

# Inleiding programmeren

1<sup>e</sup> jaar wis-, natuur- en sterrenkunde

Universiteit van Amsterdam

oktober 2013

## Opgaves bij college 4

*numerieke integratie en fitten van data*

# 1 Numeriek integreren: Riemannsom

Evalueer een integraal door het te schrijven als som van kleine rechthoekjes: een zogenaamde Riemannsom.

## a] Het probleem

Gegeven  $f(x)$  op  $a \leq x \leq b$ , bereken  $\int_a^b f(x) dx$

## b] Schrijf de integraal als Riemannsom

Verdeel het interval  $(a, b)$  in  $N$  intervallen van gelijke lengte  $\Delta x$  en representeer  $f(x)$  door de waarde van de functie  $f(x_i)$  op de x-waarden  $x_i$ :

$$f_i = f(x_i), \text{ waarbij } x_i = a + i\Delta x \quad (i = 0, 1, 2, \dots, N \text{ en } \Delta x = \frac{b-a}{N})$$

Schrijf de integraal dan als een Riemannsom:

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx \quad (1)$$

## c] Benader centrale waarde voor $f(x)$ in elke bin en doe sommatie:

Met behulp van een lineaire benadering (**de trapeziumregel**) kunnen we de centrale waarde voor  $f(x)$  benaderen in elke bin door het gemiddelde van de waarden van  $f(x)$  op de linker en rechter rand van de bin. In deze lineaire benadering op het interval  $(x_i, x_{i+1})$  is  $f(x)$  dan te schrijven als:

$$f(x) = \frac{f_{i+1} + f_i}{2} + \mathcal{O}(\Delta x)$$

De sommatie voor de integraal uit vergelijking (1) is dan te schrijven als:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\approx \frac{\Delta x}{2}(f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \dots + 2f_{N-1} + f_N) + \mathcal{O}((\Delta x)^2) \\ &\approx \Delta x(f_1 + f_2 + \dots + f_{N-1}) + \frac{\Delta x}{2}(f_0 + f_N) \end{aligned}$$

## Extra: hogere orde (meer precieze) benaderingen:

Het is mogelijk de evaluatie van de integraal te verbeteren door niet te uit te gaan van de (te simpele) lineaire benadering. De **Simpsonregel** bijvoorbeeld is een parabolische benadering (let op,  $N$ =even) waarbij  $f(x)$  op het interval  $(x_{i-1}, x_{i+1})$  wordt benaderd door een parabool door de 3 punten  $(f_{i-1}, f_i, f_{i+1})$ . Zoek op of werk zelf uit als je deze wilt gebruiken.

## 2 Numeriek integreren: Monte Carlo

Benader de integraal door gebruik te maken van random getallen. Gooi in een gebied rond de integratie regio random punten en kijk welke fractie binnen het integratiegebied valt.

### a] Het probleem:

Gegeven  $f(x)$  op  $a \leq x \leq b$ , bereken  $\int_a^b f(x) dx$ .

### b] Definieer een 'box' om de integraalregio heen:

Definieer een box om de integraalregio heen: definieer een  $x_{min}$ ,  $x_{max}$ ,  $y_{min}$  en  $y_{max}$  zodanig dat:  $x_{min} \leq a$  en  $x_{max} \geq b$  en dat ook geldt:

$$\text{voor } a \leq x \leq b : y_{min} \leq f(x) \leq y_{max}$$

In de meeste toepassingen wordt gekozen voor  $x_{min} = a$  en  $x_{max} = b$ .

### c] Gooi random punten in de box:

Gooi een groot aantal random punten  $(x_i, y_i)$  in de box en bekijk voor elk punt of het binnen de functie ligt ('goed') of erbuiten ('fout'):

$$\begin{aligned} x_i : & \quad \text{random getal tussen } x_{min} \text{ en } x_{max} \\ y_i : & \quad \text{random getal tussen } y_{min} \text{ en } y_{max} \end{aligned}$$

Is het punt 'goed' (binnen de functie) of 'fout' (buiten de functie) ?

$$\text{'goed': } y_i < f(x_i) \text{ of 'fout': } y_i > f(x_i)$$

Let op: bij negatieve  $f(x)$  draait definitie om. Visualiseer altijd de functie.

### d] Bepaal de integraal:

De integraal is de fractie punten die binnen de grafiek vallen keer de oppervlakte van de totale box. In ons geval (rechthoek als box) geldt dan:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{N_{\text{goed}}}{N_{\text{goed}} + N_{\text{fout}}} (x_{max} - x_{min})(y_{max} - y_{min})$$

### Extra:

In 'echte' toepassingen wordt voor efficiëntie maximalisatie de box zo gekozen dat hij de integraal zo nauw mogelijk omsluit: grootste fractie 'goede' worpen.

### computing hints:

- Een random getal tussen 0 en 1 krijg je door: `xi = random()`

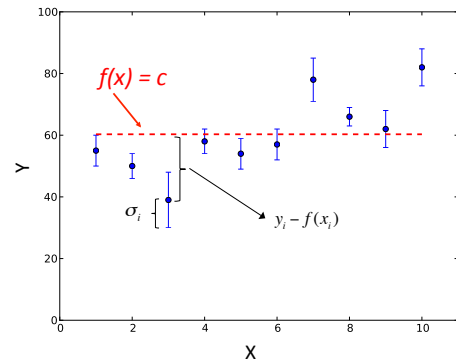
### 3 Fitten van data en foutenbepaling

Om de onderliggende fenomenen van (natuurkundige) verschijnselen te achterhalen wordt data verzameld om afhankelijkheden te onderzoeken. Dat kan de massa van het Higgs boson zijn, de vervaltijd van uranium, maar ook het aantal kinderen in een gezin als functie van de gemiddelde lengte van de ouders. Je kan dan zoeken naar een (causaal) verband: lineair, exponentieel, etc. en daarbij ook de bijbehorende parameters bepalen met hun onzekerheid. Als je een goede beschrijving hebt gevonden kan je daarmee vervolgens ook voorspellingen doen.

Om de 'beste' waarde te vinden hebben we een maat nodig om de 'goedheid' van de fit quantificeert. We doen dat hier met de  $\chi^2$ -maat: de som van de gemiddelde afwijking van de meetpunten tot het model gewogen met hun fout: 'hoeveel standaardafwijkingen ligt dit punt weg van mijn functie'.

$$\chi^2 = \sum_{i \text{ (datapunten)}} \left( \frac{y_i - f(x_i|\vec{\alpha})}{\sigma_i} \right)^2,$$

met  $\vec{\alpha}$  de vector functie-parameters.



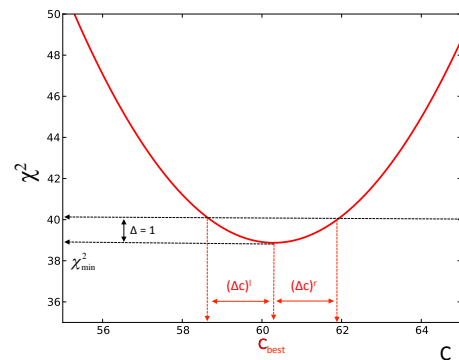
**Voorbeeld:** 1 dimensie/parameter (zie plot)  $f(x|\vec{\alpha}) = c$ .

**a) de beste waarde van c:**  $c_{\text{best}}$

De waarde van  $c$  waarbij de  $\chi^2$  minimaal is.

**b) de onzekerheid op  $c_{\text{best}}(\Delta_c)$**

De fout in de positieve richting  $(\Delta c)^r$  en negatieve richting  $(\Delta c)^l$  zijn die waardes van  $c$  waarbij de  $\chi^2$  1 hoger is dan  $\chi^2_{\text{min}}$ . In de meeste gevallen geldt  $(\Delta c)^l = (\Delta c)^r = \Delta c$



Het eindresultaat van je meting is dan:  $c = c_{\text{best}} \begin{matrix} +(\Delta c)^r \\ -(\Delta c)^l \end{matrix}$

# opgavenset 4

## opgave [1]: numeriek integreren

Bereken, gebruikmakend van de Riemannsom **en** de Monte Carlo-techniek de volgende integralen. Maak ook een grafiek met behulp van Matplotlib.

a)  $\int_0^1 x^x dx$

Hint: test je functie door te testen of je  $\int_0^1 x^2 dx$  goed voorspelt.

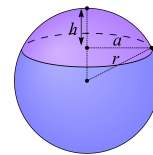
b)  $\int_{0.1}^{2.0} \sin(x) dx$

Hint: test je methode door de integraal  $\int_0^\pi \sin(x) dx$  te bepalen.

c)  $\int_0^\pi \sin(x^2) dx$

## d) hacker: volume spherical cap

Bereken voor een eenheidsbol ( $r=1$ ) de inhoud van de spherical-cap als functie van  $h$ . Maak een grafiek en plot ook de analytische waarde.



## opgave [2]: toepassing numeriek integreren: booglengte van een functie.

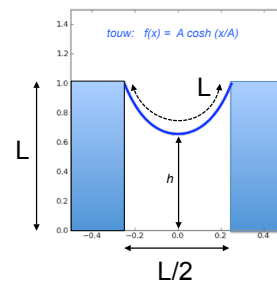
Als je de booglengte  $L$  (booglengte op wikipedia), van een functie  $f(x)$  wilt weten tussen  $x = a$  en  $x = b$  kan je die bepalen door de volgende integraal te bepalen:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

a) Bepaal de lengte van de functie  $f(x) = \sin(x)$  tussen 0 en  $2\pi$ .

## b) hacker: Indiana Jones (hangende ketting)

Een ketting die onder zijn eigen gewicht hangt heeft als functionele vorm  $f(x) = A \cosh(\frac{x}{A})$ . Voorbeelden zijn waslijnen, hoogspanningsleidingen (kettinglijn op wikipedia) etc. Als je een koord van lengte  $L$  hebt die op een hoogte  $L$  gespannen is over een overspanning met breedte  $\frac{L}{2}$ , hoe ver hangt het koord boven de grond in het minimum ( $h$ )? Gebruik in deze opgave  $L=1$ .



### opgave [3]: fitten van een model aan de data

We hebben de data-set:

$x$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$y$	55	50	39	58	54	57	78	66	62	82
$\sigma_y$	5	4	9	4	5	5	7	3	6	6

a) maak een plot van deze data met fouten

Computing tip: gebruik de functie `plt.errorbar(x,y, yerr=yerror)`

b) bereken de beste waarde van  $c$  als  $f(x) = c$  en de bijbehorende onzekerheid  $\Delta c$ .

c) Wat gebeurt er met  $\Delta c$  als de fout in elk meetpunt 2x kleiner wordt ?

Het lijkt erop of er een 'trend' zichtbaar is, dus we breiden ons model uit met een lineaire term:  $f(x) = bx + c$ .

d) bereken de beste waarden voor  $b$  en  $c$  als  $f(x) = bx + c$ .

Bij veel banken en verzekeraars werken er wis- en natuurkundigen in de risk-departments. Laten we een opgave bekijken door de eindstand van de AEX te voorspellen in het jaar 2000 gebruikmakend van de data van de AEX in de jaren 1991-1999. Er zit geen 'fout' op de standen. Zet in de  $\chi^2$ -formule de fout op de meetwaarde op 1.

jaar	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999
AEX	125.72	129.71	187.99	188.08	220.24	294.16	414.61	538.36	671.41

e) Maak een grafiek dan de eindstand van de AEX als functie van het jaar sinds 1991.

f) Fit de grafiek met een polynoom van graad 2: bereken dus de beste waarden voor  $a$ ,  $b$  en  $c$  als  $f(x) = ax^2 + bx + c$ .

Tip 1: gebruik  $x = 1, 2, 3$  i.p.v. 1991, 1992, 1993 etc.

Tip 2: probeer de waarde van  $a$ ,  $b$  en  $c$  te schatten voor je gaat fitten.

g) Wat is je voorspelling voor het jaar 2000 ? Zet beide waarden in de plot en vergelijk deze met de echte waarde in het jaar 2000. En ? Hoe kan dat ?