UNIVERSIDAD DIEGO PORTALES. FACULTAD DE INGENIERÍA.
INSTITUTO DE CIENCIAS BÁSICAS.

Tarea computacional N°1 - Métodos Numéricos Semestre Otoño 2009

FECHA DE ENTREGA: 28 de Mayo

Problema 1. (Resolución de ecuaciones no lineales)

1. Encuentre la raíz positiva real más pequeña de:

$$x^3 - 3{,}23x^2 - 5{,}54x + 9{,}84 = 0$$

usando el método de la bisección.

2. La ecuación del equilibrio químico en la producción del metanol a partir del CO y H_2 viene dada por:

$$\frac{\xi(3-2\xi)^2}{(1-\xi)^3} = 249{,}2$$

donde ξ es el alcance de equilibrio de la reacción. Determine ξ.

3. Un cable de acero de longitud s está suspendido como se muestra en la figura. La maxima tensión

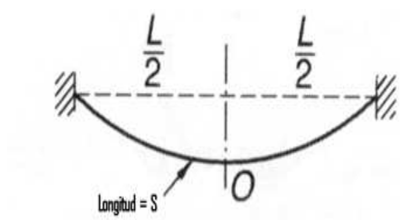

Figura 1: Cable Suspendido

en el cable ocurre en los soportes, esta se calcula como:

$$\sigma_{\text{máx}} = \sigma_0 \cosh \beta$$

donde:

- $\beta = \frac{\gamma L}{2\sigma_0}$
- $\sigma_0 =$ representa la tensión en el cable en el punto O
- $\gamma =$ peso del cable por unidad de volumen
- $L =$ expansión horizontal del cable

La razón de la longitud y la expansión del cable está relacionada por β según:

$$\frac{s}{L} = \frac{1}{\beta} \sinh \beta$$

Encontrar $\sigma_{\text{máx}}$ si $\gamma = 77 \times 10^3\, N/m^3$ (acero), $L = 1000\, m$ y $s = 1100\, m$.

4. Encuentre una solución del sistema no lineal:

$$\begin{cases} \sin x + y^2 + \ln z = 7 \\ 3x + 2^y - z^3 = -1 \\ x + y + z = 5 \end{cases}$$

   Usando el método de Newton-Raphson. Comience con el punto inicial $(1, 1, 1)$.

5. Las ecuaciones:

$$\begin{cases} \sin x + 3\cos x = 2 \\ \cos x - \sin y = -0{,}2 \end{cases}$$

   tienen una solución en la vecindad del punto $(1, 1)$. Use el método de Newton-Raphson para refinar dicha solución

Problema 2. (Resolución de sistemas lineales)

Consideremos el problema de calcular la temperatura de una barra metálica de largo L, cuyos extremos se mantienen a temperaturas constantes T_0 y T_L conocidas. La ecuación diferencial que gobierna este fenómeno es conocida como *ecuación de conducción del calor*, la cual, en régimen estacionario está dada por

$$-kT''(x) = f(x) \qquad 0 < x < L, \tag{1}$$

donde $f(x)$ es una función conocida, que representa una fuente de calor externa y $k > 0$ es una constante que se denomina *coeficiente de difusión o conductividad térmica*, el cual depende del material de la barra. A esta ecuación se le agregan las condiciones de borde:

$$T(0) = T_0, \qquad T(L) = T_L. \tag{2}$$

Una de las técnicas más usadas para resolver el problema (1)-(2) es el *método de diferencias finitas*. En este método, el intervalo $[0, L]$ se divide en $N+1$ intervalos de largo $h = \frac{L}{N+1}$ y la solución es buscada en los puntos *internos* definidos por esta división, es decir, en los puntos $x_n = nh$, con $n = 1, \ldots, N$ (los valores de la temperatura en los nodos del borde $x_0 = 0$ y $x_{N+1} = L$ son conocidos). En este método, las derivadas de primer orden se aproximan (por ejemplo) por el *cuociente de diferencias finitas*

$$T'(x) \approx \frac{T(x+h) - T(x)}{h},$$

mientras que las derivadas de segundo orden, se aproximan por

$$T''(x) \approx \frac{T(x-h) - 2T(x) + T(x+h)}{h^2}. \tag{3}$$

Denotemos por T_n los valores aproximados de la evaluaciones de la temperatura en los puntos de la malla, $T(x_n)$, es decir $T_n \approx T(x_n)$. Reemplazando $-T''(x)$ en la ecuación (1) por su aproximación dada por la expresión (3), y evaluando la ecuación (1) en los *nodos internos* de la malla $\{x_1, \ldots, x_N\}$, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} 2T_1 - T_2 &= h^2 f(x_1) + T_0, \\ -T_{j-1} + 2T_j - T_{j+1} &= h^2 f(x_j), \quad j = 2, \ldots, N-1; \\ -T_{N-1} + 2T_N &= h^2 f(x_N) + T_L, \end{aligned}$$

que matricialmente puede ser escrito como

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ \vdots \\ T_{N-1} \\ T_N \end{pmatrix} = h^2 \begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ f(x_3) \\ \vdots \\ f(x_{N-1}) \\ f(x_N) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} T_0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ T_L \end{pmatrix} \tag{4}$$

Denotemos por A, por T y por F_h, la matriz, el vector de incógnitas y el lado derecho de este sistema, respectivamente.

Tomando como parámetros del problema los valores

$$\begin{array}{lll} k = 1, & L = 1, & f(x) = 37\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \sin(\frac{\pi}{2}x), \\ T_0 = 0, & T_L = 37, & \end{array} \tag{5}$$

se pide resolver numéricamente el sistema (4), usando los métodos iterativos de Jacobi, Gauss-Seidel y SOR. Para el método SOR tome distintos valores del parámetro de aceleración $\omega \in (1, 2)$. Calcule además el parámetro de aceleración óptimo ω^*.

Para ello, siga los siguientes pasos:

(a) Compruebe que la matriz A es definida positiva, simétrica y tridiagonal.

(b) Implemente cada uno de los 3 métodos antes mencionados y haga un estudio comparativo de estos para distintos valores de N. Por ejemplo, $N = 5, 10, 20, 40, 80$. Denote por T_h la solución aproximada del sistema lineal para cada h fijo. Utilice el siguiente criterio de parada:

$$\frac{\|AT_h - F_h\|_\infty}{\|F_h\|_\infty} < h^4.$$

Diga el número de iteraciones necesarias para cada uno de los tres métodos y para los distintos valores de N. Presente sus resultados en una tabla, que indique el número de iteraciones necesarias para cada método y para cada valor de N. En base a esto, compare los tres métodos y diga cuál de ellos es el más eficiente. Finalmente, verifique que T_h converge a la solución exacta del sistema T (*NO es necesario calcular dicha solución exacta.* Utilice la cota del error vista en clases), a medida que h tiende a cero, y que el error relativo tiende a cero a una tasa de convergencia $O(h^2)$, es decir, que

$$\frac{\|T_h - T\|_\infty}{\|T\|_\infty} < h^2.$$

(c) Finalmente, determine la solución analítica del problema (1)-(2), con los parámetros dados por (5) y grafique el error absoluto en la solución, para cada uno de los métodos y para los distintos valores de N. Además, grafique el error absoluto máximo de aproximación de la solución exacta (para cada uno de los tres métodos), en función del paso h, en *escala logarítmica*, es decir, grafique $\log_{10}(E_h)$ en función de $\log_{10} h$, donde h es el vector cuyas componentes son los pasos h_i para los distintos valores de N usados en el item (b) y E_h es el vector cuyas componentes son los errores absolutos máximos para cada uno de dichos pasos.
Si sus cálculos son correctos, su gráfico debería ser aproximadamente una recta de pendiente 2. La interpretación de este gráfico es que la solución aproximada, calculada mediante el método de diferencias finitas por UD. implementado, converge a la solución exacta a una tasa o rapidez de convergencia de orden 2.