Métodos Numéricos

Paul Bosch, Sergio Plaza

Segundo Semestre de 2008. Versión Preliminar en Revisión

Contenidos

Capítulo 1

Ecuaciones no Lineales

En este capitulo estudiaremos uno de los problemas básicos de la aproximación numérica: *el problema de la búsqueda de raíces.* Este consiste en obtener una raíz exacta o una buena aproximación a la raíz exacta de una ecuación de la forma $f(x) = 0$, donde f es una función dada. Este es uno de los problemas de aproximación más antiguos, y sin embargo, la investigación correspondiente todavía continua. El problema de encontrar una aproximación a una raíz de una ecuación se remonta por lo menos al año 1700 a.C. Una tabla cuneiforme que pertenece a la Yale Banylonian Collection, y que data de este período, da la aproximación de $\sqrt{2}$, la cual puede calcularse con algunos de los método que veremos más adelante

1.1 Método de bisección

Este método se basa en el Teorema del Valor Intermedio, el cual enunciamos a seguir.

Teorema 1.1 (del valor intermedio) *Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Supongamos que $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos diferentes, entonces existe $r \in (a,b)$ tal que $f(r) = 0$.*

Aunque el procedimiento se aplica en el caso en que $f(a)$ y $f(b)$ tengan signos diferentes y exista más de una raíz en el intervalo (a,b), por razones de simplicidad suponemos que la raíz de este intervalo es única. El método requiere dividir varias veces en la mitad los subintervalos de $[a,b]$ y en cada paso localizar aquella mitad que contenga a la raíz r. Para comenzar consideremos $a_0 = a$ y $b_0 = b$, y sea c_0 el punto medio de $[a,b]$, es decir, $c_0 = \frac{a_0+b_0}{2}$. Si $f(c_0) = 0$, entonces $r = c_0$; si no, entonces $f(c_0)$ posee el mismo signo que $f(a_0)$ o que $f(b_0)$. Si $f(c_0)$ y $f(a_0)$ tienen igual signo, entonces $r \in (c_0, b_0)$ y tomamos $a_1 = c_0$ y $b_1 = b_0$. Si $f(c_0)$ y $f(a_0)$ tienen signos opuestos, entonces $r \in (a_0, c_0)$ y tomamos $a_1 = a_0$ y $b_1 = c_0$. Enseguida, volvemos a aplicar el proceso al intervalo $[a_1, b_1]$, y así sucesivamente.

A continuación describiremos algunos procedimientos de parada que pueden aplicarse en algún paso del algoritmo, o a cualquiera de las técnicas iterativas que se estudian en este capitulo. Se elige una tolerancia $\varepsilon > 0$ y generamos una sucesión de puntos $p_1,\ p_2, \ldots, p_N$, con $p_n \longrightarrow r$ hasta que se cumplan una de las siguientes condiciones

$$|p_N - p_{N-1}| \leqslant \varepsilon \tag{1.1}$$

$$\frac{|p_N - p_{N-1}|}{|p_N|} \leqslant \varepsilon, \quad p_N \neq 0 \tag{1.2}$$

$$|f(p_N)| \leqslant \varepsilon \tag{1.3}$$

Al usar cualquiera de estos criterios de parada pueden surgir problemas. Por ejemplo, existen sucesiones $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con la propiedad de que las diferencias $p_n - p_{n-1}$ convergen a cero, mientras que la sucesión diverge, esto se ilustra con la sucesión siguiente, sea $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión dada por $p_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, es conocido que $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge aún cuando se tiene $\lim_{n\to\infty} (p_n - p_{n-1}) = 0$. También es posible que $f(p_n)$ este cercano a cero, mientras que p_n difiere significativamente de r, como lo ilustra la siguiente sucesión. Sea $f(x) = (x-1)^{10}$, tenemos que $r = 1$, tomando $p_n = 1 + \frac{1}{n}$ es fácil ver que $|f(p_n)| < 10^{-3}$ para todo $n > 1$, mientras que $|r - p_n| < 10^{-3}$ sólo si $n > 1000$. En caso que no se conozca r, el criterio de parada (1.2) es el mejor al cual puede recurrirse, ya que verifica el error relativo.

Observe que para iniciar el algoritmo de bisección, tenemos que encontrar un intervalo $[a, b]$, de modo que $f(a) \cdot f(b) < 0$. En cada paso, la longitud del intervalo que se sabe contiene una raíz de f se reduce en un factor de $\frac{1}{2}$; por lo tanto, conviene escoger un intervalo inicial $[a, b]$ lo mas pequeño posible. Por ejemplo, si $f(x) = x^2 - 1$, entonces $f(0) \cdot f(2) < 0$ y también $f(0.75) \cdot f(1.5) < 0$, de manera que el algoritmo de bisección puede emplearse en ambos intervalos $[0, 2]$ o $[0.75, 1.5]$. Al comenzar el algoritmo de bisección en $[0, 2]$ o con $[0.75, 1.5]$, la cantidad de iteraciones necesarias para alcanzar determinada exactitud varia.

El siguiente ejemplo ilustra el algoritmo de bisección. La iteración se termina cuando el error relativo es menor que 0.0001, es decir, cuando

$$\frac{|c_n - c_{n-1}|}{|c_n|} < 10^{-4}.$$

Ejemplo 1 La ecuación $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$ posee una raíz en $[1, 2]$ ya que $f(1) = -5$ y $f(2) = 14$. El algoritmo de bisección puede ser resumido por la siguiente tabla

n	a_n	b_n	c_n	$f(c_n)$
1	1.0	2.0	1.5	2.375
2	1.0	1.5	1.25	−1.79687
3	1.25	1.5	1.375	0.16211
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
13	1.36499024	1.3671875	1.365112305	−0.00194

Después de 13 iteraciones, $c_{13} = 1.365112305$ aproxima a la raíz r con un error de $|r - c_{13}| < |b_{13} - a_{13}| = 0.000122070$, ya que $|a_{13}| < |r|$, obtenemos

$$\frac{|r - c_{13}|}{|r|} < \frac{|b_{13} - a_{13}|}{|c_{13}|} \leqslant 9 \times 10^{-5},$$

por lo tanto la aproximación será correcta por lo menos en cuatro dígitos significativos. El valor correcto de r con nueve cifras decimales correctas es $r = 1.365230013$. Observe que r_9 está más cerca de r que c_{13}. Pero lamentablemente no podemos verificar esto si no conocemos la respuesta correcta.

El método de bisección, aunque claro desde el punto de vista conceptual, ofrece inconvenientes importantes, como el de converger lentamente, es decir, la cantidad de iteraciones puede ser demasiado grande para poder obtener que c_n este lo próximo a r, además, inadvertidamente podemos desechar una aproximación intermedia. Sin embargo, tiene la importante propiedad de que siempre converge en una solución y por tal razón a menudo sirve para iniciar los métodos más eficientes que explicaremos más adelante.

1.1.1 Análisis del error

Denotemos los intervalos generados por el método de bisección por $[a_0, b_0]$, $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$, ..., de donde obtenemos que

$$a_0 \leqslant a_1 \leqslant \cdots \leqslant b_0$$

luego la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente y acotada superiormente. Tenemos también que

$$b_0 \geqslant b_1 \geqslant \cdots \geqslant a_0$$

luego la sucesión $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente y acotada inferiormente.

Por lo tanto existen los límites $\lim_{n\to\infty} a_n \leqslant b_0$ y $\lim_{n\to\infty} b_n \geqslant a_0$. Además, como

$$b_n - a_n = \frac{1}{2}\left(b_{n-1} - a_{n-1}\right) = \frac{1}{4}\left(b_{n-2} - a_{n-2}\right) = \cdots = \frac{1}{2^n}\left(b_0 - a_0\right),$$

se sigue que $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$, luego $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n = r$. Ahora como $f(a_n) f(b_n) \leqslant 0$, haciendo $n \to \infty$ se tiene que $(f(r))^2 \leqslant 0$, pues f es continua, de donde $f(r) = 0$.

Si el proceso se detiene en la iteración n, entonces f posee una raíz en el intervalo $[a_n, b_n]$ y

$$\boxed{|r - a_n| \leqslant 2^{-n}(b_0 - a_0)} \quad \text{y} \quad \boxed{|r - b_n| \leqslant 2^{-n}(b_0 - a_0)\,.} \tag{1.4}$$

Por otra parte, vemos que una mejor aproximación para la raíz r de $f(x) = 0$ es $c_n = \frac{a_n + b_n}{2}$, pues

$$\boxed{|r - c_n| \leqslant \frac{1}{2}\left(b_n - a_n\right) = 2^{-(n+1)}\left(b_0 - a_0\right)} \tag{1.5}$$

Resumiendo lo anterior, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 1.2 *Sean* $[a_0, b_0]$, $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$, ..., $[a_n, b_n]$, ... *los intervalos obtenidos en el método de bisección, entonces* $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n = r$ *y* r *es una raíz de* $f(x) = 0$. *Además, se tiene que* $|r - a_n| \leqslant 2^{-n}(b_0 - a_0)$ *y* $|r - b_n| \leqslant 2^{-n}(b_0 - a_0)$. *Por otra parte, si* $c_n = \frac{a_n + b_n}{2}$ *entonces* $r = \lim_{n\to\infty} c_n$ *y* $|r - c_n| \leqslant 2^{-(n+1)}(b_0 - a_0)$.

Es importante señalar que el teorema sólo nos proporciona una cota del error de aproximación y que esta puede ser extremadamente conservadora. Por ejemplo, cuando la aplicamos al problema del ejemplo anterior sólo garantiza que $|p - p_9| \leqslant \frac{2-1}{2^9} \approx 2 \times 10^{-3}$ pero el error real es mucho menor $|p - p_9| \approx 4.4 \times 10^{-6}$.

Ejemplo 2 Para determinar el número de iteraciones necesarias para resolver la ecuación $f(x) = 0$ donde $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$ con una exactitud de 10^{-3} en el intervalo $[1, 2]$ basta determinar un entero N tal que

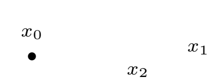
$$|c_N - r| \leqslant 2^{-(N+1)}(b-a) = 2^{-(N+1)} \leqslant 10^{-3}.$$

Aplicando logaritmo a la desigualdad $2^{-(N+1)} \leqslant 10^{-3}$ vemos que el valor del entero positivo N debe ser mayor que 9.96, por lo tanto para obtener una exactitud de 10^{-3} debemos iterar al menos 10 veces.

1.2 Método de Newton

El método Newton es uno de los métodos numéricos más populares para tratar un problema de búsqueda de raíces de una ecuación $f(x) = 0$. Una forma de introducir el método de Newton se basa en los polinomios de Taylor. En esta ocasión introduciremos el método de Newton geométricamente.

Consideremos una función derivable $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, que tiene un cero en $[a, b]$. Sea $x_0 \in (a, b)$ un punto arbitrario.



Para determinar la intersección x_1 de la recta tangente al gráfico de f en el punto $(x_0, f(x_0))$ con el eje x basta observar que dicha recta tiene por ecuación

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

así la intersección con eje x está dada por $-f(x_0) = f'(x_0)(x_1 - x_0)$, despejando x_1 obtenemos

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad ,$$

si $f'(x_0) \neq 0$. Aplicamos ahora este procedimiento comenzando con x_1, para determinar la intersección x_2 de la recta tangente al gráfico de f en el punto $(x_1, f(x_1))$ con el eje x basta observar que dicha recta tiene por ecuación

$$y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1)$$

así la intersección con eje x esta dada por $-f(x_1) = f'(x_1)(x_2 - x_1)$, despejando x_2 obtenemos

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \quad ,$$

si $f'(x_1) \neq 0$. De modo análogo, si comenzamos con el punto x_2, obtenemos un punto x_3 dado por

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$$

si $f'(x_2) \neq 0$, y así sucesivamente. Este procedimiento da lugar a un proceso iterativo llamado *método de Newton*, dado por

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}} \tag{1.6}$$

si $f'(x_n) \neq 0$.

Ejemplo 3 Sea $f(x) = \frac{1}{x} - 1$. La ecuación $f(x) = 0$ tiene una raíz $r = 1$ en el intervalo $[0.5, 1]$ ¿Qué ocurre al aplicar el método de Newton con $x_0 = 0.5$? Realizando los cálculos numericamente, tenemos

k	0	1	2	3	4
x_k	0.5	0.75	0.9374999998	0.9960937501	0.9999847417

1.2.1 Análisis del Error

El error en el paso n es definido como

$$\boxed{e_n = x_n - r} \tag{1.7}$$

Supongamos ahora que f'' es continua y que r es un cero simple de f, es decir, $f(r) = 0$ y $f'(r) \neq 0$. Entonces tenemos que

$$e_{n+1} = x_{n+1} - r = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - r = (x_n - r) - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = e_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \frac{e_n f'(x_n) - f(x_n)}{f'(x_n)}$$

por otro lado se tiene que

$$0 = f(r) = f(x_n - e_n) \overset{\text{Taylor}}{=} f(x_n) - e_n f'(x_n) + \frac{1}{2} e_n^2 f''(\xi_n)$$

donde ξ_n está entre x_n y r. De esta última ecuación obtenemos

$$e_n f'(x_n) - f(x_n) = f''(\xi_n)\,\frac{e_n^2}{2}.$$

Luego

$$\boxed{e_{n+1} = \frac{1}{2}\frac{f''(\xi_n)}{f'(x_n)}e_n^2 \approx \frac{1}{2}\frac{f''(r)}{f'(r)}e_n^2 = Ce_n^2} \tag{1.8}$$

Podemos formalizar lo anterior como sigue, si e_n es pequeño y $\frac{f''(\xi_n)}{f'(x_n)}$ no es muy grande, entonces e_{n+1} será más pequeño que e_n.

Definamos

$$C(\delta) = \frac{1}{2}\,\frac{\max\limits_{|x-r|<\delta} |f''(x)|}{\min\limits_{|x-r|<\delta} |f'(x)|} \tag{1.9}$$

donde $\delta > 0$ es tal que $|f'(x)| > 0$ para $|x-r| < \delta$. Se tiene entonces que $C(\delta) \longrightarrow \left|\frac{f''(r)}{2f'(r)}\right|$. Denotemos $\rho = \delta\, C(\delta)$. Comenzando las iteraciones del método de Newton con x_0 tal que $|e_0| = |x_0 - r| < \delta$ obtenemos una sucesión x_1, $x_2, \ldots, x_n, \ldots$

$$\begin{aligned}
&|e_1| = |x_1 - r| \leqslant \rho\,|e_0| \\
&|e_2| = |x_2 - r| \leqslant |e_1|\,\rho \leqslant \rho^2\,|e_0| \\
&\vdots \\
&|e_n| = |x_n - r| \leqslant \rho^n\,|e_0| \longrightarrow 0, \quad \text{cuando } n \longrightarrow \infty
\end{aligned}$$

así hemos obtenido el siguiente resultado.

Teorema 1.3 *Si f'' es continua y r es un cero simple de f, es decir, $f(r) = 0$ y $f'(r) \neq 0$, entonces existe un intervalo abierto J conteniendo a r y una constante $C > 0$ tal que si el método de Newton se inicia con un punto en J, se tiene*

$$|x_{n+1} - r| \leqslant C\,(x_n - r)^2.$$

Teorema 1.4 *Si f'' es continua, y f es creciente, convexa y tiene un cero, entonces este cero es único y la iteración del método de Newton converge a él a partir de cualquier punto inicial.*

El siguiente teorema sobre la conducta local del método de Newton muestra que ella es muy buena, pero como veremos despues, desde el punto de vista global no lo es tanto.

Teorema 1.5 *Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable. Si $f'(x_0) \neq 0$, definimos $h_0 = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$, $x_1 = x_0 + h_0$, $J_0 = [x_1 - |h_0|, x_1 + |h_0|]$ y $M = \sup_{x\in J_0} |f''(x)|$. Si $2\left|\frac{f(x_0)M}{(f'(x_0))^2}\right| < 1$ entonces la ecuación $f(x) = 0$ tiene una única solución en J_0 y el método de Newton con condición inicial x_0 converge a dicha solución.*

Teorema 1.6 *En las condiciones del teorema anterior, el método de Newton tiene convergencia cuadrática, esto es,* $|h_{k+1}| \leqslant \frac{M}{|f'(x_k)|}|h_k|^2$.

Ejemplo 4 Sea $f(x) = x^3 - 2x - 5$. Tomando $x_0 = 2$, tenemos $f(x_0) = -1$, $f'(x_0) = 10$, $h_0 = 0.1$ y $J_0 = [2\,,\, 2.2]$, puesto que $f''(x) = 6x$ sobre J_0 el supremo M es 13.2. Como $\left|\frac{Mf(x_0)}{(f'(x_0))^2}\right| = 0.132 < 0.5 < 1$, el teorema garantiza que existe una raíz de la ecuación $f(x) = 0$ en el intervalo $[2\,,\,2.2]$, y en consecuencia el método de Newton con condición inicial $x_0 = 2$ converge a dicha raíz.

Observación. Podemos usar como criterios de paradas unos de los siguientes. Seleccione una tolerancia $\varepsilon > 0$ y construya $p_1, p_2, \ldots, p_N$ hasta que se cumpla una de las siguientes desigualdades

$$|p_N - p_{N-1}| \leqslant \varepsilon \tag{1.10}$$

$$\left|\frac{p_N - p_{N-1}}{p_N}\right| \leqslant \varepsilon, \quad p_N \neq 0 \tag{1.11}$$

o bien

$$|f\,(x_N)| \leqslant \varepsilon. \tag{1.12}$$

El método de Newton es una técnica de iteración funcional de la forma $x_{n+1} = g\,(x_n)$, donde

$$x_{n+1} = g\,(x_n) = N_f(x_n) = x_n - \frac{f\,(x_n)}{f'\,(x_n)}, \quad n \geqslant 0.$$

En esta ecuación se observa claramente que no podemos continuar aplicando el método de Newton si $f'\,(x_n) = 0$ para algún n. Veremos que este método es más eficaz cuando $f'\,(r) > 0$.

Verificación de condiciones de convergencia. Cuando queremos aplicar en la práctica las condiciones de convergencia del método de Newton, tenemos el problema que no conocemos exactamente la raíz r de la ecuación $f(x) = 0$. Recordemos que las condiciones de convergencia del método de Newton en un intervalo abierto $J \ni r$ son: $f(r) = 0$; $f'(r) \neq 0$ y f'' continua. Para verificar que estas condiciones se cumplen cuando tomamos aproximaciones x_n para la raíz r, y procedemos como sigue. Verificamos

1. f'' es continua (esta condición depende sólo de la función f y no de las aproximaciones a la raíz).

2. Tomanos las aproximaciones x_n dadas dadas por el método de Newton, y aplicando un criterio de parada, obtenemos una aproximación x_N.

3. Para x_N verificamos que $f(x_N) \approx 0$ y $f'(x_N) \neq 0$.

4. Usando la continuidad de f y de sus derivadas, concluimos que existe un intervalo J que contiene a r tal que si $x_0 \in J$, entonces la sucesión de aproximaciones dada por el método de Newton convergen a la raíz r buscada.

Ejemplo 5 Para aproximar la solución de la ecuación $x = \cos(x)$, consideremos $f(x) = \cos(x) - x$. Tenemos $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2} < 0 < 1 = f(0)$, luego y por el Teorema del Valor Intermedio, existe un cero de f en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Aplicando el método de Newton obtenemos

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\cos(x_n) - x_n}{-\operatorname{sen}(x_n) - 1}, \quad n \geqslant 0.$$

En algunos problemas es suficiente escoger x_0 arbitrariamente, mientras que en otros es importante elegir una buena aproximación inicial. En el problema en cuestión, basta analizar las gráficas de $h(x) = x$ y $k(x) = \cos(x)$ por lo que es suficiente considerar $x_0 = \frac{\pi}{4}$, y así obtenemos una excelente aproximación con sólo tres pasos, como muestra la siguiente tabla.

n	x_n
0	0.7853981635
1	0.7395361337
2	0.7390851781
3	0.7390851332
4	0.7390851332

Para asegurarnos que tenemos convergencia, verifiquemos esas condiciones. Tenemos que $f(x) = \cos(x) - x$, luego $f''(x) = -\cos(x)$, la cual es continua, ahora evaluando $f'(x)$ en el punto $x = 0.7390851332$ (en radianes) que es una aproximación a la raíz verdadera, se tiene el valor no cero siguiente, $f'(0.7390851332) = -\operatorname{sen}(0.7390851332) - 1 = -1.012899111\ldots \neq 0$.

Ejemplo 6 Para obtener una solución de la ecuación de $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ en el intervalo $[1, 2]$ mediante el método de Newton, generamos la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada por

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 + 4x_n^2 - 10}{3x_n^2 + 8x_{n-1}}, \quad n \geqslant 0$$

Tomando $x_0 = 1.5$ como condición inicial se obtiene el resultado $x_3 = 1.36523001$ este es correcto en ocho cifras decimales.

Para asegurarnos que tenemos convergencia, verifiquemos esas condiciones. Tenemos que $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$, luego $f''(x) = 6x + 8$, la cual es continua. Ahora evaluando $f'(x)$ en el punto $x_3 = 1.36523001$, que es una aproximación a la raíz verdadera, se tiene el valor no cero siguiente, $f'(1.36523001) = 3(1.36523001)^2 + 8 \cdot 1.36523001 = 16.1339902\ldots \neq 0$.

Ejemplo 7 Si queremos resolver $x^3 - x - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$ utilizando el método de Newton y comenzamos las iteraciones con $x_0 = 0.001$ obtenemos una sucesión que oscila entre valores cercanos a 0 y a $\frac{\sqrt{2}}{2}$, y de hecho, si comenzamos con la condición inicial $x_0 = 0$ obtenemos el ciclo periódico $\left\{0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$, es decir, $N_f(0) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ y $N_f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$.

1.3 Método de Newton multivariable

Consideremos el sistema de ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1\left(x_1, x_2\right) = 0 \\ f_2\left(x_1, x_2\right) = 0. \end{array} \right. \tag{1.13}$$

Si (x_1, x_2) es una solución aproximada y $(x_1 + h_1, x_2 + h_2)$ es la solución exacta, aplicando Taylor obtenemos

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = f_1\left(x_1 + h_1, x_2 + h_2\right) \approx f_1\left(x_1, x_2\right) + h_1 \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} + h_2 \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \\ 0 = f_2\left(x_1 + h_1, x_2 + h_2\right) \approx f_2\left(x_1, x_2\right) + h_1 \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} + h_2 \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \ . \end{array} \right.$$

Denotemos el jacobiano de $F\left(x_1, x_2\right) = \left(f_1\left(x_1, x_2\right), f_2\left(x_1, x_2\right)\right)$ por $J(f_1, f_2)$, es decir,

$$J(f_1, f_2) = \left(\begin{array}{cc} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{array} \right), \tag{1.14}$$

obtenemos

$$J(f_1, f_2)(x_1, x_2) \left(\begin{array}{c} h_1 \\ h_2 \end{array} \right) = - \left(\begin{array}{c} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{array} \right) \tag{1.15}$$

de donde, si $\det(J(f_1, f_2)(x_1, x_2) \neq 0$, se tiene que

$$\left(\begin{array}{c} h_1 \\ h_2 \end{array} \right) = -J^{-1}(f_1, f_2)\left(x_1, x_2\right) \left(\begin{array}{c} f_1\left(x_1, x_2\right) \\ f_2\left(x_1, x_2\right) \end{array} \right)$$

con lo cual podemos definir el siguiente proceso iterativo

$$\left(\begin{array}{c} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} h_1 \\ h_2 \end{array} \right) \tag{1.16}$$

donde $\left(\begin{array}{c} h_1 \\ h_2 \end{array} \right)$ es la colución de la ecuaciónn lineal (1.15). Lo anterior puede ser escrito en forma más explícita como

$$\boxed{\left(\begin{array}{c} x_1^{(k+1)} \\ \\ x_2^{(k+1)} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} x_1^{(k)} \\ \\ x_2^{(k)} \end{array} \right) - \left(\begin{array}{cc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}\right) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}\right) \\ \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}\right) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}\right) \end{array} \right)^{-1} \left(\begin{array}{c} f_1\left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}\right) \\ \\ f_2\left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}\right) \end{array} \right)} \tag{1.17}$$

Observe que esta formulación es, sin embargo, poco útil para realizar los cálculos, ya que es poco práctico calcular la inversa de la matriz jacobiana. Sin embargo para sistemas de 2×2 es fácil obtener. Realizando las operaciones tenemos que

$$\boxed{\begin{array}{l} x_1^{(n+1)} = x_1^{(n)} - \dfrac{f_1\left(x_1^{(n)},x_2^{(n)}\right)\dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}\left(x_1^{(n)},x_2^{(n)}\right) - f_2\left(x_1^{(n)},x_2^{(n)}\right)\dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}\left(x_1^{(n)},x_2^{(n)}\right)}{\det(J(f_1,f_2)(x_1^{(n)},x_2^{(n)}))} \\ \\ x_2^{(n+1)} = x_2^{(n)} - \dfrac{f_2\left(x_1^{(n)},x_2^{(n)}\right)\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}\left(x_1^{(n)},x_2^{(n)}\right) - f_1\left(x_1^{(n)},x_2^{(n)}\right)\dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}\left(x_1^{(n)},x_2^{(n)}\right)}{\det(J(f_1,f_2)(x_1^{(n)},x_2^{(n)}))} \end{array}} \tag{1.18}$$

donde

$$\det J(f_1,f_2)\left(x_1^{(n)},x_2^{(n)}\right)$$

representa el determinante de la matriz Jacobiana, evaluada en el punto $\left(x_1^{(n)},x_2^{(n)}\right)$.

Condiciones de convergencia del método de Newton multivariable. Supongamos que $f_1(r_1,r_2)=f_2(r_1,r_2)=0$, $\det(J(f_1,f_2)(r_1,r_2))\neq 0$ y la derivadas parciales segundas $\dfrac{\partial^2 f_1}{\partial x_1^2}$, $\dfrac{\partial^2 f_1}{\partial x_1 \partial x_2}$, $\dfrac{\partial^2 f_1}{\partial x_2^2}$, $\dfrac{\partial^2 f_2}{\partial x_1^2}$, $\dfrac{\partial^2 f_2}{\partial x_1 \partial x_2}$, $\dfrac{\partial^2 f_2}{\partial x_2^2}$ son continuas. Entonces existe un conjunto abierto $U \ni (r_1,r_2)$, tal que si $(x_1^0,x_2^0)\in U$ entonces el método de Newton comenzando con ese punto converge a (r_1,r_2).

Observación. En la práctica, comenzamos con $(x_1^{(0)},x_2^{(0)})$ adecuados y generamos la sucesión dada por el método de Newton hasta satisfacer algún criterio de parada, obteniendo un punto $(x_1^{(N)},x_2^{(N)})$. Verificamos entonces las condiciones para ese punto, es decir, $f_i(x_1^{(N)},x_2^{(N)})\approx 0$, $i=1,2$, $\det J(f_1,f_2)(x_1^{(N)},x_2^{(N)})\neq 0$. La condición de continuidad de las segundas derivadas parciales de f_1 y f_2 no depende de la sucesión de puntos generada. Si las condiciones son satisfechas para $(x_1^{(N)},x_2^{(N)})$, entonces existe un conjunto abierto $U\subset\mathbb{R}^2$, con $U\ni(r_1,r_2)$, tal que si $(x_1^0,x_2^0)\in U$, entonces la sucesión generada por el método de Newton converge a (r_1,r_2).

Desde el punto de vista computacional, es mas conveniente y práctico usar las ecuaciones (1.15) y (1.16) como una descompsición del método de Newton, en vez de las ecuaciones dadas en (1.17) o en su forma explícita (1.18).

Siguiendo la idea anterior, si deseamos resolver el sistema de ecuaciones no lineales

$$\left\{\begin{array}{rcl} f_1(x_1,x_2,\ldots,x_n) & = & 0 \\ f_2(x_1,x_2,\ldots,x_n) & = & 0 \\ & \vdots & \\ f_n(x_1,x_2,\ldots,x_n) & = & 0 \end{array}\right. \tag{1.19}$$

usamos el siguiente algoritmo:

Dado $\mathbf{x}^{(0)}=(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\ldots,x_n^{(0)})$.

Primero. Resolvemos el sistema de ecuaciones lineales

$$J_k(f_1, f_2, \ldots, f_n) \begin{pmatrix} h_1^{(k)} \\ h_2^{(k)} \\ \vdots \\ h_n^{(k)} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} f_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}) \\ f_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}) \\ \vdots \\ f_n(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}) \end{pmatrix} \tag{1.20}$$

para $H^{(k)} = (h_1^{(k)}, h_2^{(k)}, \ldots, h_n^{(k)})^T$, donde $J_k(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ denota el jacobiano de $F = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ evaluado en el punto $(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)})$.

Segundo. Realizamos la iteración

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + H^{(k)} \tag{1.21}$$

donde $\mathbf{x}^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)})$, y así sucesivamente hasta satisfacer alguna condición de parada.

Ejemplo 8 Consideremos el siguiente sistema

$$\begin{cases} f\,(x,y) = x^2 y - xy^2 - 0.8 = 0 \\[2ex] g\,(x,y) = \dfrac{x^2}{y^2} - 1 - \dfrac{x^2}{2} = 0 \end{cases}$$

y encontremos sus raíces.

Aplicando el método de Newton multivariable, primero calculamos las derivadas parciales de cada función obteniendo

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy - y^2 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - 2xy$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{2x}{y^2} - x \qquad \frac{\partial g}{\partial y} = -\frac{2x^2}{y^3}$$

aplicando la fórmula anterior nos queda

$$x_{n+1} = \frac{-3x_n^2 y_n + 2\,(x_n y_n)^2 - 0.5\,(x_n y_n)^3 - x_n^2 y_n^4 - 1.6x_n - x_n y_n^3 + 2y_n^2}{x_n y_n\,(-6x_n + 6y_n + x_n y_n^2 - 2y_n^3)}$$

$$y_{n+1} = \frac{-6x_n^3 y_n + 5\,(x_n y_n)^2 + (x_n y_n)^3 - 1.5x_n^2 y_n^4 + 2x_n y_n^3 - y_n^4 - 1.6x_n + 8x_n y_n^2}{x_n^2\,(-6x_n + 6y_n + x_n y_n^2 - 2y_n^3)}$$

La siguiente tabla muestra los resultados obtenidos con el método de Newton multivariable

Se puede notar la rapidez a la cual converge el método, ya que en solamente 6 iteraciones se tiene un valor $(x_6, y_6) = (1.54030, 1.04173)$ para el cual $f\,(1.54030, 1.04173) \approx 0$ y $g\,(1.54030, 1.04173) \approx 0$, por otra parte, es claro que las segundas derivadas parciales de f y de g son continuas, pues ambas funciones son polinomios en las variables (x, y) . Tenemos también que

Iter.	x	y	$f(x,y)$	$g(x,y)$	$\vert J\vert$
0	1	1	-0.8	-0.5	-1
1	2.1	1.3	1.384	-0.59553	-14.7304
2	1.68036	1.11139	0.26257	-0.12583	-9.33548
3	1.55237	1.04843	0.02019	-0.01257	-7.94105
4	1.54040	1.04178	0.00016	-0.00011	-7.82963
5	1.54030	1.04173	1.06×10^{-8}	-6.9×10^{-9}	-7.82874
6	1.54030	1.04173	2.22×10^{-16}	6.66×10^{-16}	-7.82874

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_6,y_6) = 2x_6y_6 - y_6^2 = 2.22631238 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x_6,y_6) = x_6^2 - 2x_6y_6 = -0.85378829$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_6,y_6) = \frac{2x_6}{y_6^2} - x_6 = 1.1401168538 \qquad \frac{\partial g}{\partial y}(x_6,y_6) = -\frac{2x_6^2}{y_6^3} = -4.130734823$$

luego

$$\det J(f,g)(x_6,y_6) = \det\begin{pmatrix} 2.22631238 & -0.85378829 \\ 1.1401168538 & -4.130734823 \end{pmatrix} = -4.486785689\,,$$

por lo tanto el método iterativo de Newton es convergente en una vecindad de la solución exacta (x_T, y_T) del sistema.

1.4 Método de la secante

El método de Newton es uno de los más utilizados para resolver ecuaciones no lineales, pero presenta un problema, a saber, la necesidad de conocer el valor de la derivada de f en cada paso de la aproximación. Con frecuencia es más difícil calcular $f'(x)$ y se requieren más operaciones aritméticas para calcularla que para $f(x)$, además esto debemos hacerlo computacionalmente, lo que involucra aproximaciones numéricas para la derivada, lo cual a veces es un proceso numericamente inestable. Para evitar el problema de evaluar la derivada en el método de Newton, deducimos otro método, llamado *método de la secante*. Su dedución puede ser hecha geométricamente o usando aproximación para la derivada. Veamos esta última alternativa. Por definición, tenemos

$$f'(x_n) = \lim_{x\to x_n} \frac{f(x) - f(x_n)}{x - x_n}.$$

Haciendo $x = x_{n-1}$, nos queda

$$f'(x_n) \approx \frac{f(x_{n-1}) - f(x_n)}{x_{n-1} - x_n} = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}.$$

Al aplicar esta aproximación para $f'(x_n)$ en la formula de Newton, se obtiene método iterativo de la secante

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})},} \tag{1.22}$$

el cual depende siempre de los valores de dos iteraciones anteriores, y como valores iniciales se tienen x_0 y x_1, los cuales deben ser elegidos con cierto criterio para tener la convergencia del método, por ejemplo, $f(x_0)\cdot f(x_1)<0$, de este modo nos aseguramos que existe una raíz de f entre x_0 y x_1.

Geométricamente, si comenzamos con las aproximaciones iniciales x_0 y x_1 de r, la aproximación x_2 es la intersección del eje x y la recta que une los puntos $(x_1, f(x_1))$ y $(x_0, f(x_0))$. La aproximación x_3 es la intersección con el eje x y la recta que une los puntos $(x_1, f(x_1))$ y $(x_2, f(x_2))$, y así sucesivamente.

Las condiciones para garantizar la convergencia del método de la secante en un intervalo abierto J que contiene a la raíz r de la ecuación $f(x)=0$, son las misma que se usan en el método de Newton, es decir, f'' debe ser continua y $f'(r)\neq 0$, pero como en general no conocemos r en forma exacta verificamos si $f(x_n)\approx 0$ y $f'(x_n)\neq 0$, donde x_n es nuestra aproximación a la raíz.

El siguiente ejemplo incluye un problema que vimos en un ejemplo anterior.

Ejemplo 9 Usando el método de la secante determinemos una raíz de $f(x)=\cos(x)-x$. En el ejemplo desarrollado anteriormente, usamos la aproximación inicial $x_0=\frac{\pi}{4}$. Ahora necesitamos dos aproximaciones iniciales. En la siguiente tabla aparecen los cálculos con $x_0=0.5$ y $x_1=\frac{\pi}{4}$, y la fórmula

$$x_{n+1}=x_n-\frac{(x_n-x_{n-1})(\cos(x_n)-x_n)}{(\cos(x_n)-x_n)-(\cos(x_{n-1})-x_{n-1})},\quad n\geqslant 1.$$

n	x_n
0	0.5
1	0.7853981635
2	0.7363841388
3	0.7390581392
4	0.7390851493
5	0.7390851332

Observación. Al comparar los resultados de ahora con los del ejemplo anterior observamos que x_5 es exacto hasta la décima cifra decimal. Nótese que la convergencia del método de la secante es un poco más lenta en este caso que en el método de Newton, en el cual obtuvimos este grado de exactitud con x_3. Este resultado generalmente es verdadero.

El método de Newton o el método de la secante a menudo se usan para refinar las respuestas conseguidas con otra técnica, como el método de bisección. Dado que el método de Newton requiere de una buena aproximación inicial, pero por lo general da una convergencia más rápida, sirve perfectamente para el propósito antes mencionado.

1.4.1 Análisis del error

Recordemos que el error en el paso n es definido como $e_n=x_n-r$. Ahora como

$$x_{n+1}=x_n-f(x_n)\frac{(x_n-x_{n-1})}{f(x_n)-f(x_{n-1})}=\frac{x_{n-1}f(x_n)-x_nf(x_{n-1})}{f(x_n)-f(x_{n-1})}$$

obtenemos

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= x_{n+1} - r \\ &= \frac{x_{n-1}f(x_n) - x_n f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})} - r \\ &= \frac{f(x_n)(x_{n-1} - r) - f(x_{n-1})(x_n - r)}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \\ &= \frac{f(x_n)e_{n-1} - f(x_{n-1})e_n}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \end{aligned}$$

podemos escribir ahora

$$e_{n+1} = \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \frac{\frac{f(x_n)}{e_n} - \frac{f(x_{n-1})}{e_{n-1}}}{x_n - x_{n-1}} e_n e_{n-1}.$$

Aplicando Taylor tenemos que

$$f(x_n) = f(r + e_n) = \underbrace{f(r)}_{=0} + e_n f'(r) + \frac{e_n^2}{2} f''(r) \ ,$$

luego $\frac{f(x_n)}{e_n} \approx f'(r) + \frac{e_n}{2} f''(r)$ y $\frac{f(x_{n-1})}{e_{n-1}} \approx f'(r) + \frac{e_{n-1}}{2} f''(r)$ de donde

$$\frac{f(x_n)}{e_n} - \frac{f(x_{n-1})}{e_{n-1}} \approx \frac{1}{2}(e_n - e_{n-1}) f''(r) \ .$$

Observemos que $x_n - x_{n-1} = e_n - e_{n-1}$, por lo tanto

$$\frac{\frac{f(x_n)}{e_n} - \frac{f(x_{n-1})}{e_{n-1}}}{x_n - x_{n-1}} \approx \frac{1}{2} f''(r)$$

y como $\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \cong \frac{1}{f'(r)}$, finalmente tenemos

$$\boxed{e_{n+1} \approx \frac{1}{2} \frac{f''(r)}{f'(r)} e_n e_{n-1} = C e_n e_{n-1}} \tag{1.23}$$

1.5 Método de la posición falsa

Este método es conocido también como método de *Regula Falsi*, con el generamos aproximaciones del mismo modo que el de la secante, pero mezclado con el método de bisección, ofrece por lo tanto una prueba para asegurarse de que la raíz quede entre dos iteraciones sucesivas.

Primero elegimos las aproximaciones iniciales x_0 y x_1 con $f(x_0) \cdot f(x_1) < 0$. La aproximación x_2 se escoge de la misma manera que en el método de la secante. Para determinar con cual secante calculamos x_3 verificamos el signo de $f(x_2) \cdot f(x_1)$, si este valor es negativo entonces $[x_1, x_2]$ contiene una raíz y eligiremos x_3 como la intersección del eje x con la recta que une $(x_1, f(x_1))$ y $(x_2, f(x_2))$; si no elegimos x_3 como la intersección del eje x con la recta que une $(x_0, f(x_0))$ y $(x_2, f(x_2))$.

Ejemplo 10 La siguiente tabla contiene los resultados del método de Regula Falsi aplicado a la función $f(x) = \cos(x) - x$ con las mismas aproximaciones iniciales que utilizamos para el método de la secante en el Ejemplo 9. Nótese que las aproximaciones son iguales en x_3 y que en el método de Regula Falsi requiere una iteración más para alcanzar la misma exactitud que la de la Secante.

n	x_n
0	0.5
1	0.7353981635
2	0.7363841388
3	0.7390581392
4	0.7390848638
5	0.7390851305
6	0.7390851332

1.6 Métodos iterativos de punto fijo

Describimos ahora otro tipo de métodos para encontrar raíces de ecuaciones, nos referimos a algunos *métodos iterativos de punto fijo.*

Un *punto fijo* de una función g es un punto p para el cual $g(p) = p$. En esta sección estudiaremos el problema de encontrar las soluciones a los problemas de punto fijo y la conexión entre estos y la búsqueda de la raíz que deseamos resolver.

El problemas de búsqueda de raíces y el problema de punto fijo son clases equivalentes en el siguiente sentido

"Dado un problema de buscar una raíz de $f(x) = 0$, podemos definir una función g con un punto fijo en p de diversas formas; por ejemplo, como $g(x) = x - f(x)$ o como $g(x) = x + 3f(x)$. Si la función g tiene un punto fijo en p, es decir, $g(p) = p$, entonces la función definida, por ejemplo, como $g(x) = x + f(x)$ o más general $g(x) = x + \psi(x)f(x)$, con $\psi(p) \neq 0$, tiene un cero en p"

Aunque los problemas que deseamos resolver vienen en forma de búsqueda de raíces, la forma de método iterativo de punto fijo puede ser más fácil de analizar; algunas opciones de punto fijo dan origen a técnicas poderosas de búsqueda de raíces.

Lo primero que debemos de hacer es acostumbrarnos a este tipo de problema, y decidir cuando una función tiene un punto fijo y cómo podemos aproximar los puntos fijos con determinado grado de precisión.

Ejemplo 11 Resolver la ecuación $3x^2 - e^x = 0$ es equivalente a $3x^2 = e^x$. Graficamente, vemos que existe una solución $x > 0$, la cual es la intersección de los gráficos de las funciones $f(x) = 3x^2$ y $g(x) = e^x$.

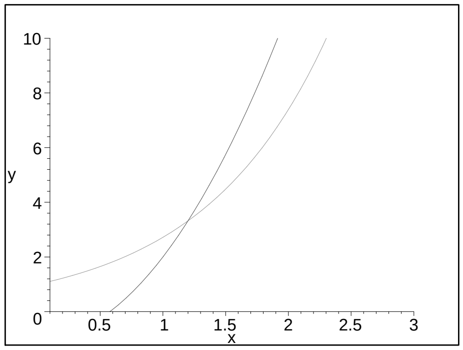


gráfico de $f(x) = 3x^2$ y $g(x) = e^x$

Despejando, obtenemos las funciones $x = \psi_1(x) = \log(3x^2)$, $x = \psi_2(x) = \frac{e^x}{3x}$, $x = \psi_3(x) = \frac{\sqrt{3}}{3} e^{x/2}$, etc.

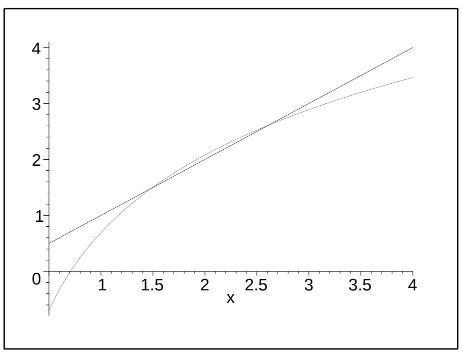


gráfico de $\psi_1(x) = \log(3x^2)$

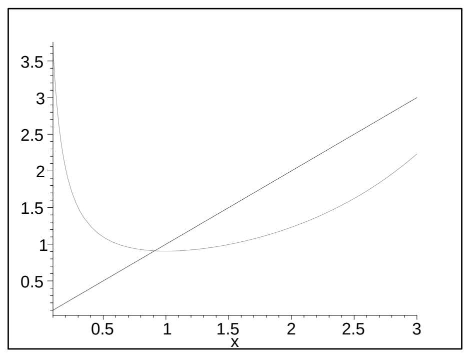


gráfico de $\psi_2(x) = \frac{e^x}{3x}$

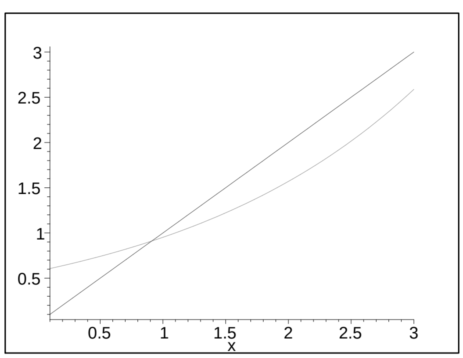


gráfico de $\psi_3(x) = \frac{\sqrt{3}}{3} e^{x/2}$

Ejemplo 12 La función $g\,(x) = x^2 - 2$ para $-2 < x < 3$, posee puntos fijos en $x = -1$ y $x = 2$, como se puede ver fácilmente resolviendo la ecuación cuadrática $g(x) = x$.

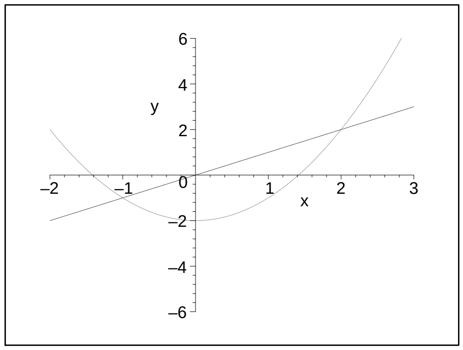


gráfico de $g(x) = x^2 - 2$

Para el problema de existencia de punto fijo, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 1.7 *Sea $g : [a,b] \longrightarrow [a,b]$ una función continua, entonces g posee un punto fijo en $[a,b]$.*

Demostración. Usamos el Teorema del Valor Intermedio, para lo cual definimos la función $h(x) = g(x) - x$. Tenemos, $h(a) = g(a) - a \geqslant 0$ y $h(b) = g(b) - b \leqslant 0$, y siendo h continua, se sigue existe $c \in [a,b]$ tal que $h(c) = 0$, es decir, $g(c) = c$.

El siguiente teorema contiene condiciones suficientes para la existencia y unicidad del punto fijo.

Corolario 1.1 *Supongamos que $g : [a,b] \longrightarrow [a,b]$ es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b). Supongamos también que existe una constante positiva $0 \leqslant \lambda < 1$ con $|g'(x)| \leqslant \lambda$, para todo $x \in (a,b)$ ($\lambda = \max\{|g'(x)| \ : \ x \in [a,b]\}$), entonces el punto fijo x_g de g en $[a,b]$ es único. Además, si elegimos $x_0 \in (a,b)$ arbitrario, entonces la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por*

$$x_{n+1} = g(x_n), \ n \geqslant 0$$

converge al único punto fijo x_g de g.

Más general, si $g : [a,b] \longrightarrow [a,b]$ es tal que $|g(x) - g(y()| \leqslant \lambda |x - y|$ para todo $x, y \in [a,b]$, con $0 \leqslant \lambda < 1$, entonces g tiene un único punto fijo $x_g \in [a,b]$. Además, dado $x_0 \in [a,b]$, la sucesión

$$x_{n+1} = g(x_n), \ n \geqslant 0$$

converge a x_g.

Demostración. Por el teorema anterior sabemos que g tiene un punto fijo. Ahora como $|g'(x)| \leqslant \lambda < 1$, por el Teorema del Valor Medio, tenemos

$$|g(x) - g(y)| = |g'(c)| \ |x - y| \leqslant \lambda |x - y|$$

para todo $x, y \in [a,b]$, donde c está entre x e y. Ahora bien, supongamos que existen dos puntos fijos x_g y $\overline{x}_g$ para g. Tenemos entonces que

$$|x_g - \overline{x}_g| = |g(x_g) - g(\overline{x}_g)| \leqslant \lambda |x_g - \overline{x}_g|$$

y como $0 \leqslant \lambda < 1$, se debe tener que $x_g = \overline{x}_g$.

Ahora, tenemos

$$\begin{aligned}
|x_n - x_g| &= |g(x_{n-1}) - g(x_g)| \leqslant \lambda |x_{n-1} - x_g| \\
|x_{n-1} - x_g| &= |g(x_{n-2}) - g(x_g)| \leqslant \lambda |x_{n-2} - x_g| \\
|x_{n-2} - x_g| &= |g(x_{n-3}) - g(x_g)| \leqslant \lambda |x_{n-3} - x_g| \\
&\vdots \\
|x_1 - x_g| &= |g(x_0) - g(x_g)| \ \leqslant \lambda |x_0 - x_g| \ ,
\end{aligned}$$

de donde obtenemos que $|x_n - x_g| \leqslant \lambda^n |x_0 - x_g|$ y como $\lambda^n \longrightarrow 0$ cuando $n \longrightarrow \infty$, el resultado se sigue.

Observación. El teorema anterior no sólo nos dice que bajo sus condiciones existe un punto fijo único, además nos dice cómo podemos encontrarlo, usando la sucesión generada a partir de la función g con una condición inicial arbitraria.

Corolario 1.2 *Si g satisface las hipótesis del Teorema anterior, cotas para el error que supone utilizar x_n para aproximar x_g son dadas por*

$$\boxed{|x_n - x_g| \leqslant \lambda^n \max\{x_0 - a,\, b - x_0\}} \tag{1.24}$$

y

$$\boxed{|x_n - x_g| \leqslant \frac{\lambda^n}{1-\lambda} |x_1 - x_0|} \tag{1.25}$$

Demostración. Para tener la primera de las cotas, sólo basta observar que $|x_n - x_g| \leqslant \lambda^n |x_0 - x_g|$ y como x_g y x_0 están entre a y b se tiene que $|x_n - x_0| \leqslant \lambda^n |x_g - x_0| \leqslant \lambda^n \max\{x_0 - a, b - x_0\}$, como queríamos probar.

Para obtener la segunda cota observemos que si $n > m$, digamos $n = m + k$, con $k \geqslant 1$, entonces

$$|x_n - x_m| = |x_{m+k} - x_m| \leqslant |x_{m+k} - x_{m+k-1}| + |x_{m+k-1} - x_{m+k-2}| + \cdots + |x_{m+1} - x_m| \tag{1.26}$$

Por otra parte tenemos que

$$\begin{aligned}
|x_{n+1}-x_n| &= |g(x_n)-g(x_{n-1})| \\
&\leqslant \lambda|x_n-x_{n-1}| \\
&\leqslant \lambda|g(x_{n-1})-g(x_{n-2})| \\
&\leqslant \lambda^2|x_{n-1}-x_{n-2}| \\
&\leqslant \lambda^2|g(x_{n-2})-g(x_{n-3})| \\
&\leqslant \lambda^3|x_{n-2}-x_{n-3}| \\
&\vdots \\
&\leqslant \lambda^n|x_1-x_0|\,,
\end{aligned}$$

es decir, $|x_{n+1}-x_n| \leqslant \lambda^n|x_1-x_0|$ para todo $n \geqslant 0$. Aplicando esto a la desigualdad en (1.26) obtenemos

$$\begin{aligned}
|x_n-x_m| &= |x_{m+k}-x_m| \leqslant \lambda^{m+k-1}|x_1-x_0|+\lambda^{m+k-2}|x_1-x_0|+\cdots+\lambda^m|x_1-x_0| \\
&= \lambda^m|x_1-x_0|\,(\lambda^{k-1}+\lambda^{k-2}+\cdots+1) \\
&\leqslant \lambda^m|x_1-x_0|\,(1+\lambda^2+\cdots+\lambda^j+\cdots) \\
&= \frac{\lambda^m}{1-\lambda}\,|x_1-x_0|
\end{aligned}$$

como deseábamos probar.

Observación Ambas desigualdades del Corolario relacionan la razón con la que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en la cota λ de la primera derivada. La razón de convergencia depende del factor λ^n. Cuando más pequeño sea el valor de λ, más rápida será la convergencia, la cual puede ser muy lenta sí λ es próxima de 1. En el siguiente ejemplo, consideraremos los métodos de punto fijo para algunos de los ejemplos vistos anteriormente.

Observación. Podemos usar como criterio de parada de un método iterativo de punto fijo como los anteriores los siguientes. Sea $\varepsilon > 0$ una tolerancia dada, entonces paramos las iteraciones si

1. $\lambda^n \max\{x_0-a,\, b-x_0\} \leqslant \varepsilon$,
2. $\frac{\lambda^n}{1-\lambda}\,|x_1-x_0| \leqslant \varepsilon$,
3. $|x_{n+1}-x_n| \leqslant \varepsilon$
4. otros que sean razonables de aplicar.

Ejemplo 13 Sea $g(x)=\frac{x^2-1}{3}$ en $[-1,1]$. El mínimo absoluto de g se alcanza en $x=0$ y se tiene que $g(0)=-\frac{1}{3}$. De manera análoga el máximo absoluto de g se alcanza en $x=\pm 1$ y $g(\pm 1)=0$. Además, g es derivable y $|g'(x)|=\left|\frac{2x}{3}\right| \leqslant \frac{2}{3}$ para todo $x\in(-1,1)$, luego $g(x)$ satisface las hipótesis del Teorema 1.1, en consecuencia $g(x)$ posee un único punto fijo x_g en $[-1,1]$, y si elegimos $x_0 \in\,]-1,1[$ arbitrario, la sucesión de puntos $x_{n+1}=g(x_n) \longrightarrow x_g$ cuando $n\to\infty$.

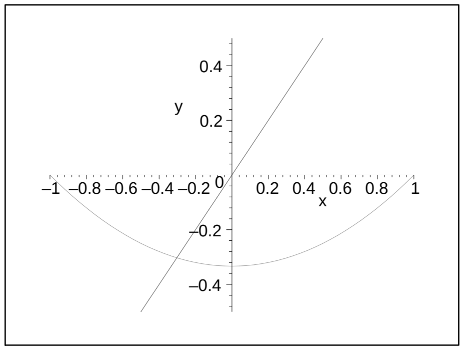


gráfico de $g(x) = \frac{x^2-1}{3}$

En este ejemplo el punto fijo p puede ser determinado algebraicamente por medio de la fórmula para resolver ecuaciones cuadráticas, obteniéndose $p = g(p) = \frac{p^2-1}{3}$, de donde $p^2 - 3p - 1 = 0$ y resolviendo la ecuación obtenemos que $p = \frac{1}{2}\left(3 - \sqrt{13}\right) \approx -0.3027756377$, la otra raíz es $q = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{13}) \approx 3.302775638$ que está fuera del intervalo $[-1, 1]$. El lector puede verificar esto usando $x_0 = 0$ y $\varepsilon = 10^{-5}$.

Observación. Note que $g(x)$ también posee un punto fijo único $q = \frac{1}{2}\left(3 + \sqrt{13}\right)$ en el intervalo $[3, 4]$. Sin embargo, $g'(q) > 1$, así que g no satisface las hipótesis del Teorema en $[3, 4]$. Esto demuestra que esas hipótesis son suficientes pero no necesarias.

Ejemplo 14 Sea $g(x) = 3^{-x}$. Puesto que $g'(x) = -3^{-x} \ln 3 < 0$ en $[0, 1]$, la función es decreciente en ese intervalo. Por lo tanto $g(1) = \frac{1}{3} \leqslant g(x) \leqslant 1 = g(0)$ para todo $x \in [0, 1]$, por lo cual g posee un punto fijo. No podemos garantizar la unicidad del punto fijo usando el Teorema 1.1, sin embargo como g es estrictamente decreciente dicho punto fijo debe ser único.

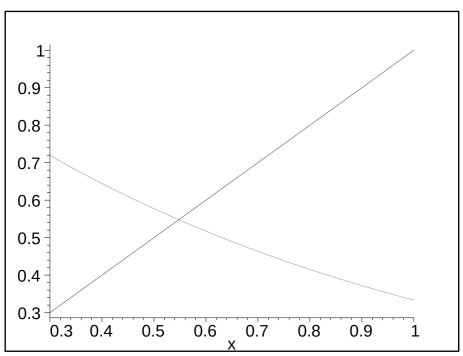


gráfico de $g(x) = 3^{-x}$

Ejemplo 15 La ecuación $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ posee una única raíz en $[1, 2]$. Hay muchas formas para convertir dicha ecuación en la forma $x = g(x)$ mediante simple manejo algebraico. Por ejemplo, para obtener la función que se describe en (c), podemos manipular ecuación $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$, por ejemplo, podemos escribir $4x^2 = 10 - x^3$, por lo tanto $x^2 = \frac{1}{4}\left(10 - x^3\right)$, luego $x = g_3(x) = \pm\frac{1}{2}\left(10 - x^3\right)^{1/2}$.

Para obtener una solución positiva, elegimos $g_3(x)$ con el signo positivo. Se deja al lector deducir las funciones que se indica a continuación, pero debemos verificar que el punto fijo de cada una sea realmente una solución de la ecuación original $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$.

(a) $x = g_1(x) = x - x^3 - 4x^2 + 10$.

(b) $x = g_2(x) = \left(\frac{10}{x} - 4x\right)^{1/2}$.

(c) $x = g_3(x) = \frac{1}{2}\left(10 - x^3\right)^{1/2}$.

(d) $x = g_4(x) = \left(\frac{10}{4+x}\right)^{1/2}$

(e) $x = g_5(x) = x - \frac{x^3+4x^2-10}{3x^2+8x}$.

Con $p_0 = 1.5$ la siguiente tabla proporciona los resultados del método de iteraciones de punto fijo para las cinco opciones de g.

n	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5
0	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5
1	-0.875	0.8165	1.286953768	1.348399725	1.373333333
2	6.732	2.9969	1.402540804	1.367376372	1.365230015
3	-469.7	$(-8.65)^{1/2}$	1.345458374	1.364957015	1.365230014
4	1.03×10^8		1.375170253	1.365264748	1.365230013
5			1.360094193	1.365225594	
6			1.367846968	1.36523.576	
7			1.363887004	1.365229942	
8			1.365916734	1.365230022	
9			1.364878217	1.365230012	
10			1.365410062	1.365230014	
15			1.365223680	1.365230013	
20			1.365230236		
25			1.365230006		
30			1.365230013		

La raíz exacta es $r = 1.365230013\ldots$, según se señalo anteriormente. Al comparar los resultados del algoritmo de bisección aplicado para resolver la misma ecuación, observamos que se obtuvieron excelentes resultados con las opciones (3), (4) y (5), ya que el método de bisección requiere 27 iteraciones para garantizar la exactitud. Conviene señalar que la opción (1) ocasiona divergencia y que la opción (2) se torna indefinida en $\mathbb{R}$ ya que contiene la raíz cuadrada de un número negativo.

Aún cuando las funciones de este ejemplo son problemas de punto fijo para el mismo problema de búsqueda de raíz, difieren como métodos para aproximar la solución a este tipo de problemas. Su propósito es ilustrar la pregunta que es preciso responder a la siguiente pregunta Cómo podemos encontrar un problema de punto fijo capáz de producir una sucesión convergente rápidamente a una solución de un problema de búsqueda de raíz?

Los siguientes ejemplos nos dan algunas pistas sobre los procedimientos que deberíamos seguir y quizá lo más importante, algunos que debemos excluir.

Ejemplo 16 Cuando $g_1(x) = x - x^3 - 4x^2 + 10$, tenemos que $g_1'(x) = 1 - 3x^2 - 8x$. No existe un intervalo $[a,b]$ que contenga a la raíz r para el cual se tenga $|g_1'(x)| < 1$. Aunque el

Teorema 1.1 no garantiza que el método deba fallar para esta elección, tampoco tenemos razón para esperar que el método sea convergente.

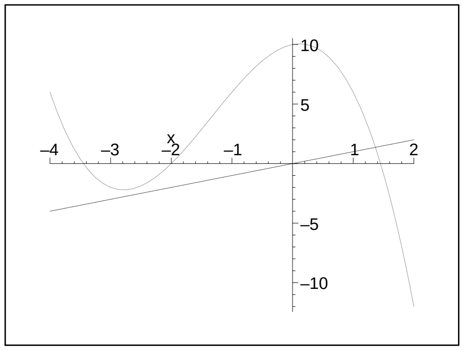


gráfico de $g_1(x) = x - x^3 - 4x^2 + 10$

Ejemplo 17 Con $x = g_2(x) = \left(\frac{10}{x} - 4x\right)^{1/2}$, podemos ver que g_2 no aplica $[1,2]$ en $[1,2]$ y que la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no está definida para $x_0 > 1.58113883\ldots$. Además, tampoco existe un intervalo que contenga a r para el cual $|g_2'(x)| < 1$, pues $|g_2'(r)| \approx 3.4$.

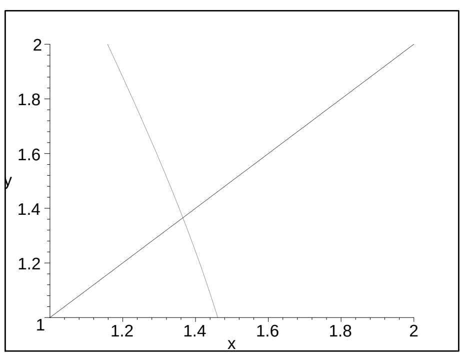


gráfico de $g_2(x) = \left(\frac{10}{x} - 4x\right)^{1/2}$

Ejemplo 18 Para $x = g_3(x) = \frac{1}{2}\left(10 - x^3\right)^{1/2}$, tenemos que $g_3'(x) = -\frac{3}{4}x^2\left(10 - x^3\right)^{-1/2} < 0$ en $[1,2]$, así que g_3 es estrictamente decreciente en $[1,2]$. Sin embargo $|g_3'(2)| \approx 2.12$ por lo cual la condición $|g_3'(x)| \leqslant \lambda < 1$ falla en $[1,2]$. Un análisis más minucioso de la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $p_0 = 1.5$ revela que basta considerar el intervalo $[1, 1.5]$ en vez de $[1,2]$. En este intervalo la función sigue siendo estrictamente decreciente, pero además $1 < 1.28 \approx g_3(1.5) \leqslant g_3(x) \leqslant g_3(1) = 1.5$ para todo $x \in [1, 1.5]$ en vez de $[1,2]$. Esto demuestra que g_3 aplica el intervalo $[1, 1.5]$ en si mismo. Además $|g_3'(x)| \leqslant 0.66 < 1$, por lo cual el Teorema 1.1 nos garantiza la unicidad del punto fijo y la convergencia del método iterativo.

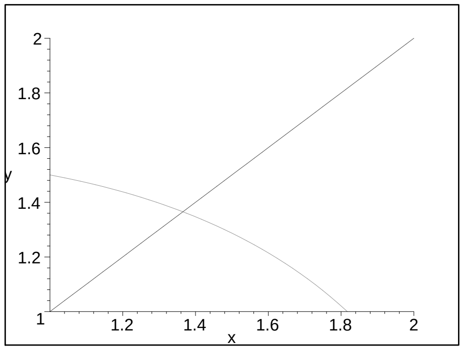


gráfico de $g_3(x) = \frac{1}{2}\left(10 - x^3\right)^{1/2}$

Ejemplo 19 Para $x = g_4(x) = \left(\frac{10}{4+x}\right)^{1/2}$, tenemos $|g_4'(x)| = \left|\frac{-5}{\sqrt{10}(4+x)^{3/2}}\right| \leqslant \frac{5}{\sqrt{10}(5)^{3/2}} < 0.15$ para todo $x \in [1,2]$. La cota en la magnitud de g_4' es mucho menor que magnitud de g_3' lo cual explica la convergencia mas rápida que se obtiene con g_4.

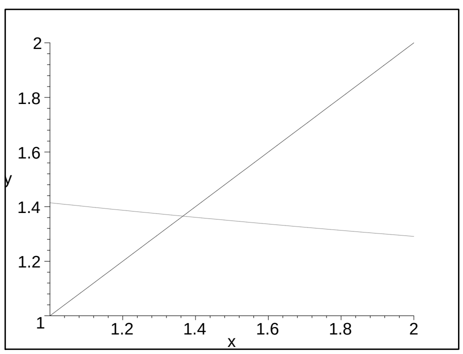


gráfico de $g_4(x) = \left(\frac{10}{4+x}\right)^{1/2}$

1.7 Métodos iterativos de punto fijo en varias variables

Extendemos ahora el resultado de convergencia métodos iterativos de punto fijo a funciones de varias variables. Para ellos tenemos el siguiente teorema.

Teorema 1.8 *Sea $C \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto cerrado y acotado, y sea $F : C \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una función continua. Supongamos que $F(C) \subseteq C$, entonces F posee un punto fijo. Además, si $\|JF(x)\| \leqslant \lambda < 1$ para todo $x \in C$ entonces el punto fijo es único, y el proceso iterativo*

$$x_{n+1} = F(x_n), \qquad n \geqslant 0.$$

con $x_0 \in C$ arbitrario, converge al único punto fijo.

Demostración. Basta demostrar el siguiente resultado más débil .

Introducimos el siguiente concepto, que nos ayudara en los siguientes teoremas.

Definición 1.1 *Sea* $A \subset \mathbb{R}^n$ *. Decimos que una función* $F : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *es una contracción si existe una constante* $0 \leqslant \lambda < 1$ *tal que para cada* $x, y \in A$ *se tiene que*

$$\|F(x) - F(y)\| \leqslant \lambda \|x - y\|.$$

La menor constante λ *que satisface la desigualdad anterior es llamada la constante de Lipschitz de* F *.*

Teorema 1.9 *Sea* $A \subset \mathbb{R}^n$ *un conjunto cerrado y acotado, y sea* $F : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *una contracción, tal que* $F(A) \subseteq A$ *, entonces* F *tiene un único punto fijo en* A *. Además, dado* $x_0 \in A$ *arbitrario, la sucesión* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *definida por* $x_{n+1} = F(x_n)$ *, con* $n \geqslant 0$ *, converge al único punto fijo* x_F *de* F *. Además, si elegimos* x_N *como una aproximación a* x_F *, entonces se tiene*

$$||x_N - x_F|| \leqslant \frac{\lambda^N}{1-\lambda}\, ||x_0 - x_1|| \tag{1.27}$$

Demostración. Tenemos que $\|F(x) - F(y)\| \leqslant \lambda\|x - y\|$ para todo $x, y \in A$. Vamos a demostrar que dado $x_0 \in A$ arbitrario se tiene que la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $x_{n+1} = F(x_n)$, $n \geqslant 0$, es una sucesión de Cauchy, y siendo A cerrado y acotado ella es una sucesión convergente, cuyo límite es un punto fijo de F. Tenemos

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - x_n\| &= \|F(x_n) - F(x_{n-1})\| \\
&\leqslant \lambda\|x_n - x_{n-1}\| \\
&\leqslant \lambda\|F(x_{n-1}) - F(x_{n-2})\| \\
&\leqslant \lambda^2\|x_{n-1} - x_{n-2}\| \\
&= \lambda^2\|F(x_{n-2}) - F(x_{n-3})\| \\
&\leqslant \lambda^3\|x_{n-2} - x_{n-3}\| \\
&\ \vdots \\
&\leqslant \lambda^n\|x_1 - x_0\|\ ,
\end{aligned}$$

es decir, $\|x_{n+1} - x_n\| \leqslant \lambda^n\|x_1 - x_0\|$ y como $0 \leqslant \lambda < 1$ se sigue que $\|x_{n+1} - x_n\| \longrightarrow 0$ cuando $n \longrightarrow \infty$. Ahora sean $m > n$, digamos $m = n + k$, con $k \geqslant 1$. Tenemos

$$\begin{aligned}
\|x_{n+k} - x_n\| &\leqslant \|x_{n+k} - x_{n+k-1}\| + \|x_{n+k-1} - x_{n+k-2}\| + \cdots + \|x_{n+1} - x_n\| \\
&\leqslant (\lambda^{n+k-1} + \lambda^{n+k-2} + \cdots + \lambda^n)\|x_1 - x_0\| \\
&= \lambda^n(\lambda^{k-1} + \lambda^{k-2} + \cdots + 1)\|x_1 - x_0\| \\
&\leqslant \lambda^n(1 + \cdots + \lambda^{k-2} + \lambda^{k-1} + \cdots)\|x_1 - x_0\| \\
&= \frac{\lambda^n}{1-\lambda}\|x_1 - x_0\|
\end{aligned}$$

esto es,

$$\|x_{n+k} - x_n\| \leqslant \frac{\lambda^n}{1-\lambda}\|x_1 - x_0\|$$

y como $\lim_{n\to\infty} \lambda^n = 0$ se sigue que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy, por lo tanto es una sucesión convergente. Sea $x_F = \lim_{n\to\infty} x_n$. Ahora como F es una contracción es continua, y $x_F = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} F(x_n) = F(\lim_{n\to\infty} x_n) = F(x_F)$. Finalmente, supongamos que existen dos puntos fijos para F, digamos, x_F y x'_F, entonces

$$\|x_F - x'_F\| = \|F(x_F) - F(x'_F)\| \leqslant \lambda \|x_F - x'_F\|$$

y siendo $0 \leqslant \lambda < 1$, se tiene que $x_F = x'_F$.

1.7.1 Análisis de error para métodos iterativos de punto fijo

En esta sección estudiaremos el orden de convergencia de los esquemas de iteración funcional y con el propósito de obtener una rápida convergencia, redescubriremos el método de Newton. También estudiaremos los métodos para acelerar la convergencia de Newton en casos especiales. Para poder realizar lo antes mencionado necesitamos un procedimiento para medir la rapidez con la que converge una sucesión dada.

Definición 1.2 *Supongamos que $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión que converge a p, con $p_n \neq p$ para todo n suficientemente grande. Si existen constantes positivas α y λ tales que*

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{|p_{n+1} - p|}{|p_n - p|^{\alpha}} = \lambda} \tag{1.28}$$

decimos que la convergencia a p de la sucesión $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de orden α con constante de error asintótica λ.

Observación. De la definición de orden de convergencia (1.28), si n es suficientemente grande, entonces

$$\frac{|p_{n+1} - p|}{|p_n - p|^{\alpha}} \approx \lambda \qquad \text{si y sólo si} \qquad |p_{n+1} - p| \approx \lambda \, |p_n - p|^{\alpha}.$$

Definición 1.3 *Decimos que un método iterativo de punto fijo $x_{n+1} = g(x_n)$ es de orden α con constante de error asintótica λ si, la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, donde $x_{n+1} = g(x_n)$, con $n \geqslant 0$, es orden α con constante de error asintótica λ.*

Observación. En general una sucesión con un orden de convergencia alto, converge más rápidamente que una con un orden de convergencia más bajo. La constante asintótica influye en la rapidez de la convergencia, pero no es tan importante como el orden de convergencia.

Respecto al orden de convergencia, hay dos que son de interés.

1. Si $\alpha = 1$, la sucesión será linealmente convergente.
2. Si $\alpha = 2$, la sucesión será cuadráticamente convergente.

En el siguiente ejemplo se compara una sucesión linealmente convergente con una de orden cuadrático.

Ejemplo 20 Supongamos que $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(\hat{p}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergen a cero, siendo la convergencia de $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lineal con $\lim_{n\to\infty} \frac{|p_{n+1}|}{|p_n|} = 0.5$ y la convergencia de $(\hat{p}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es cuadrática con

$\lim_{n\to\infty} \frac{|\hat{p}_{n+1}|}{|\hat{p}_n|^2} = 0.5$. Por razones de simplicidad supongamos que $\frac{|\hat{p}_{n+1}|}{|\hat{p}_n|^2} \approx 0.5$ y que $\frac{|p_{n+1}|}{|p_n|} \approx 0.5$. Así en la convergencia lineal obtenemos que

$$|p_n - 0| = |p_n| \approx 0.5\,|p_{n-1}| \approx (0.5)^2\,|p_{n-2}| \approx (0.5)^3\,|p_{n-3}| \approx \cdots \approx (0.5)^n\,|p_0|\ ,$$

mientras que en la convergencia cuadrática se tiene que

$$|\hat{p}_n - 0| = |\hat{p}_n| \approx 0.5\,|\hat{p}_{n-1}|^2 \approx 0.5\,(0.5|\hat{p}_{n-2}|^2)^2 = (0.5)^3|\hat{p}_{n-2}|^{2^2} \approx \cdots \approx (0.5)^{2^n-1}|\hat{p}_0|^{2^n}\ .$$

Claramente esta última converge más rápido que la primera.

La siguiente tabla muestra la rapidez de la convergencia lineal y cuadrática cuando $|p_0| = |\hat{p}_0| = 1$.

n	Lineal	Cuadrática
1	5.0000×10^{-1}	5.0000×10^{-1}
2	2.5000×10^{-1}	1.2500×10^{-1}
3	1.2500×10^{-1}	7.8125×10^{-3}
4	6.2500×10^{-2}	3.0518×10^{-5}
5	3.1250×10^{-2}	4.6566×10^{-10}
6	1.5625×10^{-2}	1.0842×10^{-19}
7	7.8125×10^{-3}	5.8775×10^{-39}

La sucesión con convergencia cuadrática es del orden de 10^{-38} en el séptimo término. Por otra parte, se necesitan 126 términos por lo menos para poder garantizar esta precisión en la sucesión con convergencia lineal.

Teorema 1.10 (orden de convergencia de punto fijo) *Sea* $g : [a,b] \longrightarrow [a,b]$ *continua. Supongamos que* g' *es continua en* $]a,b[$ *y que existe una constante positiva* $0 \leqslant \lambda < 1$ *tal que* $|g'(x)| \leqslant \lambda$ *para todo* $x \in\,]a,b[$ *. Si* $g'(p) \neq 0$ *, entonces para cualquier punto* $p_0 \in [a,b]$ *la sucesión*

$$p_n = g\,(p_{n-1})\,,\quad n \geqslant 1$$

converge linealmente al único punto fijo $p \in [a,b]$ *.*

Observación. El teorema anterior establece que en el caso de los métodos de punto fijo, la convergencia de orden superior sólo puede ocurrir si $g'(p) = 0$. El siguiente resultado describe otras condiciones que garantizan la convergencia cuadrática que deseamos.

Teorema 1.11 *Sea* p *un punto fijo de* $g\,(x)$ *. Supongamos que* $g'(p) = 0$ *y que* g'' *es continua y acotada por* M *en un intervalo abierto que contiene a* p *. Entonces existe* $\delta > 0$ *tal que para* $p_0 \in [p-\delta, p+\delta]$ *la sucesión definida por* $p_n = g\,(p_{n-1})$ *, con* $n \geqslant 1$ *, converge al menos cuadráticamente a* p *. Además, para valores suficientemente grandes de* n *se tiene que*

$$|p_{n+1} - p| < \frac{M}{2}\,|p_n - p|^2\,.$$

Los teoremas anteriores nos indican que nuestra investigación de los métodos de punto fijo cuadráticamente convergentes deberían conducirnos a funciones cuyas derivadas son anulan en el punto fijo.

La manera más fácil de plantear un problema de punto fijo relacionado con la búsqueda de raíces de $f(x) = 0$ consiste en restar un múltiplo de $f(x)$ (que desaparecerá en la raíz). Por lo tanto, a continuación consideraremos un método iterativo de punto fijo de la forma

$$p_n = g(p_{n-1}), \quad n \geqslant 1,$$

con g es de la forma

$$g(x) = x - \phi(x) f(x),$$

donde $\phi(x)$ es una función derivable, y sobre la cual imponemos condiciones más adelante.

Para que el procedimiento iterativo dado por g sea cuadráticamente convergente, es necesario tener que $g'(p) = 0$. Dado que

$$g'(x) = 1 - \phi'(x) f(x) - f'(x) \phi(x)$$

y como $f(p) = 0$ tenemos que

$$g'(p) = 1 - f'(p) \phi(p)$$

entonces $g'(p) = 0$ si y sólo si $\phi(p) = \frac{1}{f'(p)}$.

Es razonable suponer que $\phi(x) = \frac{1}{f'(x)}$, lo cual garantizará que $\phi(p) = \frac{1}{f'(p)}$. En este caso, el procedimiento natural para producir la convergencia cuadrática será

$$p_{n+1} = g(p_n) = p_n - \frac{f(p_n)}{f'(p_n)}$$

que es el método de Newton.

En el procedimiento anterior, impusimos la restricción de que $f'(p) \neq 0$, donde p es la solución de $f(x) = 0$. Conforme a la definición del método de Newton, es evidente que pueden surgir dificultades si $f'(p_n)$ tiene un cero simultáneamente con $f(p_n)$. En particular, el método de Newton y el de la secante ocasionaran problemas si $f'(p) = 0$ cuando $f(p) = 0$. Para examinar mas a fondo estas dificultades, damos la siguiente definición.

Definición 1.4 *Un cero p de $f(x) = 0$ es de multiplicidad m si para $x \neq p$ podemos escribir $f(x) = (x-p)^m q(x)$, con $\lim_{x \to p} q(x) \neq 0$.*

Teorema 1.12 *Una función $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, derivable m veces, tiene un cero de multiplicidad m en p si $f(p) = f'(p) = f''(p) = \cdots = f^{(m-1)}(p) = 0$ y $f^{(m)}(p) \neq 0$.*

El siguiente ejemplo muestra cómo la convergencia cuadrática posiblemente no ocurra si el cero no es simple.

Ejemplo 21 La función $f(x) = e^x - x - 1$ posee un cero de multiplicidad 2 en $p = 0$, pues $f(0) = f'(0) = 0$ y $f''(0) = 1$. De hecho podemos expresar $f(x)$ de la siguiente forma

$$f(x) = (x - 0)^2 \, \frac{e^x - x - 1}{x^2}$$

empleando la regla de L'Hospital, obtenemos que

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - x - 1}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}$$

la siguiente tabla muestra los términos que se generaron con el método de Newton aplicado a f con $p_0 = 1$.

n	p_n	n	p_n
0	1.0	9	2.7750×10^{-3}
1	0.58198	10	1.3881×10^{-3}
2	0.31906	11	6.9411×10^{-4}
3	0.16800	12	3.4703×10^{-4}
4	0.08635	13	1.7416×10^{-4}
5	0.04380	14	8.8041×10^{-5}
6	0.02206	15	4.2610×10^{-5}
7	0.01107	16	1.9142×10^{-6}
8	0.005545		

Teorema 1.13 *Supongamos que F define un método iterativo de punto fijo y que $F(p) = p$, $F'(p) = F''(p) = \cdots = F^{(m-1)}(p) = 0$ y $F^{(m)}(p) \neq 0$, entonces el método iterativo de punto fijo definido por F tiene orden de convergencia m.*

Demostración. Sea p_0 un punto arbitrario y definamos la sucesión $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ por $p_{n+1} = F(p_n)$, $n \geqslant 0$. Recordemos que el error es definido por

$$e_n = p_n - p.$$

Tenemos entonces que

$$\begin{aligned}
e_{n+1} &= p_{n+1} - p \\
&= F(p_n) - F(p) \\
&= F(p + e_n) - F(p) \\
&\overset{\text{Taylor}}{=} F(p) + F'(p)e_n + F''(p)\frac{e_n^2}{2!} + \cdots + F^{(m-1)}(p)\frac{e_n^{m-1}}{(m-1)!} + F^{(m)}(\widetilde{p})\frac{e_n^m}{m!} - F(p)
\end{aligned}$$

con $\widetilde{p}$ entre p y $p + e_n$. Usando la hipótesis nos queda $e_{n+1} = F^{(m)}(\widetilde{p})\frac{e_n^m}{m!}$, de donde

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\|e_{n+1}\|}{\|e_n\|^m} = \frac{\|F^{(m)}(p)\|}{m!}$$

pues $\widetilde{p} \to p$ cuando $p_n \to p$.

1.8 Raíces múltiples

Un método para tratar el problema de raíces múltiples consiste en definir la función $\mu(x)$ por medio de

$$\mu(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Si p es un cero de multiplicidad m entonces podemos escribir $f(x) = (x-p)^m q(x)$, con $q(p) \neq 0$. Reemplazando, nos queda

$$\mu(x) = \frac{(x-p)^m q(x)}{m(x-p)^{m-1} q(x) + (x-p)^m q'(x)} = (x-p)\frac{q(x)}{mq(x) + (x-p)q'(x)}$$

posee un cero en $x = p$. Pero como $q(p) \neq 0$, derivando y evaluando en $x = p$, obtenemos

$$\mu'(p) = \frac{1}{m} \neq 0,$$

por lo tanto p es un cero simple de $\mu(x)$. Así podemos aplicar el método de Newton a la función $\mu(x)$ obteniendo

$$g(x) = x - \frac{\mu(x)}{\mu'(x)} = x - \frac{\frac{f(x)}{f'(x)}}{\frac{(f'(x))^2 - f(x)\, f''(x)}{(f'(x))^2}}$$

desarrollando, nos queda la fórmula iterativa

$$\boxed{g(x) = x - \frac{f(x)\, f'(x)}{(f'(x))^2 - f(x)\ f''(x)}} \tag{1.29}$$

conocida como *método iterativo de Schröder.*

Si g satisface las condiciones de diferenciablidad necesarias, la iteración funcional aplicada a g será cuadráticamente convergente sin importar la multiplicidad de la raíz de f. En teoría, el único inconveniente de este método es el cálculo adicional de $f''(x)$ y el procedimiento más laborioso con que se calculan las iteraciones. Sin embargo, en la práctica la presencia de un cero múltiple puede ocasionar serios problemas de redondeo porque el denominador del método arriba consta de la diferencia de dos números que están cercanos a la raíz, es decir, diferencia de números parecidos.

Ejemplo 22 La siguiente tabla contiene las aproximaciones de la raíz doble en $x = 0$ de la función $f(x) = e^x - x - 1$, utilizando el método de Schröder y una máquina con diez dígitos de precisión. Elegimos la aproximación inicial $x_0 = 1$ de manera que las entradas pueden compararse con las de la tabla del anterior. Lamentablemente no aparece en la tabla es que no se produce mejoramiento alguno en la aproximación de la raíz $-2.8085217 \times 10^{-7}$ en los cálculos subsecuentes cuando se usa Schröder y esta máquina, ya que el numerador y el numerador se acercan a cero.

Ejemplo 23 En la sección anterior resolvimos la ecuación $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ para la raíz $r = 1.36523001$. Para comparar la convergencia para una raíz simple por el método de Newton y el método de Schröder, sea

i. $x_{n+1} = x_n - \dfrac{x_n^3 + 4x_n^2 - 10}{3x_n^2 + 8x_n}$ (método de Newton)

n	x_n
1	$-2.3421061 \times 10^{-1}$
2	$-8.4582788 \times 10^{-3}$
3	$-1.1889524 \times 10^{-5}$
4	$-6.8638230 \times 10^{-3}$
5	$-2.8085217 \times 10^{-3}$

y según la fórmula del método de Schröder

ii. $x_{n+1} = x_n - \dfrac{\left(x_n^3 + x_n^2 - 10\right)\left(3x_n^2 + 8x_n\right)}{\left(3x_n^2 + 8p_n\right)^2 - \left(x_n^3 + x_n^2 - 10\right)(6x_n + 8)}\,.$

Cuando $x_0 = 1.5$, las tres primeras iteraciones para (i) y (ii) se incluyen en la siguiente tabla. Los resultados muestran la convergencia rápida en ambos casos.

	método de Newton	método de Schröder
x_1	1.37333333	1.35689898
x_2	1.36526201	1.36519585
x_3	1.36523001	1.36523001

Otra manera de acelerar la convergencia del método de Newton para raíces múltiples es el siguiente. Sea r una raíz múltiple de multiplicidad m de $f(x) = 0$. Definamos el siguiente método iterativo

$$N_m(x) = x - m\,\frac{f(x)}{f'(x)}\,. \tag{1.30}$$

este método tiene convergencia cuadrática en un intervalo abierto que contiene a r, pero tiene convergencia lineal en vecindades de raíces simples de $f(x)$.

1.9 Problemas resueltos

Problema 1.1 Sea $g(x) = 0.1 + 0.6\cos(2x)$.

(a) Pruebe que $g(x)$ define un método iterativo convergente, encontrando explícitamente un intervalo cerrado y acotado $I = [a, b]$ tal que $g(I) \subset I$ y una constante $0 \leqslant \lambda < 1$ tal que $|g'(x)| \leqslant \lambda$ para todo $x \in I$.

(b) Estime el número de iteraciones que debe hacerse con este método de modo que se tengan 4 decimales de precisión para el punto fijo de g en I si tomamos como condición inicial el punto $x_0 = 0.4$.

(c) Use el método de Newton para encontrar una aproximación al punto fijo de $g(x)$ en I. Use como condición inicial $x_0 = 0.4$ y como criterio de parada $|x_n - g(x_n)| \leqslant 10^{-5}$.

(d) Considere una pequeña variación $\tilde{g}(x)$ de $g(x)$, donde $\tilde{g}(x) = 0.2 + 0.6\cos(2x)$. Denote por α y $\tilde{\alpha}$ los puntos fijos de g y $\tilde{g}$ respectivamente. Demuestre que

$$|\alpha - \tilde{\alpha}| \leqslant \frac{0.1}{1-L}$$

donde L es la constante de Lipschitz de la función g ¿Qué ocurre con las iteraciones $x_{n+1} = \tilde{g}(x_n)$, donde $x_0 = 0.45$? Explique

Solución

(a) Tenemos que $g(x) = 0.1 + 0.6\,\cos(2x)$. Para probar que esta función define un método iterativo convergente, debemos mostrar que

(i) Existe un intervalo cerrado y acotado I que es aplicado en si mismo por g.

(ii) Existe una constante $0 \leqslant \lambda < 1$ tal que $|g'(x)| \leqslant \lambda$ para todo $x \in I$.

Es fácil ver que podemos satisfacer ambas condiciones por separado. Por ejemplo, como

$$-1 \leqslant \cos(2x) \leqslant 1$$

para todo x, se sigue que

$$-0.5 \leqslant g(x) \leqslant 0.7\,,$$

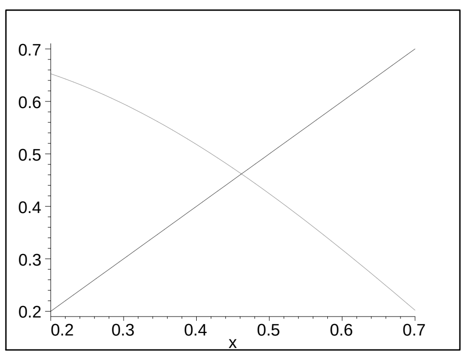


gráfico de g en $[0.2, 0.7]$

y como $g(x)$ tiene un máximo en $x = 0$, se tiene que

$$0.2 < g(0.7) \leqslant g(g(x)) \leqslant g(0) \leqslant 0.7\,.$$

También, $g'(x) = -1.2\,\mathrm{sen}(2x)$, luego (b) se satistace si

$$|x| \leqslant 0.5\,\mathrm{arcsen}(1/1.2) \approx 0.49255539\,.$$

Sin embargo ninguno de esos intervalos mencionados satisface ambas condiciones. Debemos encontrar un intervalo adecuado donde se satisfacen ambas condiciones.

No se gana mucho considerando un intervalo que no esté contenido en $[0.2, 0.7]$, pues todo los valores de $g(g(x))$ están en este intervalo. Notemos que $g(x)$ es decreciente sobre este intervalo (considere la derivada) y como $g(0.2) = 0.6526365964...$ y $g(0.7) = 0.2019802857...$ se tiene que $g([0.2, 0.7]) = [0.2019802857..., 0.6526365964...] \subset [0.2, 0.7] = I$. Luego, como puntos extremos de I son llevados en I por g, (a) se satisfecha, pero (b) requiere que el extremo derecho no sea mayor que $0.5\,\mathrm{arcsen}(1/1.2) \approx 0.49255539$, luego el punto extremo izquierdo no puede ser menor que la preimágen de este valor bajo g, la cual es aproximadamente 0.4288. Ahora, tomando $x_0 = 0.45$ se tiene que $x_1 = g(x_0) \approx 0.4729659810 < 0.473 = \tilde{x}_1$, y podemos tomar el intervalo $J = [0.45, 0.473] \subset I$, y se tiene que $g(0.45) \approx 0.4729659810$ y $g(0.473) \approx 0.4509592536$, y siendo g decreciente en ese intervalo, se tiene que $g(J) = [0.4509592536..., 0.4729659810...] \subset [0.45, 0.473]$, es decir, $g(J) \subset J$. En este intervalo J se tiene que $\max\{|g'(x)| : x \in J\} = 0.9732987256... = \lambda < 1$. Luego, el método propuesto converge para cada $x_0 \in J$.

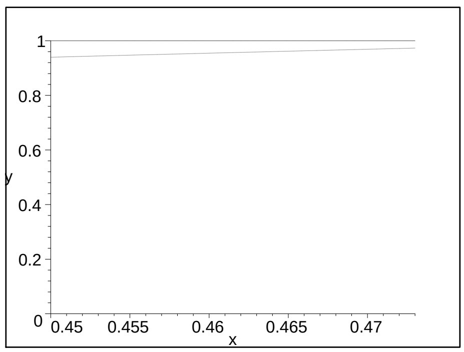


gráfico de $|g'(x)|$ en J

(b) Usaremos la fórmula $|x_n - x_g| \leqslant \frac{\lambda^n}{1-\lambda}|x_0 - x_1|$, donde $\lambda = \max\{|g'(x)| : x \in J\} = 0.9732987256...$ y x_g es el punto fijo de g que andamos buscando. Para simplificar, tomamos un $\tilde{\lambda} = 0.98 > \lambda$ en el numerador, pues tenemos que $1/(1-\lambda) \approx 37.45139595$ y $1/(1-0.98) \approx 50.00$. Luego

$$|x_n - x_g| \leqslant \frac{\lambda^n}{1-\lambda}|x_0 - x_1| \leqslant \frac{1}{1-\tilde{\lambda}}\tilde{\lambda}^n\,|x_0 - x_1| = 50\,\tilde{\lambda}^n |x_0 - x_1|$$

tomando un valor $\bar{x}_1 < x_1|$, agrandamos la diferencia $|x_0 - x_1$, por ejemplo, tomamos $\tilde{x}_1 = 0.473$, y tememos $0.72965981 \times 10^{-1} \approx |x_0 - x_1| \leqslant |x_0 - \tilde{x}_1| = |0.4 - 0.473| = 0.073$. Reemplazando esos valores en la última parte de la desigualdad anteior, obtenemos

$$50 \times (0.98)^n \times 0.073 \leqslant 10^{-4}$$

es decir,

$$3.65 \times (0.98)^n \times \leqslant 10^{-4}$$

de donde

$$(0.98)^n \leqslant 0.27397 \times 10^{-4}$$

ahora, tomando logarítmo natural, nos queda

$$n\ \ln(0.98) \leqslant \ln(0.27397 \times 10^{-4}) \approx -10.50507704$$

de donde, $n \geqslant \ln(0.8695652174 \times 10^{-4}) / \ln(0.98) \approx 519.9836$,. Luego, debemos tomar $n \geqslant 520$ como el número de iteraciones para asegurar que tenemos 4 decimales de precisión.

(c) Para encontrar el punto fijo de g debemos resolver la ecuación $g(x) = x$, es decir, $0.1 + 0.6\cos(2x) = x$, de donde debemos encontrar una raíz de la ecuación $f(x) = 0.1 + 0.6\cos(2x) - x = 0$. Usando el método de Newton, tenemos

$$\begin{aligned} N_f(x) &= x - \frac{f(x)}{f'(x)} \\ &= x - \frac{0.1 + 0.6\cos(2\,x) - x}{-1.2\sin(2\,x) - 1} \\ &= \frac{0.5\,(12\,x\sin(2\,x) + 1 + 6\cos(2\,x))}{6\sin(2\,x) + 5} \end{aligned}$$

Comenzando con las iteraciones, y usando que $x_{n+1} = g(x_n)$, y trabajando con 12 dígitos se tiene que

$x_1 = N_f(0.4) = 0.463425566162$, $e_1 = |x_1 - x_0| = 0.13425566162 \times 10^{-1}$

$x_2 = N_f(x_1) = 0.461786298387$, $e_2 = |x_2 - x_1| = 0.1639267775 \times 10^{-2}$

$x_3 = N_f(x_2) = 0.461785307874$, $e_3 = |x_3 - x_2| = 0.990513 \times 10^{-6}$

$x_4 = N_f(x_3) = 0.461785307873$, $e_4 = |x_4 - x_3| = 0.1 \times 10^{-11}$.

Además, $g(x_4) = 0.461785307873 = x_4$, por lo tanto, salvo errores de orden mayor que 10^{-11} se tiene que el punto fijo es $x_g = 0.461785307873$

(d) Es fácil ver graficamente que $\tilde{g}$ tiene un punto fijo $\tilde{\alpha}$.

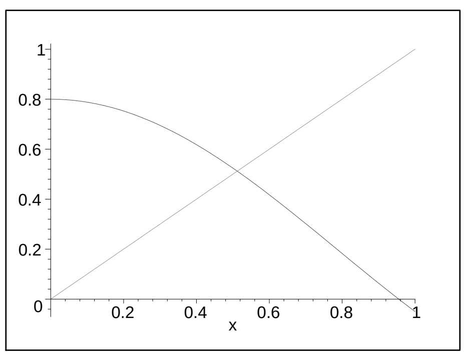


gráfico de $\tilde{g}$ en $[0,1]$

Solución Numérica. Podemos usar el método de Newton para aproximar $\tilde{\alpha}$. Para ello debemos resolver la ecuación $\tilde{g}(x) = x$, es decir, si definimos la función $r(x) = 0.2 + 0.6\cos(2x) - x$, dedemos encontrar una raíz de r. Ahora, como $r(x) = 0.2 + 0.6\cos(2\,x) - x$, se tiene que $r'(x) = -1.2\sin(2\,x) - 1$ y

$$N_r(x) = x - \frac{r(x)}{r'(x)}$$

viene dada por

$$N_r(x) = x - \frac{0.2 + 0.6\cos(2\,x) - x}{-1.2\sin(2\,x) - 1} = \frac{6\,x\sin(2\,x) + 1 + 3\cos(2\,x)}{6\sin(2\,x) + 5}$$

Tomando $y_0 = 0.4$, tenemos

$$y_1 = N_r(y_0) = 0.5171651042\,,\ E_1 = 0.1171651042$$

$$y_2 = N_r(y_1) = 0.5119943202\,,\ E_2 = 0.0051707840$$

$$y_3 = N_r(y_2) = 0.5119861755\,,\ E_3 = 0.81447\,10^{-5}$$

$$y_4 = N_r(y_3) = 0.5119861754\,,\ E_4 = 0.1\,10^{-9}$$

y podemos considerar que salvo un error, $\tilde{\alpha} = y_4 = 0.5119861754$, pues $\tilde{g}(y_4) = 0.5119861753$ y $\tilde{g}(y_4) - y_4 = -0.1\,10^{-9}$, es decir, consideremos $\tilde{\alpha} = y_4 = 0.5119861753$

Ahora, calculemos la constante de Lipschitz de $g(x) = 0.1 + 0.6\,\cos(2x)$. Tenemos,

$$\begin{aligned} |g(x) - g(y)| &= |0.6\,\cos(2x) - 0.6\,\cos(2y)| \\ &= 0.6|\cos(2x) - \cos(2y)| \\ &= 0.6|2\mathrm{sen}(2\zeta)|\,|x - y| \end{aligned}$$

donde ζ está entre x e y , y $x, y \in [0.45, 0.473]$. Debemos maximizar la expresión $\mathrm{sen}(2\zeta)$ para $\zeta \in [0.45, 0.473]$. Se tiene que $\max\{|\mathrm{sen}(2\zeta)| \ :\ \zeta \in [0.45, 0.473]\} \approx 0.8110822713$, luego

$$|g(x) - g(y)| \leqslant 1.2 \times 0.8110822713\,|x - y|$$

es decir,

$$|g(x) - g(y)| \leqslant 0.9732987256\,|x - y|\,.$$

y tomamos $L = 0.973298726$. Tememos $\alpha = x_g = 0.461785307873$ y $\tilde{\alpha} = 0.5119861753$, luego

$$|\alpha - \tilde{\alpha}| = 0.050200867 \leqslant \frac{0.1}{1 - L} = \frac{0.1}{1 - 0.973298726} = 3.745139651\,.$$

Solución Teórica.

Tenemos

$$\begin{aligned} |\alpha - \tilde{\alpha}| &= |\tilde{g}(\tilde{\alpha}) - g(\alpha)| \\ &= |0.2 + 0.6\cos(2\tilde{\alpha}) - 0.1 - 0.6\cos(2\alpha)| \\ &= |0.1 + 0.6\cos(\tilde{\alpha}) - 0.6\cos(\alpha)| \\ &\leqslant 0.1 + |0.1 + 0.6\cos(2\tilde{\alpha}) - (0.1 + 0.6\cos(\alpha))| \\ &= 0.1 + |g(\tilde{\alpha}) - g(\alpha)| \\ &\leqslant 0.1 + L|\tilde{\alpha} - \alpha|\,. \end{aligned}$$

Es decir, hemos probado que $|\tilde{\alpha} - \alpha| \leqslant 0.1 + L|\tilde{\alpha} - \alpha|$, de donde, $|\tilde{\alpha} - \alpha|(1 - L) \leqslant 0.1$, y de aquí, $|\tilde{\alpha} - \alpha| \leqslant \frac{1}{1-L}$ como se pedía.

Problema 1.2 Sea $f(x) = (x - 1)\ln(x)$.

(a) Determine la fórmula de Newton $x_{n+1} = g(x_n)$. Tomando como valor inicial $x_0 = e$, calcule las primeras dos iteraciones x_1 y x_2 del método.

(b) Demuestre que el método de Newton usado en la parte (a) tiene un orden de convergencia $p = 1$.

(c) Dé un método alternativo de iteración que garantice un orden de convergencia $p = 2$ y demuestre que efectivamente este es su orden de convergencia.

Solución.

(a) La fórmula del método de Newton para encontrar la raíz de $f(x) = (x-1)\ln x = 0$ es:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= g(x_n) = x_n - \frac{(x_n-1)\ln x_n}{\ln x_n + \frac{x_n-1}{x_n}} = \frac{x_n(x_n\ln x_n + (x_n-1) - (x_n-1)\ln x_n)}{x_n\ln x_n + (x_n-1)} \\ &= x_n \frac{x_n - 1 + \ln x_n}{x_n - 1 + x_n \ln x_n}. \end{aligned}$$

Tomando $x_0 = e$ y simplificando al máximo, obtenemos

$$x_1 = \frac{e^2}{2e-1} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{e^2}{2e-1} \cdot \frac{(e+1)^2 - 2 - \ln(2e-1)}{e^2(2-\ln(2e-1)) + (e-1)^2}$$

(b) La raíz de $f(x) = 0$ es evidentemente $x = 1$ y es una raíz doble, es decir, $f(1) = 0$, $f'(1) = 0$, y $f''(1) \neq 0$. En efecto, es claro que $f(1) = 0$. Además, $f'(x) = \ln x + 1 - \frac{1}{x}$. Así, $f'(1) = 0$. Por último, $f''(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$ y por lo tanto $f''(1) = 2 \neq 0$. Esto muestra que $x = 1$ es una raíz doble de $f(x) = 0$. Como se vió en clases, esto implica que la función de iteración del método de Newton $g(x)$ satisface que

$$g'(1) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Luego, como $|g'(1)| < 1$, el método de Newton es convergente, partiendo de un punto x_0 suficientemente cercano a 1, pero su orden de convergencia es sólo 1, pues $g'(1) \neq 0$.

(c) Como es sabido de lo visto en clases, la forma de "reparar" el orden de convergencia cuadrático del método de Newton es mediante el método de Newton modificado, el cual se obtiene multiplicando el cuociente $\frac{f(x)}{f'(x)}$ (en la fórmula de Newton) por la multiplicidad de la raíz (que en este caso es 2), es decir,

$$x_{n+1} = \widetilde{g}(x_n) = x_n - 2\frac{(x_n-1)\ln(x_n)}{\ln(x_n) + \frac{x_n-1}{x_n}} = x_n \frac{x_n - 1 + (2-x_n)\ln(x_n)}{x_n\ln(x_n) + x_n - 1}.$$

Con esto, obtenemos que

$$\widetilde{g}'(1) = 1 - 2 \cdot \frac{1}{2} = 0,$$

lo cual implica que el método de Newton modificado converge cuadráticamente, partiendo de un punto x_0 suficientemente cercano a 1.

Problema 1.3 Considere la ecuación

$$\cos(x) = \tan(x),$$

de la cual se sabe que tiene una solución $\bar{x} = 0.6662394321$, con un error de 0.9×10^{-9}.

(a) Defina un método de punto fijo (diferente a Newton) y demuestre su convergencia (sin hacer iteraciones) en el intervalo que usted defina.

(b) ¿Cuántas iteraciones necesitaría para obtener el error de 0.9×10^{-9} comenzando con $x_0 = 0.6$?

(c) Use el método de Newton con el punto inicial $x_0 = 0.6$ y obtenga x_1 y x_2 ¿Cuál es la velocidad de convergencia del método de punto fijo propuesto por usted en la parte (a)?

Solución.

(a) Propuesta del método.

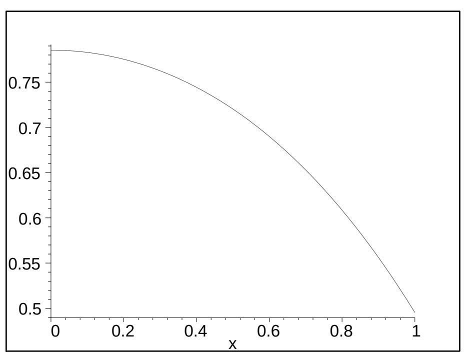
Despejando de la ecuación tenemos

$$x = \arctan(\cos(x)) = g(x)\,,$$

es decir,

$$x_{k+1} = g(x_k) = \arctan(\cos(x_k))\,.$$

Elegimos el intervalo $[0,1]$, tenemos que $g(x) = \arctan(\cos(x))$ es decreciente en ese intervalo, pues $g'(x) = \dfrac{d}{dx}\arctan(\cos(x)) = -\dfrac{\operatorname{sen}(x)}{1+\cos^2(x)}$ y como $g(0) = \arctan(\cos(0)) = \dfrac{\pi}{4}$ y $g(1) = \arctan(\cos(1)) \approx 0.4953672892$, vemos que $g([0,1]) \subset [0,1]$. Por lo tanto, g tiene un único punto fijo x_g en $[0,1]$.



Ahora, $g'(x) = \dfrac{d}{dx}\arctan(\cos(x)) = -\dfrac{\operatorname{sen}(x)}{1+\cos^2(x)}$. Luego,

$$|g(\bar{x})| = |g'(0.6662394321)| \approx 0.381964618 < 1$$

y el método iterativo propuesto es convergente.

(b) Para estimar el número de iteraciones podemos usar la fórmula para cotas del error

$$|x_n - \bar{x}| \leqslant \frac{\lambda^n}{1-\lambda}\,|x_0 - x_1|\,,$$

donde $0 \leqslant \lambda < 1$ es tal que $|g'(x)| \leqslant \lambda$ para todo $x \in]\,a, b\,[$. Ahora como $|g'(x)| = \frac{|\text{sen}(x)|}{1+\cos^2(x)} = \frac{\text{sen}(x)}{1+\cos^2(x)}$, para $x \in [0,1]$, es una función creciente, se sigue que

$$|g'(x)| \leqslant \frac{\text{sen}(1)}{1+\cos^2(1)} \approx 0.5463024898 \leqslant 0.55$$

y podemos usar $\lambda = 0.55$.

Tenemos que $x_0 = 0.6$, luego $x_1 = 0.6899997083$ y $|x_0 - x_1| = 0.0899997083$. Luego

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{0.55^n}{1-0.55} \times 0.0899997083 & \leqslant & 0.9 \times 10^{-9} \\ 0.55^n & \leqslant & 4.50001458 \times 10^{-9} \\ n\ln(0.55) & \leqslant & \ln(4.50001458 \times 10^{-9}) \\ n(-0.5978370008) & \leqslant & -19.2191852 \end{array}$$

de donde $n \geqslant 32.14786836$, por lo tanto basta tomar $n = 33$ iteraciones para tener lo pedido.

(c) Tenemos que $N_f(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$, donde en este caso, $f(x) = \tan(x) - \cos(x)$. Como $f'(x) = 1 + \tan^2(x) + \text{sen}(x)$, se tiene que

$$N_f(x) = x - \frac{\tan(x) - \cos(x)}{1 + \tan^2(x) + \text{sen}(x)}$$

luego, calculando obtenemos $x_1 = 0.6694641628$ y $x_2 = 0.6660244822$. Ahora, como $f'(\bar{x}) \approx 2.236067976 \neq 0$ el método de Newton tiene convergencia cuadrática, es decir, orden $p = 2$.

Para analizar la convergencia del método propuesto en (a) tenemos que buscar la primera derivada no nula en el punto fijo, y por los cálculos ya realizados se tiene que $g'(\bar{x}) \neq 0$, por tanto el método tiene orden de convergencia $p = 1$. Por lo tanto, el método de Newton converge mucho más rápido, en este caso.

Problema 1.4 Se desea resolver la ecuación $x^3 - \ln(1+2x) = 0$.

(a) Compruebe que esta ecuación tiene exactamente una solución en el intervalo $[1, 2]$.

(b) Proponga un método iterativo de punto fijo (diferente de Newton) que converja a la solución de la ecuación en el intervalo $[1, 2]$. Justifique.

(c) Partiendo de $x_0 = 1$, determine el número mínimo de iteraciones que se necesitarían para alcanzar una precisión de 10^{-4}, utilizando el método iterativo propuesto anteriormente.

Solución.

(a) Tenemos la ecuación

$$f(x) = x^3 - \ln(1+2x) = 0\,.$$

Es claro que el dominio de f es $\{x \in \mathbb{R} : x > -1/2\}$, en el cual f es continua y diferenciable.

Ahora,

$$f'(x) = 3x^2 - \frac{2}{1+2x} = \frac{3x^2(1+2x)-2}{2x+1} = \frac{6x^3+3x^2-2}{2x+1}.$$

El denominador de f es positivo en el intervalo [1,2] y su numerador $h(x) = 6x^3+3x^2-2$ también es positivo en dicho intervalo, pues $h'(x) = 18x^2+6x = 0$ si y sólo si $x = 0$ o $18x+6 = 0$, es decir, $x = -1/3$. Con esto, es claro que $h'(x) > 0$ en el intervalo $[1,2]$, luego h es estrictamente creciente en $[1,2]$. Además, como $h(1) = 6+3-2 = 7$, se sigue que $h(x) > 0$ en todo $[1,2]$. Por lo tanto $f'(x) > 0$ en $[1,2]$, en consecuencia si tiene un cero en dicho intervalo, este sería único. Ahora, como $f(1) = 1 - \ln(3) \approx -0.09861\ldots < 0$ y $f(2) = 8 - \ln(5) \approx 6.39056\ldots > 0$, por el Teorema del Valor Intermedio, f tiene un cero en $[1,2]$, y como vimos, este es único.

(b) Despejando x desde la igualdad

$$x^3 - \ln(1+2x) = 0$$

tenemos

$$x = \sqrt[3]{\ln(1+2x)}\,.$$

Proponemos entonces el método iterativo de punto fijo

$$x_{n+1} = g(x_n) = \sqrt[3]{\ln(1+2x_n)}\,.$$

Tenemos

$$g'(x) = \frac{2}{3}\frac{1}{(\ln(1+2x))^{2/3}} \cdot \frac{1}{2x+1} > 0$$

en $[1,2]$. Por lo tanto, g es creciente en $[1,2]$.

Ahora, para ver que $g([1,2]) \subseteq [1,2]$, basta ver que $1 \leqslant g(1) \leqslant g(2) \leqslant 2$. Tenemos

$$1 < \underbrace{1.03184584\ldots}_{g(1)} \leqslant \underbrace{1.171902307\ldots}_{g(2)} \leqslant 2$$

de donde $g([1,2]) \subseteq [1,2]$ y como g es estrictamente creciente, en ese intervalo, g tiene un único punto fijo $x_g \in g([1,2]) \subset [1,2]$.

Para ver la convergencia del método propuesto, debemos probar que $|g'(x)| \leqslant \lambda < 1$ para todo $x \in [1,2]$.

Ahora, $g'(x)$ es decreciente en $[1,2]$ y $g'(1) = 0.208717132 > g'(x) > g'(2) = 0.0970858457$. Por lo tanto $\lambda = \max\{|g'(x)| : x \in [1,2]\} = 0.2087170132$ y es claro que $\lambda < 1$.

Por lo tanto el método propuesto es convergente al único punto fijo de g en $[1,2]$.

(c) Tomando $x_0 = 1$, tenemos que $x_1 = g(1) = \sqrt[3]{\ln(3)} = 1.03184584\ldots$. Usando la fórmula

$$|x_g - x_n| \leqslant \frac{\lambda^n}{1-\lambda}\,|x_1 - x_0|,$$

si queremos precisión de 10^{-4}, imponemos entonces que

$$\frac{\lambda^n}{1-\lambda}\,|x_1 - x_0| \leqslant 10^{-4}\,.$$

Como $|x_1 - x_0| = |0.0318458398\ldots| < 0.032$ (para evitar el cálculo con tantos decimales) y $\lambda = 0.2087170132$, se tiene $1-\lambda = 0.7912829868\ldots > 0.79$ (misma razón anterior)

Así $\dfrac{1}{1-\lambda} < \dfrac{1}{0.79}$, y como $\lambda < 0.21$ nos queda

$$\frac{\lambda^n}{1-\lambda} \leqslant \frac{(0.21)^n}{0.79}\,.$$

Luego

$$\frac{\lambda^n}{1-\lambda}\,|x_1 - x_0| \leqslant \frac{(0.21)^n}{0.79} \times 0.032 = (0.21)^n \times 0.0405063\ldots \leqslant (0.21)^n \times 0.041$$

y hacemos $0.041 \times (0.21)^n < 10^{-4}$, de donde $(0.21)^n < \dfrac{10^{-4}}{0.041}$, y entonces $n\,\ln(0.21) \leqslant \ln\left(\dfrac{10^{-4}}{0.041}\right)$ y como $\ln(0.21) < 0$, se sigue que

$$n \quad \geqslant \quad \frac{\ln\left(\dfrac{10^{-4}}{0.041}\right)}{\ln(0.21)} \approx 3.8549104\ldots$$

Por lo tanto, con al menos 4 iteraciones tenemos garantizado lo pedido.

Problema 1.5 Considere el siguiente sistema de ecuaciones no lineales

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1^2 + x_2 - 37 & = & 0 \\ x_1 - x_2^2 - 5 & = & 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 3 & = & 0 \end{array}\right.$$

(a) Utilizando el método de Newton para sistemas no lineales y tomando como punto inicial $\mathrm{x}^0 = (0,0,0)^T$, obtenga el punto x^1.

(b) Cuando se utiliza el método de Newton para sistemas no lineales, una alternativa para no calcular la inversa de una matriz en cada iteración es resolver un sistema auxiliar de ecuaciones linwales en cada iteración, lo cual es desde el punto de vista numérico siempre resulta más conveniente.

Describa el sistema de ecuaciones lineales que debería resolver para obtener el punto x^1 de la parte (a) y calcule el número de condicionamiento de la matriz del sistema con respecto al redio espectral ¿puede inferir algo sobre la estabilidad de las soluciones del sistema?

Solución. Tenemos el sistema de ecuaciones no lineales siguiente

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1^2 + x_2 - 37 & = & 0 \\ x_1 - x_2^2 - 5 & = & 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 3 & = & 0 \end{array}\right.$$

(a) Método de Newton. Llamemos

$$
\begin{aligned}
f_1(x_1,x_2,x_3) &= x_1^2 + x_2 - 37\\
f_2(x_1,x_2,x_3) &= x_1 - x_2^2 - 5\\
f_3(x_1,x_2,x_3) &= x_1 + x_2 - x_3 - 3
\end{aligned}
$$

y $F(x_1,x_2,x_3) = (f_1(x_1,x_2,x_3), f_2(x_1,x_2,x_3), f_3(x_1,x_2,x_3))$.
El método de Newton es dado por

$$
\begin{pmatrix} x_1^{(k+1)} \\[2ex] x_2^{(k+1)} \\[2ex] x_3^{(k+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\[2ex] x_2^{(k)} \\[2ex] x_3^{(k)} \end{pmatrix} - \left(JF(x_1^{(k)},x_2^{(k)},x_3^{(k)})\right)^{-1} \begin{pmatrix} f_1(x_1^{(k)},x_2^{(k)},x_3^{(k)}) \\[2ex] f_2(x_1^{(k)},x_2^{(k)},x_3^{(k)}) \\[2ex] f_3(x_1^{(k)},x_2^{(k)},x_3^{(k)}) \end{pmatrix}
$$

Ahora,

$$
JF = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\[2ex] \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\[2ex] \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}.
$$

Derivando, tenemos

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x_1} &= \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \frac{\partial f_2}{\partial x_1}, \frac{\partial f_3}{\partial x_1}\right) = (2x_1, 1, 1)\\
\frac{\partial F}{\partial x_2} &= \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2}, \frac{\partial f_2}{\partial x_2}, \frac{\partial f_3}{\partial x_2}\right) = (1, -2x_1, 1)\\
\frac{\partial F}{\partial x_3} &= \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_3}, \frac{\partial f_2}{\partial x_3}, \frac{\partial f_3}{\partial x_3}\right) = (0, 0, 1)
\end{aligned}
$$

Luego,

$$
JF(x_1,x_2,x_3) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 1 & 0 \\ 1 & -2x_2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.
$$

Evaluando en $\mathrm{x}^{(0)} = (0,0,0)^T$ nos queda la matriz

$$
JF(0,0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.
$$

Para calcular $(JF(0,0,0))^{-1}$, lo podemos hacer en forma simple, escribiendo

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

de donde $a_{21} = 1$, $a_{22} = 0$, $a_{23} = 0$, $a_{11} = 0$, $a_{13} = 0$, $a_{11} + a_{21} + a_{31} = 0$, de donde, $a_{31} = -1$; $a_{12} + a_{22} + a_{32} = 0$, de donde, $a_{32} = -1$; $a_{13} + a_{23} + a_{33} = 1$, de donde, $a_{33} = 1$. Por lo tanto,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Tenemos, $F(0,0,0) = (-37,-5,-5)$. Por lo tanto,

$$\begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -37 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 37 \\ -39 \end{pmatrix}$$

(b) Para obtener la fórmula pedida, recordemos lo hecho en clases para sistemas de ecuaciones no lineales, en este caso de 3×3. Sean (x_1, x_2, x_3) una solución aproximada del sistema de ecuaciones no lineales, y sea $(x_1 + h_1, x_2 + h_2, x_3 + h_3)$ la solución exacta. Aplicando Taylor, obtenemos

$$\begin{aligned} 0 &= f_1(x_1 + h_1, x_2 + h_2, x_3 + h_3) \approx f_1(x_1, x_2, x_3) + h_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + h_2 \frac{\partial f_1}{\partial x_2} + h_3 \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ 0 &= f_2(x_1 + h_1, x_2 + h_2, x_3 + h_3) \approx f_2(x_1, x_2, x_3) + h_1 \frac{\partial f_2}{\partial x_1} + h_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + h_3 \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ 0 &= f_3(x_1 + h_1, x_2 + h_2, x_3 + h_3) \approx f_3(x_1, x_2, x_3) + h_1 \frac{\partial f_3}{\partial x_1} + h_2 \frac{\partial f_3}{\partial x_2} + h_3 \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{aligned}$$

donde las derivadas parciales están evaluadas en (x_1, x_2, x_3). De lo anterior, tenemos que

$$JF(x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} = -F(x_1, x_2, x_3).$$

Ahora, usando los datos, tenemos

$$F(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}) = \begin{pmatrix} -37 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix},$$

$$JF(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}) = JF(0,0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto el sistema de ecuaciones lineales es dado por

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -37 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

De aquí, $h_2 = 37$, $h_1 = 5$ y $h_1 + h_2 + h_3 = 3$, de donde $h_3 = -39$.

Ahora, como

$$\begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix},$$

se tiene que

$$\begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 37 \\ -39 \end{pmatrix}$$

el cual coincide, obviamente, con el cálculo hecho en la parte (a).

El número de condición con respecto al radio espectral, significa que usando la norma subordinada $||\cdot||_2$, se tiene que

$$k(A) = \sqrt{\frac{\max\{|\lambda| \ : \ \lambda \text{ valor propio de } AA^T\}}{\min\{|\lambda| \ : \ \lambda \text{ valor propio de } AA^T\}}}.$$

LLamando

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

Se tiene que

$$A^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Luego

$$AA^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$AA^T - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

y

$$\det(AA^T - \lambda) = (1-\lambda)^2(3-\lambda) - (1-\lambda) - (1-\lambda) = (1-\lambda)((1-\lambda)(3-\lambda) - 2)$$

luego, $\det(AA^t - \lambda I) = 0$ si $\lambda_1 = 1$ o $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$, de donde $\lambda_2 = 3$ y $\lambda_3 = 1$. Luego, $\max\{|\lambda| :\ \lambda \text{ valor propio de } AA^T\} = 3$ y $\min\{|\lambda| :\ \lambda \text{ valor propio de } AA^T\} = 1$. Por lo tanto, $k(A) = \sqrt{\frac{3}{1}} = \sqrt{3}$. Como el número de condición de A es relativamente pequeño, esl sistema está bien condicionado y es estable.

Problema 1.6 Resuelva usando el método de Newton para varias variables, el siguiente sistema no lineal:

$$\left\{ \begin{array}{c} 3x_1^2 - x_2^2 = 0 \\ 3x_1x_2^2 - x_1^3 = 1 \end{array} \right.$$

Para esto, tome como punto inicial $x^{(0)} = (1,1)^{\mathrm{T}}$ y realice dos iteraciones, es decir, calcule $x^{(1)}$ y $x^{(2)}$.

Solución. Tenemos el sistema de ecuaciones no lineales

$$\left\{ \begin{array}{rcl} f(x,y) & = & 3x^2 - y^2 = 0 \\ g(x,y) & = & 3xy^2 - x^3 - 1 = 0\,. \end{array} \right.$$

Sea $F(x,y) = (f(x,y), g(x,y))$. El método de Newton aplicado a F es dado por

$$N_F(x,y) = (x,y) - (JF(x,y))^{-1}F(x,y)\,.$$

Ahora,

$$JF(x,y) \quad = \quad \left(\begin{array}{cc} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) \\ \\ \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} 6x & -2y \\ 3y^2 - 3x^2 & 6xy \end{array} \right).$$

Luego, $\det JF(x,y) = 36x^2y + 2y(3y^2 - 3x^2) = 36x^2y + 6y^3 - 6x^2y = 30x^2y + 6y^3 = 6y(5x^2 + y^2)$. Por lo tanto $\det JF(x,y) \neq 0$ si $y \neq 0$ y $(x,y) \neq (0,0)$.

Como $\mathbf{x}^{(0)} = (1,1)$

$$\left(\begin{array}{c} x_1 \\ y_1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} x_0 \\ y_0 \end{array} \right) - (JF(x_0,y_0))^{-1}F(x_0,y_0)$$

y

$$JF(x_0,y_0) = JF(1,1) = \left(\begin{array}{cc} 6 & -2 \\ 0 & 6 \end{array} \right)$$

se tiene que $\det JF(x_0,y_0) = 36$ y

$$
\begin{aligned}
(JF(1,1))^{-1} &= \frac{1}{36}\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{18} \\ \\ 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \left(\frac{2}{6} + \frac{1}{18}, \frac{1}{6}\right) \\
&= \left(\frac{7}{18}, \frac{1}{6}\right)
\end{aligned}
$$

y

$$
\mathbf{x}^{(1)} = (x_1, y_1) = (1,1) - \left(\frac{7}{18}, \frac{1}{6}\right) = \left(\frac{11}{18}, \frac{5}{6}\right)
$$

Para $\mathbf{x}^{(2)}$, tenemos

$$
JF(x_1, y_1) \quad = \quad JF\left(\frac{11}{18}, \frac{5}{6}\right) = \begin{pmatrix} \frac{11}{3} & -\frac{5}{3} \\ \\ \frac{26}{27} & \frac{55}{18} \end{pmatrix}
$$

luego $\det JF(x_1, y_1) = \dfrac{2075}{162}$.

Ahora,

$$
(JF(x_1, y_1))^{-1} = \frac{162}{2075}\begin{pmatrix} \frac{55}{18} & \frac{5}{3} \\ \\ -\frac{26}{27} & \frac{11}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{99}{415} & \frac{54}{415} \\ \\ -\frac{156}{2075} & \frac{594}{2075} \end{pmatrix}
$$

Así

$$
\begin{aligned}
(JF(x_1, y_1))^{-1}F(x_1, y_1) &= \begin{pmatrix} \frac{99}{415} & \frac{54}{415} \\ \\ -\frac{156}{2075} & \frac{594}{2075} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{23}{54} \\ \\ \frac{131}{2916} \end{pmatrix} \\
&= \left(\frac{1204}{11205}\,, -\frac{2147}{112050}\right) \\
&= (0.1074520303\,, -0.01916108880)\,.
\end{aligned}
$$

Luego,

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^{(2)} = (x_2, y_2) &= \left(\frac{11}{18}, \frac{5}{5}\right) - \left(\frac{1204}{11205}, -\frac{2147}{112050}\right) \\ &= \left(\frac{11287}{22410}, \frac{47761}{56025}\right) \\ &= (0.5036590808\,,\, 0.8524944221)\end{aligned}$$

Una forma alternativa y más simple es resolver, en cada paso un sistema de ecuaciones lineales, para ello recordemos que el método de Newton viene dado por:

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h_n \\ k_n \end{pmatrix},$$

donde $\begin{pmatrix} h_n \\ k_n \end{pmatrix}$ es la solución del sistema de ecuaciones lineales

$$JF(x_n, y_n)\begin{pmatrix} h_n \\ k_n \end{pmatrix} = -F(x_n, y_n)$$

Tenemos, $F(x, y) = (3x^2 - y^2, 3xy^2 - x^3 - 1)$

$$JF(x, y) = \begin{pmatrix} 6x & -2y \\ 3y^2 - 3x^2 & 6xy \end{pmatrix}$$

Como $(x_0, y_0) = (1, 1)$ nos queda $JF(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ y $F(x_0, y_0) = (2, 1)$, obtenemos así el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_0 \\ k_0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

de donde $6k_0 = -1$, es decir, $k_0 = -\dfrac{1}{6}$; la otra ecuación es $6h_0 - 2k_0 = -2$, y de aquí $h_0 = -\dfrac{7}{18}$. Luego

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dfrac{-7}{18} \\ \\ \dfrac{-1}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{11}{18} \\ \\ \dfrac{5}{6} \end{pmatrix}$$

Para $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ debemos resolver el sistema

$$JF(x_1, y_1)\begin{pmatrix} h_1 \\ k_1 \end{pmatrix} = -F(x_1, y_1)$$

Este sistema es

$$\begin{pmatrix} \dfrac{11}{3} & -\dfrac{5}{3} \\ \\ \dfrac{26}{27} & \dfrac{55}{18} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ k_1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \dfrac{23}{54} \\ \\ \dfrac{131}{2916} \end{pmatrix}$$

cuya solución es

$$(h_1, k_1) = \left(-\frac{1024}{11205}, \frac{2147}{112050} \right) = (-0.10745203030\,,\ 0.01916108880)\,.$$

Luego,

$$(x_2, y_2) = (x_1, y_1) + (h_1, k_1) = \left(\frac{11}{18} - \frac{1024}{11205}, \frac{5}{6} + \frac{2147}{112050} \right) = (0.5036590808\,,\ 0.8524944221)$$

Problema 1.7 Se desea encontrar un cero de la función $f(x) = \cos^2(2x) - x^2$.

(a) Compruebe que esta ecuación tiene **exactamente una solución** en el intervalo $[0, 1.5]$.

(b) Proponga un método iterativo de punto fijo (diferente de Newton) que converja a la solución de la ecuación en el intervalo $[0, 1.5]$. Demuestre la convergencia sin iterar.

(c) Compare en cuanto a velocidad de convergencia, el método propuesto y el método de Newton. Justifique calculando los órdenes de convergencia de ambos métodos.

(d) Partiendo de $x_0 = 1$, determine el número mínimo de iteraciones que se necesitarían para alcanzar una precisión de 10^{-4}, utilizando el método iterativo propuesto anteriormente por usted.

Solución.

(a) Primero veamos que f cambia de signo en el intervalo $[0, 1.5]$. Para ello evaluamos f en los extremos

$$\begin{aligned} f(0) &= 1 > 0, \\ f(1.5) &\approx -1.2699 < 0, \end{aligned}$$

y como la función es continua, por el Teorema del Valor Intermedio, ella posee al menos una raíz $\alpha \in [0, 1.5]$.
Por otro lado,

$$f'(x) = -4\cos(2x)\sin(2x) - 2x = -2\sin(4x) - 2x = -2(\sin(4x) + x).$$

Ahora bien, notemos que la función $\sin(4x) + x$ es positiva en $[0, 1.5]$ y po lo tanto $f'(x) \leqslant 0$ para $x \in [0, 1.5]$. Luego, la función f es decreciente en $[0, 1.5]$ y así f se anula sólo en el punto $\alpha \in [0, 1.5]$.

(b) Note que como $f(1) \approx -0.8268 < 0$, de hecho la raíz de f está en $[0, 1]$. Más aún, podemos seguir reduciendo el intervalo, por ejemplo $f(0.6) \approx -0.2287$ y así $\alpha \in [0, 0.6]$. Trabajemos entonces en el intervalo $[0, 0.6]$. Despejando x de la ecuación $f(x) = 0$ obtenemos que

$$x^2 = \cos^2(2x)\,,$$

y notando que $\cos(2x) \geqslant 0$ si $0 \leqslant 2x \leqslant \frac{\pi}{2}$, lo cual ocurre si $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4} \approx 0.7854$, entonces podemos extraer raíz cuadrada a la igualdad anterior (pues $0 \leqslant x \leqslant 0.6$), y obtenemos que

$$x = \cos(2x). \tag{1.31}$$

La anterior es una ecuación de punto fijo, pero claramente el método de punto fijo asociado no es convergente, ya que la derivada de la función $h(x) = \cos(2x)$, que es igual a $|h'(x)| = |-2\sin(2x)|$ no está acotada superiormente por una constante menor que 1. Luego, es necesario tomar la función inversa del coseno en la igualdad (1.31), con lo cual se obtenemos

$$x = g(x) = \frac{1}{2}\arccos(x).$$

Veamos si el método de punto fijo asociado es o no convergente. Tenemos

$$g'(x) = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \text{para todo} \qquad |x| < 1,$$

de donde sale que el máximo de $|g'(x)|$ se alcanza en el extremo derecho del intervalo $[0, 0.6]$, es decir,

$$L = \max_{x\in[0,0.6]} |g'(x)| = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-(0.6)^2}} \approx 0.6250.$$

Esto es debido a que la función $|g'(x)|$ es creciente, pues su derivada es positiva. En efecto,

$$\left(\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)' = \frac{1}{2}\frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} > 0, \quad \forall x \in [0, 0.6].$$

Como $0 < L < 1$ se deduce que el método de punto fijo $x_{n+1} = g(x_n)$ es convergente, para cualquier elección de $x_0 \in [0, 0.6]$.

(c) Del ítem (b) se tiene que $g'(x)$ nunca se anula y por lo tanto el método propuesto tiene sólo orden de convergencia lineal (orden 1). Por otro lado, la función $f'(x) = -2(\sin(4x) + x)$ sólo se anula en $x = 0$. Ahora bien, como $\alpha \neq 0$ (pues $f(0) = 1 \neq 0$ y α es raíz de f), entonces $f'(\alpha) \neq 0$ lo cual implica que el método de Newton converge cuadráticamente a α (orden 2) y así este método es más rápido que el propuesto.

(d)

$$|x_n - \alpha| \leqslant \frac{L^n}{1-L}|x_1 - x_0| < 10^{-4}. \tag{1.32}$$

Calculemos $x_1 = g(x_0) = \frac{1}{2}\arccos(x_0)$. Como $x_0 = 1$ no está en el intervalo $[0, 0.6]$, entonces no se garantiza la convergencia del método propuesto si partimos de este valor. Entonces tomemos $x_0 = 0.3$ por ejemplo. Así

$$x_1 = \frac{1}{2}\arccos(0.3) \approx 0.63,$$

y reemplazando este valor y $L \approx 0.6250$ en (1.32), obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{(0.625)^n}{0.375}\cdot 0.33 &< 10^{-4},\\
(0.625)^n &< 1.1364\cdot 10^{-4},\\
n\log_{10} 0.625 &< \log_{10} 1.1364 - 4,\\
n &> \frac{\log_{10}(1.1364) - 4}{\log_{10} 0.625} \approx 19.3243.
\end{aligned}$$

Se necesitan al menos 20 iteraciones para obtener una precisión de 10^{-4}.

Problema 1.8 Sea la ecuación $f(x) = 2x^2 - 5x + 2 = 0$, cuyas raíces son $\alpha = 0.5$ y $\beta = 2.0$. Considere los métodos iterativos de punto fijo

(i) $x_{k+1} = g_1(x_k) = \dfrac{2x_k^2 + 2}{5}$

(ii) $x_{k+1} = g_2(x_k) = \sqrt{\dfrac{5x_k}{2} - 1}$

para calcular una aproximación a α y a β .

(a) Demuestre que ambas raíces son simples

(b) Para aproximar α Cuál de ellos utilizaría? Justifique usando el Teorema de punto fijo, es decir, encuentre un intervalo que contenga a α y que cumpla las condiciones del teorema . Calcule el menor número de iteraciones para tener $|x_n - \alpha| \leqslant 10^{-5}$, cuando $x_0 = 1$.

(c) Cuál de los métodos le permite calcular aproximaciones a β ? Justifique.

(d) Demuestre que el método de Newton con condición inicial $x_0 < \frac{5}{4}$ genera una sucesión que converge a la raíz α , mientras que, si la condición inicial $x_0 > \frac{5}{4}$ entonces la sucesión generada por el método de Newton converge a la raíz β .

(e) Si utiliza el método de bisección para aproximar a β . Calcule el número de iteraciones para tener $|a_n - \beta| \leqslant 10^{-3}$, comenzando con un intervalo $I = [a_0, b_0]$, con $|b_0 - a_0| = 1$ que contiene a β en su interior, con $\beta \neq \frac{a_0+b_0}{2}$ ¿Este número depende de la elección del intervalo inicial?. Justifique.

Solución. (a) Para esto, basta comprobar que $f'(\alpha) \neq 0$ y $f'(\beta) \neq 0$. Notemos que $f'(x) = 4x - 5$ y por tanto,

$$
\begin{aligned}
f'(\alpha) &= f'(\frac{1}{2}) = -3 \neq 0 \\
f'(\beta) &= f'(2) = 3 \neq 0
\end{aligned}
$$

(b) Calculemos primero, las derivadas de ambas funciones de iteración y evaluemos en $\alpha = \frac{1}{2}$, tenemos $g_1'(x) = \frac{4}{5}x$, luego $|g_1'(\alpha)| = \left|g_1'(\frac{1}{2})\right| = \frac{2}{5} < 1$ y $g_2'(x) = \frac{5}{4\sqrt{\frac{5}{2}x-1}}$, así $|g_2'(\alpha)| = \left|g_2'(\frac{1}{2})\right| = \frac{5}{4\sqrt{\frac{1}{4}}} = \frac{5}{2} > 1$. Por tanto, ya podemos concluir que el método 1 sirve. Ahora justifiquemos esta elección usando el Teorema de punto fijo, para esto, notemos primeramente que $g_1'(x) = \frac{4}{5}x > 0$ para toda $x \in [0,1]$, es decir, es monótona creciente en el intervalo $[0,1]$ y además, se tiene que

$$
g_1(0) = \frac{2}{5} > 0 \quad \text{y} \quad g_1(1) = \frac{4}{5} < 1
$$

y por tanto, $g_1([0,1]) \subset [0,1]$. Finalmente, se comprueba fácilmente que g_1 es una función contractante en el intervalo $[0,1]$, ya que

$$
\begin{aligned}
L &= \max_{x\in[0,1]} |g_1'(x)| \\
&= \max_{x\in[0,1]} \frac{4}{5}x \\
&= \frac{4}{5} < 1
\end{aligned}
$$

Por último, para encontrar el menor número de iteraciones para tener $|x_n - \alpha| \leqslant 10^{-5}$, cuando $x_0 = 1$, basta aplicar la fó rmula:

$$\|x_n - \alpha\| \leqslant \frac{L^n}{1-L}\|x_1 - x_0\| \leqslant 10^{-5}$$

donde $x_1 = g_1(x_0) = g_1(1) = \frac{4}{5}$ y por tanto, se tiene:

$$|x_n - \alpha| \leqslant \frac{\left(\frac{4}{5}\right)^n}{1-\frac{4}{5}}\left|\frac{4}{5} - 1\right| \leqslant 10^{-5}$$

de donde:

$$\begin{aligned} \left(\frac{4}{5}\right)^n &\leqslant 10^{-5} \\ 5 &\leqslant n\log_{10}\frac{5}{4} \\ n &\geqslant 51.5943 \end{aligned}$$

es decir, se necesitaran al menos, **52 iteraciones** del método 1 para obtener la precisión deseada.

(c) Calculemos las derivadas de ambas funciones de iteración y evaluamos en $\beta = 2$, tenemos $g_1'(x) = \frac{4}{5}x$, luego $|g_1'(\beta)| = |g_1'(2)| = \frac{8}{5} > 1$ y $g_2'(x) = \frac{5}{4\sqrt{\frac{5}{2}x-1}}$, asií $|g_2'(\beta)| = |g_2'(2)| = \frac{5}{4\sqrt{4}} = \frac{5}{8} < 1$, por tanto, podemos concluir que el método 2 sirve.

(d) Primeramente encontremos la función de iteración del método de Newton, esta viene dada por la fórmula $x_{n+1} = g(x_n)$ donde

$$\begin{aligned} g(x) &= x - \frac{f(x)}{f'(x)} \\ &= x - \frac{2x^2-5x+2}{4x-5} \\ &= \frac{2x^2-2}{4x-5} \end{aligned}$$

por otro lado, $g(x) < x$ si $\frac{2x^2-5x+2}{4x-5} > 0$ luego $g(x) < x$ si $\frac{1}{2} < x < \frac{5}{4}$ y $\frac{5}{4} < x < 2$ se tiene $g(x) > x$ si $\frac{2x^2-5x+2}{4x-5} < 0$, de donde $g(x) > x$ si $x < \frac{1}{2}$ y $2 < x$.

Además,

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\frac{5}{4}^+} g(x) &= \lim_{x\to\frac{5}{4}^+}\frac{2x^2-2}{4x-5} = +\infty \\ \lim_{x\to\frac{5}{4}^-} g(x) &= \lim_{x\to\frac{5}{4}^-}\frac{2x^2-2}{4x-5} = -\infty \end{aligned}$$

es decir, $y = \frac{5}{4}$ es una asíntota vertical de la función g. Con todo esto, podemos concluir que:

Caso 1: Si $x_0 < \frac{1}{2}$, se tiene:

$$x_0 < g(x_0) = x_1 < g(x_1) = x_2 < \cdots < g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

y por tanto, a partir de un cierto n, $g\left(\left[x_n, \frac{1}{2}\right]\right) \subset \left[x_n, \frac{1}{2}\right]$ y g será contractante en el intervalo, entonces aplicando el Teorema de punto fijo se tiene que $\{x_n\}$ converge al único punto fijo, pero $g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$, por lo que $\frac{1}{2}$ es punto fijo de g.

Caso 2: Si $\frac{1}{2} < x_0 < \frac{5}{4}$, se tiene:

$$x_0 > g(x_0) = x_1 > g(x_1) = x_2 > \cdots > g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

y por tanto, a partir de un cierto n , $g\left(\left[\frac{1}{2}, x_n\right]\right) \subset \left[\frac{1}{2}, x_n\right]$ y g será contractante en el intervalo, entonces aplicando el Teorema de punto fijo se tiene que $\{x_n\}$ converge al único punto fijo, pero $g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$, por lo que $\frac{1}{2}$ es punto fijo de g.

Caso 3: Si $\frac{5}{4} < x_0 < 2$, se tiene:

$$x_0 > g(x_0) = x_1 > g(x_1) = x_2 > \cdots > g\,(2) = 2$$

y por tanto, a partir de un cierto n , $g\,([x_n, 2]) \subset [x_n, 2]$ y g será contractante en el intervalo, entonces aplicando el Teorema de punto fijo se tiene que $\{x_n\}$ converge al único punto fijo, pero $g\,(2) = 2$, por lo que 2 es punto fijo de g.

Caso 4: Si $x_0 > 2$, se tiene:

$$x_0 < g(x_0) = x_1 < g(x_1) = x_2 < \cdots < g\,(2) = 2$$

y por tanto, a partir de un cierto n , $g\,([2, x_n]) \subset [2, x_n]$ y g será contractante en el intervalo, entonces aplicando el Teorema de punto fijo se tiene que $\{x_n\}$ converge al único punto fijo, pero $g\,(2) = 2$, por lo que 2 es punto fijo de g.

(e) Está claro que para aplicar el método de la bisección, para encontrar la raiz β el intervalo inicial además de contener a β , debe ser tal que $f(a_0)f(b_0) < 0$ y por tanto, $\frac{5}{4} < a_0 < 2$ y $b_0 > 2$. Por otro lado, se tiene que:

$$|a_n - \beta| \leqslant \frac{|a_0 - b_0|}{2^n} \leqslant 10^{-3}$$

y por tanto, como $|a_0 - b_0| = 1$, obtenemos:

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{1}{2^n} & \leqslant & 10^{-3} \\ 10^3 & \leqslant & 2^n \\ 3 & \leqslant & n \log_{10} 2 \\ 9.9658 & \leqslant & n \end{array}$$

es decir, se necesitaran al menos, **10 iteraciones** del método de la Bisección para obtener la precisión deseada. Por otro lado, está claro que el número de iteraciones si depende del intervalo inicial, ya que depende directamente del tamaño de este intervalo.

Problema 1.9 (a) Se desea aproximar la raíz positiva de la ecuación

$$bx^2 + x - a = 0$$

donde $a > 0$ y $b > 0$. Para ello se propone el siguiente método iterativo de punto fijo

$$x_{n+1} = a - bx_n^2.$$

Determine las condiciones que deben satisfacer a y b de modo tal que el método converja.

(b) Muestre que la ecuación $x^3 + x - 1 = 0$ tiene una raíz entre $x = 0.6$ y $x = 1$. Estudie la convergencia de los siguientes métodos iterativos de punto fijo

(i) $x_{n+1} = 1 - x_n^3$

(ii) $x_{n+1} = 1/(1 + x_n^2)$

Compare estos métodos con el método de Newton en cuanto a velocidad de convergencia Cuál de los tres métodos converge más rápido?

Solución.

(a) El método propuesto es

$$x_{n+1} = a - bx_n^2 \,,$$

por lo tanto consideramos la función de iteración

$$f(x) = a - bx^2 \,.$$

Los puntos fijos de f corresponden a las raíces de la ecuación

$$bx^2 + x - a = 0 \,, \qquad (a > 0 \,,\ b > 0).$$

Ahora, $f'(x) = -2bx$. Como las soluciones de la ecuación son

$$r_1 = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4ab}}{2b} \qquad \text{y} \qquad r_2 = -\frac{1 + \sqrt{1 + 4ab}}{2b}$$

la raíz positiva es r_1. Evaluando f' en r_1, obtenemos (*)

$$f'(r_1) = 1 - \sqrt{1 + 4ab} \,,$$

Queremos que $|f'(r_1)| < 1$, es decir,

$$-1 < \sqrt{1 + 4ab} - 1 < 1$$

lo que equivale a

$$0 < \sqrt{1 + 4ab} < 2 \,,$$

de donde $4ab < 3$, por lo tanto la condición buscada es

$$ab < \frac{3}{4} \,.$$

(*) Usamos que la derivada es continua y que si la derivada es menor que 1, la función es una contracción en un intervalo que contiene a r_1, por lo tanto, existe un intervalo $[a, b]$ que contiene a r_1 en su interior, de modo que $f([a, b]) \subset [a, b]$.

(b) La ecuación a resolver es $g(x) = x^3 + x - 1 = 0$. Para ver que tiene una raíz entre 0.6 y 1 usamos el Teorema del Valor Intermedio. Ahora, evaluando, nos queda $g(0.6) = -0.184 < 0$ y $g(1) = 1 > 0$. Como g es continua, se sigue que tiene una raíz en el intervalo $[0.6, 1]$.

Los métodos iterativos propuestos para encontrar dicha raíz son los siguientes

(i) $x_{n+1} = g_1(x_n) = 1 - x_n^3$

(ii) $x_{n+1} = g_2(x_n) = \dfrac{1}{1+x_n^2}$.

Para $g_1(x)$, tenemos $g_1'(x) = -3x^2$. Como $x \in [0.6, 1]$, se sigue que $x^2 \in [0.36, 1]$, luego $3x^2 \in [1.08, 3]$, en otras palabras $|g_1'(x)| \in [1.08, 3]$ para $x \in [0.6, 1]$. Consecuentemente, el método iterativo g_1 no puede generar una sucesión convergente a la raíz de la ecuación dada en el intervalo $[0.6, 1]$.

Para g_2 , tenemos $g_2'(x) = -\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$. Como $x \in [0.6, 1]$, se tiene que g_2 es decreciente en ese intervalo.

Ahora, $0.6 < g_2(0.6) = 0.7352944117\ldots < 1$ y $g_2(1) = \frac{1}{2} < 0.6$, es decir, $g_2(1) \notin [0.6, 1]$. Considerando un intervalo más pequeño, digamos, el intervalo $I = [0.6, 0.8]$, obtenemos

$$0.6 < g_2(0.8) = 0.6097560976\ldots < 1\,,$$

en otras palabras, $g_2([0.6, 0.8]) \subset [0.6, 0.8]$.

Ahora un cálculo directo nos muestra que

$$(g_2')'(x) = \frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}$$

y siendo $3x^2-1 > 0$ cuando $x \geqslant 0.58$ se sigue que $(g_2')'(x) > 0$ para $x \in [0.6, 0.8]$, esto significa que g_2' es creciente y positiva en ese intervalo, luego $g_2'(x) \leqslant g'(0.8) = 0.4171442666 < 1$, y podemos tomar $\lambda = 0.42$, con lo cual obtenemos $|g_2'(x)| \leqslant \lambda$ para todo $x \in [0.6, 0.8]$. Esto completa la prueba de la convergencia del método iterativo g_2 a la raíz r_1 .

Finalmente, como la raíz r_1 es simple, el método de Newton converge cuadráticamente, y como vimos $g_2'(r_1) \neq 0$, se sigue que el método iterativo g_2 tiene convergencia de orden 1, es decir, convergencia lineal. Obviamente, en este caso, el método de Newton converge más rápido.

Problema 1.10 Se desea resolver la ecuación no lineal $x + \ln(x) = 0$.

(a) Muestre que la ecuación tiene una solución en el intervalo $[0, 1]$.

(b) Se proponen los siguientes métodos iterativos.

   (i) $x_{n+1} = g_1(x_n) = -\ln(x_n)$
   (ii) $x_{n+1} = g_2(x_n) = e^{-x_n}$
   (iii) $x_{n+1} = g_3(x_n) = \frac{x_n + e^{-x_n}}{2}$

   Estudie la convergencia de los métodos propuestos. De los que convergen ¿ Cuál(es) lo hace más rápido?

(c) Para el o los métodos que son convergentes, comenzando con $x_0 = 0.6$, calcule numéricamente la raíz r de la ecuación; Cuál es el orden de convergencia de los métodos propuestos que convergen?

(d) Proponga un método alternativo convergente para solucionar la ecuación, de modo a tener orden de convergencia mayor.

Solución.

Gŕficamente tenemos

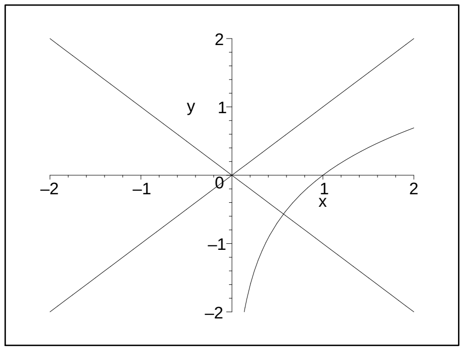


gráfico de $y = \ln(x)$, $y = x$ e $y = -x$ en $[-2, 2]$

(a) Desde el gráfico vemos que la ecuación $x + \ln(x) = 0$ tiene una solución r en el intervalo $[0, 1]$.

(b) Los métodos propuestos son

(i) $x_{n+1} = g_1(x_n) = -\ln(x_n)$

(ii) $x_{n+1} = g_2(x_n) = e^{-x_n}$

(iii) $x_{n+1} = g_3(x_n) = \frac{x_n + e^{-x_n}}{2}$

Para el método (i), la función de iteración es $g_1(x) = -\ln(x)$, luego $g_1'(x) = -\frac{1}{x}$. Ahora, como $r \in]0, 1]$ se sigue que $|g_1'(x)| = |1/x| > 1$ en cualesquier intervalo que contenga a la raíz r de la ecuación. Por lo tanto, no hay convergencia de este método iterativo en ningún que contenga a la raíz r de la ecuación

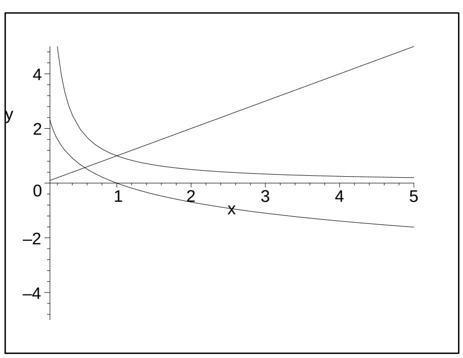


gráfico de $g_1(x)$ y $g_1'(x) = 1/|x|$ en $]0, 5]$

Para el método (ii), la función de iteración es $g_2(x) = e^{-x}$. De donde $g_2'(x) = -e^{-x}$. Luego, $|g_2'(x)| = e^{-x}$. Ahora, para $x > 0$ y siendo que $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \cdots > 1 + x$ se tiene que $e^x > 1 + x$, esto es, $e^{-x} < \frac{1}{1+x}$, en otra palabras, $|g_2'(x)| < \frac{1}{1+1}$ si $x > 0$. Por lo tanto, en cualquier intervalo cerrado y acotado de la forma $[\alpha, \beta]$, con $\alpha > 0$, y que contenga a ña raíz r de la ecuación se tiene que $|g_2'(x)| \leqslant \max\{1/(1+x) \ x \in [\alpha, \beta]\} = \frac{1}{1+\alpha} = \lambda(\alpha) < 1$.

Tomando el intervalo que contiene a la raíz de la forma $[\alpha, 1]$, con $0 < \alpha < r$, tenemos que $g_2([\alpha, 1]) = [e^{-1}, e^{-\alpha}] \subset [\alpha, 1]$

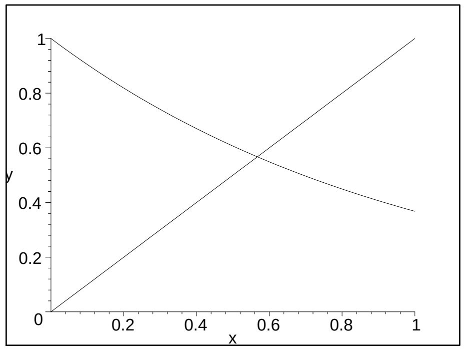


gráfico de $g_2(x) = |g_1'(x)| = e^{-x}$ en $[0, 1]$

Concluímos entonces que g_2 es un método iterativo que sirve para encontrar la raíz de la ecuación dada. Ademá, se tiene que $g_2'(r) = e^{-r} \neq 0$, y el método tiene orden de convergencia 1.

Para el método (iii), la función de iteración es $g_3(x) = \frac{x+e^{-x}}{2}$. Tenemos $g_3'(x) = \frac{1}{2}(1-e^{-x}) > 0$ si $x > 0$. Luego, $g_3(x)$ es estrictamente creciente en $[0, \infty[$.

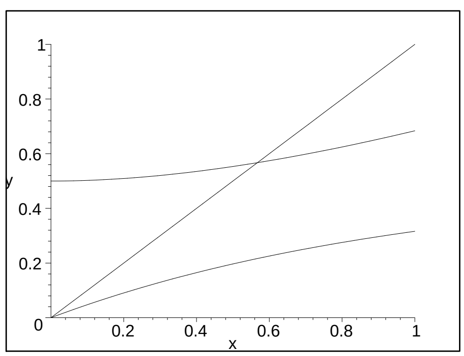


gráfico de $g_3(x)$ y $g_3'(x)$ en $[0, 1]$

Ahora, $|g_3'(x)| = \frac{1}{2}|1 - e^{-x}| \leqslant \dfrac{1}{2}$ para $x \geqslant 0$. Además, es claro que $g_3([0, 1]) \subset [0, 1]$. Por lo tanto, este método tanmbién es convergente a la raíz r de la ecuación. Ahora, como $g_3'(r) = \frac{1-e^{-r}}{2} \neq 0$, el orden de convergencia de g_3 es 1.

(c) Resolviendo numéricamente la ecuación, obtenemos que $r = 0.5671432904\ldots$. Realizando algunas iteraciones, con $x_0 = 0.6$, tenemos

$e_0 \approx 0.0328567096$

Para g_2

x_n	$x_{n+1} = g_2(x_n)$	Error $= \|x_n - r\|$
x_0	$-$	$E_0 \approx 0.0328567096$
x_0	$x_1 \approx 0.5488116361$	$E_1 \approx 0.0183316543$
x_1	$x_2 \approx 0.5776358443$	$E_2 \approx 0.0104925539$
x_2	$x_3 \approx 0.5612236194$	$E_3 \approx 0.0059196710$
x_3	$x_4 \approx 0.5705105488$	$E_4 \approx 0.0033672584$
x_4	$x_5 \approx 0.5652367841$	$E_5 \approx 0.0019065063$
x_5	$x_6 \approx 0.5682255840$	$E_6 \approx 0.0010822936$
x_6	$x_7 \approx 0.5665298069$	$E_7 \approx 0.0006134835$
x_7	$x_8 \approx 0.5674913302$	$E_8 \approx 0.0003480398$

Para g_3

x_n	$x_{n+1} = g_3(x_n)$	Error $= \|x_n - r\|$
x_0	$-$	$E_0 \approx 0.0328567096$
x_0	$x_1 \approx$	$E_1 \approx 0.0033672584$
x_1	$x_2 \approx 0.5687225676$	$E_2 \approx 0.0015792772$
x_2	$x_3 \approx 0.5674854442$	$E_3 \approx 0.0003421538$
x_3	$x_4 \approx 0.5672173588$	$E_4 \approx 0.0000740684$
x_4	$x_5 \approx 0.5671593217$	$E_5 \approx 0.0000160313$
x_5	$x_6 \approx 0.5671467600$	$E_6 \approx 0.34696\, 10^{-5}$
x_6	$x_7 \approx 0.5671440414$	$E_7 \approx 0.7510\, 10^{-6}$
x_7	$x_8 \approx 0.5671434529$	$E_8 \approx 0.1625\, 10^{-6}$

Desde la tabla vemos que g_3 converge más rápido que g_2 a la solución. Ahora, evaluando $g_2'(r) \approx -0.5671432904$ y $g_3'(r) \approx 0.2164283548$, se confirma lo que la tabla ya evidenció, pues $|g_3'(r)| < |g_2'(r)|$.

(d) Podemos elegir como método alternativo al método de Newton. Para ver que tenemos convergencia cuadrática, veamos si r es raíz simple de $f(x) = x + \ln(x)$. Tenemos $f(r) = 0$ y $f'(x) = 1 + \frac{1}{x}$ evaluada en r nos da $f'(0.5671432904) \approx 2.763222834$. Luego el método de Newton tienen orden de convergencia 2 en este caso.

Problema 1.11 Sea $f(t) = t^3 + t - 9$. La ecuación $f(t) = 0$ tiene una raíz α cerca de 2. Definamos el método iterativo de punto fijo

$$t_{n+1} = F(t_n) = t_n + \lambda(t_n^3 + t_n - 9)$$

(a) Encuentre un rango aproximado de valores de λ, de tal forma que el método iterativo propuesto converja al punto fijo α de $F(t)$.

(b) Encuentre λ en trminos de α de tal forma que el mtodo iterativo propuesto converja *cuadrticamente* a α. Denote por $\lambda(\alpha)$ el valor de λ as obtenido.

(c) Pruebe que si en el tem anterior, reemplaza $\lambda(\alpha)$ por $\lambda(t_n)$, entonces el mtodo iterativo sigue convergiendo cuadrticamente a α. A cul mtodo de los vistos en clases corresponde este nuevo mtodo?

Solución.

Tenemos la función $f(t) = t^3 + t - 9$, de la cual sabemos tiene una raíz α cerca de 2. El método iterativo propuesto es

$$t_{n+1} = F(t_n) = t_n + \lambda(t_n^3 + t_n - 9)$$

Notemos primero que la raíz α de la ecuación $f(t) = 0$ es simple, pues $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0$ para todo t.

(a) Queremos que $|F'(t)| < 1$ en un intervalo que contenga a α. Como $F'(t) = 1+\lambda(3t^2+1)$ es continua, basta encontrar los valores de λ para los cuales se tiene $|F'(\alpha)| < 1$.

Ahora, $|F'(\alpha)| < 1$ si y sólo si $-1 < 1+\lambda(3\alpha^2+1) < 1$, de donde $-2 < \lambda(3\alpha^2+1) < 0$, y por lo tanto $\lambda \in]-\frac{2}{3\alpha^2+1}, 0[$. Notemos que $\alpha \approx 1.92017512134718$. Por otra parte, debemos tener también que $F(J) \subset J$ para algún intervalo cerrado J que contiene a α. Además, F tiene un máximo, el cual se obtiene resolviendo la ecuación cuadrática $F'(t) = 1 + \lambda(3t^2 + 1) = 0$, es decir, $t^2 = -\frac{3\lambda(\lambda+1)}{3\lambda}$, de donde $t_1 = -\frac{\sqrt{-3\lambda(\lambda+1)}}{3\lambda}$ y $t_2 = \frac{\sqrt{-3\lambda(\lambda+1}}{3\lambda}$. El valor que nos sirve es t_1. Luego, evaluando nos queda

$$F(t_1) = -\frac{\sqrt{-3\lambda(\lambda+1)}}{3\lambda} + \lambda\left(-\frac{(-3\lambda(\lambda+1))^{3/2}}{27\lambda^3} - \frac{\sqrt{-3\lambda(\lambda+1)}}{3\lambda} - 9\right)$$

e igualando $F(t_1) = 2$, obtenemos los valores $\lambda_1 = -0.120759518531177\ldots$ y $\lambda_2 = -0.0553844172271280\ldots$. Ahora, tenemos que si $\lambda \in [\lambda_1, 0[$, entonces $F([1,2]) \subset [1,2]$. Notemos que el caso límite cuando $\lambda = 0$, no da $F(t) = t$.

Finalmente, como $\frac{-2}{3\alpha^2+1} = -0.165820739214026\ldots$ y $|F'(t)| < 1$ para $-\frac{2}{3\alpha^2+1} < \lambda < 0$, juntando con lo anterior, se sigue que

$$\begin{cases} F([1,2]) \subset [1,2] \\ |F'(t)| < 1 \end{cases}$$

para $\lambda \in [\lambda_1, 0[$.

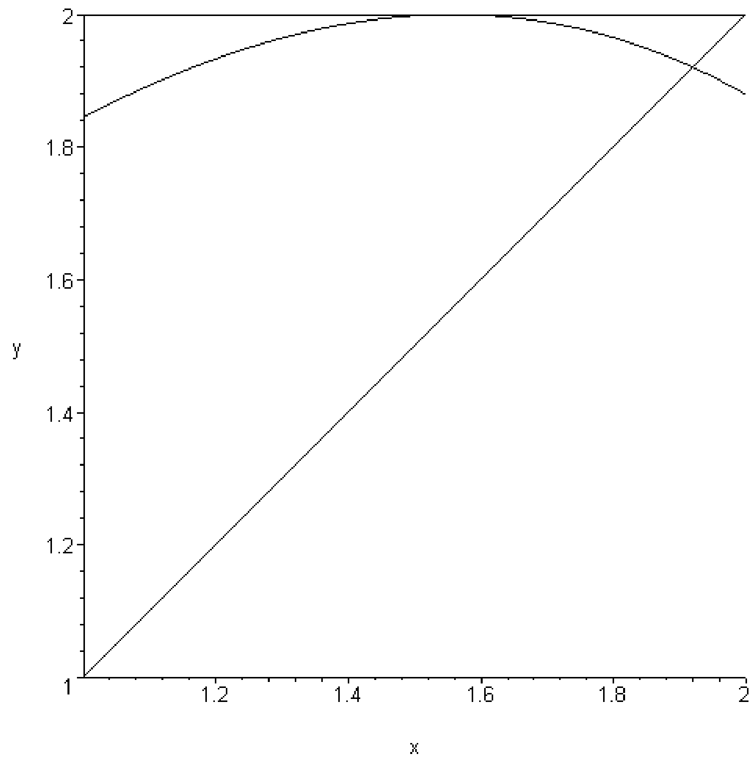


gráfico de F en $[1,2]$

(b) Llamando $\lambda(\alpha)$ al valor de λ (si existe) para el cual se tiene convergencia cuadrática del método propuesto. Para ello, sabemos que $\lambda(\alpha)$ debe se tal que en ese valor $F'(\alpha)=0$, esto es, $F'(\alpha)=1+\lambda(\alpha)(3\alpha^2+1)=0$, de donde obtenemos

$$\lambda(\alpha)=-\frac{1}{3\alpha^2+1}\approx -0.0829103696070128\,.$$

Notemos que $f'(t)=3t^2+1$, luego $f'(\alpha)=3\alpha^2+1$, de donde $\lambda(\alpha)=-\dfrac{1}{f'(\alpha)}$.

(c) Para el valor $\lambda(\alpha)$, se obtiene el método

$$\begin{aligned} F_{\lambda(\alpha)}(t_n) &= t_n+\lambda(\alpha)(t_n^3+t_n-9)\\ &= t_n-\frac{f(t_n)}{f'(\alpha)} \end{aligned}$$

para el cual se tiene $F'_{\lambda(\alpha)}(\alpha)=0$, es decir, tenemos convergencia cuadrática.

Ahora, al reemplazar $\lambda(\alpha)$ por $\lambda(t_n)=-\frac{1}{3t_n^2+1}=-\frac{1}{f'(t_n)}$ nos que el método iterativo

$$t_{n+1}=F(t_n)=t_n-\frac{f(t_n)}{f'(t_n)}$$

que no es otro que el método de Newton, para el cual tenemos convergencia cuadrática, pues la raíz α de la ecuación inicial es simple.

Problema 1.12 Sea $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\dfrac{x-1}{x}-e^{-x}$.

(a) Demuestre que la ecuacin $f(x) = 0$ posee exactamente una solucin $\alpha > 0$. Encuentre dos naturales consecutivos tales que α se encuentre entre estos dos nmeros.

(b) Considere las siguientes funciones:

$$F_1(x) = 1 + xe^{-x}, \quad F_2(x) = \ln\left(\frac{x}{x-1}\right), \quad F_3(x) = (x-1)e^x.$$

(i) Pruebe que la ecuacin $x = F_i(x)$, para $i = 1, 2, 3$, es equivalente a la ecuacin $f(x) = 0$.

(ii) Considere los mtodos iterativos asociados:

$$x_{n+1} = F_i(x_n), \quad i = 1, 2, 3.$$

Estudiar la convergencia de estos mtodos.

(c) Escoger un intervalo y un punto inicial adecuado para que el mtodo de Newton converja a la raz positiva de la ecuacin $f(x) = 0$.

Solución.

Tenemos la función $f : \mathbb{R} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \frac{x-1}{x} - e^{-x}$. Claramente, f es continua en su dominio.

(a) Para $x = 1$, obtenemos $f(1) = -e^{-1} < 0$ y para $x = 2$, se tiene $f(2) = 1 - e^{-2} > 0$. Luego, por el Teorema del Valor Intermedio, existe una raíz α de f en el intervalo $[1, 2]$. Por otra parte, se tiene que $f'(x) = \frac{1+x^2e^{-x}}{x^2} > 0$ para todo $x \in \mathrm{Dom}(f)$, por lo tanto es estrictamente creciente en el intervalo considerado $[1, 2]$ que contiene su raíz, consecuentemente, f tiene sólo una raíz en ese intervalo.

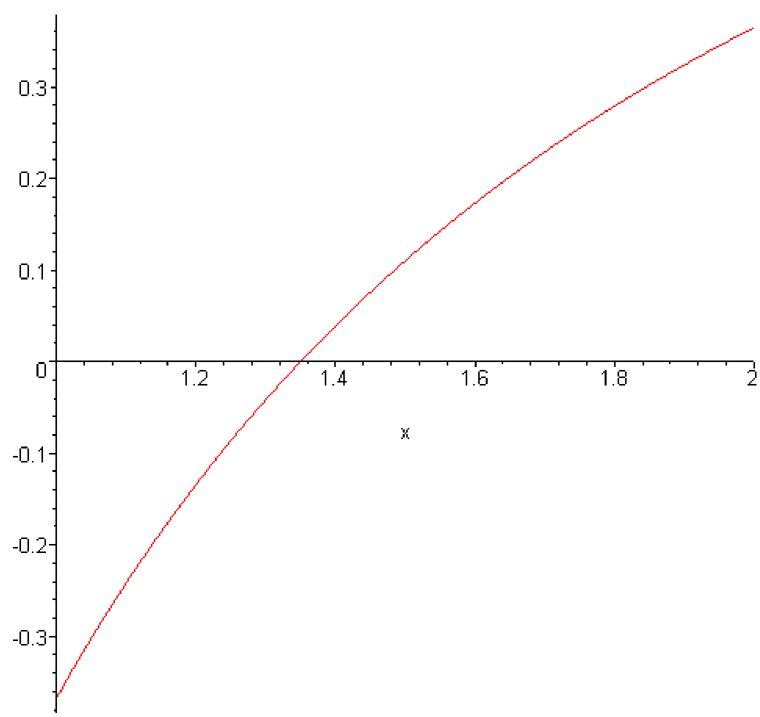


gráfico de f en $[1, 2]$

(b) Tenemos $F_1(x) = 1 + xe^x$, $F_2(x) = \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$ y $F_3(x) = (x-1)e^x$.

(i) Tenemos $F_1(x) = x$ si y sólo si $1+xe^{-x} = x$, de donde $e^{-x} = \frac{x-1}{x}$, lo cual es equivalente a la ecuación $f(x) = 0$.

Para $F2$, se tiene $F_2(x) = x$ si y sólo si $\ln\left(\frac{x}{x-1}\right) = x$, y aplicando exponencial a ambos lado de esta igualdad, nos queda, $\frac{x}{x-1} = e^x$, lo cual es equivalente a $\frac{x-1}{x} = e^{-x}$, y esto no es otra cosa que la ecuación $f(x) = 0$.

Finalmente, para F_3 , tenemos $F_3(x) = x$ si y sólo si $(x-1)e^x = x$, de donde $\frac{x-1}{x} = e^{-x}$, es decir, $f(x) = 0$.

(ii) Ahora, derivando las funciones de iteración, obtenemos $F_1'(x) = -e^{-x}(x-1)$, $F_2'(x) = -\frac{1}{x(x-1)}$ y $F_3'(x) = xe^x$.

Luego, $|F_1'(x)| = e^{-x}(x-1)$ para $1 \leqslant x \leqslant 2$, esta función F_1 es decreciente en ese intervalo y alcanza su máximo en $x = 2$, luego $|F_1'(x)| \leqslant e^{-2} < 1$. Como $F_1'(x) = -e^{-x}(x-1) \leqslant 0$, se sigue que F_1 es decreciente en el intervalo $[1,2]$. Por lo tanto, $F_1([1,2]) = [F_1(2), F_1(1)] = [1+2e^{-2}, 1+e^{-1}] \subset [1,2]$. Siendo $\max\{|F_1'(x)| \ \ x \in [1,2]\} \leqslant e^{-2}$, podemos tomar $\lambda = e^{-2} < 1$. Del análisis anterior, concluimos que para cualesquiera que sea la condición inicial x_0 elegida en el intervalo $[1,2]$, el método iterativo definido por F_1 es convergente.

Alternativamente Como $\max\{|F_1'(x)| \ \ x \in [1,2]\} \leqslant e^{-2}$, existe un intervalo cerrado $J \subset [1,2]$ que contiene a α en su interior, tal que $F_1(J) \subset J$, por lo tanto, para cualquier condición inicial en J el método iterativo definido por F_1 es convergente.

Para F_2 , tenemos $F_2'(x) = \frac{1}{x(x-1)}$, con $1 < x \leqslant 2$. Veamos para que intervalo se tiene $|F_2'(x)| < 1$, es decir, $1 < x(x-1) = x^2 - x$, de donde $0 < x^2 - x - 1$. Resolviendo $x^2 - x - 1 = 0$, se obtienen dos raíces reales $x_1 \approx 1.618033989$ y $x_2 \approx -0.6180339888$. Como sólo nos interesan os valores de $x \in]1,2]$ y en ese intervalo $F_2'(x)$ es creciente y alcanza su mínimo en $x = 1$, vemos que $|F_2'(x)| < 1$ si $x \in]x_1, 2]$, pero se tiene $F_2(]x_1, 2]) \subset]0.5, 1]$, por lo tanto, el método iterativo definido por F_2 no puede ser convergente en ningún intervalo que contenga la raíz α de la ecuación $f(x) = 0$.

Alternativamente. Notemos que la raíz α de la ecuación $f(x) = 0$ está en el intervalo $K = [1.2, 1.4]$, pues $f(1.2) \approx -0.1345275452$ y $f(1.4) \approx 0.0391173218$, y el intervalo K es disjunto del intervalo $]x_1, 2]$ en el cual se tiene $|F_2'(x)| < 1$, o lo que es lo mismo, $K \subset [1, x_1]$ en el cual se tiene $|F'(x)| > 1$. Por lo tanto, el método iterativo definido por F_2 no puede converger en ningún intervalo que contenga a la raíz α de la ecuación $f(x) = 0$.

Para $F_3(x)$, tenemos $F_3'(x) = xe^x > 1$ para todo $x \in [1,2]$. Por o tanto el método iterativo definido por F_3 no puede converger en ningún intervalo que contenga a α .

(c) Como $f'(x) = \frac{1+x^2e^{-x}}{x^2}$, reemplazando en la fórmula del método de Newton, $N_f(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$, nos queda

$$N_f(x) = \frac{x(2 + x^2e^{-x} + xe^{-x} - x)}{1 + x^2e^{-x}} .$$

Se tiene de inmediato que $N_f(0) = 0$ y un cálculo directo muestra que N_f posee un máximo en α . además, existe un valor $\beta(\approx 2.675\,)$ tal que el gráfico de N_f en el intervalo $]0, \beta[$ esta por sobre el eje x. Es claro entonces que cualquier intervalo cerrado $I \subset]0,\beta[$ sirve como intervalo donde tenemos convergencia para el método de Newton asociado a f.

Problema 1.13 Considere la función:

$$f(x) = \tan(x) - x + 2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(a) Defina una estrategia de punto fijo (diferente a Newton) y demuestre su convergencia (sin hacer iteraciones) explicitando en qué intervalo se garantiza dicha convergencia.

(b) Diga y justifique cuál es el orden de convergencia del método iterativo definido por ud.

(c) Cuántas iteraciones debería ud. realizar para garantizar una precisión de 10^{-6} si toma como punto de partida $x_0 = 1$?.

Solución.

(a) Tenemos que $f(x) = \tan(x) - x + 2 = 0$ tiene infinitas soluciones,

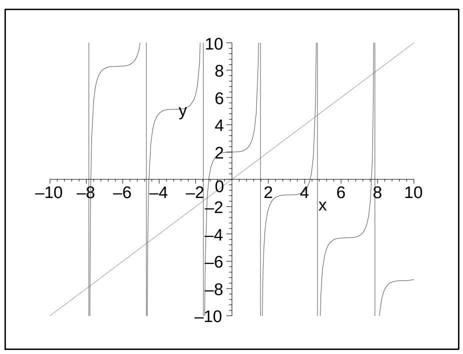


gráfico de $f(x) = \tan(x) - x + 2$, $-10 \leqslant x \leqslant 10$

Proponemos el método iterativo $\Phi(x) = \arctan(x-2)$. Este no está bien definido, pero si consideramos un intervalo entre dos asintótas de $f(x)$, queda bien definida. Ahora, tenemos que

$$\Phi'(x) = \frac{1}{(x-2)^2 + 1} < 1$$

para todo $x \neq 2$. Luego, como 2 no es raíz de $f(x) = 0$, se tiene que $|\Phi'(\alpha)| < 1$ para toda raíz α de la ecuación $f(x) = 0$. Por lo tanto, existe un intervalo cerrado y acotado $[a,b]$ alrededor de cualquier raíz α de $f(x) = 0$, tal que $|\Phi'(x)| < \max\{|\Phi'(x)| \ a \leqslant x \leqslant b\} = |\Phi'(b)|$. Consideramos la rama que contiene a la raíz $\alpha_1 \approx -1.27439266194$ de la ecuación. Tenemos $f(-1.27439266194) \approx -0.2 \times 10^{-10}$. Luego en cualquier intervalo $[a,b] \ni \alpha_1$ el método iterativo propuesto converge.

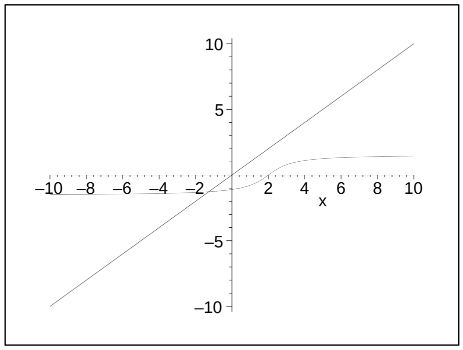


gráfico de $\Phi(x) = \arctan(x-2)\,,\ -10 \leqslant x \leqslant 10$

(b) Como $\Phi'(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ donde $\Phi(x)$ este bien definida, se tiene que el método propuesto tiene orden de convergencia 1.

(c) Comenzando con $x_0 = 1$, tenemos

x_n	$f(x_n)$	$x_{n+1} = \Phi(x_n)$
$x_0 = 1$	2.55740772465	$x_1 = -.785398163397$
$x_1 = -0.785398163397$	0.44071475795	$x_2 = -1.22611292137$
$x_2 = -1.22611292137$	0.04410460264	$x_3 = -1.27021752400$
$x_3 = -1.27021752400$	0.00381853163	$x_4 = -1.27403605567$
$x_4 = -1.27403605567$	0.00032618033	$x_5 = -1.27436223603$
$x_5 = -1.27436223603$	0.00002783022	$x_6 = -1.27439006621$
$x_6 = -1.27439006621$	0.237429×10^{-5}	$x_7 = -1.27439244049$
$x_7 = -1.27439244049$	0.20251×10^{-6}	$x_8 = -1.27439264305$

Podemos usar $|E(x_{n+1}, x_n)| = |x_{n+1} - x_n|$ como criterio de parada, entonces $|x_{n+1} - x_n| < 10^{-6}$ nos da que $|x_7 - x_6| = 0.000000403 = 0.403 \times 10^{-6} < 10^{-6}$. Luego, basta iterar hasta x_7.

Problema 1.14 Sea $f(x) = (x-2)^4$.

(a) Determine la fórmula de Newton $x_{n+1} = g(x_n)$.

(b) Tomando como valor inicial $x_0 = 4$, calcule según la fórmula de iteración de Newton encontrada en la parte (a) los valores de x_1, x_2 y x_3.

(c) Calcule, usando como valores iniciales x_0 y x_1 obtenidos en (b), los valores de x_2 y x_3 usando el método de la secante. Podría ud. usar el método de Regula-falsi?. Explique su respuesta en el caso negativo o dé los valores de x_2 y x_3 en caso afirmativo.

(d) Demuestre que el método de Newton usado en la parte (a) tiene un orden de convergencia $p = 1$.

(e) Dé un método alternativo de iteración que garantice un orden de convergencia $p = 2$ y demuestre que efectivamente este es su orden de convergencia.

Solución.

(a) Tenemos que $f(x) = (x-2)^4$. Luego, $f'(x) = 4(x-2)^3$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} N_f(x) &= x - \frac{f(x)}{f'(x)} \\ &= x - \frac{(x-2)^4}{4(x-2)^3} \qquad \text{simplificando} \\ &= x - \frac{1}{4}(x-2) \\ &= \frac{3}{4}x + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(b) Comenzando con $x_0 = 4$ tenemos

$$\begin{aligned} x_0 &= 4 \\ x_1 &= N_f(x_0) = 3.5 \\ x_2 &= N_f(x_1) = \frac{3}{4}\frac{7}{2} + \frac{1}{2} = \frac{25}{8} = 3.125 \\ x_3 &= N_f(x_2) = \frac{3}{4}\frac{25}{8} = \frac{91}{32} = 2.84375 \end{aligned}$$

(c) Comenzamos con $x_0 = 4$ y $x_1 = \frac{7}{2}$. La fórmula para el método de la secante es dada por

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

Usando la calculadora, obtenemos

$$\begin{aligned} x_2 &= 3.26857142857 \\ x_3 &= 3.02619051590 \end{aligned}$$

No podemos usar el método de regula falsi, pues nunca se tiene que $f(x) \cdot f(y) < 0$ cuando $x \neq y$.

(d) Tenemos que $N_f(x) = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$, Luego, $N_f'(x) = \frac{3}{4} \neq 0$, por lo tanto en la raíz $\alpha = 2$ de la ecuación se tiene, en particular que $N_f'(\alpha) \neq 0$, por lo tanto el método iterativo de Newton es de orden de convergencia 1 en este caso.

La razón es que la raíz $\alpha = 2$ de la ecuación es múltiple de multiplicidad $m = 4$, pues $f'(x) = 4(x-2)^3$, $f''(x) = 12(x-2)^2$, $f'''(x) = 24(x-2)$ y $f^{(4)}(x) = 24 \neq 0$.

(e) Luego, por lo anterior podemos proponer el método de Newton modificado para raíces mútiple

$$N_{f,m}(x) = x - m\frac{f(x)}{f'(x)}$$

donde m es la multiplicidad de la raíz. En nuestro caso, $m = 4$. Tenemos entonces

$$
\begin{aligned}
N_{f,m}(x) &= x - 4\frac{(x-2)^4}{4(x-2)^3} \qquad\qquad \text{simplificando}\\
&= x - (x-2)\\
&= 2
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $N_{f,m}(x) = 2$ función constante, y su orden de convergencia en las raíces múltiples es 2.

Problema 1.15 La ecuación $\cot(3x) - \dfrac{x^2-1}{2x} = 0$ tiene una raíz en el inetrvalo $0 < x \leqslant 1$.

(a) Demuestre que el método de Newton aplicado a la resolución de esta ecuación tiene un orden de convergencia $p = 2$.

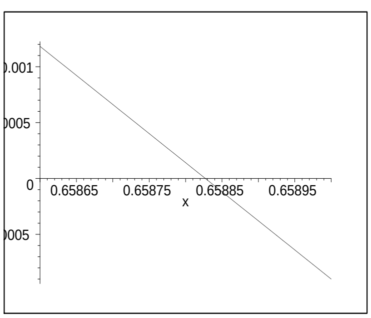
(b) Proponga un método iterativo de punto fijo que sea convergente a la solución de la ecuación. La convergencia debe probarla teoricamente (sin iterar).

Solución.

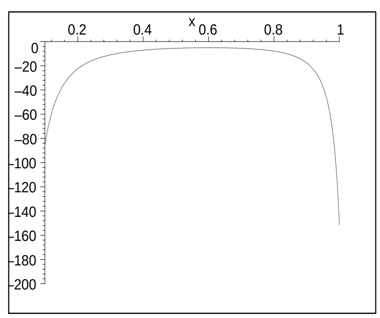
(a) Tenemos la ecuación $f(x) = \mathrm{cotan}(3x) - \dfrac{x^2-1}{2x} = 0$.

Para ver que $f(x) = 0$ tiene una raíz en $]0,1]$, evaluemos $f(0,.1) \approx 8.182728144 > 0$ y $f(1) \approx -7.015252551 < 0$. Luego, $f(x) = 0$ tiene una raíz en el intervalo dado.

Ahora, $f'(x) = -3\mathrm{cosec}^{(}3x) - \dfrac{2x^2+1}{4x^2} = -\left(\mathrm{cosec}^{(}3x) + \dfrac{2x^2+1}{4x^2}\right) < 0$, por lo tanto $f(x)$ es estrictamente decreciente en $]0,1]$, consecuemente tiene una única raíz en ese intervalo. Ahora, si denotamos por $r \in]0,1]$ a la única raíz de $f(x)$ en ese intervalo, se tiene evidentemente que $f(r) = 0$ y como $f'(x) < 0$ en $]0,1]$ se sigue que $f'(r) \neq 0$. Por lo tanto, el método de Newton tiene orden de copnvergencia $p = 2$ en este caso.



$f(x)\,,\ x \in]0,1]$



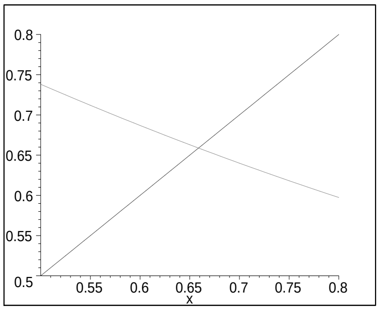
$f'(x)\,,\ x \in]0,1]$

Nota. Usando el método de Newton se obtiene en tres iteraiones, comenzando con $x_0 = 0.5$ el valor aproximado de $r = x_3 \approx 0.6588271561$ con $f(x_3) = -0.57 \times 10^{-8}$.

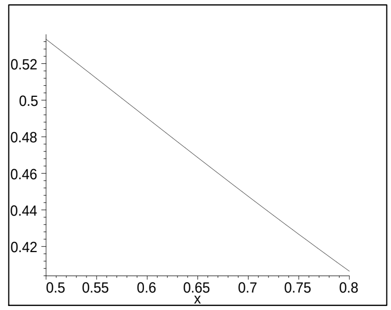
(b) Proponemos el siguiente método iterativo de punto fijo

$$x_{n+1} = g(x_n) = \frac{1}{3}\,\mathrm{arccotan}\left(\frac{x^2-1}{2x}\right)$$

Tenemos $g'(x) = -\dfrac{2}{3(x^2+1)}$, es menor que 0 siempre, luego g es estrictamente decreciente. Además, $|g'(r)| \approx 0.4648827927 < 1$, luego existe un intervalo $[\alpha, \beta] \subset]0,1]$ alrededor de la raíz r de $f(x)$ (punto fijo de g) tal que $g([\alpha,\beta]) \subset [\alpha,\beta]$. De hecho, podemos ver que basta tomar el intervalo $[\alpha,\beta] = [0.5, 0.8]$ para tener lo pedido. Ahora, $|g'(x)| < 1$. Por lo tanto el método iterativo propuesto es convergente.



$g(x)$, $x \in [0.5, 0.8]$



$g'(x)$, $x \in [0.5, 0.8]$

Problema 1.16 Sea

$$f(x) = x^2 - 2xe^{-x} + e^{-2x} \qquad (1)$$

de la cual se conoce que tiene una raíz $\overline{x}$ en el intervalo $(0,1]$.

(a) Sea $x_0 = 0,5$, obtenga usando el método de Newton, los valores de x_1 y x_2 .

(b) Demuestre que el método de Newton para esta función tiene un orden de convergencia $p = 1$. Para esto, le recomendamos que demuestre primero que si $\overline{x}$ es raíz de la ecuación (1), entonces se tiene $\overline{x} = e^{-\overline{x}}$ y luego concluya.

(c) Proponga un método de punto fijo cualquiera, que garantice que converja a la raíz $\overline{x}$ y que su orden de convergencia sea $p = 2$. Justifique su respuesta.

Solución.

Sea $f(x) = x^2 - 2xe^{-x} + e^{-2x}$. Se sabe que f una raíz $\overline{x}$ en $I =]0,1]$.

(a) Sea $x_0 = 0.5$. Usando el método de Newton, obtenemos los valores x_1 y x_2 .

Tenemos que:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x - 2e^{-x} + 2xe^{-x} - 2e^{-2x} \\ &= 2x + 2(x-1)e^{-x} - 2e^{-2x} \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} N_f(x) &= x - \frac{x^2 - 2xe^{-x} + e^{-2x}}{2x + 2(x-1)e^{-x} - 2e^{-2x}} \\ &= \frac{2x^2 - 2xe^{-x} + 2x^2e^{-x} - 2xe^{-2x} - x^2 + 2xe^{-x}e^{-2x}}{2x + 2(x-1)e^{-x} - e^{-2x}} \\ &= \frac{x^2 + 2x^2e^{-x} - 2xe^{-2x} - e^{-2x}}{2x + 2(x-1)e^{-x} - 2e^{-2x}} \end{aligned}$$

y finalmente tenemos:

$$\begin{aligned} x_1 &= N_f(0.5) = 0.5331555020 \\ x_2 &= N_f(0.5331555020) = 0.550043804 \end{aligned}$$

(b) Para demostrar que el método de Newton tiene orden de convergencia $p = 1$, usamos la indicación. Si $\overline{x}$ es una raíz de la ecuación, entonces

$$\overline{x} = e^{-\overline{x}}$$

Si $\overline{x}$ es una raíz de la ecuación, entonces

$$\overline{x}^2 - 2\overline{x}e^{-\overline{x}} + e^{-2\overline{x}} = 0$$

multiplicando la ecuación por $e^{2\overline{x}}$ obtenemos

$$\begin{aligned} e^{2\overline{x}}\overline{x}^2 - 2\overline{x}e^{\overline{x}} + 1 &= 0, \text{ es decir,} \\ (\overline{x}e^{\overline{x}})^2 - 2\overline{x}e^{\overline{x}} + 1 &= 0 \\ (x\overline{x}e^{\overline{x}} - 1)^2 = 0, & \end{aligned}$$

de donde $\overline{x}e^{\overline{x}} - 1 = 0$, raíz doble, esto es, $\overline{x} = e^{-\overline{x}}$ es una raíz doble de la ecuación. Por lo tanto el método de Newton tiene orden de convergencia $p = 1$ cerca de $\overline{x}$.

(c) Como la raíz de la ecuación es una raíz doble, podemos usar el método de Newton modificado con $k = 2$,

$$N_{f,m}(x) = x - k\frac{f(x)}{f'(x)} = x - 2\frac{f(x)}{f'(x)},$$

el cual sabemos tiene orden de convergencia $p = 2$ cerca de la raíz doble $\overline{x} = e^{-\overline{x}}$.

1.10 Ejercicios

Problema 1.1 Use el manejo algebraico para demostrar que las siguientes funciones tienen un punto fijo en p exactamente cuando $f(p) = 0$, donde $f(x) = x^4 + 2x^2 - x - 3$.

(a) $g_1(x) = \left(3 + x - 2x^2\right)^{1/4}$

(b) $g_2(x) = \left(\frac{x+3-x^4}{2}\right)^{1/2}$

(c) $g_3(x) = \left(\frac{x+3}{x^2+2}\right)^{1/2}$

(d) $g_4(x) = \frac{3x^4+2x^2+3}{4x^3+x-1}$

Problema 1.2 1. Efectúe cuatro iteraciones, si es posible hacerlo, en las funciones definidas en el problema anterior, considerando $p_0 = 1$ y $p_{n+1} = g(p_n)$, $n = 0, 1, 2, 3$.

2. ¿Cuál función, a su juicio, dará la mejor aproximación a la solución?

Problema 1.3 Se proponen los siguientes métodos para calcular $21^{1/3}$. Clasifique por orden, basándose para ello la rapidez de convergencia y suponiendo que $p_0 = 1$ en cada caso.

(a) $p_n = \frac{20p_{n-1} + \frac{21}{p_{n-1}^2}}{21}$

(b) $p_n = p_{n-1} - \frac{p_{n-1}^3 - 21}{3p_{n-1}^2}$

(c) $p_n = p_{n-1} - \frac{p_{n-1}^4 - 21p_{n-1}}{p_{n-1}^2 - 21}$

(d) $p_n = \left(\frac{21}{p_{n-1}}\right)^{1/2}$

Problema 1.4 Aplique el método de bisección para determinar c_3, para $f(x) = \sqrt{x} - \cos(x)$ en $[0, 1]$.

Problema 1.5 Sea $f(x) = 3(x+1)\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-1)$. Aplique el método de bisección para determinar c_3 en los siguientes intervalos.

(a) $\left[-2, \frac{3}{2}\right]$

(b) $\left[\frac{5}{4}, \frac{5}{2}\right]$

Problema 1.6 Aplique en los siguientes intervalos el método de bisección para determinar las aproxiamciones a las soluciones de $x^3 - 7x^2 + 14x - 6 = 0$ con una exactitud de 10^{-2}.

(a) $[0, 1]$

(b) $\left[1, \frac{16}{5}\right]$

(c) $\left[\frac{16}{5}, 4\right]$

Problema 1.7 Aplique en los siguientes intervalos el método de bisección para determinar las aproximaciones a las soluciones de $x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 4x + 4 = 0$ con una exactitud de 10^{-2}.

(a) $[-2, -1]$

(b) $[0, 2]$

(c) $[2, 3]$

(d) $[-1, 0]$

Problema 1.8 Aplique el método de bisección para determinar una aproximación a la solución de $\tan(x) = x$ con una exactitud de 10^{-3} en el intervalo $\left[4, \frac{9}{2}\right]$.

Problema 1.9 Aplique el método de bisección para determinar una aproximación a la solución de $2 + \cos(e^x - 2) - e^x = 0$ con una exactitud de 10^{-3} en el intervalo $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$

Problema 1.10 En cada caso aplique el método de bisección para determinar una aproximación a la solución con una exactitud de 10^{-5}.

(a) $x - 2^{-x} = 0$ para $x \in [0,1]$.

(b) $e^{-x} - x^2 + 3x - 2 = 0$ para $x \in [0,1]$.

(c) $2x\cos(2x) - (x+1)^2 = 0$ para $x \in [-3,-2]$ y para $x \in [-1,0]$.

(d) $x\cos(x) - 2x^2 + 3x - 1 = 0$ para $x \in \left[\frac{1}{5}, \frac{3}{10}\right]$ y para $x \in \left[\frac{6}{5}, \frac{13}{10}\right]$.

Problema 1.11 Determine una aproximación de $\sqrt{3}$ con una exactitud de 10^{-4} usando el método de bisección.

Problema 1.12 Determine una cota del numero de iteraciones que se requiere para alcanzar una aproximación con una exactitud de 10^{-3} de la solución de $x^3 + x - 4 = 0$ en el intervalo $[1,4]$.

Problema 1.13 Determine una cota del numero de iteraciones que se requiere para alcanzar una aproximación con una exactitud de 10^{-3} de la solución de $x^3 - x - 1 = 0$ en el intervalo $[1,2]$.

Problema 1.14 Sea $f(x) = (x-1)^{10}$, $p = 1$ y $p_n = 1 + \frac{1}{n}$. Demuestre que $|f(p_n)| < 10^{-3}$ para todo $n > 1$, mientras que $|p - p_n| < 10^{-3}$ sólo si $n > 1000$.

Problema 1.15 Sea $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión dada por $p_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Demuestre que $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge aún cuando $\lim_{n\to\infty}(p_n - p_{n-1}) = 0$.

Problema 1.16 Los cuatro siguientes métodos tienen por objeto calcular $7^{1/5}$. Clasifique por orden, basándose para ello la rapidez de convergencia y suponiendo que $p_0 = 1$ en cada caso.

1. $p_n = \left(1 + \frac{7 - p_{n-1}^3}{p_{n-1}^2}\right)^{1/2}$
2. $p_n = p_{n-1} - \frac{p_{n-1}^5 - 7}{p_{n-1}^2}$
3. $p_n = p_{n-1} - \frac{p_{n-1}^5 - 7}{5p_{n-1}^4}$
4. $p_n = p_{n-1} - \frac{p_{n-1}^5 - 7}{12}$
5. Aplique el método de iteración de punto fijo para determinar una solución con una exactitud de 10^{-2} para $x^4 - 3x^2 - 3 = 0$ en $[1,2]$. Utilice $p_0 = 1$.

Problema 1.17 La ecuación $x^2 - x - 1 = 0$ tiene una raíz positiva $\alpha \approx 1.61803398\cdots$. Proponga un método iterativo convergente, no Newton, para aproximar dicha raíz.

Indicación. Tenemos $x^2 - x - = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - x = x^2 + 1 \Leftrightarrow x(2x-1) = x^2 + 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{x^2+1}{2x-1}$.

Proponemos $g(x) = \dfrac{x^2+1}{2x-1}$ como método iterativo.

Afirmación 1 $g : \left[\dfrac{3}{2}, 2\right] \to \left[\dfrac{3}{2}, 2\right]$

Afirmación 2 g es una contracción.

Problema 1.18 Considere la ecuación $e^x - x^2 + 3x - 2 = 0$.

1. Proponga un método de punto fijo, explicitando un intervalo $[a,b]$ contenido en $[0,1]$ que contenga dicha raíz, para resolver esta ecuación. Justifique porqué el método por Ud. propuesto es convergente.

2. Suponga que realizamos iteraciones con el método propuesto en el item anterior hasta obtener un error absoluto no mayor que 10^{-5} respecto de la raíz exacta. Sin utilizar calculadora, encuentre este número de iteraciones, para ellos use el intervalo $[a,b]$ explicitado.

Problema 1.19 Sean $f(x) = x^2 - 6$ y $x_0 = 1$. Aplique el método de Newton para determinar x_4.

Problema 1.20 Sean $f(x) = -x^3 - \cos(x)$ y $x_0 = -1$. Aplique el método de Newton para determinar x_4 ¿Podríamos utilizar $x_0 = 0$?

Problema 1.21 Considere la ecuación no lineal

$$\cos\left(\frac{x^2+5}{x^4+1}\right) = 0$$

se sabe que esta ecuación tiene una única raíz en el intervalos $[0,1]$. Use los métodos de Newton y secante para aproximar la raíz. Para Newton use $x_0 = 0$ y para secante use $x_0 = 0$ y $x_1 = 1$.

Problema 1.22 Sean $f(x) = x^2 - 6$, $x_0 = 3$ y $x_1 = 2$ determine x_3.

1. Aplique el método de la secante.

2. Aplique el método de Regula Falsi.

3. ¿Que método da una mejor aproximación de $\sqrt{6}$?

Problema 1.23 Aplique el método de Newton para obtener soluciones con una exactitud de 10^{-5} para los siguiente problemas.

1. $x^3 - 2x^2 - 5 = 0$, $x \in [1,4]$.

2. $x - \cos x = 0$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

3. $x^3 + 3x^2 - 1 = 0$, $x \in [-3,-2]$.

4. $x - 0.8 - 0.2\text{sen}(x) = 0$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

5. $e^x + 2^{-x} + 2\cos(x) - 6 = 0$, $x \in [1,2]$.

6. $\ln(x-1) + \cos(x-1) = 0$, $x \in [1.3, 2]$.

7. $2x\cos(x) - (x-2)^2 = 0$, $x \in [2,3]$.

8. $\text{sen}(x) - e^{-x} = 0$, $x \in [0,1]$.

Problema 1.24 Utilice el método de Newton para aproximar con exactitud de 10^{-5} el valor de x en la gráfica de $y = x^2$ más cercano del punto $(1, 0)$.

Problema 1.25 Utilice el método de Newton para aproximar con exactitud de 10^{-5} el valor de x en la gráfica de $y = \frac{1}{x}$ más cercano del punto $(2, 1)$.

Problema 1.26 Con una exactitud de 10^{-5} y utilizando el método de Newton resuelva la ecuación $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}x^2 - x\mathrm{sen}(x) - \frac{1}{2}\cos(2x) = 0$, con condición inicial $x_0 = \frac{\pi}{2}$. Explique por que el resultado parece poco usual para el método de Newton. También resuelva la ecuación con $x_0 = 5\pi$ y $x_0 = 10\pi$.

Problema 1.27 Considere la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 3x^5 - 10x^3 + 23x$

a) Pruebe que $f(x) = 0$ tiene una solución en el intervalo $[-2, 2]$.

b) Usando el método de Newton con la condición inicial $x_0 = 1.07$ y el criterio de parada $|f(x)| \leqslant 10^{-6}$, encuentre una aproximación a una raíz de $f(x)$.

c) Usando el método de Newton con la condición inicial $x_0 = 1.06$ realice iteraciones ¿Qué ocurre en este caso? Explique.

d) Demuestre la convergencia de los iterados del método de Newton cerca de la raíz que encontró b).

e) Considere el siguiente método iterativo

$$Sf(x) = x - \frac{f(x)f'(x)}{(f(x))^2 - f(x)f''(x))}.$$

Considere las dos condiciones iniciales $x_0 = 1.07$ y $x_0 = 1.06$ y realice las iteraciones en ambos caso ¿Qué ocurre?

Problema 1.28 Se sabe que la ecuación $2x^4 + 24x^3 + 61x^2 - 16x + 1 = 0$ tiene dos raices cerca de 0.

1. Usando el método de Newton encuentre estas dos raices, con un error absoluto de 10^{-6}.

2. Considere el método iterativo siguiente

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2f(x_n)f'(x_n)}{2(f'(x_n))^2 - f(x_n)f''(x_n)},$$

encuentre las raíces, con un error absoluto de 10^{-6}. Este método es conocido como *Método de Halley* (el mismo del cometa).

3. Analizando el error absoluto, compare la rapidez de convergencia de ambos métodos.

4. Pruebe que este nuevo método iterativo tiene orden de convergencia 3 alrededor de cada raíz simple de una ecuación $f(x) = 0$, donde $f(x)$ es al menos 3 veces derivable, con $f'''(x)$ continua.

Problema 1.29 Considere la ecuación $e^x - 4x^2 = 0$.

(a) Usando el método de regula falsi encuentre una raíz positiva de la ecuación.

(b) Proponga un método de punto fijo, no Newton, y demuestre, sin iterar, que converge a la raíz encontrada en (a) de la ecuación.

(c) Usando el método de punto fijo propuesto en (b), encuentre la solución buscada con una precisión de $\varepsilon = 10^{-3}$, considerando como criterio de parada $|f(x_n)| \leqslant \varepsilon$.

Problema 1.30 Considere la ecuación $x^3 - x^2 - x - 1 = 0$, la cual posee una solución $\alpha \in [1,2]$. Se propone el método iterativo $x_{n+1} = g(x_n)$, donde $g(x) = 1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}$, para resolver la ecuación.

1. Verifique las condiciones para que el método iterativo propuesto sea convergente.
2. Si elige $x_0 \in [a,b] \subset [1,2]$ arbitrario para comenzar las iteraciones, estime el número de iteraciones que debe realizar para obtener x_k que satisface la condición $|x_{k+1} - x_k| \leqslant 5 \cdot 10^{-5}$.

Problema 1.31 Considere al ecuación $-x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0$.

(a) Proponga un método iterativo de punto fijo, no Newton, el cual sea convergente a la solución $\alpha = -\sqrt{10}$. La demostración de la convergencia debe hacerse sin iteraciones.

(b) Usando el método que propuso en a), encuentre una solución aproximada a α con un error de no más de 10^{-2}

Problema 1.32 Considere la ecuación $x^3 - x^2 - x - 1 = 0$, la cual posee una solución $\alpha \in [1,2]$. Se propone el método iterativo $x_{n+1} = g(x_n)$, donde $g(x) = 1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}$, para resolver la ecuación.

1. Verifique las condiciones para que el método iterativo propuesto sea convergente.
2. Si elige $x_0 \in [a,b] \subset [1,2]$ arbitrario para comenzar las iteraciones, estime el número de iteraciones que debe realizar para obtener x_k que satisface la condición $|x_{k+1} - x_k| \leqslant 5 \cdot 10^{-5}$.

Problema 1.33 Utilice el método de Newton para encontrar las soluciones de los siguientes problemas con una exactitud de 10^{-5}, usando uno de los criterios de paradas especificados arriba.

1. $x^2 - 2xe^{-x} + e^{-2x} = 0,\ x \in [0,1]$.
2. $\cos\left(x + \sqrt{2}\right) + x\left(\dfrac{x}{2} + \sqrt{2}\right) = 0,\ x \in [-2,-1]$.
3. $x^3 - 3x^2 2^{-x} + 2x4^{-x} - 8^{-x} = 0,\ x \in [0,1]$.
4. $e^{6x} + 3(\ln 2)^2 e^{2x} - e^{4x}\ln 8 - (\ln 2)^3,\ x \in [-1,0]$.

Problema 1.34 Repita el ejercicio anterior, aplicando el método de Newton modificado ¿Mejora la rapidez o la exactitud en comparación con el ejercicio 1.?

Problema 1.35 Demuestre que las siguientes sucesiones convergen linealmente a $p = 0$ ¿Qué tan grande debe ser n para que $|p_n - p| \leqslant 5 \times 10^{-2}$?

a.) $p_n = \frac{1}{n}$, $n \geqslant 1$, b.) $p_n = \frac{1}{n^2}$, $n \geqslant 1$

Problema 1.36 Demuestre que la sucesión $p_n = 10^{-2^n}$ converge cuadráticamente a cero.

Problema 1.37 Demuestre que la sucesión $p_n = 10^{-n^c}$ no converge cuadráticamente a cero, sin importar el tamaño del exponente $c > 1$.

Problema 1.38 Demuestre que el algoritmo de bisección determina una sucesión con una cota de error que converge linealmente a cero.

Problema 1.39 El método iterativo para resolver $f(x) = 0$, dado por el método de punto fijo dado por

$$p_{n+1} = g(p_n) = p_n - \frac{f(p_n)}{f'(p_n)} - \frac{f''(p_n)}{2f'(p_n)} \left[\frac{f(p_n)}{f'(p_n)} \right]^2 ,$$

para $n = 1, 2, 3, \ldots$. Puebe que α es una raíz simple de f, entonces se tiene $g(\alpha) = \alpha$, $g'(\alpha) = g''(\alpha) = 0$, esto generalmente, producirá una convergencia cúbica $(\alpha = 3)$.

Problema 1.40 Considere el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 9 &= 0 \\ x^2 + y^2 - 8x + 12 &= 0 \end{aligned}$$

1. Explicite por componentes y simplifique al máximo, el esquema iterativo definido por el método de Newton.

2. Se sabe que el sistema tiene una solución (α, β) en el primer cuadrante. Demuestre que el método iterativo de Newton es convergente en una vecindad de la solución (α, β). La demostración debe hacerse sin iterar y sin usar argumentos teóricos de punto fijo.

3. Realice 3 iteraciones con el método de Newton, comenzando con el punto $(2.6, 0.7)$ y estime el error del resultado de la tercera iteración respecto a la solución exacta $(\alpha, \beta) = (\frac{21}{8}, \frac{\sqrt{135}}{8})$.

Problema 1.41 Considere el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 16 = 0 \\ x^2 + y^2 - 8x = 0 . \end{cases}$$

1. Explicite por componentes y simplifique al máximo, el esquema iterativo definido por el método de Newton.

2. Se sabe que el sistema tiene una solución (α, β) en el primer cuadrante. Demuestre que el método iterativo de Newton es convergente en una vecindad de la solución (α, β). La demostración debe hacerse sin iterar y sin usar argumentos teóricos de punto fijo.

3. Realice 3 iteraciones con el método de Newton, comenzando con el punto $(2.2, 3.4)$ y estime el error del resultado de la tercera iteración respecto a la solución exacta $(\alpha, \beta) = (3, \sqrt{12})$.

Problema 1.42 Considere el sistema de ecuaciones no lineales

$$\begin{cases} -x_1^2 + 8x_1 - x_2^2 - 6 & = & 0 \\ -x_1^2 x_2 - x_1 + 8x_2 - 6 & = & 0\,. \end{cases}$$

1. Determinar una región $D \subset \mathbb{R}^2$ que contiene una única solución $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ del sistema.
2. Proponga un método de punto fijo convergente para determinar la solución $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in D$ del sistema. Demuestre la convergencia sin iterar.
3. Demuestre (sin iterar) que que el método de Newton converge a alguna solución del sistema ¿Qué puede decir acerca de la rapidez de convergencia de ambos métodos (el propuesto en 2) y Newton en este caso particular?
4. Realice 2 iteraciones con el método propuesto, comenzando con $(0,0)$ (especifique cual de los métodos está usando)

Problema 1.43 Considere al ecuación $-x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0$.

1. Proponga un método iterativo de punto fijo, no Newton, el cual sea convergente a la solución $\alpha = \sqrt{10}$. La demostración de la convergencia debe hacerse sin iteraciones.
2. Usando el método que propuso en 1), encuentre una solución aproximada a α con un error de no más de 10^{-2}

Problema 1.44 Considere la función $f(x) = e^{1/x} - x$, definida para $x > 0$.

1. Proponga un método iterativo convergente, no Newton, para encontrar una solución de la ecuación $f(x) = 0$. Use el método propuesto por usted para encontrar una solución de $f(x) = 0$, con una precisión $\varepsilon = 10^{-3}$, con el criterio de parada $|x_{n+1} - x_n| \leqslant \varepsilon$, y comenzando con $x_0 = 1.76$. La demostración de la convergencia debe hacerla en forma teórica.
2. Demuestre que al menos uno de los métodos iterativos propuestos abajo para encontrar la solución de $f(x) = 0$ es convergente (ambos podrían ser convergentes). La demostración de la convergencia debe hacerse en forma teórica.

$$x_{n+1} = g_1(x_n) = x_n - x_n^2\,\frac{x_n - e^{1/x_n}}{x_n^2 + e^{1/x_n}}$$
$$x_{n+1} = g_2(x_n) = x_n + \frac{1 - x_n \ln(x_n)}{1 + \ln(x_n)}\,.$$

   Use el métodos que demostró ser convergente para encontrar una solución de $f(x) = 0$, con una precisión $\varepsilon = 10^{-3}$, con el criterio de parada $|x_{n+1} - x_n| \leqslant \varepsilon$, y comenzando con $x_0 = 1.76$.
3. Use el método de la secante para encontrar una solución de $f(x) = 0$, con una precisión $\varepsilon = 10^{-3}$, con el criterio de parada $|x_{n+1} - x_n| \leqslant \varepsilon$, comenzando con $x_0 = 1.76$ y $x_1 = 1.763$.
4. En los casos anteriores ¿Cuál de los métodos converge más rápido?

Problema 1.45 Considere el sistema de ecuaciones no lineales

$$\begin{cases} x_1^2 - 10x_1 + x_2^2 + 8 & = & 0 \\ x_1 x_2^2 + x_1 - 10x_2 + 8 & = & 0\,. \end{cases}$$

1. Determinar una región $D \subset \mathbb{R}^2$ que contiene una única solución $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ del sistema.
2. Proponga un método de punto fijo convergente para determinar la solución $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in D$ del sistema. Demuestre la convergencia sin iterar.
3. Demuestre (sin iterar) que que el método de Newton converge a alguna solución del sistema ¿Qué puede decir acerca de la rapidez de convergencia de ambos métodos (el propuesto en 2) y Newton en este caso particular?
4. Realice 2 iteraciones con el método propuesto, comenzando con $(0,0)$ (especifique cual de los métodos está usando)

Problema 1.46 Considere el sistema de ecuaciones no lineales $\mathbf{u}(x,y) = 0$, donde

$$\begin{cases} u_1(x,y) & = & x^2 + xy - 10 \\ u_2(x,y) & = & y + 3xy^2 - 57 \end{cases}$$

1. Proponga un método iterativo de punto fijo convergente, no Newton, para encontrar una solución al sistema, comenzando con $(x_0, y_0) = (1.5, 3.5)$
2. Aplique el método de Newton con las mismas condiciones iniciales. Obtenga dos iteraciones ¿hay convergencia en este caso?
3. Si ambos métodos (1) y (2) son convergentes ¿Cuál de ellos converge más rápido a la solución buscada del sistema?

Problema 1.47 Dado el sistema de ecuaciones no lineales

$$\begin{cases} 5\cos(x^2 y) - 5\cos(x^3 y) & = & x \\ \operatorname{sen}^2(xy) + \frac{\pi}{2}\cos(x^3 y) & = & y \end{cases}$$

1. Determine un dominio en el plano que contenga una única solución (α, β) del sistema. Justifique teóricamente.
2. Proponga un método de punto fijo (no Newton) para encontrar la solución (α, β) del sistema. La demostración de la convergencia debe hacerse sin iterar.
3. Si considera una precisión $\varepsilon = 10^{-3}$. ¿Cuál es la solución aproximada que se obtiene? (use el criterio de parada $||(x_n, y_n) - (x_{n-1}, y_{n-1})||_\infty \leqslant \varepsilon$.)

Problema 1.48 Dado el sistema de ecuaciones no lineales

$$\begin{cases} \operatorname{sen}(3x^2 y) & = & x \\ \cos(x) - 3\cos(x^3 y^3) & = & y \end{cases}$$

1. Determine un dominio en el plano que contenga una única solución (α, β) del sistema. Justifique teóricamente.

2. Proponga un método de punto fijo (no Newton) para encontrar la solución (α, β) del sistema. La demostración de la convergencia debe hacerse teóricamente.

3. Si considera una precisión $\varepsilon = 10^2$ y la norma $||(x,y)||_M = \max\{|x|, |y|\}$ Obtenga la solución aproximada al sistema en este caso.

Problema 1.49 el sistema de ecuaciones no lineales

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x^3 + x + 4x^2y + 4xy^2 & = & 0.7 \\ 4x^3 + 3x - 4x^2y + xy^2 & = & 0.3 \end{array} \right.$$

1. Determine un dominio en el plano que contenga una única solución (α, β) del sistema. Justifique teóricamente.

2. Proponga un método de punto fijo (no Newton) para encontrar la solución (α, β) del sistema. La demostración de la convergencia debe hacerse sin iterar.

3. Si considera una precisión $\varepsilon = 10^3$ ¿Cuál es la solución aproximada que se obtiene?

Problema 1.50 Dado el sistema de ecuaciones no lineales

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x^{4/3} + y^{4/3} & = & b^{4/3} \\ y - ax & = & 0 \end{array} \right.$$

donde $a = 1/4$ y $b = \left(1 + \left(\frac{1}{4}\right)^{4/3}\right)^{3/4}$

1. Proponga un método de punto fijo, no Newton, y demuestre teóricamente que converge a la raíz $\alpha = (1, 1/4)$,

2. Proponga un método casi-Newton y demuestre teóricamente que converge a la raíz $\alpha = (1, 1/4)$.

3. Partiendo del punto inicial $(x_0, y_0) = (0.95, 0.23)$ realice 2 iteraciones con ambos métodos. Compare los resultados. ¿Cuál es su conclusión?

Problema 1.51 Considere el sistema de ecuaciones no lineales

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 1 + h \, \dfrac{e^{-x^2}}{1 + y^2} \\ y & = & 0.5 + h \, \arctan(x^2 + y^2)\,. \end{array} \right.$$

Muestre que si h es elegido suficientemente pequeño y no cero, entonces el sistema tiene una única solución $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ en alguna región rectangular. Además, muestre que el método iterativo de punto fijo definido por el sistema es convergente a la solución α para cualquier elección (x_0, y_0) elegida en la región que determinó. (La demostración de la convergencia debe hacerse sin iterar.)

Problema 1.52 Considere el sistema de ecuaciones no lineales

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 & = & 0 \\ x + y - 2xy & = & 0\,. \end{array} \right.$$

1. Proponga un método de punto fijo, no Newton, convergente para encontrar una solución del sistema. La demostración de la convergencia debe hacerse sin iterar.

2. Demuestre sin iterar que el método de Newton es convergente en un región que contiene una solución del sistema, y encuentre una solución con una aproximación de 10^{-3} usando la norma $|| \, ||_\infty$.

Problema 1.53 Suponga que p es una raíz de multiplicidad $m \geqslant 2$ de la ecuación $f(x) = 0$, donde $f'''(x)$ es continua en un intervalo abierto que contiene a p.

(a) Demuestre que el método iterativo de punto fijo $g(x) = x - m\dfrac{f(x)}{f'(x)}$ tiene orden de convergencia la menos 2.

(b) Use la parte a) para calcular la raíz positiva de $x^4 - 1 = 0$, redondeando cada operación a 4 dígitos y con una precisión de 10^{-3}, comenzando con $x_0 = 0.8$.

Problema 1.54 Considere la ecuación $\mathrm{e}^{1-x} - 1 = 0$.

(a) Demuestre que ella tiene una única raíz, la cual es positiva.

(b) Demuestre que el método de Newton asociado a esta ecuación es convergente para cualquier condición inicial $x_0 \in [0, 10]$

(c) Comenzando con la condición inicial $x_0 = 10$. Realice algunas iteraciones con el método de Newton ¿Cuál es su conclusión?

(d) Considere el intervalo $[0, 10]$, use el método de bisección para encontrar una aproximación a la raíz, con una precisión de 10^{-3}. Compare su resultado con lo obtenido en el item c). ¿Cuál es su conclusión?

Problema 1.55 Considere el polinomio $f(x) = 230x^4 + 18x^3 + 9x^2 - 221x - 9$. Se sabe que este polinomio tiene una raíz en el intervalo $[0, 1]$.

a) Use el método de bisección para aproximar la raíz de $f(x)$ con una presición de 10^{-3}.

b) Use el método de Newton para aproximar la raíz de $f(x)$ con una presición de 10^{-5}, comenzando con $x_0 = 0.3$.

c) Proponga un método iterativo de punto fijo convergente para aproximar la raíz de $f(x)$. La convergencia debe demostrarla sin iterar.

Problema 1.56 Considere el sistema de ecuaciones no lineales

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3x - \cos(yz) - \frac{1}{2} & = & 0 \\ x^2 - 81(y + 0.1)^2 + \mathrm{sen}(z) + 1.06 & = & 0 \\ e^{-xy} + 20z + \frac{10\pi - 3}{3} & = & 0 \end{array}\right.$$

a) Proponga un método iterativo de punto fijo convergente para encontrar la solución del sistema. La demostración de la convergencia debe hacerse sin iterar.

b) Explícite las componentes del método iterativo de Newton para este sistema, y demuestre la convergencia del método para este caso (teóricamente).

c) Usando el método iterativo convergente que propuso en a), comenzando con el punto $(0.1, 0.1, -0.1)$ realice iteraciones hasta obtener una aproximación (x_k, y_k, z_k) de la solución, la cual satisface la siguiente condición: $||(x_k, y_k, z_k) - (x_{k-1}, y_{k-1}, z_{k-1})||_\infty \leqslant 10^{-3}$.

Problema 1.57 Dado el sistema de ecuaciones no lineales

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x^2 + xy^3 & = & 9 \\ 3x^2y - y^3 & = & 4 \end{array} \right.$$

Estudie la convergencia del método de Newton para el sistema, suponiendo que su condicións iniciales son:

(a) $(x_0, y_0) = (1.3, 1.7)$,

(b) $(x_0, y_0) = (-1, -2)$,

(c) $(x_0, y_0) = (-3, 0.2)$

(d) Realizando 4 iteraciones encuentre una aproximación a la solución en el caso (b)

Problema 1.58 Considere el sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x^2 + y^2 & = & 1 \\ 2x^2 - y & = & 0 \end{array} \right.$$

1. Demuestre, sin iterar, que el método iterativo de Newton es convergente para este caso.
2. Usando el método iterativo de Newton, encuentre la solución del sistema ubicada en el primer cuadrante.

Problema 1.59 Dado el sistema de ecuaciones no lineales

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x + x(x+y)^2 - 0.5 & = & 0 \\ \\ y + y(y-x)^2 - 0.5 & = & 0 \end{array} \right.$$

a) Determine un dominio en el plano que contenga una única solución (α, β) del sistema. Justifique teóricamente.

b) Proponga un método de punto fijo, no Newton, y demuestre, sin iterar, que converge a (α, β) .

Problema 1.60 Dado el sistema de ecuaciones no lineales

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \operatorname{sen}(3x^2y) & = & x \\ \cos(x) - 3\cos(x^3y^2) & = & y \end{array} \right.$$

1. Determine un dominio en el plano que contenga una única solución (α, β) del sistema. Justifique teóricamente.

2. Proponga un método de punto fijo convergente (no Newton) para encontrar la solución (α, β) del sistema. La demostración de la convergencia debe hacerse teóricamente.

3. Considere una precisión $\varepsilon = 10^2$ y la norma $||(x, y)||_M = \max\{|x|, |y|\}$. Obtenga la solución aproximada al sistema en este caso.

Problema 1.61 Dado el sistema no lineal

$$\left\{ \begin{array}{r} x_1^2 + x_2^2 + x_1 - x_2 - 1 = 0 \\ x_1^2 + 2x_2^2 + x_1 + x_2 - 1 = 0 \end{array} \right.$$

y considere la raíz $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)^T$, tal que $\alpha_1 > 0$.

1. Demuestre sin iterar, que el método de Newton converge a α, si la condición inicial $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$ se elige suficientemente cerca de α.

2. Partiendo de $x^{(0)} = (0.6, 0.1)^T$ y utilizando la máxima capacidad de su calculadora, resuelva el sistema dado, para la raíz α mediante el método de Newton con una presición de 10^{-2} (utilizando el criterio de parada $||x^{(k+1)} - x^{(k)}|| \leqslant \varepsilon$)

Problema 1.62 Considere la ecuación $x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 3x + 1 = 0$. Esta tiene una raíz $\alpha = 1$

1. Use el método de Newton para determinar dicha raíz α, partiendo desde $x_0 = 0.8$ y realizando 5 iteraciones.

2. Use el siguiente método iterativo

$$x_{n+1} = x_n - 2\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

para determinar en forma aproximada la raíz α, comenzando con $x_0 = 0.8$.

3. Utilizando los resultados de las iteraciones en a) y en b), compare la rapidez de convergencia de ambos métodos, estimando el error relativo de la aproximación x_5, correspondiente.

Problema 1.63 Considere la ecuación

$$\cos(3x) + \cos^3(61x) = 0.$$

1. Proponga un método de punto fijo (no del tipo Newton) convergente a la raíz $\alpha = \frac{\pi}{2}$. La demostración de convergencia debe hacerse sin iterar.

2. Sin iterar, demuestre que el método de la secante converge a dicha raíz α.

Problema 1.64 Considere la función $f(x) = 2x^2 - x + 6e^{-x} - 8$.

1. Usando el método iterativo de Newton, comenzando con $x_0 = 0.3$. Encuentre una raíz negativa de $f(x) = 0$ con precisión de 10^{-4}, utilizando la máxima capacidad de dígitos de su calculadora.

2. Usando el método iterativo de la Secante, comenzando con $x_0 = 0.3$ y $x_1 = 0$. Encuentre una raíz negativa de $f(x) = 0$ con precisión de 10^{-4}, utilizando la máxima capacidad de dígitos de su calculadora.

3. Considerando los resultados obtenidos en 1) y 2) ¿Qué puede decir acerca de la convergencia de ambos métodos en este caso particular? Compare con los resultados teóricos relacionados.

Problema 1.65 Considere la ecuación $230x^4 + 18x^3 + 9x^2 - 221x - 9 = 0$.

1. Demuestre (teóricamente) que la ecuación tiene una raíz α en el intervalo $[0, 1]$.

2. Usando el método de bisección encuentre la raíz α, con una precisión de 10^{-3}. Cuántos iteraciones serían necesarias para obtener una aproximación de la raíz, con precisión de 10^{-3}, en el peor de los casos? (Use la fórmula de la cota del error).

3. Use el método de Newton para determinar dicha raíz α, partiendo desde $x_0 = 0.8$ con una precisión de 10^{-3}.

Problema 1.66 Considere el sistema de ecuaciones no lineales

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 4x^2 - 40x + \frac{1}{4}y + 8 & = & 0 \\ \frac{1}{2}xy^2 + 2x - 10y + 8 & = & 0\,. \end{array} \right.$$

1. Determinar una región $D \subset \mathbb{R}^2$ que contiene una única solución $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ del sistema.

2. Proponga un método de punto fijo convergente para determinar la solución $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in D$ del sistema. Demuestre la convergencia sin iterar. Realizando iteraciones comenzando con $(x_0, y_0) = (0, 0)$ y utilizando la máxima capacidad de su calculadora, obtenga la solución con una precisión de $\varepsilon = 0.05$, usando como criterio $\sqrt{(x_n - x_{n+1})^2 + (y_n - y_{n+1})^2} \leqslant \varepsilon$.

3. Demuestre (sin iterar) que que el método de Newton converge a alguna solución del sistema ¿Qué puede decir acerca de la rapidez de convergencia de ambos métodos (el propuesto en 2) y Newton) en este caso particular?

Problema 1.67 Considere el sistema de ecuaciones no lineales

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 4x^2 - 20x + \frac{1}{4}y + 8 & = & 0 \\ \frac{1}{2}xy^2 + 2x - 5y + 8 & = & 0\,. \end{array} \right.$$

1. Determinar una región $D \subset \mathbb{R}^2$ que contiene una única solución $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ del sistema.

2. Proponga un método de punto fijo convergente para determinar la solución $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in D$ del sistema. Demuestre la convergencia sin iterar. Realizando iteraciones comenzando con $(x_0, y_0) = (0, 0)$ y utilizando la máxima capacidad de su calculadora, obtenga la solución con una precisión de $\varepsilon = 0.05$, usando como criterio $\sqrt{(x_n - x_{n+1})^2 + (y_n - y_{n+1})^2} \leqslant \varepsilon$.

3. Demuestre (sin iterar) que que el método de Newton converge a alguna solución del sistema ¿Qué puede decir acerca de la rapidez de convergencia de ambos métodos (el propuesto en 2) y Newton) en este caso particular?

Problema 1.68 Considere la ecuación $f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x - 7 = 0$. Se sabe que esta ecuación tiene una raíz α cerca de 4.6783.

1. Use el método de Newton para obtener una aproximación para α con una presición $\varepsilon = 10^{-8}$, utilizando como criterio de parada $|f(x_n)| < \varepsilon$, y como punto inicial a $x_0 = 4.67$. Justifique teoricamente la convergencia del método de Newton en este caso.

2. Considere el método iterativo siguiente

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2f(x_n)f'(x_n)}{2(f'(x_n))^2 - f(x_n)f''(x_n)}.$$

   Use este método para obtener una aproximación a la raíz α de la ecuación anterior con una presición $\varepsilon = 10^{-8}$, utilizando como criterio de parada $|f(x_n)| < \varepsilon$, y como punto inicial a $x_0 = 4.67$.

3. ¿Cuál de ellos converge más rápido?

Problema 1.69 Considere la función $f(x) = e^{1/x} - x$, definida para $x > 0$.

1. Demuestre que al menos uno de los métodos iterativos propuestos abajo para encontrar la solución de $f(x) = 0$ es convergente (ambos podrían ser convergentes). La demostración de la convergencia debe hacerse en forma teórica.

$$x_{n+1} = g_1(x_n) = x_n - x_n^2 \frac{x_n - e^{1/x_n}}{x_n^2 + e^{1/x_n}} \qquad \text{y} \qquad x_{n+1} = g_2(x_n) = x_n + \frac{1 - x_n \ln(x_n)}{1 + \ln(x_n)}$$

   Use el métodos que demostró que es convergente para encontrar una solución de $f(x) = 0$, con una precisión $\varepsilon = 10^{-3}$, con el criterio de parada $|x_{n+1} - x_n| \leqslant \varepsilon$, y comenzando con $x_0 = 1.76$.

2. Proponga un método iterativo convergente, no Newton, para encontrar una solución de la ecuación $f(x) = 0$. Use el método propuesto por usted para encontrar una solución de $f(x) = 0$, con una precisión $\varepsilon = 10^{-3}$, con el criterio de parada $|x_{n+1} - x_n| \leqslant \varepsilon$, y comenzando con $x_0 = 1.76$. La demostración de la convergencia debe hacerla en forma teórica.

3. Use el método de la secante para encontrar una solución de $f(x) = 0$, con una precisión $\varepsilon = 10^{-3}$, con el criterio de parada $|x_{n+1} - x_n| \leqslant \varepsilon$, comenzando con $x_0 = 1.76$ y $x_1 = 1.763$.

4. En los casos anteriores ¿Cuál de los métodos converge más rápido?

Problema 1.70 Considere el sistema de ecuaciones no lineales

$$\begin{cases} -x_1^2 + 8x_1 - x_2^2 - 6 & = & 0 \\ -x_1^2 x_2 - x_1 + 8x_2 - 6 & = & 0\,. \end{cases}$$

1. Determinar una región $D \subset \mathbb{R}^2$ que contiene una única solución $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ del sistema.

2. Proponga un método de punto fijo convergente para determinar la solución $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in D$ del sistema. Demuestre la convergencia sin iterar.

3. Demuestre (sin iterar) que que el método de Newton converge a alguna solución del sistema . ¿Qué puede decir acerca de la rapidez de convergencia de ambos métodos (el propuesto en 2) y Newton) en este caso particular?

4. Realice 2 iteraciones con el método propuesto en 2) o 3), comenzando con $(0,0)$ (especifique cual de los métodos está usando)

Problema 1.71 Considere el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x^2+y^2-9 & = & 0 \\ x^2+y^2-8x+12 & = & 0 \end{array} \right.$$

1. Explicite por componentes y simplifique al máximo, el esquema iterativo definido por el método de Newton.

2. Se sabe que el sistema tiene una solución (α,β) en el primer cuadrante. Demuestre que el método iterativo de Newton es convergente en una vecindad de la solución (α,β). La demostración debe hacerse sin iterar y sin usar argumentos teóricos de punto fijo.

3. Realice 3 iteraciones con el método de Newton, comenzando con el punto $(2.6, 0.7)$ y estime el error del resultado de la tercera iteración respecto a la solución exacta $(\alpha,\beta) = (\frac{21}{8}, \frac{\sqrt{135}}{8})$.

Problema 1.72 Considere al ecuación $-x^3+2x^2+10x-20=0$.

1. Proponga un método iterativo de punto fijo, no Newton, el cual sea convergente a la solución $\alpha=\sqrt{10}$. La demostración de la convergencia debe hacerse sin iteraciones.

2. Usando el método que propuso en a), encuentre una solución aproximada a α con un error de no más de 10^{-2}

Problema 1.73 Considere al ecuación $-x^3+2x^2+10x-20=0$.

1. Proponga un método iterativo de punto fijo, no Newton, el cual sea convergente a la solución $\alpha=-\sqrt{10}$. La demostración de la convergencia debe hacerse sin iteraciones.

2. Usando el método que propuso en a), encuentre una solución aproximada a α con un error de no más de 10^{-2}

Problema 1.74 Considere el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x^2+y^2-16 & = & 0 \\ x^2+y^2-8x & = & 0 \end{array} \right.$$

1. Explicite por componentes y simplifique al máximo, el esquema iterativo definido por el método de Newton.

2. Se sabe que el sistema tiene una solución (α,β) en el primer cuadrante. Demuestre que el método iterativo de Newton es convergente en una vecindad de la solución (α,β). La demostración debe hacerse sin iterar y sin usar argumentos teóricos de punto fijo.

3. Realice 3 iteraciones con el método de Newton, comenzando con el punto $(2.2, 3.4)$ y estime el error del resultado de la tercera iteración respecto a la solución exacta $(\alpha, \beta) = (3, \sqrt{12})$.

Problema 1.75 Considere el sistema de ecuaciones no lineales

$$\begin{cases} x_1^2 - 10x_1 + x_2^2 + 8 & = & 0 \\ x_1 x_2^2 + x_1 - 10x_2 + 8 & = & 0 \,. \end{cases}$$

1. Determinar una región $D \subset \mathbb{R}^2$ que contiene una única solución $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ del sistema.
2. Proponga un método de punto fijo convergente para determinar la solución $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in D$ del sistema. Demuestre la convergencia sin iterar.
3. Demuestre (sin iterar) que que el método de Newton converge a alguna solución del sistema ¿Qué puede decir acerca de la rapidez de convergencia de ambos métodos (el propuesto en 2) y Newton) en este caso particular?
4. Realice 2 iteraciones con el método propuesto en 2) o 3), comenzando con $(0, 0)$ (especifique cual de los métodos está usando)

Problema 1.76 Sea $f(x) = (x-3)^5$.

(a) Determine la fórmula de Newton $x_{n+1} = g(x_n)$ para calcular el cero de la función f. Tomando como valor inicial $x_0 = 1$, calcule según la fórmula de iteración de Newton encontrada en la parte (a) los valores de x_1, x_2 y x_3.

(b) Calcule usando como valores iniciales x_0 y x_1 obtenidos en (a), los valores de x_2 y x_3 usando el método de la secante. ¿Podría usted usar el método de Regula-falsi?. Explique su respuesta en el caso negativo o partiendo de dos puntos iniciales apropiados x_0 y x_1, obtenga los valores de x_2 y x_3 en caso afirmativo.

(c) Demuestre que el método de Newton usado en la parte (a) tiene un orden de convergencia $p = 1$. De un método alternativo de iteración que garantice un orden de convergencia $p = 2$ y demuestre que efectívamente este es su orden de convergencia.

Problema 1.77 Aplique el método de la bisección y regula falsi para encontrar una aproximación a solución de ecuación $x = \tan(x)$ en [4,4.5]. Use una tolerancia de 10^{-3}.

Problema 1.78 Use el método de la bisección y regula falsi para encontrar una aproximación a $\sqrt{5}$ correcta en 5 cifras significativas. Sugerencia: considere $f(x) = x^2 - 5$.

Problema 1.79 Calcule el número de iteraciones que se requieren usando el método de bisección para alcanzar una aproximación con una exactitud de 10^3 a la solución de $x^3 + x - 4 = 0$ que se encuentra en el intervalo $[1, 4]$. Obtenga una aproximación de la raíz con este grado de exactitud.

Problema 1.80 Sean $f(x) = (x-1)^{10}$, $\alpha = 1$ y $x_n = 1 + 1/n$. Pruebe que $|f(x_n)| < 10^{-3}$ siempre que $n > 1$ pero que $|\alpha - x_n| < 10^{-3}$ requiere que $n > 1000$. Este ejercicio muestra una función $f(x)$ tal que $|f(x_n)|$ se aproxima a cero, mientras que la sucesión de aproximaciones $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lo hace mucho más lento.

Problema 1.81 Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida por $x_n = \sum^{k=1} 1/k$. Pruebe que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge aún cuando $\lim_{n\to\infty}(x_n - x_{n-1}) = 0$. Este ejercicio muestra una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con la propiedad de que las diferencias $x_n - x_{n-1}$ (en referencia al error relativo) convergen a cero, mientras que la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Problema 1.82 El método dede bisección se puede aplicar siempre que $f(a)f(b) < 0$. Si $f(x)$ tiene más de un cero en (a,b) se podrá saber de antemano cuál cero es el que se encuentra al aplicar el método de la bisección? ilustre su respuesta con ejemplos.

Problema 1.83 Las siguientes funciones cumplen con la condición $f(a)\cdot f(b) < 0$, donde $a = 0$ y $b = 1$. Si se aplica el método de bisección en el intervalo $[a,b]$ a cada una de esas funciones ¿Qué punto se encuentra en cada caso? Es este punto un cero de f?

a. $f(x) = (3x-1)^{-1}$ **b.** $f(x) = \cos(10x)$ **c.** $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{para } x > 0 \\ -1, & \text{para } x \leqslant 0\,. \end{cases}$

Problema 1.84 Verifique que se puede aplicar el método de bisección para aproximar el único cero de la función $f(x) = x^3 - x - 1$ en el intervalo $[1,2]$ Cuántas iteraciones serán necesarias para que al aplicar el método de bisección en el intervalo [1,2] se logre una aproximación de por lo menos 3 cifras decimales exactas? Calcule tal aproximación.

Problema 1.85 Estudie la función $g(x) = \sqrt{1+x^2}$ como una posible función de iteración de punto fijo Por qué no es convegente la iteración $x_n = g(x_{n-1})$, $n = 1, 2, \ldots ?$.

Problema 1.86 Verifique que cada una de las siguientes funciones $g_i(x)$, $i = 1,2,3,4$ es una función de iteración de punto fijo para la ecuación $x^4 + 2x^2 - x - 3 = 0$, es decir, $\alpha = g_i(\alpha)$, $i = 1,2,3,4$ implica que $f(\alpha) = 0$, siendo $f(x) = x^4 + 2x^2 - x - 3$

a) $g_1(x) = (3 + x - 2x^2)^{1/4}$

b) $g_2(x) = \left(\dfrac{3 + x - x^4}{2}\right)^{1/2}$

c) $g_3(x) = \left(\dfrac{3 + x}{x^2 + 2}\right)^{1/2}$

d) $g_4(x) = \dfrac{3x^4 + 2x^2 + 3}{4x^3 + 4x - 1}$.

Efectúe 4 iteraciones, si es posible, con cada una de las funciones de iteración definidas arriba, tomando $x_0 = 1$ y $x_n = g_i(x_{n-1}), i = 1,2,3,4$ Cuál función cree usted que da la mejor aproximación? Explique.

Problema 1.87 Demuestre que la ecuación $2\,\sin(\pi x) + x = 0$ tiene una única raíz $\alpha \in [1/2, 3/2]$. Use un método de iteración de punto fijo para encontrar una aproximaión de α con una precisión de por lo menos tres cifras significativas.

Problema 1.88 Pruebe que la función $g(x) = 2 + x - \tan^{-1}(x)$ tiene la propiedad $|g'(x)| < 1$ para toda x. Pruebe que g no tiene un punto fijo. Explique porqué esto no contradice los teoremas sobre existencia de punto fijo.

Problema 1.89 Use un método iterativo de punto fijo para demostrar que la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

converge a $\sqrt{2}$ para $x_0 > 0$ escogido adecuadamente.

En general, si $R > 0$, entonces la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{R}{x_n}\right), \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

converge a $\sqrt{R}$ para $x_0 > 0$ escogido adecuadamente. Esta sucesión se usa con frecuencia en subrutinas para calcular raíces cuadradas.

Problema 1.90 Cuál es el valor de la siguiente expresión?

$$x = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2+}}}$$

Note que esta expresión puede ser interpretada como significado $x = \lim_{n\to\infty} x_n$, donde $x_0 = \sqrt{2}, x_1 = \sqrt{2+\sqrt{2}} = \sqrt{2 + x_0}$ y así sucesivamente. USe un método de punto fijo con una función de iteración $g(x)$ apropiada.

Problema 1.91 Resuelva la ecuación $4\cos(x) = e^x$ con una precisión de 5×10^{-5}, es decir, calcular las iteraciones x_n hasta que $|x_n - x_{n-1}| < 5 \times 10^{-5}$ usando

a) El método de Newton con $x_0 = 1$

b) El método de la secante con $x_0 = \pi/4$ y $x_1 = \pi/2$.

Problema 1.92 Use el método de Newton para resolver la ecuación

$$\left(\operatorname{sen}(x) - \frac{x}{2}\right)^2 = 0, \quad \text{con } x_0 = \frac{\pi}{2}.$$

Itere hasta obtener una precisión de 5×10^{-5} para la raíz aproximada con $f(x) = (\operatorname{sen}(x) - \frac{x}{2})^2$ e parecen los resultados fuera de lo común para el método de Newton? Resuelva también la ecuación con $x_0 = 5\pi$ y $x_0 = 10\pi$.

Problema 1.93 se el método de Newton modificado para encontrar una aproximación de la raíz de la ecuación

$$f(x) = x^2 + 2xe^x + e^{2x} = 0$$

empezando con $x_0 = 0$ y efectuando 10 iteraciones ¿Cúal es la multiplicidad de la raíz buscada?

Problema 1.94 Se desea resolver la ecuación no lineal $f(x) = 0$, donde $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tiene tantas derivadas cuantas sean necesarias ¿Es posible elegir una función h de modo que la fórmula iterativa siguiente

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} + h(x_n)\left(\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right)^2$$

tenga orden de convergencia 3 a una raíz simple de $f(x) = 0$?

Problema 1.95 Considere una firma que desea maximizar sus ganancias, eligiendo el precio de venta de su producto, denotado por y y la cantidad gastada en publicidad, denotada por z. Para esto, se supone que la función de beneficio B viene dada por

$$B = yx - (z + g_2(x)),$$

con $x = g_1(y,z) = a_1 + a_2 y + a_3 z + a_4 yz + a_5 z^2$, $g_2(x) = e_1 + e_2 x$, y donde

B	$=$	Beneficio
x	$=$	número de unidades vendidas
y	$=$	precio de venta por unidad
z	$=$	dinero gastado en publicidad
$g_1(y,z)$		representa una predicción de unidades vendidas
		cuando el precio es y y el gasto en publicidad es z
$g_2(x)$		es el costo de producir $\times$ unidades

y los parámetros a_i y e_i son

$$\begin{aligned} a_1 &= 50000, \quad a_2 = -5000, \quad a_3 = 40, \quad a_4 = -1, \quad a_5 = -0.002 \\ e_1 &= 100000, \quad e_2 = 2. \end{aligned}$$

Se pide encontrar los valores de y y de z que maximicen el Beneficio B. Para esto, resuelva el sistema no lineal

$$\nabla B(y,z) = 0.$$

Problema 1.96 Sea $f(x) = e^x - 1 - \cos(\pi x)$. Muestre que la ecuación $f(x) = 0$ tiene una única raíz en $[0,1]$. Estudie que ocurre con el método de Newton comenzando con las condiciones iniciales $x_0 = -\varepsilon$ y $x_0 = 1+\varepsilon$, $x_0 = 0$ y $x_0 = 1$.

Problema 1.97 Defina $f :]0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x) = \frac{8x-1}{x} - e^x$. Considere los métodos iterativos

$$x_{n+1} = f_1(x_n) = \frac{1}{8}\left(1 + x_n e_n^x\right) \quad \text{y} \quad x_{n+1} = f_2(x_n) = \ln\left(\frac{8x_n - 1}{x_n}\right)$$

Cual de ellos es convergente a la raíz de $f(x) = 0$ más próxima de cero? Cual de ellos es convergente a la raíz de $f(x) = 0$ más próxima de 2?

Problema 1.98

Problema 1.99