
{
```

```
    int data;
```

```
    TNode left, right;
```

```
    TNode (int x) { data= x; left =right = null;}
```

```
    TNode (int x, TNode ll, TNode rr) { data= x; left =ll; right = rr;}
```

```
}
```

Cây nhị phân

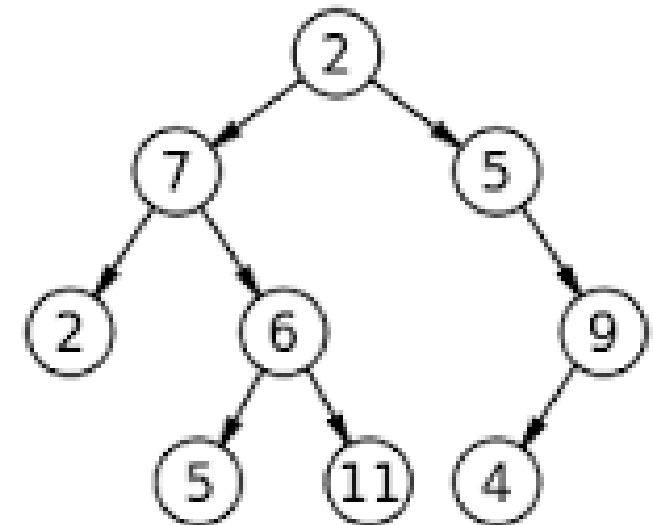
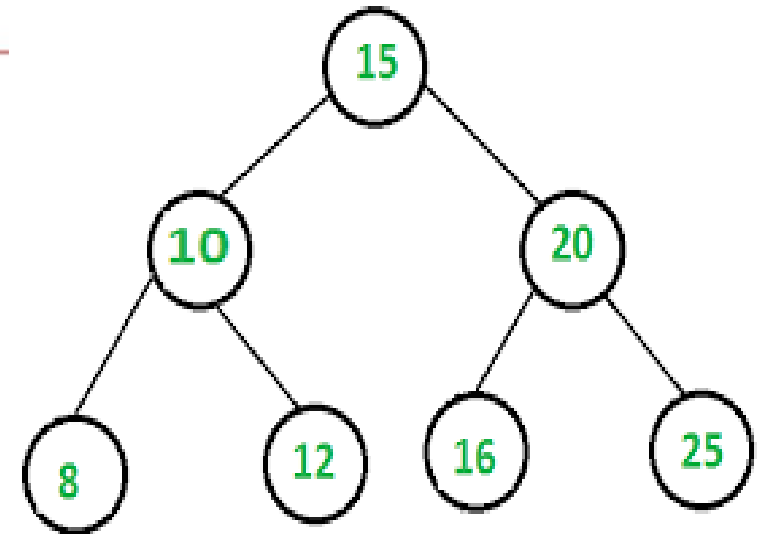
```
public class MyBinaryTree {
```

```
    TNode root;
```

```
    void taocay() {}
```

```
    void duyetcay() {}
```

```
}
```

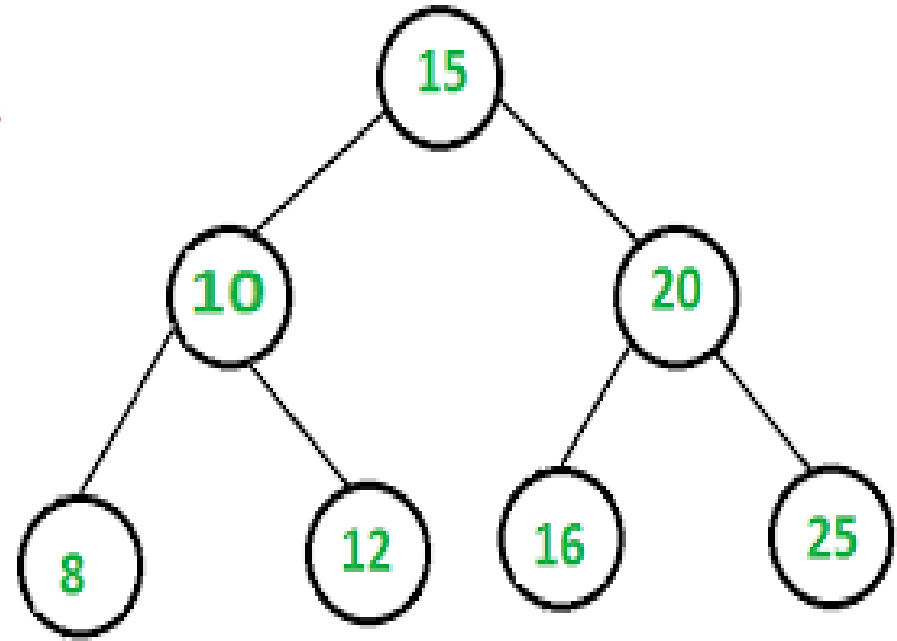


Cây nhị phân

```
void taocayT1()  
{
```

```
    TNode a = new TNode(10, new TNode(8), new TNode(12));  
    TNode b = new TNode(20, new TNode(16), new TNode(25));  
    root= new TNode (15, a, b);
```

```
}
```



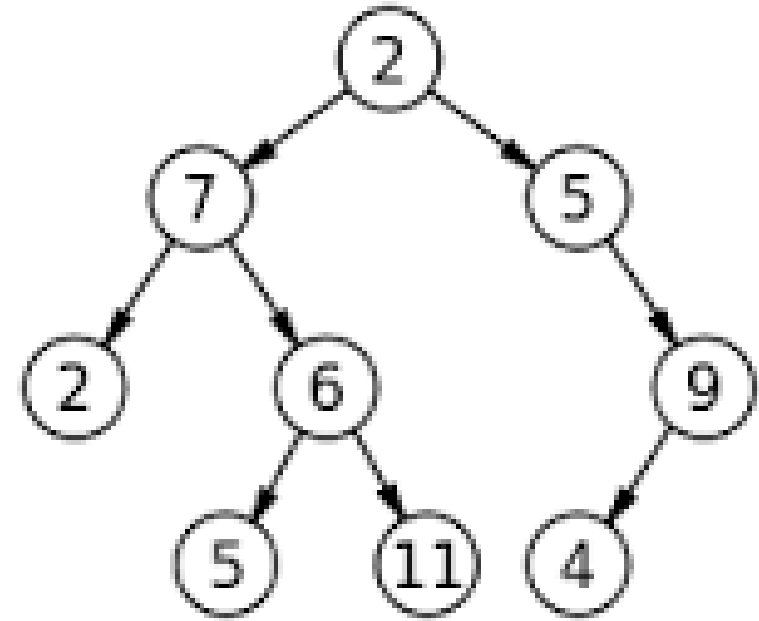
Cây nhị phân

Viết hàm tạo cây như hình bên???

```
void taocayT2()
```

```
{
```

```
}
```



Cây nhị phân

```
void taocayT2()  
{
```

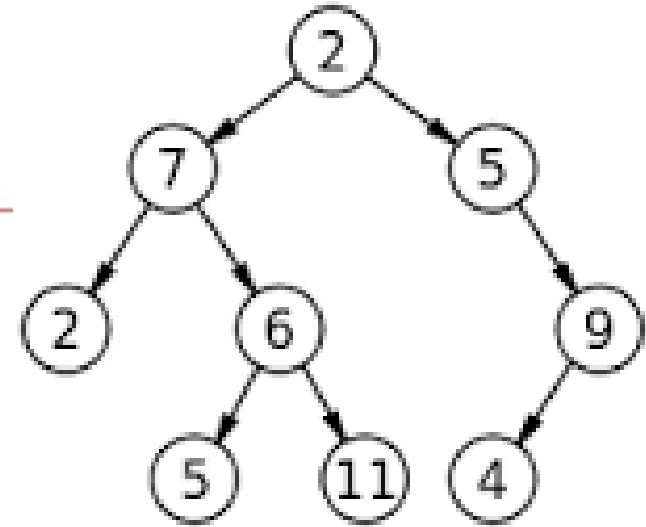
```
    TNode a = new TNode(6, new TNode(5), new TNode(11));
```

```
    TNode b = new TNode(7, new TNode(2),a);
```

```
    TNode c = new TNode(5, null, new TNode(9, new TNode(4), null));
```

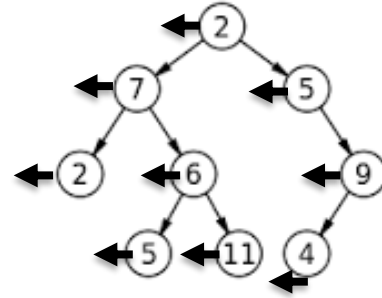
```
    root = new TNode(2, b, c);
```

```
}
```

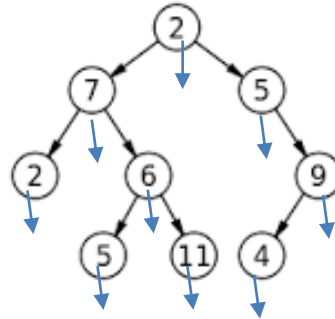


Duyệt cây nhị phân

Tiền tự NLR

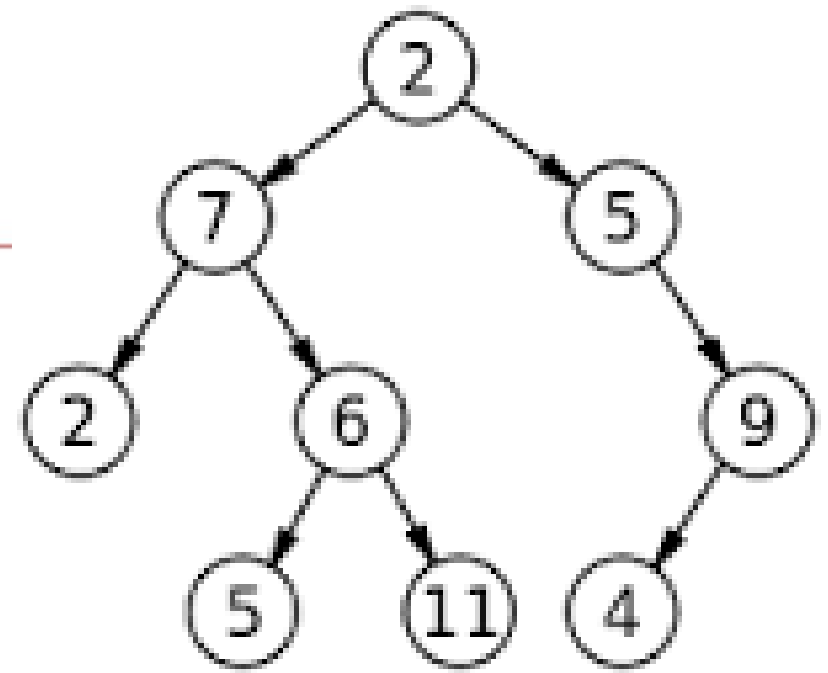


Trung tự LNR



Hậu tự LRN

Duyệt theo chiều sâu - Duyệt theo chiều rộng



Cây nhị phân

Duyệt cây:

Tiền tự NLR

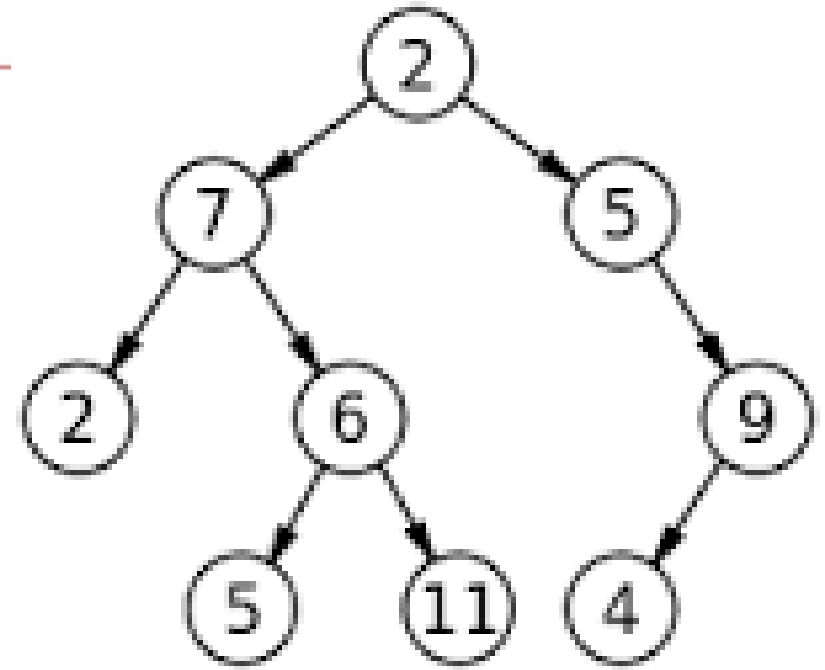
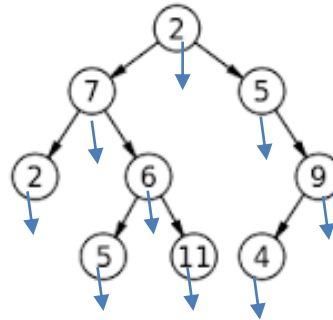
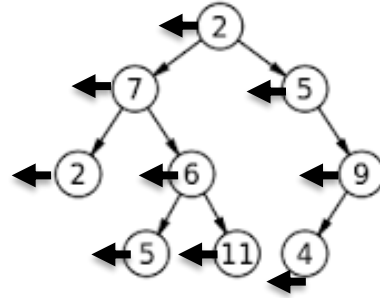
2 7 2 6 5 11 5 9 4

Trung tự LNR

2 7 5 6 11 2 5 4 9

Hậu tự LRN

2 5 11 6 7 4 9 5 2



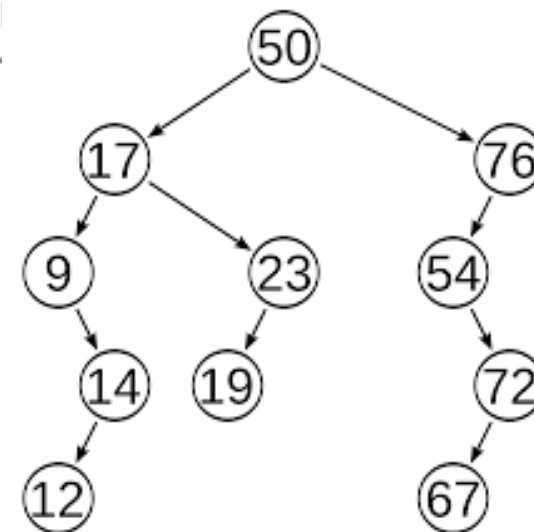
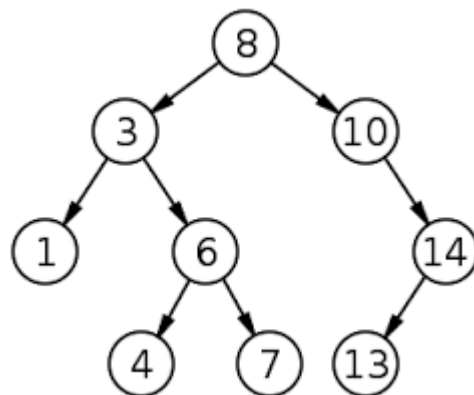
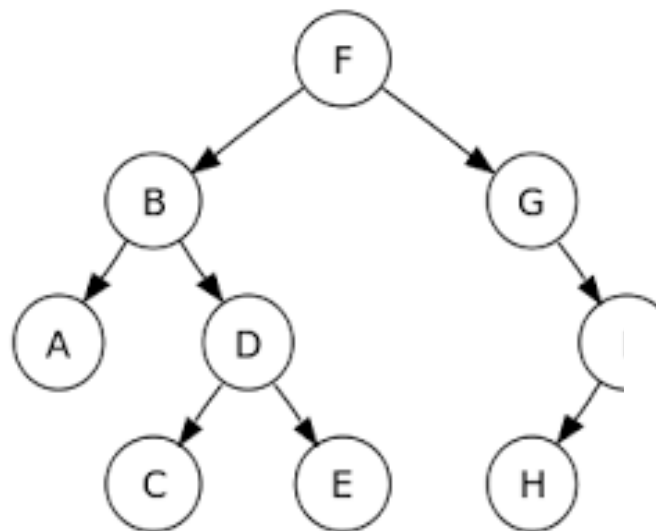
Cây nhị phân

Duyệt các cây bên???

Tiền tự NLR

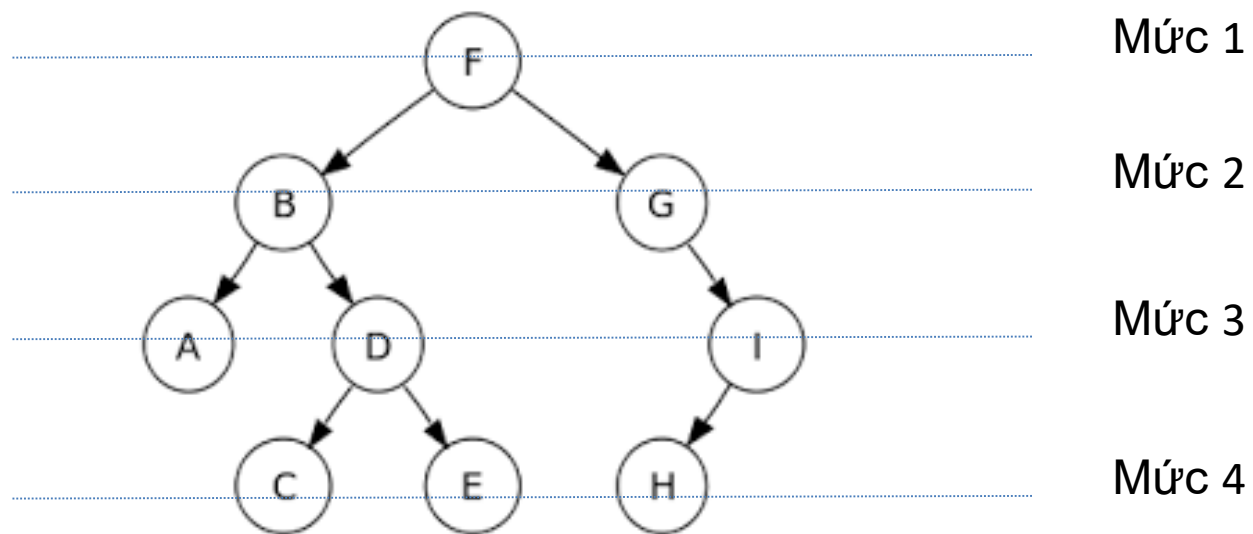
Trung tự LNR

Hậu tự LRN



Cây nhị phân

Chiều cao của cây



Cây nhị phân

```
public class MyBinaryTree {  
    TNode root;  
    void duyet1(TNode T)  
    {  
        if(T != null)  
        {  
            System.out.print(" " + T.data); duyet1(T.left); duyet1(T.right);  
        }  
    }  
}
```

Cây nhị phân

```
public class MyBinaryTree {  
    TNode root;  
    void duyet1(TNode T) {  
        if(T!= null) {  
            System.out.print(" " + T.data); duyet1(T.left);  duyet1(T.right);  
        }  
    }  
    void duyettientu() { duyet1(root); }  
}
```

Cây nhị phân

```
public class MyBinaryTree {  
    -----  
    public static void main(String[] args) {  
        MyBinaryTree T= new MyBinaryTree();  
        T.taocayT1();  
        T.duyettientu();  
    }  
}
```

Cây nhị phân

Bổ sung các hàm sau đây vào chương trình:

- Tính tổng các nốt trong cây
- Đếm số nốt lá
- Tính tổng nốt lẻ
- Đếm các nốt chỉ có 1 con
- Kiểm tra cây có nốt giá trị bằng x không

Cây nhị phân

Tính tổng các nốt trong cây

Các trường hợp có thể có???

Cây nhị phân

Tính tổng các nốt trong cây

```
int tong(TNode T)
{
    if(T==null) return 0;
    else return T.data + tong(T.left) + tong(T.right);
}
```

Gọi hàm như thế nào trong chương trình chính???

Cây nhị phân

```
public class MyBinaryTree {  
  
    int tong() { return tong(root);}  
    public static void main(String[] args) {  
        MyBinaryTree T= new MyBinaryTree();  
        T.taocayT1();  
        T.duyettientu();  
        System.out.println("\n Tong cac not trong cay la:" + T.tong());  
    }  
}
```

Cây nhị phân

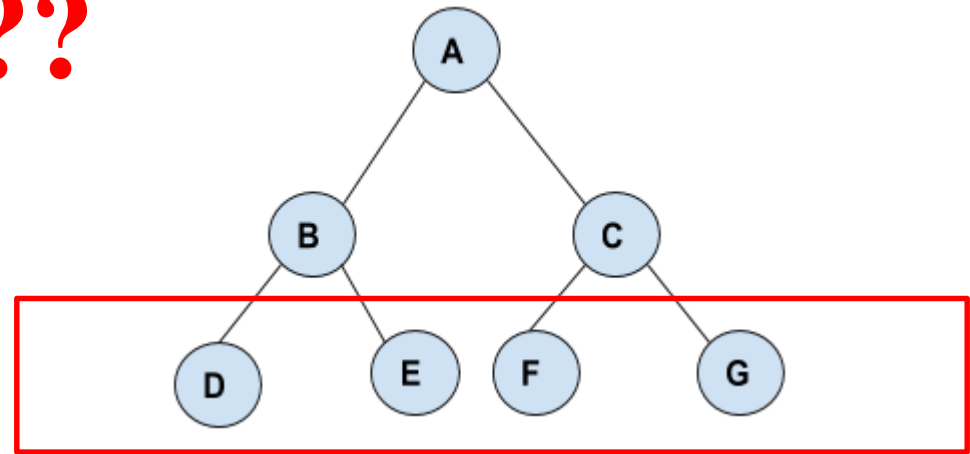
Tương tự cho các hàm sau:

- Đếm số nốt lá
- Tính tổng nốt lẻ
- Đếm các nốt chỉ có 1 con
- Kiểm tra cây có nốt giá trị bằng x không

Cây nhị phân

Đếm số nốt lá

Giải pháp của bạn???



Các bài toán trên cây nhị phân

Bài làm thêm

Tìm mức có nhiều nốt nhất

Tìm cha của nốt có giá trị x

Kiểm tra x có phải là tổ tiên của y không

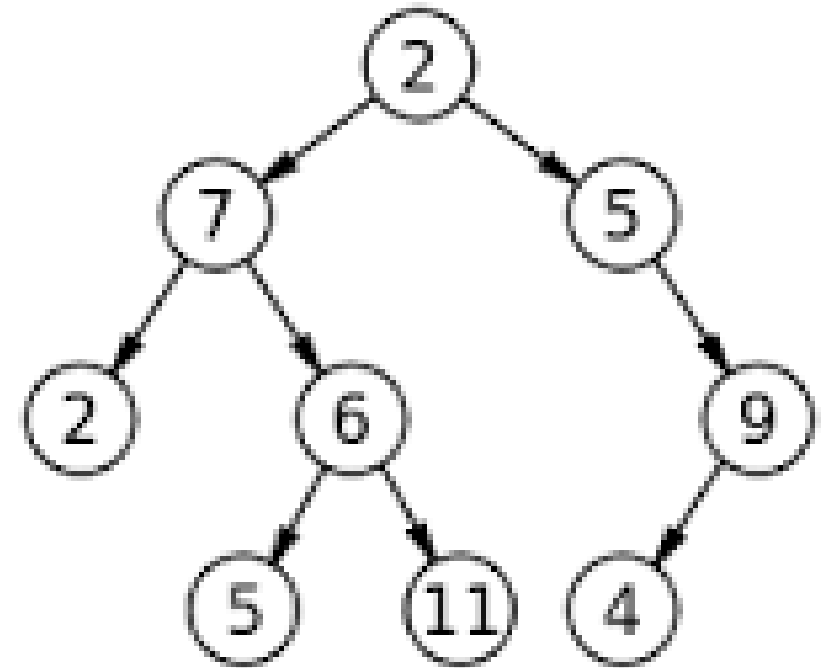
Kiểm tra y có phải là hậu duệ của x không

Duyệt cây theo chiều rộng (theo mức)

Duyệt cây theo chiều rộng

Duyệt cây theo chiều rộng

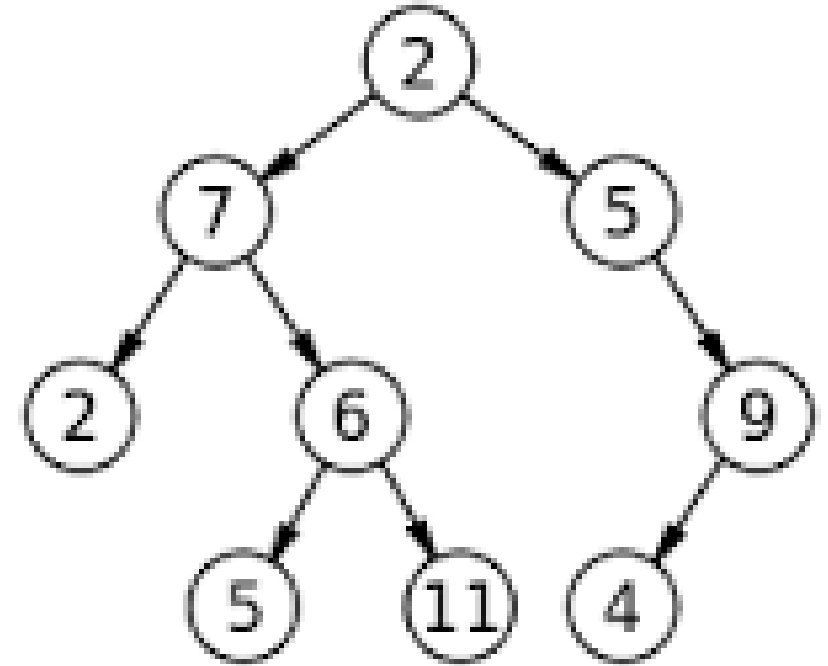
2 7 5 2 6 9 5 11 4



Duyệt cây theo chiều rộng

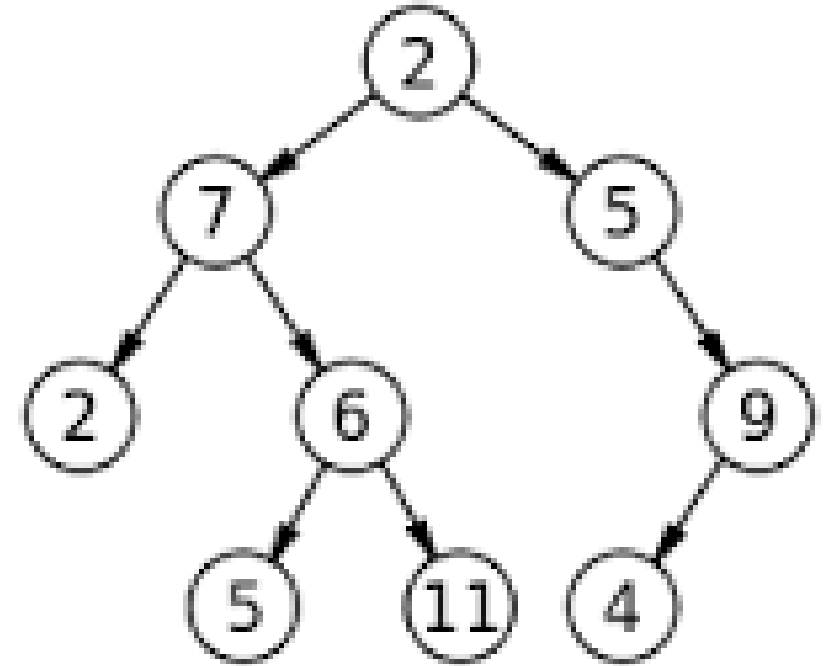
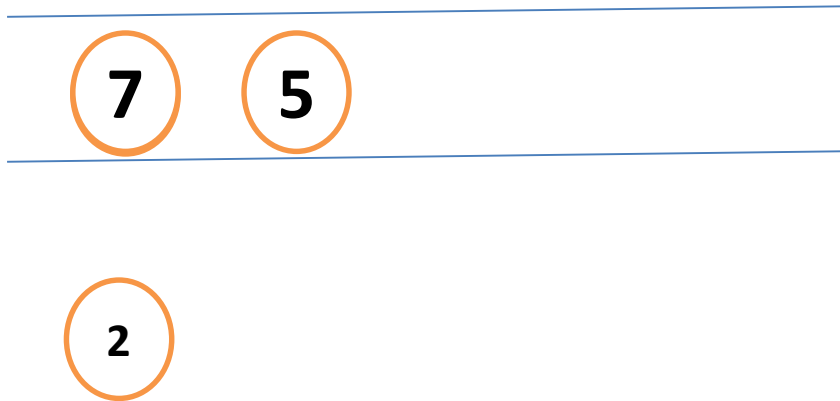
Duyệt cây theo chiều rộng

2



Duyệt cây theo chiều rộng

Duyệt cây theo chiều rộng

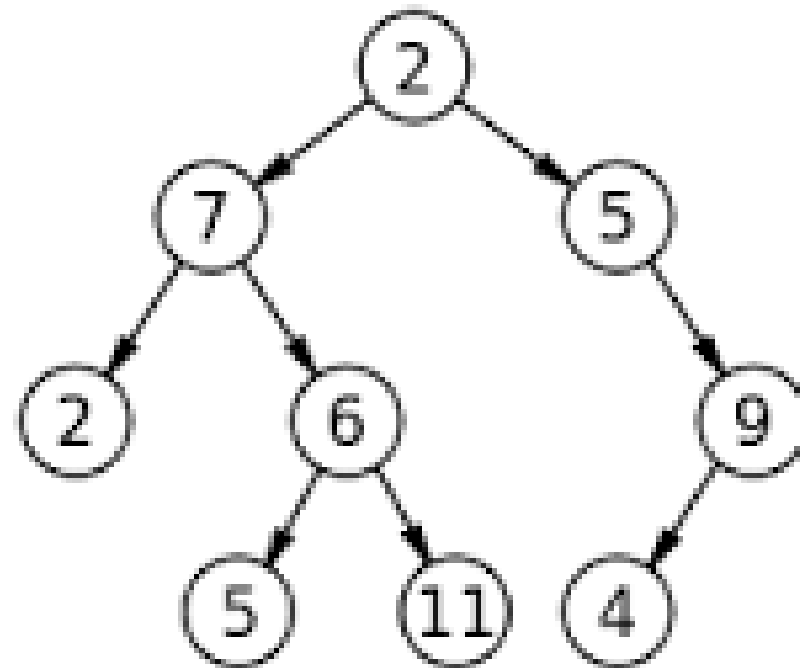


Duyệt cây theo chiều rộng

Duyệt cây theo chiều rộng

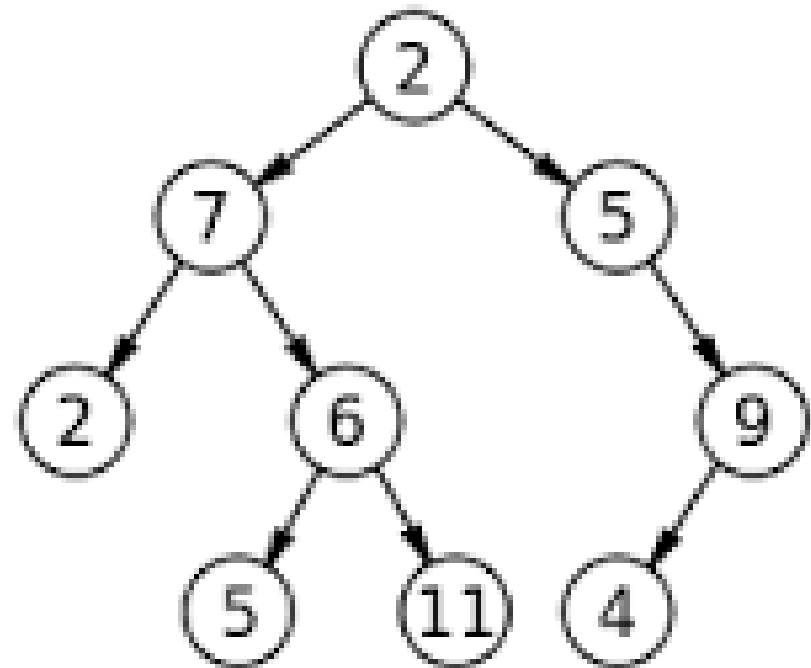
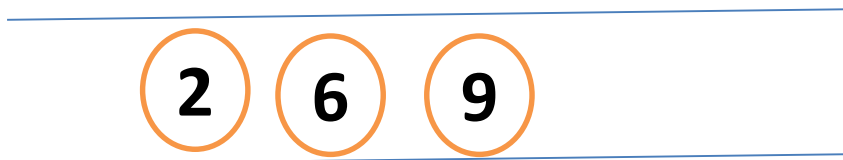
5 2 6

2 7



Duyệt cây theo chiều rộng

Duyệt cây theo chiều rộng

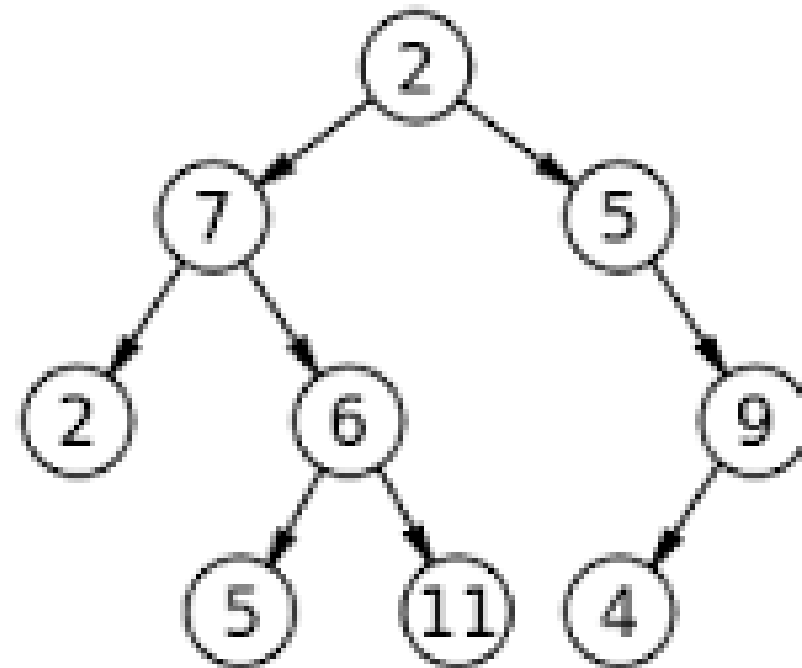


Duyệt cây theo chiều rộng

Duyệt cây theo chiều rộng

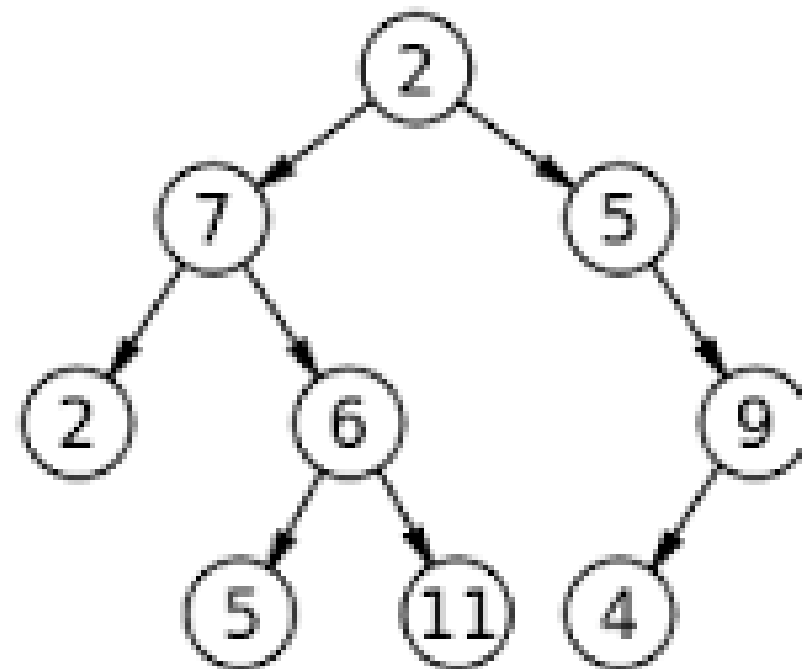
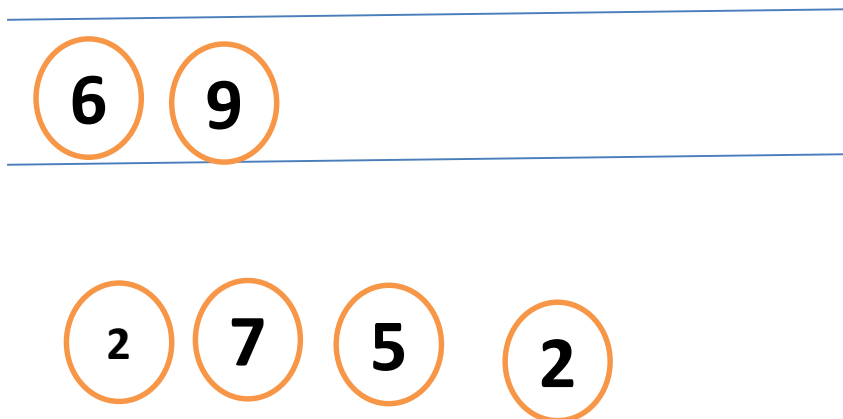
2 6 9

2 7 5



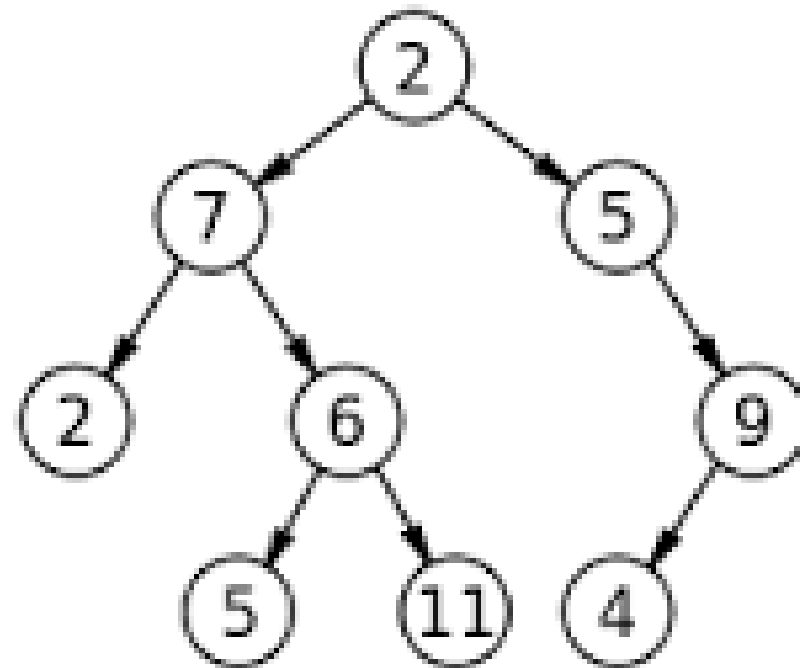
Duyệt cây theo chiều rộng

Duyệt cây theo chiều rộng



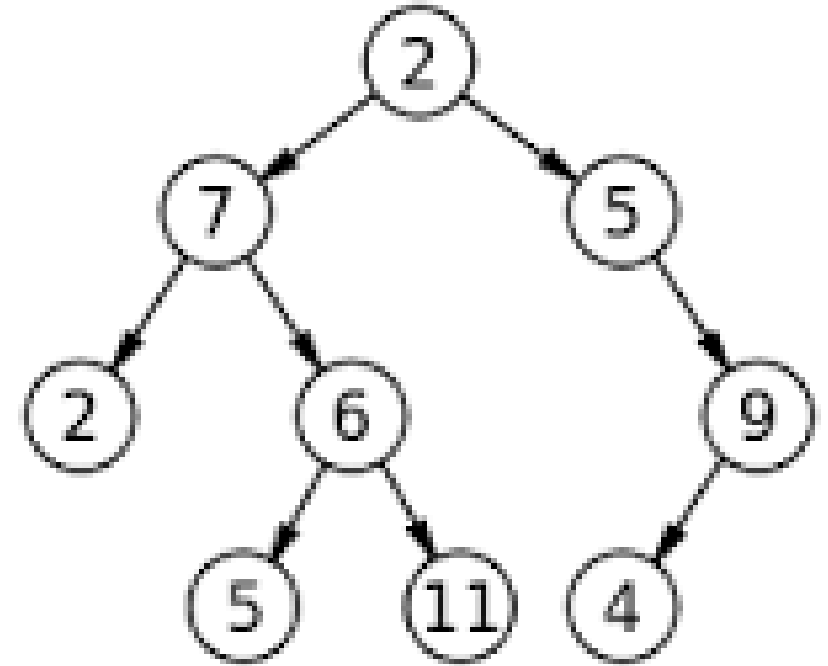
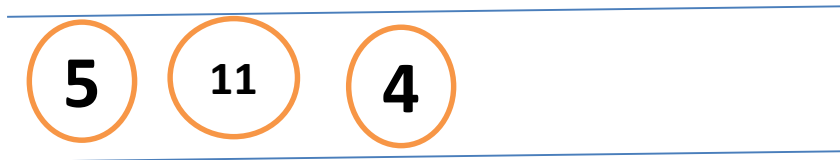
Duyệt cây theo chiều rộng

Duyệt cây theo chiều rộng



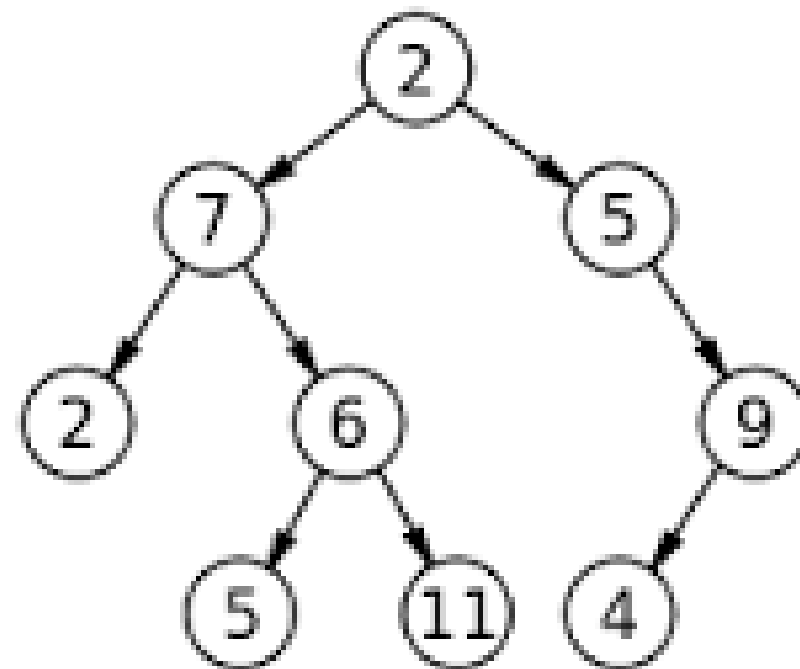
Duyệt cây theo chiều rộng

Duyệt cây theo chiều rộng



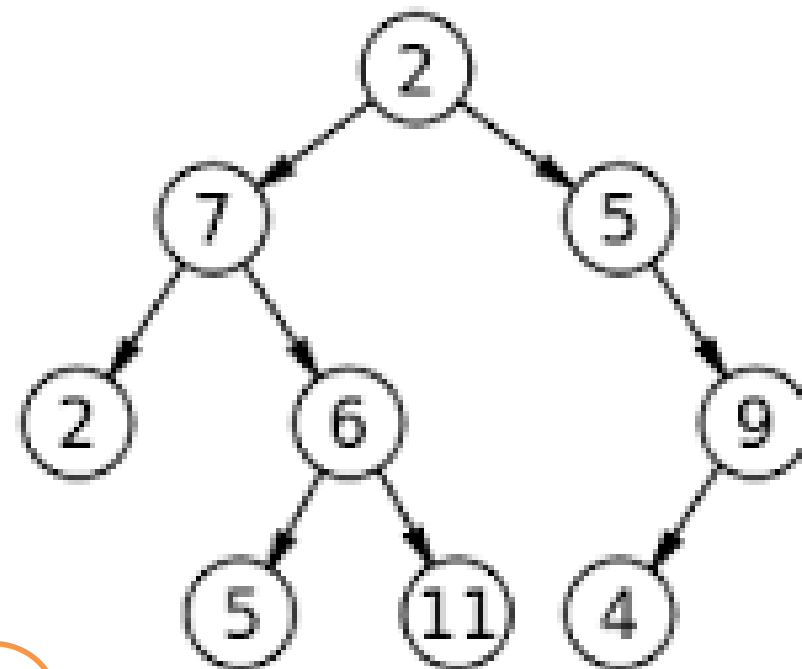
Duyệt cây theo chiều rộng

Duyệt cây theo chiều rộng



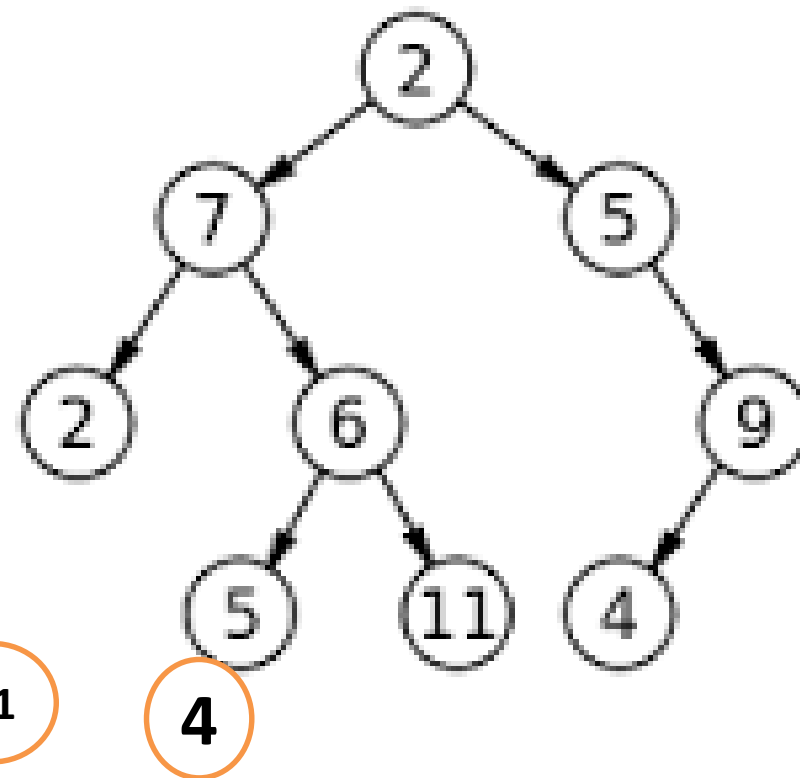
Duyệt cây theo chiều rộng

Duyệt cây theo chiều rộng



Duyệt cây theo chiều rộng

Duyệt cây theo chiều rộng



Duyệt cây theo chiều rộng

Thuật toán Duyệt cây theo chiều rộng

1. Khởi tạo hàng đợi Q rỗng
2. Nếu cây khác rỗng thì cho vào hàng đợi Q, ngược lại báo cây rỗng.
3. Lặp trong khi Q khác rỗng
 - + x = Phần tử đầu hàng đợi
 - + In giá trị nốt x
 - + Nếu x.left khác rỗng thì cho x.left vào Q.
 - + Nếu x.right khác rỗng thì cho x.right vào Q.

Duyệt cây theo chiều rộng

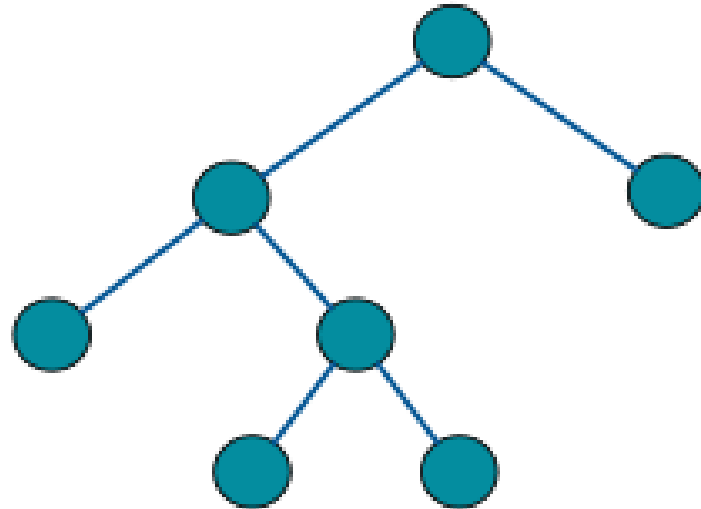
```
void chieurong() {
    Queue <TNode> Q = new LinkedList<>();
}
```

Duyệt cây theo chiều rộng

```
void chieurong() {  
    Queue <TNode> Q = new LinkedList<>();  
    if(root!=null) Q.add(root);  
    while(! Q.isEmpty()) {  
        TNode x= Q.remove(); System.out.print(x.data +" ");  
        if(x.left!=null) Q.add(x.left);  
        if(x.right!=null) Q.add(x.right);  
    }  
}
```

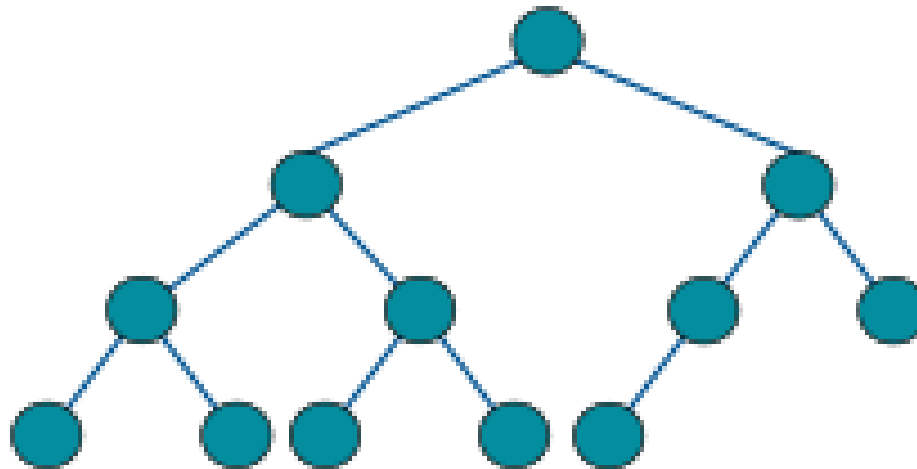
Cây nhị phân đầy đủ

Cây T được gọi là cây nhị phân đầy đủ (full binary tree) nếu như các nút trong đều có 2 con (mỗi nút trong cây có 2 con hoặc không có con (nút lá))



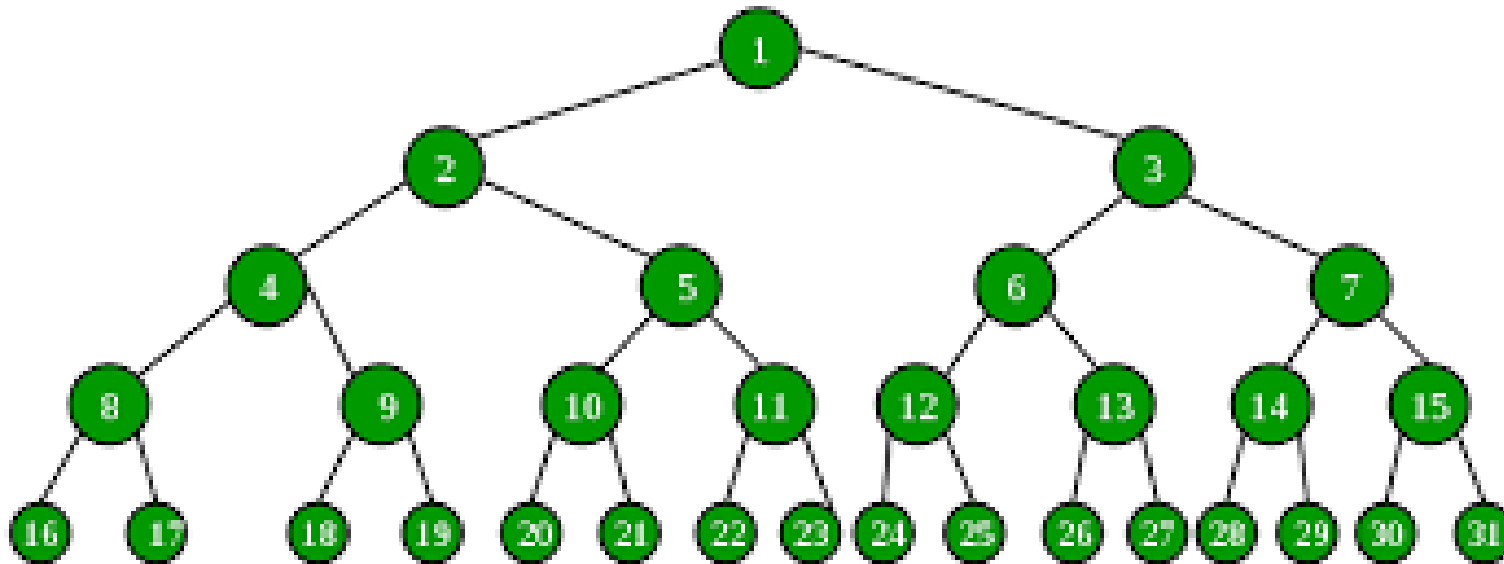
Cây nhị phân hoàn chỉnh

Cây T được gọi là cây nhị phân hoàn chỉnh (complete binary tree) nếu như các nút ở mức $< h-1$ đều có 2 con (h là chiều cao của cây).



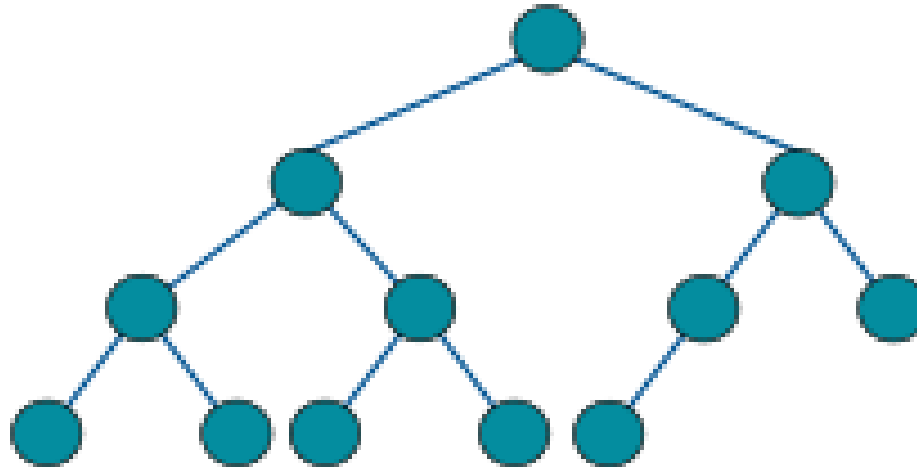
Cây nhị phân hoàn hảo

Cây T được gọi là cây nhị phân hoàn hảo (perfect binary tree) nếu như các nốt lá trong cây đều ở cùng mức.

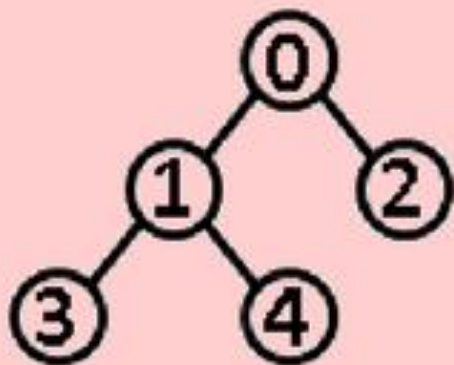


Cây nhị phân hoàn chỉnh

Cây T được gọi là cây nhị phân hoàn chỉnh (complete binary tree) nếu như các nút ở mức $< h-1$ đều có 2 con (h là chiều cao của cây).



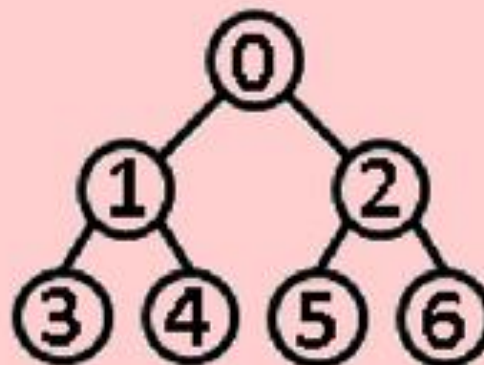
Cây nhị phân hoàn chỉnh



full
binary tree



complete
binary tree



perfect
binary tree

Cây nhị phân tìm kiếm (BST)

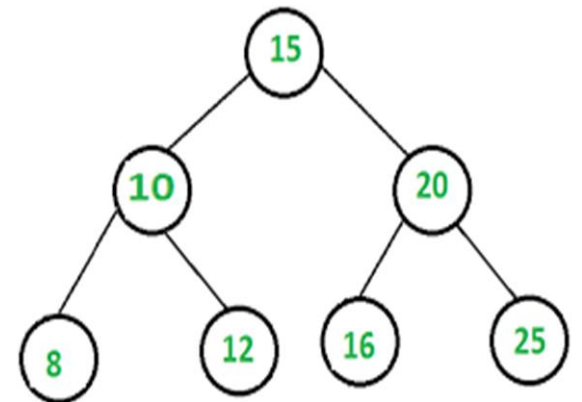
Cây T được gọi là BST nếu mọi cây con T' thuộc T đều thỏa mãn tính chất:

$\max(\text{con trái } T') < \text{gốc} < \min(\text{con phải } T')$.

Tìm x trong cây nhị phân: $O(n)$

Tìm trong cây nhị phân tìm kiếm $O(h)$, trong đó h là chiều cao của cây.

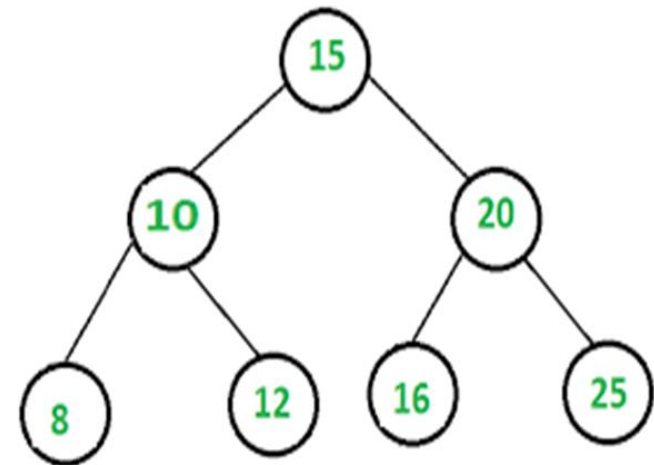
Nếu cây là cây đầy đủ thì h xấp xỉ $\log_2(n)$



Cây nhị phân tìm kiếm (BST)

- + Trong cây nhị phân tìm kiếm không có giá trị trùng
- + Giá trị nhỏ nhất nằm bên trái nhất
- + Giá trị lớn nhất nằm bên phải nhất
- + Nếu duyệt cây theo thuật toán duyệt trung tự ta sẽ được dãy tăng dần

Muốn có dãy giảm dần ???



Cây nhị phân tìm kiếm (BST)

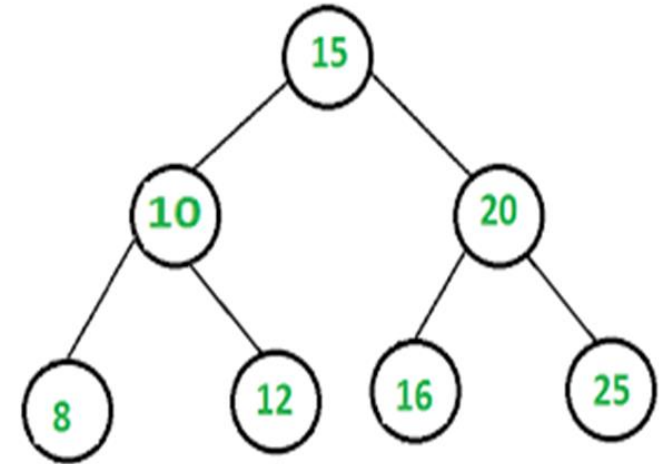
+ Giá trị lớn nhất nằm bên phải nhất

```
int getmax()
```

```
{
```

CODE???

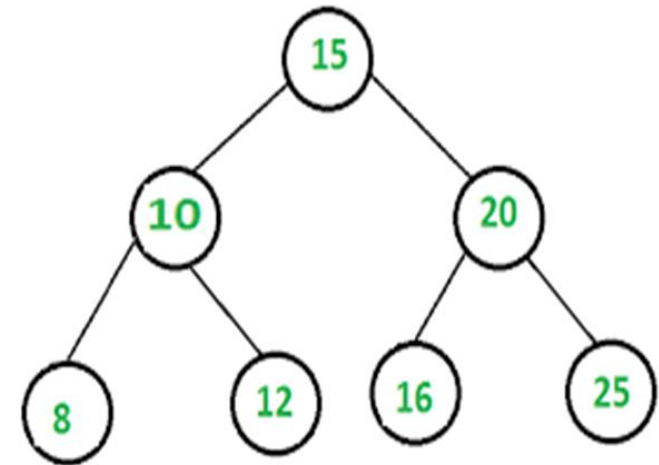
```
}
```



Cây nhị phân tìm kiếm (BST)

+ Giá trị lớn nhất nằm bên phải nhất

```
int getmax()
{
    if(root==null) return 0;
    else {
        TNode p= root;
        while(p.right!=null) p=p.right;
        return p.data;
    }
}
```



Cây nhị phân tìm kiếm (BST)

Tổ chức lưu trữ: Giống như cây nhị phân
Vấn đề là thêm vào như thế nào và xóa đi như thế nào để đảm bảo tính chất là cây nhị phân tìm kiếm.

Tìm kiếm giá trị x trong cây BST sẽ nhanh hơn tìm trong cây nhị phân do loại bỏ được 1 nhánh khi tìm kiếm:

- + Nếu bằng giá trị nút gốc: có
- + Nếu lớn hơn: chỉ tìm bên nhánh phải
- + Nếu nhỏ hơn: chỉ tìm bên nhánh trái

Cây nhị phân tìm kiếm (BST)

```
boolean timx(TNode T, int x)
{
    if(T==null) return false;
    else if(T.data==x) return true;
        else if (T.data<x) return timx(T.right, x);
            else return timx(T.left, x);
}
```

Cây nhị phân tìm kiếm (BST)

```
boolean timx1(int x)
{
    TNode p= root;
    while(p!=null)
        if(p.data==x) return true;
        else if (p.data<x) p=p.right;
        else p=p.left;
    return false;
}
```

Cây nhị phân tìm kiếm (BST)

Thuật toán **chèn** 1 nốt có giá trị x vào cây BST T

Nếu cây T rỗng thì tạo nốt mới và gán cây bằng nốt vừa tạo
Ngược lại

Nếu $x =$ giá trị nốt hiện tại thì báo đã có trong cây

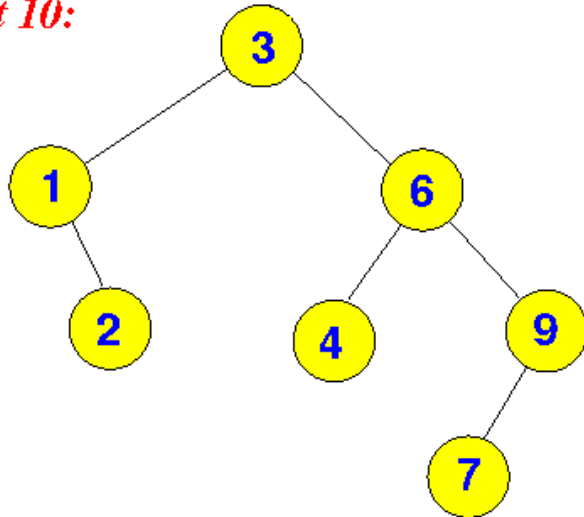
Ngược lại nếu $x <$ giá trị nốt hiện tại thì chèn sang cây trái
ngược lại chèn sang cây phải

Cây nhị phân tìm kiếm (BST)

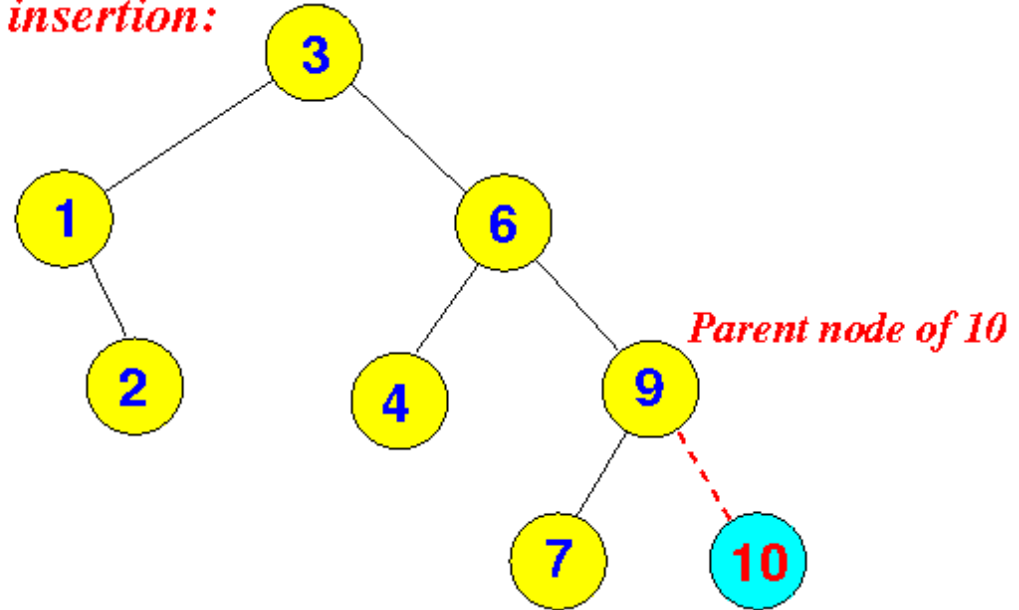
Thuật toán **chèn** 1 nốt có giá trị x vào cây BST T

CODE???

Insert 10:



After insertion:



Cây nhị phân tìm kiếm (BST)

```
TNode chenx(TNode T, int x)
{
    if(T==null) T= new TNode(x);
    else if(T.data==x) S.O.P (“da co trong cay”);
        else if (T.data<x) T.right =chenx(T.right, x);
            else T.left = chenx(T.left, x);
    return T;
}
```

Cây nhị phân tìm kiếm (BST)

Khai báo và Tạo cây BST

```
class TNode { } // thực hiện như cây nhị phân
public class MyBST
{
    TNode root;
    void chen(TNode T, int x) { }
    void chen(int x) { root = chen(root,x); }
    void taocayBST() { }
    void chieurong() { }
}
```

Cây nhị phân tìm kiếm (BST)

```
void taocayBST()
{
    int x; while(true) { nhập x; if(x ==0) break; chen(x); }
}
```

Viết hàm main gọi các hàm ở trên???

Bài tập trên cây nhị phân và cây BST

Tree: Height of a Binary Tree

Success Rate: 96.25% Max Score: 10 Difficulty: Easy



Solve Challenge

Tree : Top View

Success Rate: 93.98% Max Score: 20 Difficulty: Easy



Solve Challenge

Tree: Level Order Traversal

Success Rate: 96.38% Max Score: 20 Difficulty: Easy



Solve Challenge

Binary Search Tree : Insertion



Bài tập trên cây nhị phân và cây BST

Is This a Binary Search Tree?



Success Rate: 75.68% Max Score: 30 Difficulty: Medium

Solve Challenge

Á

Binary Search Tree : Lowest Common Ancestor



Success Rate: 90.38% Max Score: 30 Difficulty: Easy

Solve Challenge

Thuật toán tìm xóa nốt có giá trị x trong cây BST

Nếu cây rỗng thì báo không xóa được

Ngược lại

nếu $x <$ giá trị nốt hiện tại thì tìm xóa bên cây con trái

ngược lại nếu $x >$ giá trị nốt hiện tại thì tìm xóa bên cây con phải

ngược lại: *// bằng và sẽ thực hiện xóa*

{

nếu nốt hiện tại là lá thì gán = null

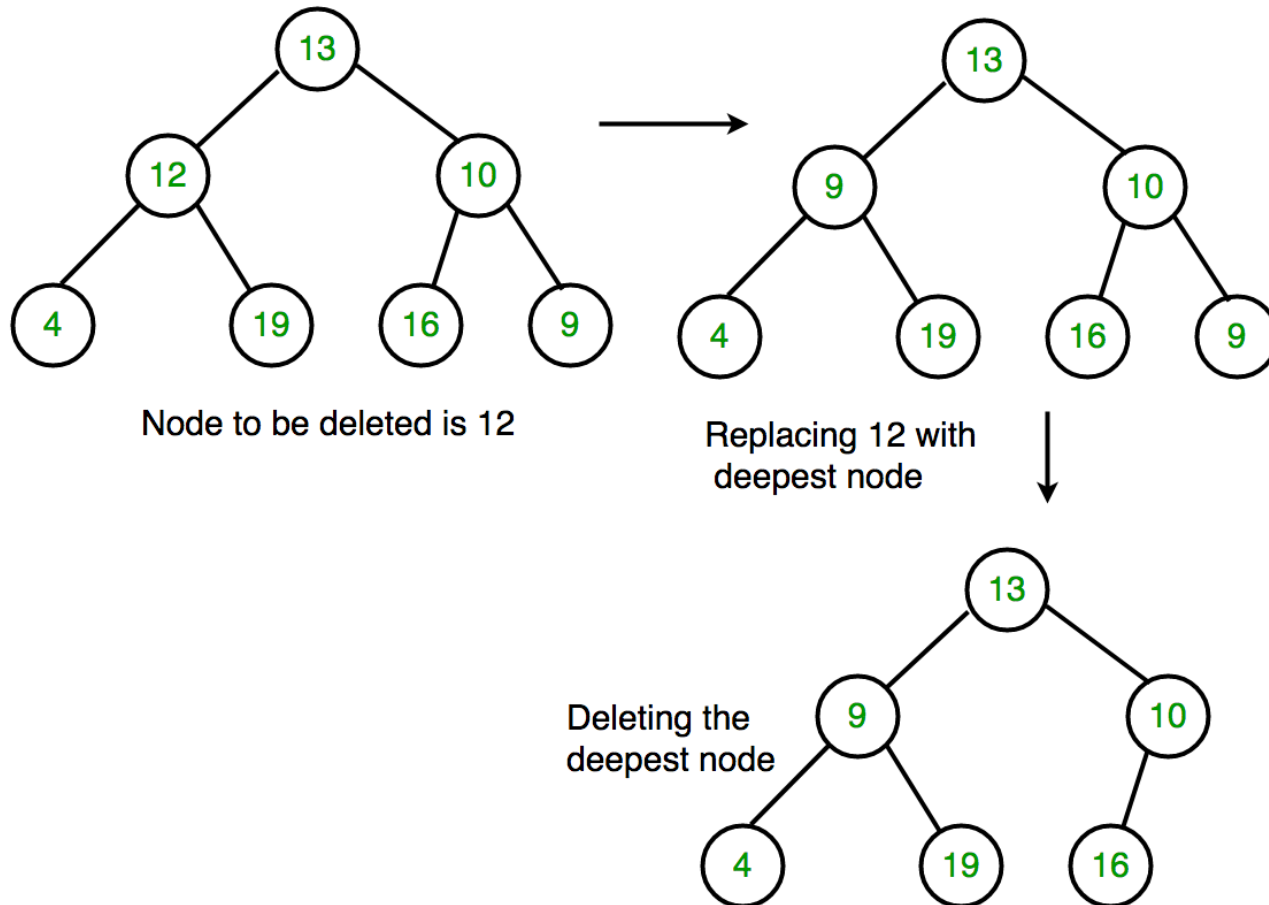
ngược lại nếu nốt chỉ có 1 con thay nốt hiện tại bằng con

ngược lại tìm min con phải thay vào nốt hiện tại sau đó xóa min con

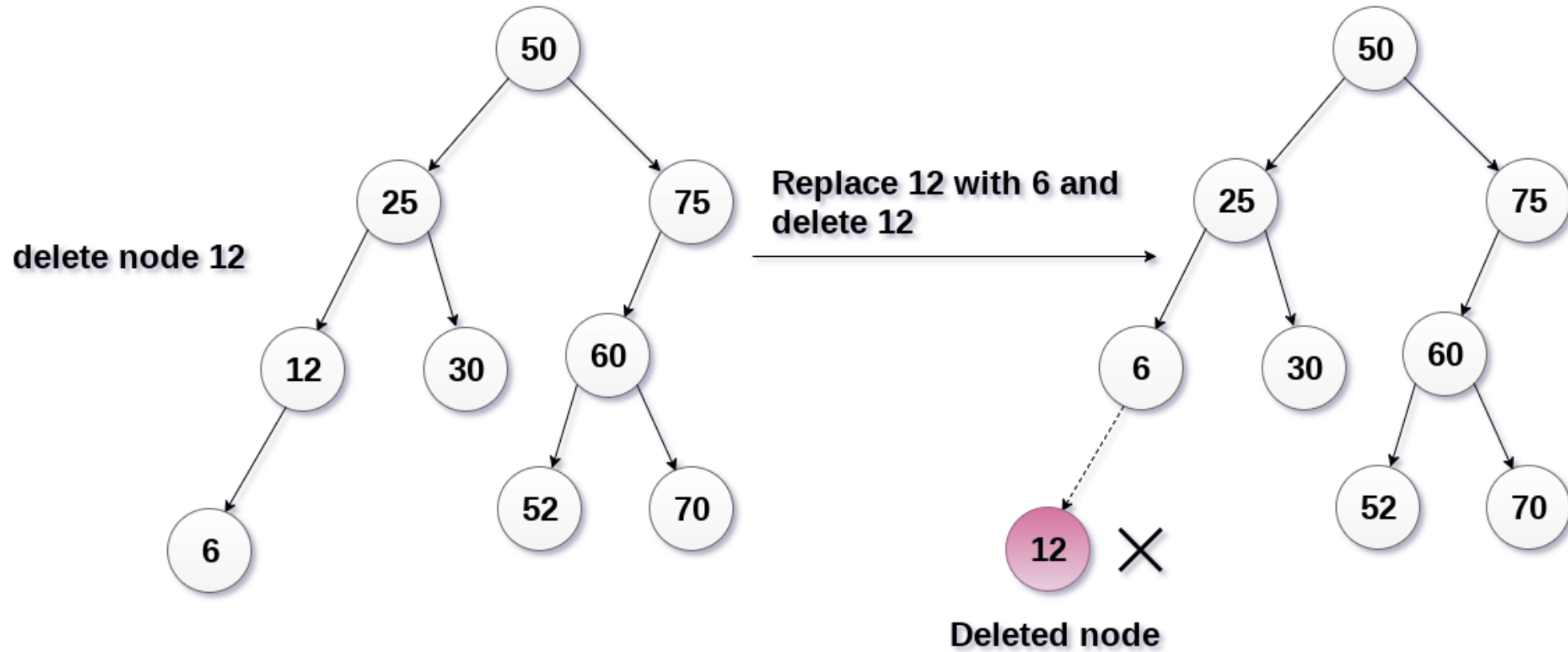
phải (hoặc tìm max con trái thay vào nốt hiện tại sau đó xóa max con trái)

}

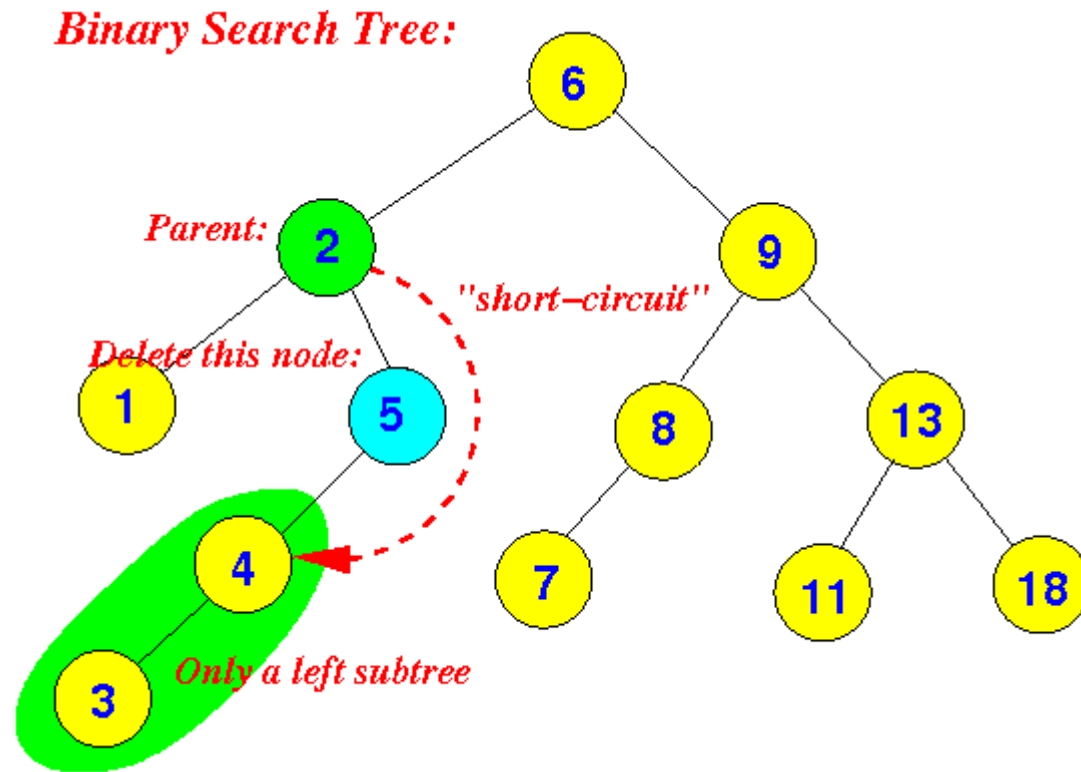
Thuật toán tìm xóa nốt có giá trị x trong cây BST



Thuật toán tìm xóa nốt có giá trị x trong cây BST



Thuật toán tìm xóa nốt có giá trị x trong cây BST



Thuật toán tìm xóa nốt có giá trị x trong cây BST

CODE???

Tài liệu đọc thêm về cây nhị phân

<https://practice.geeksforgeeks.org/explore/?category%5B%5D=Tree&page=1>

<https://www.cs.usfca.edu/~galles/visualization/BST.html>

Link YouTube

https://www.youtube.com/watch?v=IpyCqRmaKW4&list=PLqM7aIHxFySHCXD7r1J0ky9Zg_GBB1dbk

<https://www.youtube.com/watch?v=9Jry5-82I68>

Tree Traversal

Types :

- Breadth First Traversal (level order)
- Depth First Traversal
 - Preorder Traversal
 - Inorder Traversal
 - Postorder Traversal

First, let's have a look at breadth first traversal. In trees we also call it as level order traversal,

