PEPS

BENJELLOUN Thami
EL RHATRIF Mohammed Amine
MISANE Otmane
PIERUCCI Dimitri
MARCHAL Emmanuel

January 2018

1 Simulation

1.1 Notations

Notre produit manipule, un indice américain, un autre européen et enfin un autre australien. Nous introduisons ainsi les notations suivantes :

- I_t^e le cours de l'indice européen au temps t .
- I_t^u le cours de l'indice américain au temps t .
- I_t^a le cours de l'indice australien au temps .
- r^e , $r^\$$, et r^a les taux sans risque instantanés respectivement européen, américain et australien .
- X_t^u le prix de 1\$ en € en t .
- X_t^a le prix de 1 dollar australien en € en t .

Si les actifs stochastiques sont traités dans un même contexte, ils seront notés $(Y_1, ...Y_5)$ en gardant le même ordre que ci-dessus.

1.2 Corrélation

3 indices et 2 taux de changes sont donc à simuler. Nous commençons par une simulation avec le modèle de Black & Scholes. On note $(w_1,...w_5)$ les mouvements browniens régissant respectivement, l'indice européen, l'indice américain, l'indice australien, le taux de change américain et le taux de change australien. On note en gardant le même ordre la matrice de corrélation $\Sigma = (\sigma_{i,j})_{1\leq i,j\leq 5}$ ainsi,

$$\forall i \in [|1,5|] \;\; dY_i(t) = Y_i(t)(\alpha_i dt + \sum_{j=1}^{5} \sigma_{i,j} dw_j(t))$$

On introduit alors pour tout i $\sigma_i = \sqrt{\sum_{j=1}^{5} \sigma_{i,j}^2}$ et $B_i(t) = \sum_{j=1}^{d} \frac{\sigma_{i,j}}{\sigma_i} w_j(t)$

On peut alors montrer que :

$$\forall i \in [|1,5|] \;\; dY_i(t) = Y_i(t)(\alpha_i dt + \sigma_i dB_i(t))$$

et que les $(B_i)_t$ sont des mouvements browniens vérifiant : si $i \neq j$ alors $cov(B_i, B_j) = \Phi_{i,j} t$ où $\Phi_{i,j} = \sum_{k=1}^{d} \frac{\sigma_{i,k} * \sigma_{k,j}}{\sigma_i * \sigma_j}$.

Enfin en introduisant la matrice de Cholesky de la matrice Φ, notée L, on a une égalité en loi entre $(B_1, ..., B_5)_t$ et $(L * W)_t$ où $W = (W_1, ..., W_5)$ est un mouvement brownien standard de dimension 5.

1.3 Drift et formule de simulation

1.3.1 Indice européen

Comme nous sommes des investisseurs européens, en risque neutre , le drift de l'indice européen est : r^e. Ainsi pour simuler sur une grille de pas de temps discrétisés, nous utiliserons la formule suivante :

$$I^e_{t_{i+1}} = I^e_{t_i} e^{(r^e - \frac{\sigma_1^2}{2})(t_{i+1} - t_i) + \sigma_1 * \sqrt{t_{i+1} - t_i} L_1 G^1_{i+1}}$$

où L_1 est la première colonne de la matrice de cholesky et où les $(G^n)_i$ sont des suites de lois normales iid indépendantes entre elles .

1.3.2 Taux de change

Supposons qu'un investisseur européen souhaite investir 1 € au taux sans risque américain, il faut d'abord qu'il convertisse sa somme en dollar, soit donc $\frac{1}{X^u_t}$\$, en t +dt , il obtient alors en dollar : $\frac{1}{X^u_t}(1 + r_\$ dt)$, et donc en euro: $\frac{X^u_{t+dt}}{X^u_t}(1 + r_\$ dt)$, la rentabilité du portefeuille est alors donnée par :

$\frac{dP(t)}{P(t)} = r_\$ dt + \frac{dX^u(t)}{X^u_t} + r_\$ dt \frac{dX^u(t)}{X^u_t}$

et donc au premier ordre on peut éliminer le troisième terme du membre de droite et donc :

$\frac{dP(t)}{P(t)} = (\alpha_x + r_\$)dt + \sigma_4 dB_4(t)$

On en déduit que l'investissement n'est pas sans risque et que pour un investisseur neutre vis-à-vis du risque européen $\alpha_x = r_e - r_\$$.

Pour notre simulation on considère alors que :

- $dX^u_t = X^u_t[(r_e - r_\$)dt + \sigma_4 dB_4(t)]$

- $dX^u_t = X^a_t[(r_e - r_a)dt + \sigma_5 dB_5]$

La simulation des taux de change se fera donc par :

- $X^u_{t_{i+1}} = X^u_{t_i} e^{(r^e - r_\$ - \frac{\sigma_4^2}{2})(t_{i+1}-t_i) + \sigma_4\sqrt{t_{i+1}-t_i}L_4 G^4_{i+1}}$
- $X^a_{t_{i+1}} = X^a_{t_i} e^{(r^e - r_a - \frac{\sigma_5^2}{2})(t_{i+1}-t_i) + \sigma_5\sqrt{t_{i+1}-t_i}L_5 G^5_{i+1}}$

1.3.3 Indice étranger

En effectuant le même raisonnement pour un investisseur européen achetant un actif en Amérique, avec une somme initiale $S_t X^u_t$ où S_t est l'actif coté en Amérique, on peut montrer que le portefeuille vérifie au final au premier ordre

$$\frac{dP(t)}{P(t)} = (\alpha_x + \alpha_s + \rho_{x,s}\sigma_s\sigma_x)dt + \sigma_4 dB_4(t) + \sigma_s dB_s(t)$$

En utilisant le résultat précédent, pour un investisseur européen risque neutre :

$$\alpha_s = r_e - r_e + r_\$ = r_\$$$

On conclut pour les simulation des indices étrangers :

- $I^u_{t_{i+1}} = I^u_{t_i} e^{(r^\$ - \rho_{2,4}\sigma_2\sigma_4 - \frac{\sigma_2^2}{2})(t_{i+1}-t_i) + \sigma_2\sqrt{t_{i+1}-t_i}L_2 G^2_{i+1}}$
- $I^a_{t_{i+1}} = I^a_{t_i} e^{(r^a - \rho_{3,5}\sigma_3\sigma_5 - \frac{\sigma_3^2}{2})(t_{i+1}-t_i) + \sigma_3\sqrt{t_{i+1}-t_i}L_3 G^3_{i+1}}$

1.3.4 Fond eurostral 100

Pour le pricing de notre produit, il suffit donc de simuler séparément chacune des 5 composantes présentées. Nous appliquons alors une méthode de Monte-Carlo avec le payoff suivant :

$$X^e_0 = \frac{X^e_{18/12/2014} + X^e_{19/12/2014} + X^e_{22/12/2014}}{3}$$
$$X^u_0 = \frac{X^u_{18/12/2014} + X^u_{19/12/2014} + X^u_{22/12/2014}}{3}$$
$$X^a_0 = \frac{X^a_{18/12/2014} + X^a_{19/12/2014} + X^a_{22/12/2014}}{3}$$

Pour $j \in [1, 15]$, on note X^e_j, X^u_j et X^a_j le cours de l'indice correspondant au premier jour ouvré j semestres après le 18/12/2014.

On calcule les performances de chaque indice en calculant le rapport : $R_{X^e_j} = \frac{X^e_j - X^e_0}{X^e_0}$ $R_{X^u_j} = \frac{X^u_j - X^u_0}{X^u_0}$ $R_{X^a_j} = \frac{X^a_j - X^e_0}{X^a_0}$ On calcule la performance du panier, qu'on notera P_j, par la formule suivante :

$P_j = 0.5max(R_{X_j^e}, R_{X_j^u}, R_{X_j^a})+0.3ent(R_{X_j^e}, R_{X_j^u}, R_{X_j^a})+0.2min(R_{X_j^e}, R_{Y_j^u}, R_{X_j^a})$

Avec $ent(x, y, z)$ la seconde plus grande valeur des x, y, z. Finalement, on obtient la performance moyenne finale du panier en calculant la moyenne arithmétique des performances du panier :

$P_{finale} = \frac{\sum_{j=1}^{15} P_j}{15}$ et le payoff est :

$(F_0)(1 + 0.55 * max(P_{finale}, 0))$ où F_0 est l'investissement initial.

2 Couverture

2.1 Option Quanto

Une option Quanto de prix Q_t^d est une option sur un sous-jasent coté à l'étranger S_t^f, avec un Strike étranger K_t^f et versant un payoff en monnaie domestique $(S_T^f - K_T^f)^+$. Ce produit contient deux risques distincts :

- Le risque du marché étranger qui traduit le risque que le sous-jacent étranger augmente .
- Le risque de change qui traduit le risque que la monnaie étrangère s'écroule .

Pour couvrir chacun de ces deux risques, il faut respectivement :

- Acheter Δ_s sous-jacent S_t^f .
- vendre Δ_b Zéro-coupon étranger $B_t^f(t, T)$.

Ainsi en notant X_t^d le prix en monnaie domestique d'une unité de monnaie étrangère, la variation infinitésimale du portefeuille et couvrant une option quanto est donnée par :

$$dP_t^d = dQ_t^d - \Delta_s[X_{t+dt}^d S_{t+dt}^f - X_t^d S_t^d] + \Delta_b[X_{t+dt}^d B_{t+dt}^f - X_t^d B_t^d]$$

Ainsi, si X et S sont des mouvement browniens géométriques et si comme en hypothèse $Q_t^d = F(S_t^f, X_t^d, t)$ les quantités annulant les dX et dS sont :

- $\Delta_s = \frac{F_s(S_t^f, X_t^d, t)}{X_t^d}$.
- $\Delta_b = \frac{1}{B_t^f(t,T)}[S_t^f * \frac{F_s(S_t^f, X_t^d, t)}{X_t^d} - F_x(S_t^f, X_t^d, t)]$.

2.2 Notre produit

Tout comme le quanto, notre produit doit se couvrir contre des risques analogues :

- le risque de marché européen traduisant le risque que l'indice européen augmente .
- le risque de marché américain traduisant le risque que l'indice américain augmente .
- le risque de marché australien traduisant le risque que l'indice australien augmente .
- le risque de change américain traduisant le risque que le dollar s'écroule .
- le risque de change australien traduisant le risque que le dollar australien s'écroule .

Pour se couvrir, les quantités à prendre sont alors :

- Δ_e indice européen.
- Δ_u^i indice américain .
- Δ_u^z Zéro-coupon américain .
- Δ_a^i indice australien .
- Δ_a^z Zéro-coupon américain .
- le reste du prix du produit est investi dans le Zéro-coupon européen .

En effectuant le raisonnement analogue à celui de la section 2-1 et en reprenant les notations de la section 1, et en supposant comme en hypothèse que le prix du fonds vérifie $F_t = G(I_t^e, I_t^u, I_t^a, X_t^u, X_t^a, t)$

- $\Delta_e = G_{x_1}(I_t^e, I_t^u, I_t^a, X_t^u, X_t^a, t)$.
- $\Delta_u^i = \frac{G_{x_2}(I_t^e, I_t^u, I_t^a, X_t^u, X_t^a, t)}{X_t^u}$.
- $\Delta_a^i = \frac{G_{x_3}(I_t^e, I_t^u, I_t^a, X_t^u, X_t^a, t)}{X_t^a}$.
- $\Delta_u^z = \frac{1}{B_t^u}[I_t^u * \Delta_u^i - G_{x_4}(I_t^e, I_t^u, I_t^a, X_t^u, X_t^a, t)]$.
- $\Delta_a^z = \frac{1}{B_t^a}[I_t^a * \Delta_a^i - G_{x_5}(I_t^e, I_t^u, I_t^a, X_t^u, X_t^a, t)]$.

2.3 Comment approcher les dérivés

Dans une approche de Monte-Carlo, on suppose M le nombre de simulations.

En tout temps t, le prix du fond Eurostral est approché par :

$$P_t = \frac{e^{-r(T-t)}}{M} \sum_{i=0}^{M} P_{final}(s_0, ..., s_j, s_t S^i_{t_{j+1}-t}, ..., s_t S^i_{T-t})$$

où P_{final} correspond au payoff calculé pour les observations observées, $s_0, ..., s_j$ vecteur des observations des 5 variables avant t ,et $s_t S^i_{t_{j+1}-t}, ..., s_t S^i_{T-t}$ les i^{eme} simulations après t avec les lois indiquées plus hauts. La dérivée partielle par rapport à la k-ème variable est donnée par une approche de différence finie :

$$G^t_{x_k} = \frac{e^{(-r(T-t)}}{2M s_t h} \sum_{i=0}^{M} P_{final}(s_0, ..., s_j, s_t H^+_k S^i_{t_{j+1}-t}, ..., s_t H^+_k S^i_{T-t}) -$$

$$P_{final}(s_0, .., s_j, s_t H^-_k S^i_{t_{j+1}-t} .. s_t H^-_k S^i_{T-t})$$

où H^+_k, respectivement H^-_k est le vecteur avec $1 + h$ respectivement $1 - h$ en k^{eme} colonne et 1 pour les 4 autres autres colonnes .

3 Compilation

Il faut se mettre sur le répertoire build.

- Pour calculer le prix à l'instant 0 :
  ./pricer ../data/eurostral100.dat
- Pour calculer le prix à un instant t et la tracking error à un instant t :
  ./pricer -d t -c ../data/simul_eurostral.dat ../data/eurostral100.dat
- Pour calculer la P&L :
  ./pricer -c ../data/simul_eurostral.dat ../data/eurostral100.dat