

DAVID DA COSTA DE PINHO

# **MÉTODO MATRICIAL APLICADO AO EFEITO MAGNETO-ELÁSTICO**

MACAÉ

2018

DAVID DA COSTA DE PINHO

# **MÉTODO MATRICIAL APLICADO AO EFEITO MAGNETO-ELÁSTICO**

Monografia apresentada ao Centro de  
Ciência e Tecnologia da Universidade Es-  
tadual do Norte Fluminense, como parte  
das exigências para aprovação no Exame de  
Qualificação.

Orientador: Viatcheslav Ivanovich Priimenko, Ph.D

MACAÉ  
2018

# MÉTODO MATRICIAL APLICADO AO EFEITO MAGNETO-ELÁSTICO

DAVID DA COSTA DE PINHO

Monografia apresentada ao Centro de  
Ciência e Tecnologia da Universidade Es-  
tadual do Norte Fluminense, como parte  
das exigências para aprovação no Exame de  
Qualificação.

Trabalho aprovado em 7 de Agosto de 2018.

Comissão Examinadora:

---

Prof. Marcia Miranda Azeredo, Ds.c -  
UENF

---

Prof. André Duarte Bueno, Ds.c - UENF

---

Prof. Fernando Diogo de Siqueira, Ds.c -  
UENF

---

Prof. Viatcheslav Ivanovich Priimenko,  
Ph.D- UENF

MACAÉ  
2018

# MÉTODO MATRICIAL APLICADO AO EFEITO MAGNETO-ELÁSTICO

## Resumo

Esta monografia tem por finalidade essencial o desenvolvimento analítico do método matricial de Ursin aplicado ao efeito magneto-elástico. Primeiramente, apresentamos uma revisão sobre a utilização do método matricial em problemas de prospecção de petróleo, onde várias dessas publicações foram produzidas no LENEP. Incluímos uma sumarização das ferramentas da física-matemática necessárias ao entendimento desta obra. Transformamos as EDP's do efeito magneto-elástico em EDO's e mostramos como o método matricial é utilizado na solução de sistemas de EDO's que modelam a propagação de ondas na subsuperfície terrestre. Por fim, aplicamos o método matricial nas EDO's da magneto-elasticidade de forma que possamos produzir um algoritmo computacional para obter as soluções numericamente.

**Palavras-chave:** Magneto-Elasticidade, Método Matricial de Ursin, Prospecção de Petróleo.

# MATRICIAL METHOD APPLIED TO MAGNETO-ELASTIC EFFECT

## Abstract

This paper aims analytical development of Ursin's matricial method applied to magneto-elastic effect. First, we present a review about matricial method applied to different kind of oil prospecting issues, found in surveys produced in LENEP. Summaries of physical and mathematical tools required to understand this text were included. We transform magneto-elastic effect's PDE to ODE ones and we show how the matricial method can be usefull to solve ODE systems that describe propagations of waves in Earth's subsurface. Best for the last, we applied matricial method to magneto-elasticity's ODE in such way that we can build an algorithm to return numerical solutions.

**Keywords:** Magneto-Elasticity, Ursin's Matricial Method, Oil Prospecting.

# Lista de ilustrações

Figura 1	–	<i>Traço sísmico obtido a partir de forças eletromagnéticas como fonte.</i>	10
Figura 2	–	<i>Componente vertical da velocidade da matriz porosa. Frequência dominante da fonte igual a 15 Hz e distância fonte-receptor igual a: (a) 500 m e (b) 1000 m.</i>	11
Figura 3	–	<i>Velocidades de fase em função da frequência.</i>	12
Figura 4	–	<i>Atenuação em função da frequência.</i>	12
Figura 5	–	<i>Velocidade de deslocamento da matriz para baixas frequências.</i>	13
Figura 6	–	<i>Representação de uma função fortemente concentrada.</i>	18
Figura 7	–	<i>Ondas ascendentes e descendentes na última interface. Observe que não há ondas ascendentes depois da última camada.</i>	26
Figura 8	–	<i>Visualização de <math>N</math> interfaces em subsuperfície e a notação das ondas nas proximidades de cada interface.</i>	28

# Sumário

	<b>Lista de ilustrações</b>	<b>5</b>
	<b>Sumário</b>	<b>6</b>
<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO E OBJETIVOS</b>	<b>8</b>
<b>2</b>	<b>REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b>	<b>9</b>
<b>2.1</b>	<b>Prospecção Eletro-sísmica</b>	<b>9</b>
<b>2.2</b>	<b>Método Matricial em Meios Poroelásticos</b>	<b>10</b>
2.2.1	Sistema de Biot para Baixas Frequências	10
2.2.2	Propagação para Altas Frequências e Sistema de Biot-JKD	11
2.2.3	Sistema de Biot e de Biot-JKD para Espaço 1D	13
<b>2.3</b>	<b>Modelagem Matemática e Numérica do Efeito Sismo-Magnético</b>	<b>14</b>
<b>3</b>	<b>ELEMENTOS DA FÍSICA-MATEMÁTICA</b>	<b>15</b>
<b>3.1</b>	<b>EDP de uma Onda</b>	<b>15</b>
<b>3.2</b>	<b>Transformadas Laterais de Fourier</b>	<b>16</b>
<b>3.3</b>	<b>Rotações</b>	<b>16</b>
<b>3.4</b>	<b>A função <math>\delta</math> de Dirac</b>	<b>17</b>
<b>3.5</b>	<b>Função de Bessel de Primeira Espécie</b>	<b>19</b>
<b>3.6</b>	<b>Transformadas de Hankel</b>	<b>19</b>
<b>4</b>	<b>MÉTODO MATRICIAL PARA SOLUÇÃO DE EDO'S</b>	<b>21</b>
<b>4.1</b>	<b>Características das Equações na Forma Matricial de Ursin</b>	<b>21</b>
<b>4.2</b>	<b>Diagonalização</b>	<b>22</b>
<b>4.3</b>	<b>Solução de EDO's na Ausência de Fonte</b>	<b>24</b>
4.3.1	Ondas Ascendentes e Ondas Descendentes	24
4.3.2	Matriz de Salto para Camadas Estratificadas	25
4.3.3	Matriz de Reflexão e Matriz de Transmissão	26
4.3.3.1	Reflexão e Transmissão na Última Interface	26
4.3.3.2	Reflexão e Transmissão numa Interface Qualquer	27
<b>4.4</b>	<b>Solução na Presença de Fonte</b>	<b>29</b>
<b>5</b>	<b>SISTEMA DE EDO'S DO EFEITO MAGNETO-ELÁSTICO</b>	<b>32</b>
<b>5.1</b>	<b>Transformando EDP's em EDO's</b>	<b>32</b>

<b>6</b>	<b>CONDIÇÕES DE CONTORNO DO EFEITO MAGNETO-ELÁSTICO E O ESPAÇO ORIGINAL . . . . .</b>	<b>38</b>
<b>6.1</b>	<b>Condições de Contorno . . . . .</b>	<b>38</b>
<b>6.2</b>	<b>Solução no Espaço Original . . . . .</b>	<b>41</b>
6.2.1	Rotação Inversa . . . . .	42
6.2.2	Transformada de Hankel e Transformada Lateral de Fourier . . . . .	42
<b>7</b>	<b>APLICANDO A DIAGONALIZAÇÃO DE URSIN . . . . .</b>	<b>44</b>
<b>7.1</b>	<b>Aplicando a Diagonalização de Ursin na Equação 5.6 . . . . .</b>	<b>44</b>
<b>7.2</b>	<b>Aplicando a Diagonalização de Ursin na Equação 5.7 . . . . .</b>	<b>45</b>
<b>7.3</b>	<b>Aplicando a Diagonalização de Ursin na Equação 5.8 . . . . .</b>	<b>46</b>
<b>7.4</b>	<b>Aplicando a Diagonalização de Ursin na Equação 5.9 . . . . .</b>	<b>48</b>
<b>8</b>	<b>CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS . . . . .</b>	<b>49</b>
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>50</b>



# 1 Introdução e Objetivos

Como podemos constatar em [Dunkin and Eringen(1963)], existe uma similaridade matemática entre a propagação de ondas eletromagnéticas e elásticas em camadas que compõem a subsuperfície terrestre, que faz com que todas essas ondas tridimensionais possam ser representadas por equações que possuem as mesmas propriedades. Verificamos também que é possível realizar o acoplamento dessas ondas, dentro de uma teoria conhecida como *magneto-elasticidade*. Assim, segundo [Ursin(1983)], podemos aplicar uma mesma abordagem para tratamento tanto de ondas acústicas como de ondas eletromagnéticas, e esse trabalho visa fazer o levantamento teórico de tal aplicação.

Vamos estabelecer alguns fundamentos e tratar matematicamente o efeito magnetoelástico descrito em [Pinho(2018)]. Para isso, precisamos como pré-requisito, do entendimento de várias ferramentas da física-matemática como a EDP de uma onda, mudança de sistemas de coordenadas, transformadas de Fourier, transformadas de Fourier-Bessel também conhecidas como transformadas de Hankel, função Delta de Dirac e um método matricial para solução de EDO's.

A abordagem consiste basicamente em usar as transformadas de Fourier no sistema de equações diferenciais parciais que descrevem o acoplamento magneto-elástico, escrevendo-o em função da frequência temporal e em função da magnitude do vetor de ondas. Através de transformação das coordenadas laterais, o sistema é deixado em função da profundidade e o sistema inicial de EDP's é transformado em quatro sistemas de equações diferenciais ordinárias onde cada variável pode ser calculada separadamente. Com mudança no sistema de coordenadas e algum algebrismo, podemos simplificar as equações e em seguida aplicamos o procedimento denominado *método matricial*, o qual nos permite obter a solução das EDO's em cada camada de subsuperfície. Retornamos as soluções para o sistema de coordenadas iniciais, aplicamos a transformada de Hankel com auxílio das funções de Bessel e por último a transformada inversa de Fourier para obter as soluções no espaço real novamente.

## 2 Revisão Bibliográfica

Existem diferentes tipos de modelos físicos que descrevem as propagações de ondas elásticas e eletromagnéticas bem como a interações entre elas na subsuperfície terrestre. A esses modelos são aplicados variados métodos matemáticos e numéricos, incluindo o método matricial, que realizam a simulação desses fenômenos físicos. Apresentaremos nesse capítulo algumas publicações nesse sentido, as quais estão de alguma forma relacionadas ao objetivo desta monografia.

### 2.1 Prospecção Eletro-sísmica

Alguns pesquisadores já trabalharam em sistema acoplados, como [White and Zhou(2006)], que estudaram fenômenos de *Eletro-sísmica* que descrevem a conversão de ondas eletromagnéticas em ondas sísmicas na subsuperfície terrestre na prospecção de hidrocarbonetos. A conversão entre as ondas ocorre em meios porosos onde uma onda eletromagnética pode excitar uma onda sísmica de mesma frequência e vice-versa, através do movimento dos fluidos contidos nos poros. A alteração que uma onda eletromagnética promove numa onda sísmica de mesma frequência pode ser registrada na superfície terrestre trazendo informações sobre as propriedades elétricas da subsuperfície.

Esses estudiosos aplicam transformadas nas EDP's deduzidas por [Pride(1994)], as quais passam a ser escritas como sistemas de EDO's. Utilizam o método matricial contido em [Ursin(1983)] nessas EDO's para obter as soluções em cada camada estratigráfica e, por último, retornam as soluções para o espaço original. Após deduzir fórmulas explícitas, apresentam um algoritmo computacional onde os resultados numéricos são obtidos. Esse algoritmo pode ser modificado para computar separadamente a propagação de ondas elásticas, ondas eletromagnéticas e as ondas da teoria de Biot. Como o artigo trata da produção de onda sísmica através de fontes eletromagnéticas, é necessário um nível suficiente de corrente elétrica para que se produza uma resposta sísmica satisfatória.

Na figura 1 podemos observar um traço sísmico de fonte eletromagnética obtido pelo simulador, que é análogo a um traço sísmico convencional. Note pela escala da figura que sinais muito pequenos podem ser identificados. Esses pequenos sinais têm no máximo a amplitude dos ruídos provocados pela sensibilidade dos geofones e são menores do que muitas fontes de ruídos que podem ser identificadas no campos, daí uma média considerável de sinais se faz necessária para que a detecção seja plenamente confiável. Como as equações que descrevem os fenômenos são linearizadas, as escalas dos resultados também são lineares com as correntes elétricas usadas como fonte, então as pequenas respostas podem ser melhoradas com o aumento da corrente.

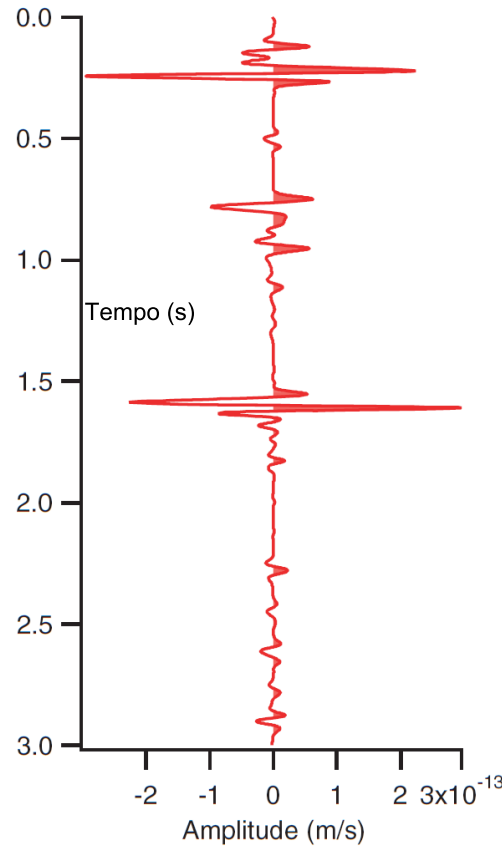


Figura 1 – Traço sísmico obtido a partir de forças eletromagnéticas como fonte.

## 2.2 Método Matricial em Meios Poroelásticos

### 2.2.1 Sistema de Biot para Baixas Frequências

Alguns pesquisadores utilizaram o método matricial em meios poroelásticos. Por exemplo, [Azeredo(2013)] aplica o método matricial para resolver de forma analítico-numérica equações de poroelasticidade deduzidas por Maurice Biot em 1956, as quais descrevem a propagação de ondas em meio plano estratificado formado por camadas homogêneas e isotrópicas.

Este trabalho apresenta dois tipos de fontes para produção de ondas sísmicas: uma fonte constituída por dinamite e uma fonte que emite uma força pontual vertical, que pode ser tipo martelo, queda de peso ou *vibroscis*. O método fornece fórmulas explícitas para a construção de algoritmo computacional para obter a solução do problema considerando que o fluxo de fluido é do tipo *Poiseuille*, isto é, baixo número de *Reynolds* e baixas frequências.

São apresentados alguns modelos geológicos para realização das simulações numéricas e cada modelo é testado utilizando diferentes frequências. Um desses modelos apresenta duas camadas horizontais homogêneas e isotrópicas com a interface terra-ar localizada em  $z_0 = 0\text{ m}$  e a superfície de descontinuidade é dada na profundidade  $z_1 = 1500\text{ m}$ . Além disso, considera-se que a camada 2 tem espessura infinita e a frequência de propagação

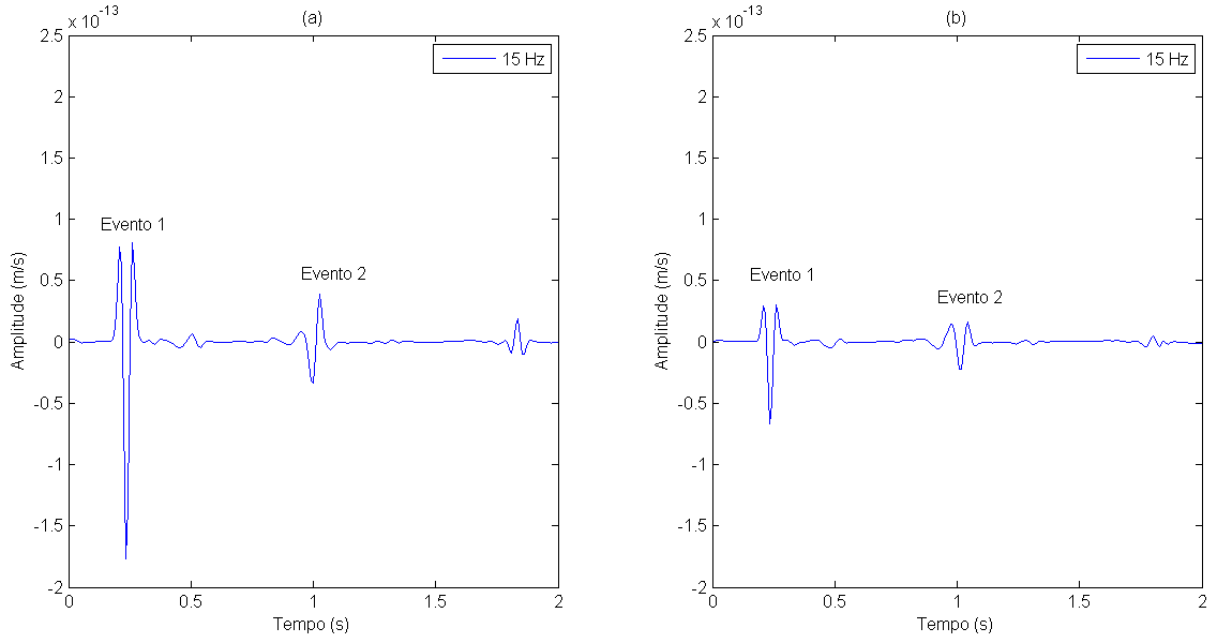


Figura 2 – Componente vertical da velocidade da matriz porosa. Frequência dominante da fonte igual a 15 Hz e distância fonte-receptor igual a: (a) 500 m e (b) 1000 m.

das ondas é de 15 Hz. Podemos visualizar na figura 2 o surgimento de dois eventos: o evento 1 representa a onda direta, a qual atinge o receptor sem que haja reflexão em qualquer interface, e o segundo evento é a onda refletida na interface de descontinuidade entre a primeira e segunda camadas. São apresentados dois gráficos simulando diferentes distâncias entre fonte e receptor, pois assim é possível analisar sua influência na amplitude do sinal registrado.

Sendo assim, observa-se que, à medida em que a distância fonte-receptor aumenta, passando de 500 m para 1000 m, a amplitude do sinal registrado diminui. Isto acontece porque a amplitude da onda sísmica diminui com o passar do tempo devido à redistribuição da energia entre as fases durante da passagem da onda sísmica através de meio poroso.

### 2.2.2 Propagação para Altas Frequências e Sistema de Biot-JKD

Outro exemplo de propagação de ondas em meios poroelásticos pode ser visto em [Miranda(2016)], que utiliza o modelo de Biot-JKD em regime de altas frequências. Em 1987, Johnson, Koplik e Desher (JKD) publicaram uma expressão geral da permeabilidade dinâmica, a qual varia de acordo com a frequência temporal, para caracterizar a dispersão de energia no caso de poros aleatórios. Para baixas frequências, o comprimento de onda é grande quando comparado com a dimensão do volume elementar: os efeitos viscosos são preponderantes. Já no caso de altas frequências, o comprimento de onda é comparável com a dimensão do volume elementar: os efeitos inerciais são preponderantes. O limite entre baixas e altas frequências é atingido quando os efeitos viscosos e inerciais são similares.

O trabalho apresenta uma análise dos efeitos de dispersão e atenuação das ondas,

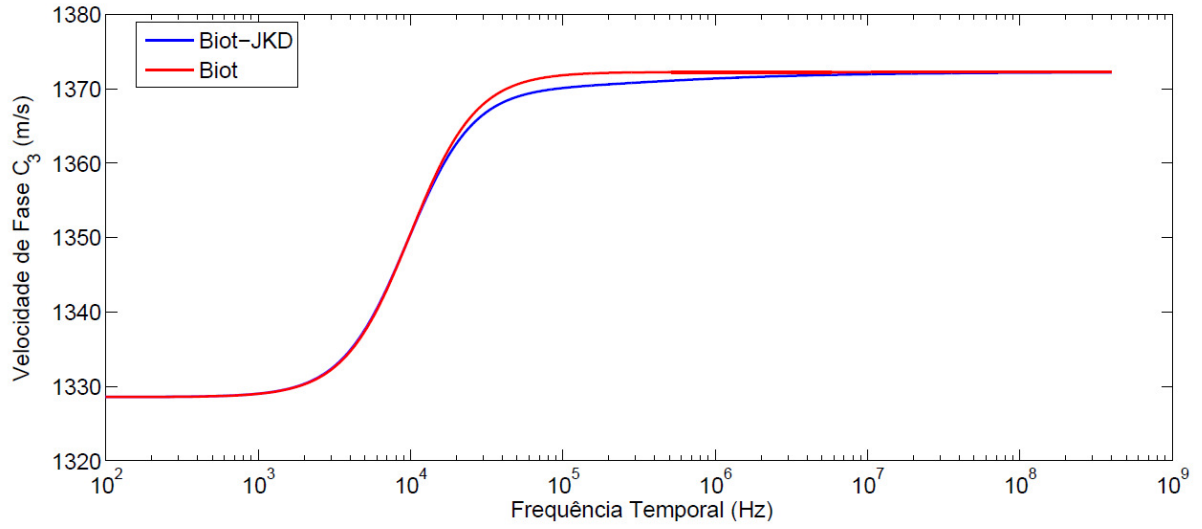


Figura 3 – Velocidades de fase em função da frequência.

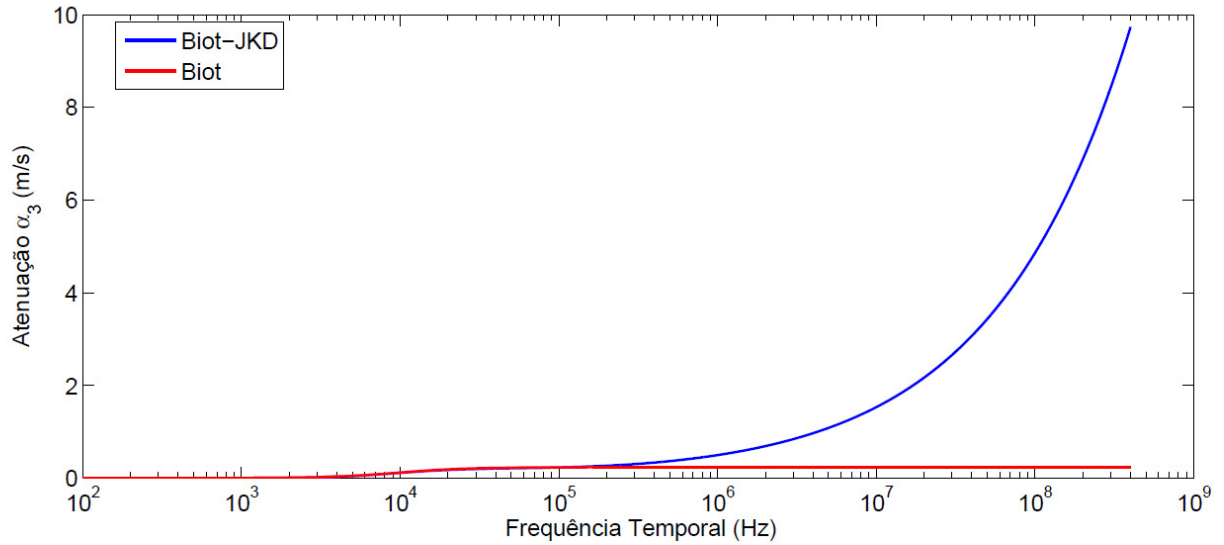


Figura 4 – Atenuação em função da frequência.

fazendo uma comparação entre os modelos de Biot e Biot-JKD. Na figura 3, podemos observar um gráfico mostrando as velocidades de fase para ambos os modelos em função da frequência temporal. Para baixas frequências, as curvas de dispersão tem valores aproximados. Para o intervalo  $[10^4, 10^6]$  Hz, as curvas apresentam uma diferença significativa e para frequências maiores que  $10^6$  Hz, ambas as velocidades se aproximam do valor 1370 m/s.

Na figura 4, podemos observar um gráfico comparando as atenuações para os modelos de Biot e Biot-JKD também em função da frequência temporal. As curvas da atenuação são bem similares para frequências até  $10^4$  Hz, e há uma pequena diferença no intervalo  $[10^4, 10^5]$  Hz. A partir de um pouco mais que  $10^5$  Hz a atenuação é quase estática para o sistema de Biot e cresce bem rápida para o sistema de Biot-JKD.

Apesar deste trabalho apresentar a análise dispersão e atenuação, e um algoritmo

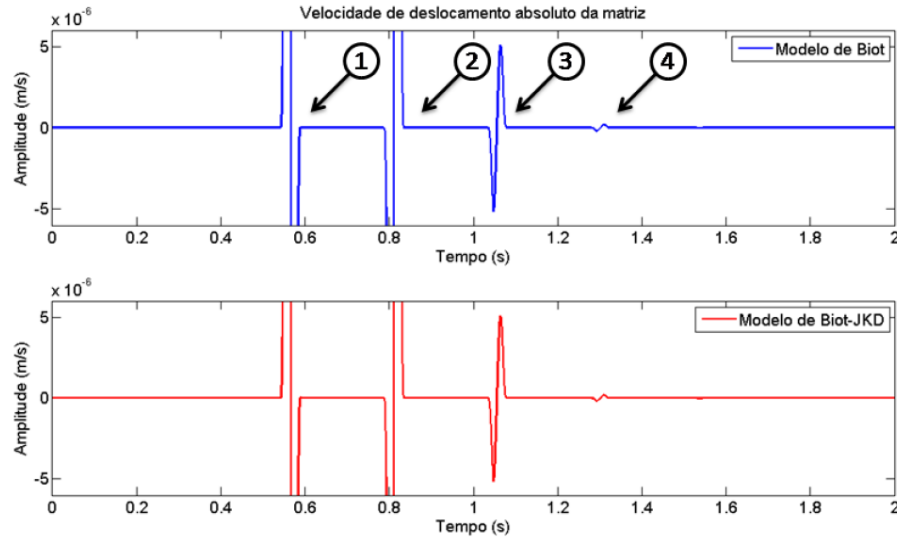


Figura 5 – *Velocidade de deslocamento da matriz para baixas frequências.*

matemático e numérico para resolver o sistema de Biot-JKD, não houve a implementação computacional deste algoritmo para simular a propagação da ondas.

### 2.2.3 Sistema de Biot e de Biot-JKD para Espaço 1D

Similarmente ao que foi feito nas subseções 2.2.1 e 2.2.2, encontramos em [Oliveira(2018)] uma modelagem matemática e numérica do sistema de Biot juntamente com o de Biot-JKD. A modelagem é realizada para um caso mais simples, onde considera-se a propagação das ondas somente no espaço 1D e não no espaço 3D como os dois casos anteriores. No entanto, é apresentada uma análise de dispersão e atenuação das ondas para quatro meios porosos distintos (saturado com água, óleo leve, óleo médio e óleo pesado), e a implementação computacional de um algoritmo numérico para a solução dos dois sistemas.

A simulação numérica é realizada considerando vários casos, com alta ou baixa frequência e para fontes e receptores na superfície ou no interior da primeira camada. Na figura 5 podemos observar os gráficos do caso para baixa frequência com fonte e receptor na superfície. Como trabalha-se com caso 1D não é possível visualizar a chegada de ondas cisalhantes, e como para baixas frequências o meio não suporta ondas compressoriais lentas, só podemos visualizar as ondas compressoriais rápidas. Neste domínio de baixas frequências não notamos diferença de amplitude entre o modelo de Biot e de Biot-JKD.

Comparando o modelo de Biot da figura 5 com o modelo de Biot da figura 2, podemos observar uma maior estabilidade numérica para o caso 1D. Possivelmente, tal estabilidade se deve ao fato de uma dedução mais simples das equações quando comparado ao caso 3D, pois para o caso 1D não são necessárias as transformadas laterais de Fourier, mudança nos eixos de coordenadas usando rotação nem a transformada inversa de Hankel para que a solução seja obtida no espaço da frequência novamente. Além disso, no caso 1D a solução do sistema de Biot pode ser formulada totalmente de maneira analítica e explícita. No caso

3D, todo o código computacional só pode ser implementado fazendo uso de operações com matrizes, promovendo desafios em termos de aproximações e instabilidades numéricas.

## 2.3 Modelagem Matemática e Numérica do Efeito Sismo-Magnético

Podemos observar uma análise matemática e numérica do efeito de indução sismo-magnética em [Mikhailenko and Soboleva(1997)], onde é descrita a solução simultânea de equações elásticas com o acoplamento da força de Lorentz, e as equações quasi-estacionárias de Maxwell com o acoplamento da velocidade de deslocamento do meio de propagação das ondas. Tais sistemas de EDP's foram obtidos do modelo desenvolvido por [Novacki(1983)] e foram transformados num sistema de EDO's utilizando transformadas finitas de Fourier.

O sistema de EDO's é escrito introduzindo uma matriz de variáveis  $A$ , e a solução numérica é obtida pelo método de fatorização encontrado em [Fatianov and Mikhailenko(1989)], o qual utiliza a matriz de equações de Riccati para a determinação das componentes  $a_{ij}$ . Tal abordagem não tem restrições computacionais se trabalhada com propagação de ondas de alta frequência.

As simulações foram realizadas considerando ondas longitudinais, transversais e Rayleigh. Os resultados mostraram, principalmente, que as primeiras chegadas das variações geomagnéticas coincidiram com as chegadas dos tipos de ondas que as produziram. Essa coincidência ocorreu para onda longitudinal, Rayleigh e para uma onda refletida na interface entre as camadas.

## 3 Elementos da Física-Matemática

### 3.1 EDP de uma Onda

Segundo [Farlow(1993)], a EDP de uma onda

$$\frac{\partial^2 \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} = \|\mathbf{v}\|^2 \nabla^2 \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \quad (3.1)$$

possui a solução de D'Alembert

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{g}_1(\mathbf{x} - \mathbf{v}t) + \mathbf{g}_2(\mathbf{x} + \mathbf{v}t), \quad (3.2)$$

onde  $\mathbf{x} = (x, y, z)^\top$  representa o espaço  $\mathbb{R}^3$ ,  $\mathbf{v}$  é a *velocidade* de propagação da onda,  $(\mathbf{x} \pm \mathbf{v}t)$  é a *fase* da onda,  $\mathbf{g}_1$  é a propagação da onda no semiespaço positivo do eixo  $x$  e  $\mathbf{g}_2$  é a propagação da onda no semiespaço negativo do eixo  $x$ .

De acordo com [Chew(1995)], ondas tridimensionais oriundas de fonte pontual se propagam em formato esferoidal mas localmente podem ser tratadas como ondas planas, principalmente para raios distantes da fonte. A onda esférica, solução da EDP 3.1, pode ser representada pela superposição de ondas planas através da identidade de *Weyl*, onde tal superposição também é solução da EDP 3.1, conforme [Weyl(1919)].

No  $\mathbb{R}^3$  o *vetor de onda*  $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)^\top$  é aquele que aponta na direção de propagação da onda e sua magnitude, denominada *número de onda*, é definida como

$$\|\mathbf{k}\| = k = \frac{\omega}{\|\mathbf{v}\|}, \quad (3.3)$$

onde  $\omega$  é a frequência temporal. Desta forma, a fase da onda pode ser escrita em termos do vetor de onda e da frequência como  $(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)$ , e a solução da equação 3.1 pode ser reescrita como uma superposição de ondas planas

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{A} \sum_{\mathbf{k}, \omega} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}, \quad (3.4)$$

onde  $\mathbf{A}$  é a *amplitude* da onda.

Podemos verificar em [White and Zhou(2006)], para o caso  $\mathbb{R}^2$  o *vetor de onda horizontal* é definido como  $\mathbf{k} = (k_x, k_y)^\top$ , o *número de onda horizontal* e a *vagarosidade horizontal* são, respectivamente,

$$k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2} \quad \text{e} \quad \gamma = \frac{k}{\omega}. \quad (3.5)$$

A vagarosidade vertical é definida como

$$q_0 = \frac{1}{v_z}, \quad (3.6)$$



onde  $v_z$  é a componente vertical da velocidade. Denotando o *número de onda vertical* por  $k_z$ , temos que a *vagoriedade vertical* pode ser escrita como

$$q_0 = \frac{k_z}{\omega}. \quad (3.7)$$

Combinando as vagoriedades horizontal e vertical, temos

$$\gamma^2 + q_0^2 = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|^2} \quad \text{ou} \quad q_0 = \sqrt{\epsilon_0 \mu_0 - \gamma^2}, \quad (3.8)$$

já que  $\epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|^2}$ .

## 3.2 Transformadas Laterais de Fourier

Segundo [Butkov(1988)], podemos definir as transformadas laterais de Fourier direta e inversa entre o espaço bidimensional e o vetor de onda horizontal como

$$\widehat{\mathbf{f}}(k_x, k_y, z) = \iint_{\mathbb{R}^2} \mathbf{f}(x, y, z) e^{-i(k_x x + k_y y)} dx dy \quad (3.9)$$

$$\mathbf{f}(x, y, z) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \iint_{\mathbb{R}^2} \widehat{\mathbf{f}}(k_x, k_y, z) e^{i(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y. \quad (3.10)$$

O símbolo  $\widehat{\phantom{x}}$  denota a função no espaço da transformada lateral de Fourier.

A propriedade da transformada de derivadas é a que mais nos interessa e, supondo  $f$  uma função escalar de uma única variável, essa propriedade pode ser descrita como

$$\begin{aligned} \widehat{f'}(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) e^{-i k_x x} dx \\ &= f(x) e^{-i k_x x} \Big|_{-\infty}^{\infty} - (-i k_x) \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i k_x x} dx \\ &= i k_x \widehat{f}(k_x). \end{aligned}$$

Na passagem da segunda para a terceira igualdade utilizamos a hipótese bastante difundida em geofísica de que  $f(x) \rightarrow 0$  quando  $x \rightarrow \pm\infty$ , a qual podemos observar em demonstrações de teoremas como, por exemplo, o toerema de *Helmholtz* encontrado em [Griffiths(1999)].

## 3.3 Rotações

Segundo [Lang(1986)], podemos produzir uma rotação antihorária em torno do eixo  $z$  aplicando o operador linear

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

onde  $\theta$  é o ângulo que um vetor está sendo rotacionado. Como a geometria do nosso problema considera ondas se propagando na parte negativa do eixo  $z$  (consideramos  $z$  positivo no sentido descendente), para produzirmos uma rotação antihorária devemos considerar o ângulo  $-\theta$ , e com isso nossa matriz de rotação se torna

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

lembrando a paridade das funções seno e cosseno. Para promovermos uma rotação orientando a primeira coordenada no sentido de propagação das ondas horizontais, temos que  $\theta$  será o ângulo entre  $(x, 0, 0)^\top$  e  $(k_x, k_y, 0)^\top$ , e a matriz de rotação se torna

$$\Omega = \begin{pmatrix} \frac{k_x}{k} & \frac{k_y}{k} & 0 \\ -\frac{k_y}{k} & \frac{k_x}{k} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

Para escrevermos novamente as equações no sistema de coordenadas original, precisamos aplicar a rotação inversa. Para isso, basta inverter a matriz de rotação 3.11 mas, como se trata de uma matriz ortogonal, a inversa é a sua transposta. Assim, usaremos

$$\Omega^\top = \begin{pmatrix} \frac{k_x}{k} & -\frac{k_y}{k} & 0 \\ \frac{k_y}{k} & \frac{k_x}{k} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.12)$$

A rotação de um tensor  $\tau$  é dada por

$$\tilde{\tau} = \Omega \tau \Omega^\top, \quad (3.13)$$

e sua rotação inversa é dada por

$$\tau = \Omega^\top \tilde{\tau} \Omega. \quad (3.14)$$

### 3.4 A função $\delta$ de Dirac

Em algumas aplicações físicas pode ser necessário trabalhar com conceito de um pulso de duração infinitamente curta. De acordo com [Butkov(1988)], podemos tomar o exemplo de um corpo colocado em movimento, a partir do repouso, através de um golpe instantâneo que faz o mesmo adquirir um momento igual à impulsão  $I$  do choque, ou seja,

$$I = \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} f(t) dt, \quad (3.15)$$

onde  $f(t)$  é a força e  $\Delta t$  é o tempo de ação da força. A impulsão é um número finito e sua alteração ocorre instantaneamente, pois  $\Delta t$  é um número muito pequeno. Assim,

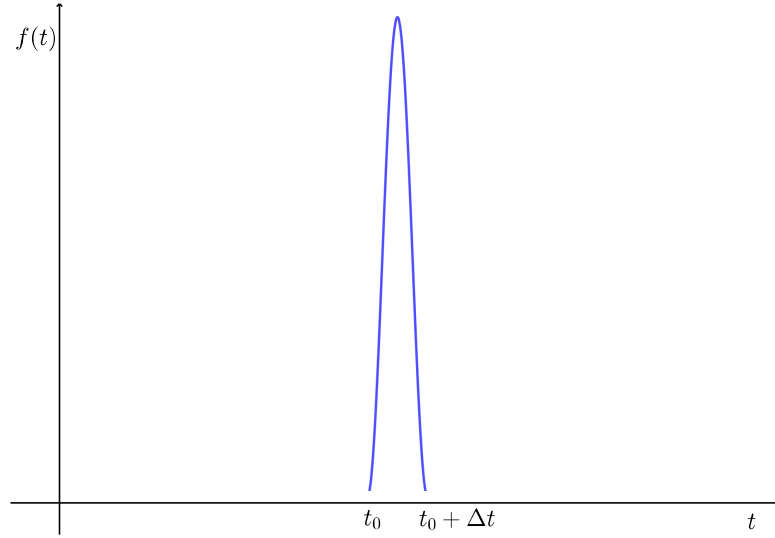


Figura 6 – Representação de uma função fortemente concentrada.

temos que a força deveria ter valor infinito durante o golpe e nula nos outros instantes, conforme o gráfico da figura 6. A fim de facilitar várias operações da física-matemática, Dirac propôs a introdução da chamada função  $\delta(x)$ , que pode representar uma função infinitamente concentrada e é dada simbolicamente por

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \neq 0 \\ \infty, & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

e  $\delta$  deve satisfazer a seguinte condição

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1. \quad (3.16)$$

Sendo  $f$  uma função contínua qualquer, a utilidade da função  $\delta$  consiste em determinar o valor de

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x) dx \quad (3.17)$$

substituindo os limites de integração por  $-\epsilon$  e  $\epsilon$ , onde  $\epsilon$  é um número positivo infinitesimalmente próximo de zero. Tal substituição se justifica pois  $\delta = 0$  se  $x \neq 0$  e teremos uma aproximação para o valor dessa integral. Assim, usando a definição de  $\delta$ , a condição 3.16 e a continuidade de  $f$ , temos

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x) dx &= \int_{-\infty}^{-\epsilon} \delta(x) f(x) dx + \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \delta(x) f(x) dx + \int_{\epsilon}^{\infty} \delta(x) f(x) dx \\ &= \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \delta(x) f(x) dx \\ &\approx f(0) \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \delta(x) dx \\ &= f(0). \end{aligned}$$

Desta forma podemos representar a aplicação de uma função fortemente concentrada, incluindo a representação de uma fonte pontual de onda sísmica que é de interesse geofísico, como veremos na subseção 4.4.

### 3.5 Função de Bessel de Primeira Espécie

De acordo com [Butkov(1988)], sendo  $f(x)$  uma função qualquer, podemos escrever a equação diferencial ordinária de Bessel na forma

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{df}{dx} + \left(1 - \frac{m^2}{x^2}\right) f = 0, \quad (3.18)$$

onde, estudando o caso geral temos que  $m$  é um número real arbitrário que pode ser considerado não-negativo, mas no nosso trabalho vamos considerar  $m$  inteiro positivo. A equação acima é a EDO de Bessel de ordem  $m$ , suas soluções são conhecidas como funções cilíndricas e entre elas estão as funções de Bessel. Expandindo a função  $f(x)$  numa série de *Frobenius* e substituindo-a na EDO de Bessel podemos deduzir que a solução é dada por

$$J_m(x) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{x^{m+2j}}{j! \Gamma(m+j+1) 2^{m+2j}}. \quad (3.19)$$

A função  $\Gamma$  é uma função fatorial de variável real com representação na forma integral dada por

$$\Gamma(\xi) = \int_0^{\infty} t^{\xi-1} e^{-t} dt, \quad x > 0.$$

Como estamos trabalhando com  $m$  inteiro positivo, a função  $\Gamma(\xi)$  é dada simplesmente por  $(\xi - 1)!$ . Assim, a expressão 3.19 passa a ser escrita como

$$J_m(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j! (m+j)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{m+2j} \quad (3.20)$$

e é chamada função de Bessel de primeira espécie de ordem  $m$ .

### 3.6 Transformadas de Hankel

A transformada de Hankel utiliza as funções de Bessel para transformar um sistema de coordenadas  $\mathbf{x}$  para outro  $\xi$ . De acordo com [Baruch(2013)], assumindo que  $f$  seja uma função radial, ou seja, que depende apenas da magnitude  $x$  de  $\mathbf{x}$ , umas das definições da transformada de Hankel é dada por

$$\mathcal{B}_m[f(x)](\xi) = \int_0^{\infty} x J_m(x \xi) f(x) dx.$$

E a transformada inversa, considerando  $\xi = \|\xi\|$ , é

$$\mathcal{B}_m^{-1}[F(\xi)](x) = \int_0^{\infty} \xi J_m(x \xi) F(\xi) d\xi,$$

onde  $J_m$  é uma função de Bessel de primeira espécie de ordem  $m$ , conforme visto na subseção anterior.

## 4 Método Matricial para Solução de EDO's

Este capítulo trata do estudo do método matricial para analisar a propagação de ondas em subsuperfície terrestre, conforme estruturado em [Ursin(1983)]. Graças a similaridade matemática entre sistemas de EDP's eletromagnéticas (Maxwell) e sistemas de EDP's elásticas (Lamè), podemos dar um desenvolvimento unificado para esses sistemas. Utilizamos um conjunto de transformadas e mudança de eixos coordenados para dividir esses dois sistemas de EDP's em quatro sistemas de EDO's escritos em forma matricial, onde as variáveis dependentes estejam em função apenas da profundidade e da frequência temporal. Os coeficientes desses sistemas de EDO's podem ser reunidos numa matriz  $M$  de dimensão  $2n \times 2n$ , a qual pode ser particionada em quatro submatrizes de dimensão  $n \times n$ , e é usada como o ponto de partida para o estudo da propagação de ondas em subsuperfície.

As propriedades de simetria da matriz  $M$  nos permitem separar o campo de ondas em ascendentes e descendentes através de uma decomposição em autovetores. Essas propriedades nos permitem também deduzir características invariantes da propagação, onde uma dessas características é válida apenas para meios de baixa dissipação de ondas e correspondem à conservação de energia. A matriz de propagação de ondas pode ser computada para camadas homogêneas ou não, através de um método relativamente simples. Dado o vetor de ondas na camada superficial, podemos calcular seu valor para qualquer camada usando a matriz de propagação.

A propagação de ondas em meios estratificados produz fenômenos de transmissão e reflexão de ondas. Dadas as deduções das matrizes de transmissão e reflexão, podemos relacioná-las com a matriz de propagação, bem como deduzir propriedades de simetrias para essas matrizes através das características invariantes da propagação. Podemos ainda deduzir as matrizes de transmissão e reflexão modificadas para pilha de camadas limitadas superiormente por uma superfície livre.

### 4.1 Características das Equações na Forma Matricial de Ursin

É possível utilizar o método matricial no formato preconizado por [Ursin(1983)] para resolver sistemas de EDO's desde que se possa escrever tal sistema como

$$\frac{\partial \Phi^{(m)}}{\partial z} = -i\omega M^{(m)} \Phi^{(m)} + \mathbf{S}^{(m)}, \quad \text{com } m \in \mathbb{N}, \quad (4.1)$$

onde  $\mathbf{S}^{(m)}$  é um vetor de fonte de onda sísmica de dimensão  $2n_m$  e as matrizes  $M_{2n_m \times 2n_m}^{(m)}$  têm o formato

$$M^{(m)} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & M_1^{(m)} \\ M_2^{(m)} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (4.2)$$

onde  $M_1^{(m)}$  e  $M_2^{(m)}$  são submatrizes simétricas de dimensão  $n_m \times n_m$ .

A equação 4.1 tem as seguintes características:

- $M_{2n \times 2n}^{(m)}$  é uma matriz que pode ser particionada em quatro submatrizes  $n \times n$ , com submatrizes de zeros na diagonal principal e submatrizes simétricas  $M_1^{(m)}$  e  $M_2^{(m)}$  na diagonal secundária. As componentes de  $M_1^{(m)}$  e  $M_2^{(m)}$  são funções dos parâmetros das EDP's que estão sendo trabalhadas, são funções também de  $z$  e do vetor real de vagarosidade  $\gamma = \frac{k}{\omega}$ . Para meios de baixa dissipação das ondas, as matrizes  $M_1^{(m)}$  e  $M_2^{(m)}$  são reais;
- O vetor de onda  $\Phi^{(m)}$  tem dimensão  $2n \times 1$  e é particionado em dois vetores  $\Phi_1^{(m)}$  e  $\Phi_2^{(m)}$  com dimensão  $n \times 1$ . As componentes do vetor de onda são escolhidas de forma que  $\Phi^{(m)}$  seja contínuo através das fronteiras entre duas camadas;
- Para ondas elásticas, metade das componentes de  $\Phi^{(m)}$  são zeros na superfície livre, ou seja, existe uma matriz de permutação  $T_{2n \times 2n}$  onde  $T^{-1} = T^\top$  e tal que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_1(0) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = T \Phi^{(m)} \quad \text{quando } z = 0;$$

O método a seguir é aplicado em equações escritas no formato matricial 4.1, com ondas se propagando numa pilha de camadas homogêneas e assumimos que os parâmetros das equações são funções contínuas no interior de cada camada e que dependem apenas da profundidade  $z$ . O modelo inclui pilha de camadas homogêneas com parâmetros constantes por camada e consideramos o eixo  $z$  como sendo positivo no sentido descendente.

## 4.2 Diagonalização

Considere matrizes  $M$  conforme a equação 4.2, onde por simplicidade de escrita não usaremos o sobrescrito  $m$ . Vamos aplicar nesta matriz um procedimento de diagonalização que pode ser encontrado em trabalhos como [Ursin(1983)], [White and Zhou(2006)] e [Azeredo(2013)].

Seja  $(\mathbf{a}_m, \mathbf{b}_m)^\top$  seja um autovetor da matriz  $M$  associado ao autovalor  $q_m$ , com  $m = 1, \dots, n$ , assim

$$\begin{pmatrix} 0_{n \times n} & M_1 \\ M_2 & 0_{n \times n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a}_m \\ \mathbf{b}_m \end{pmatrix} = q_m \begin{pmatrix} \mathbf{a}_m \\ \mathbf{b}_m \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

Ou seja,

$$M_1 \mathbf{b}_m = q_m \mathbf{a}_m \quad (4.4)$$

e

$$M_2 \mathbf{a}_m = q_m \mathbf{b}_m. \quad (4.5)$$

Multiplicando 4.4 pela esquerda por  $M_2$  e substituindo 4.5, temos

$$M_2 M_1 \mathbf{b}_m = q_m^2 \mathbf{b}_m. \quad (4.6)$$

Analogamente, multiplicando 4.5 pela esquerda por  $M_1$  substituindo 4.4, temos

$$M_1 M_2 \mathbf{a}_m = q_m^2 \mathbf{a}_m. \quad (4.7)$$

Desta forma,  $\mathbf{a}_m$  é um autovetor associado à matriz  $M_1 M_2$ , e  $\mathbf{b}_m$  é um autovetor associado à matriz  $M_2 M_1$ .

Como estamos assumindo que  $M_1$  e  $M_2$  são simétricas, partindo da equação 4.6 e usando a equação 4.7, temos

$$\begin{aligned} q_m^2 \mathbf{b}_m &= M_2 M_1 \mathbf{b}_m \\ q_m^2 \mathbf{a}_j^\top \mathbf{b}_m &= \mathbf{a}_j^\top M_2 M_1 \mathbf{b}_m \\ &= \mathbf{b}_m^\top M_1 M_2 \mathbf{a}_j \\ &= q_j^2 \mathbf{a}_j^\top \mathbf{b}_m. \end{aligned}$$

Isolando  $\mathbf{a}_j^\top \mathbf{b}_m$  na última igualdade acima, temos que

$$\mathbf{a}_j^\top \mathbf{b}_m = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq j \\ \alpha_{j,m}, & \text{se } m = j, \end{cases} \quad (4.8)$$

onde  $\alpha$  é um valor indeterminado.

Vamos definir a matriz  $L_1$  de dimensão  $n \times n$  onde cuja  $m$ -ésima coluna é dada por  $\mathbf{a}_m$ , e a matriz  $L_2$  também de dimensão  $n \times n$  cuja  $m$ -ésima coluna é dada por  $\mathbf{b}_m$ . Assim, podemos reescrever as equações 4.4 e 4.5, respectivamente, como

$$M_1 L_2 = L_1 \Lambda \quad (4.9)$$

$$M_2 L_1 = L_2 \Lambda, \quad (4.10)$$

onde a matriz  $\Lambda_{n \times n}$  é a matriz diagonal dos autovalores. Observe que podemos trabalhar com as equações normalizadas tomando  $\alpha_{j,m} = 1$  na equação 4.8, que passa a definir o símbolo *Delta de Kroneker*<sup>1</sup>, conforme [Lebedev and Cloud(2003)]. Assim, escrevemos as componentes de  $\Lambda$  como  $\Lambda_{j,m} = q_j \mathbf{a}_j^\top \mathbf{b}_m$ . Observe ainda que, deste modo, a equação 4.8 define a matriz identidade  $I_{n \times n}$ , a qual podemos usar para mostrar que

$$L_1^{-1} = L_2^\top \quad (4.11)$$

$$L_2^{-1} = L_1^\top. \quad (4.12)$$

<sup>1</sup> Nos abstinemos de usar o caracter grego  $\delta$  na equação 4.8 por este já definir a função Delta de Dirac em nosso escopo.



Multiplicando pela direita as equações 4.9 e 4.10 respectivamente por  $L_2^{-1}$  e  $L_1^{-1}$ , e substituindo as equações 4.11 e 4.12, temos

$$M_1 = L_1 \Lambda L_1^\top \quad (4.13)$$

$$M_2 = L_2 \Lambda L_2^\top. \quad (4.14)$$

Definindo a matriz  $L_{2n \times 2n}$  como

$$L = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} L_1 & L_1 \\ L_2 & -L_2 \end{pmatrix}, \quad (4.15)$$

e a matriz  $\tilde{\Lambda}$  como

$$\tilde{\Lambda} = \begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & -\Lambda \end{pmatrix}, \quad (4.16)$$

podemos deduzir que

$$L^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} L_2^\top & L_1^\top \\ L_2^\top & -L_1^\top \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

e

$$M = L \tilde{\Lambda} L^{-1}. \quad (4.18)$$

### 4.3 Solução de EDO's na Ausência de Fonte

Vamos determinar inicialmente a solução de EDO's considerando o meio homogêneo e livre de fonte de onda sísmica. Após a diagonalização das equações, podemos aplicar um método utilizado por alguns autores como [Ursin(1983)], [Azeredo(2013)], [White and Zhou(2006)], [Miranda(2016)] entre outros, para determinar as soluções na ausência de fonte. Esse mesmo método pode ser utilizado para determinar as soluções na presença de fonte como veremos no capítulo 4.4. Ausência de fonte significa que temos  $\mathbf{S}^{(m)} = 0$  na equação 4.1. A matriz  $M^{(m)}$  possui entradas constantes por camada estratigráfica, as submatrizes na diagonal principal são nulas e as submatrizes na diagonal secundária são simétricas.

#### 4.3.1 Ondas Ascendentes e Ondas Descendentes

Vamos redefinir o vetor de ondas como

$$\Phi = L \Psi. \quad (4.19)$$

Substituindo a equação 4.19 na equação 4.1, temos

$$\frac{\partial \Psi}{\partial z} = -i \omega L^{-1} M L \Psi, \quad (4.20)$$

onde o sobrescrito  $m$  está sendo omitido por questão de simplicidade. De acordo com a equação 4.18, temos que as matrizes  $M$  e  $\tilde{\Lambda}$  são semelhantes, assim

$$\tilde{\Lambda} = L^{-1} M L.$$

Substituindo  $\tilde{\Lambda}$  na equação 4.20, temos

$$\frac{\partial \Psi}{\partial z} = -i\omega \tilde{\Lambda} \Psi. \quad (4.21)$$

De acordo com a equação 4.16,  $\tilde{\Lambda}$  é uma matriz cuja diagonal principal contém a submatriz  $\Lambda$ , onde  $\Lambda$  é uma matriz diagonal contendo os autovalores  $q_i$ . Definindo

$$\Psi = \begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{D} \end{pmatrix} \quad (4.22)$$

e usando o fato de que  $\tilde{\Lambda}$  é uma matriz diagonal, podemos resolver a equação diferencial 4.21 e expressar a solução na forma

$$\begin{aligned} \Psi(z) &= e^{-i\omega \tilde{\Lambda}(z-z_0)} \Psi(z_0) \\ &= \begin{pmatrix} e^{-i\omega \Lambda(z-z_0)} \mathbf{U}(z_0) \\ e^{i\omega \Lambda(z-z_0)} \mathbf{D}(z_0) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Desta maneira,  $\mathbf{U}$  representa ondas ascendentes e  $\mathbf{D}$  representa ondas descendentes,  $z_0$  é um ponto fixo na mesma região livre de fonte de  $z$  e  $e^{\pm i\omega \Lambda(z-z_0)}$  é uma matriz diagonal onde o  $j$ -ésimo elemento da diagonal principal é dado por  $e^{\pm i\omega q_j(z-z_0)}$ .

### 4.3.2 Matriz de Salto para Camadas Estratificadas

A profundidade onde encontra-se uma interface entre duas camadas estratificadas será denotada por  $\bar{z}$ , onde as quantidades avaliadas imediatamente abaixo da interface será denotada por  $\bar{z}^+$  e as quantidades avaliadas imediatamente acima da interface será denotada por  $\bar{z}^-$ . De acordo com [White and Zhou(2006)], temos a continuidade de  $\Phi$  através das fronteiras entre as camadas, assim é válida a relação  $\Phi^+ = \Phi^-$ . Substituindo a equação 4.19, temos

$$\begin{aligned} L^+ \Psi^+ &= L^- \Psi^- \\ \Psi^+ &= (L^+)^{-1} L^- \Psi^- \\ \Psi^+ &= J \Psi^-, \end{aligned} \quad (4.24)$$

onde  $J = (L^+)^{-1} L^-$  é denominada *matriz de salto*. Substituindo a equação 4.15, podemos expressar a matriz de salto como

$$J = \begin{pmatrix} J_A & J_B \\ J_B & J_A \end{pmatrix}, \quad (4.25)$$

onde  $J_A$  e  $J_B$  são dadas por

$$J_A = \frac{1}{2} [(L_2^+)^{\top} L_1^- + (L_1^+)^{\top} L_2^-] \quad (4.26)$$

$$J_B = \frac{1}{2} [(L_2^+)^{\top} L_1^- - (L_1^+)^{\top} L_2^-]. \quad (4.27)$$

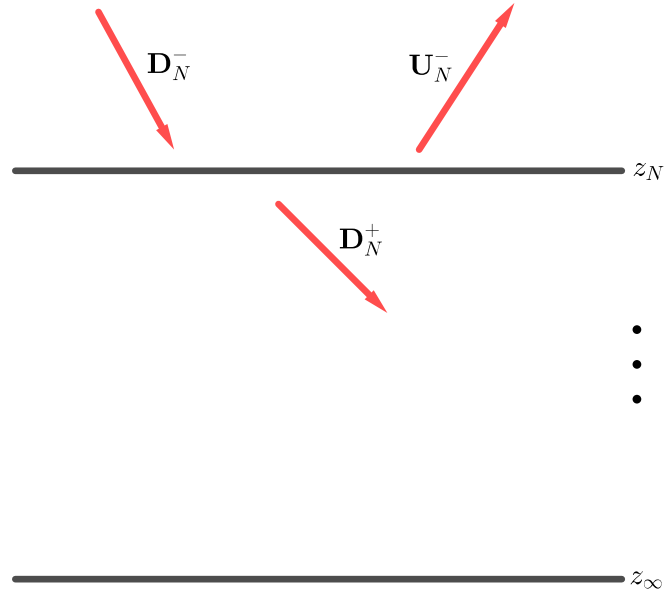


Figura 7 – Ondas ascendentes e descendentes na última interface. Observe que não há ondas ascendentes depois da última camada.

Com outra simples multiplicação de matrizes temos que

$$\begin{aligned} J^{-1} &= (L^{-})^{-1} L^{+} \\ &= \begin{pmatrix} J_A^{\top} & -J_B^{\top} \\ -J_B^{\top} & J_A^{\top} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.28)$$

### 4.3.3 Matriz de Reflexão e Matriz de Transmissão

Considere um meio estratificado, homogêneo no interior de cada camada, com  $N$  interfaces nas profundidades  $0 < z_1 < z_2 < \dots < z_N < \infty$  e sem existência de fonte nessas camadas.

#### 4.3.3.1 Reflexão e Transmissão na Última Interface

Pela figura 7, considerando que não há ondas ascendentes depois da última interface em  $z = z_N$ , podemos substituir a definição 4.22 na equação 4.24 e obter

$$\Psi_N^{-} = J_N^{-1} \Psi_N^{+}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{U}_N^{-} \\ \mathbf{D}_N^{-} \end{pmatrix} = J_N^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{D}_N^{+} \end{pmatrix}.$$

Substituindo a equação 4.28 na equação anterior, temos

$$\begin{pmatrix} \mathbf{U}_N^- \\ \mathbf{D}_N^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{A,N}^\top & -J_{B,N}^\top \\ -J_{B,N}^\top & J_{A,N}^\top \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{D}_N^+ \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -J_{B,N}^\top \mathbf{D}_N^+ \\ J_{A,N}^\top \mathbf{D}_N^+ \end{pmatrix},$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_N^- &= -J_{B,N}^\top J_{A,N}^{-\top} \mathbf{D}_N^- \\ \mathbf{D}_N^+ &= J_{A,N}^{-\top} \mathbf{D}_N^-. \end{aligned}$$

Assim, vemos que para computar uma onda refletida, ou seja, uma onda ascendente a partir de uma interface entre camadas, usamos uma *matriz de reflexão* que fica definida como

$$\Gamma_N = -J_{B,N}^\top J_{A,N}^{-\top}. \quad (4.29)$$

Analogamente, vemos que para computar uma onda transmitida, ou seja, uma onda descendente a partir de uma interface entre camadas, usamos uma *matriz de transmissão* que fica definida como

$$T_N = J_{A,N}^{-\top}. \quad (4.30)$$

#### 4.3.3.2 Reflexão e Transmissão numa Interface Qualquer

Definimos a espessura de uma camada, a partir da interface superior, como

$$\Delta z_m = z_{m+1} - z_m, \quad m = 1, 2, \dots, N-1, \quad (4.31)$$

e temos que uma onda se propagando da interface na profundidade  $z_m$  até a interface em  $z_{m+1}$  percorre uma profundidade total  $\Delta z_m$ . O valor dessa onda no fim da trajetória, quando  $z = z_{m+1}$ , é aproximadamente igual a  $\Psi_{m+1}^-$ , conforme a figura 8. Assim, usando a solução 4.23 podemos escrever

$$\Psi_{m+1}^- = e^{-i\omega\tilde{\Lambda}_m\Delta z_m} \Psi_m^+. \quad (4.32)$$

Sabendo que essa onda se propagando na camada abaixo da interface em  $z_m$  veio da camada anterior, podemos usar a matriz de salto na equação 4.24 e escrever

$$\Psi_m^+ = J_m \Psi_m^-. \quad (4.33)$$

Substituindo a equação 4.33 na equação 4.32, temos

$$\begin{aligned} \Psi_{m+1}^- &= e^{-i\omega\tilde{\Lambda}_m\Delta z_m} \Psi_m^+ \\ \Psi_{m+1}^- &= e^{-i\omega\tilde{\Lambda}_m\Delta z_m} J_m \Psi_m^- \\ \Psi_m^- &= J_m^{-1} e^{i\omega\tilde{\Lambda}_m\Delta z_m} \Psi_{m+1}^- \end{aligned} \quad (4.34)$$

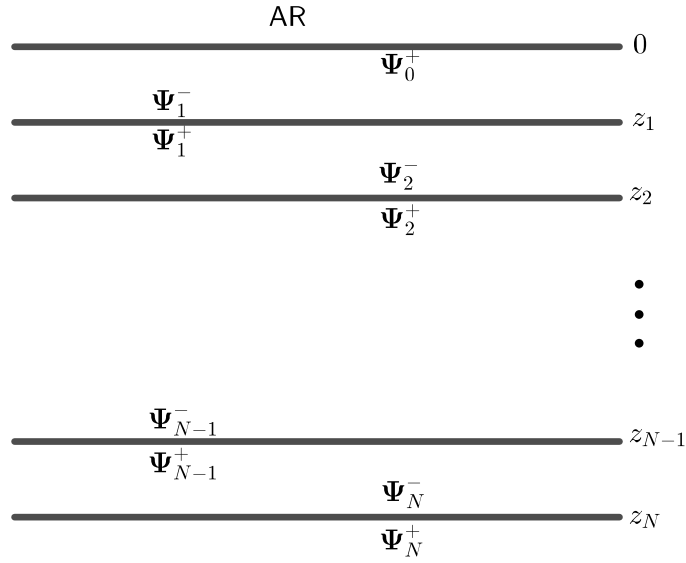


Figura 8 – Visualização de  $N$  interfaces em subsuperfície e a notação das ondas nas proximidades de cada interface.

Substituindo a equação 4.22 e a equação 4.28 na equação 4.34, temos

$$\mathbf{U}_m^- = J_{A,m}^\top e^{i\omega\Lambda_m\Delta z_m} \mathbf{U}_{m+1}^- - J_{B,m}^\top e^{-i\omega\Lambda_m\Delta z_m} \mathbf{D}_{m+1}^- \quad (4.35)$$

$$\mathbf{D}_m^- = -J_{B,m}^\top e^{i\omega\Lambda_m\Delta z_m} \mathbf{U}_{m+1}^- + J_{A,m}^\top e^{-i\omega\Lambda_m\Delta z_m} \mathbf{D}_{m+1}^-. \quad (4.36)$$

Assim como definimos matriz de reflexão para a última interface em  $z_N$ , podemos definir a matriz de reflexão para uma interface qualquer, ou seja,

$$\mathbf{U}_{m+1}^- = \Gamma_{m+1} \mathbf{D}_{m+1}^-. \quad (4.37)$$

Substituindo a equação 4.37 na equação 4.35 e na equação 4.36, temos

$$\mathbf{U}_m^- = (J_{A,m}^\top e^{i\omega\Lambda_m\Delta z_m} \Gamma_{m+1} - J_{B,m}^\top e^{-i\omega\Lambda_m\Delta z_m}) \mathbf{D}_{m+1}^- \quad (4.38)$$

$$\mathbf{D}_m^- = (-J_{B,m}^\top e^{i\omega\Lambda_m\Delta z_m} \Gamma_{m+1} + J_{A,m}^\top e^{-i\omega\Lambda_m\Delta z_m}) \mathbf{D}_{m+1}^-. \quad (4.39)$$

Substituindo a equação 4.39 na equação 4.38, temos

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_m^- &= (J_{A,m}^\top e^{i\omega\Lambda_m\Delta z_m} \Gamma_{m+1} - J_{B,m}^\top e^{-i\omega\Lambda_m\Delta z_m}) \\ &\quad \cdot (-J_{B,m}^\top e^{i\omega\Lambda_m\Delta z_m} \Gamma_{m+1} + J_{A,m}^\top e^{-i\omega\Lambda_m\Delta z_m})^{-1} \mathbf{D}_m^-, \end{aligned}$$

de onde podemos concluir que a matriz de reflexão em uma interface em  $z_m$  qualquer é dada por

$$\begin{aligned} \Gamma_m &= (J_{A,m}^\top e^{i\omega\Lambda_m\Delta z_m} \Gamma_{m+1} - J_{B,m}^\top e^{-i\omega\Lambda_m\Delta z_m}) \\ &\quad \cdot (-J_{B,m}^\top e^{i\omega\Lambda_m\Delta z_m} \Gamma_{m+1} + J_{A,m}^\top e^{-i\omega\Lambda_m\Delta z_m})^{-1}, \end{aligned}$$

ou

$$\Gamma_m = (J_{A,m}^\top e^{i\omega\Lambda_m\Delta z_m} \Gamma_{m+1} e^{i\omega\Lambda_m\Delta z_m} - J_{B,m}^\top) \cdot (-J_{B,m}^\top e^{i\omega\Lambda_m\Delta z_m} \Gamma_{m+1} e^{i\omega\Lambda_m\Delta z_m} + J_{A,m}^\top)^{-1}. \quad (4.40)$$

Quando uma onda atinge uma interface, além da possibilidade de reflexão há também a possibilidade de transmissão da onda para a camada inferior. De maneira análoga ao desenvolvido para reflexão de ondas, podemos deduzir a matriz para a transmissão de ondas em uma interface qualquer, que é dada por

$$T_m = T_{m+1} e^{i\omega\Lambda\Delta z_m} (-J_{B,m}^\top e^{i\omega\Lambda_m\Delta z_m} \Gamma_{m+1} e^{i\omega\Lambda_m\Delta z_m} + J_{A,m}^\top)^{-1}. \quad (4.41)$$

A validade das equações 4.40 e 4.41 para qualquer interface pode ser demonstrada por indução sobre  $m$ , e todas as matrizes de reflexão e transmissão podem ser computadas por recorrência partindo das equações 4.29 e 4.30.

## 4.4 Solução na Presença de Fonte

Em prospecção de petróleo são utilizadas alguns tipos de fontes de ondas, através das quais se faz um mapeamento das características das camadas de subsuperfície. Segundo [Savit(1988)], esses tipos de fontes podem ser uma queda de peso, um caminhão *vibroscis*, explosivos e canhão de ar, esta última fonte utilizada em prospecção marítima. Sendo assim, vamos desenvolver uma solução para o nosso problema considerando agora a presença de uma fonte.

Considere ainda a equação 4.1 com o sobrescrito  $m$  omitido. Uma fonte  $\mathbf{S}$  localizada numa profundidade  $z_s$  pode ser representada na forma

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_0 \delta(z - z_s) + \mathbf{S}_1 \delta'(z - z_s), \quad (4.42)$$

onde  $\mathbf{S}_0$  e  $\mathbf{S}_1$  não dependem da profundidade e  $\delta$  é a função *Delta de Dirac* conforme a subseção 3.4. Fontes que são distribuídas ao longo da profundidade podem, geralmente, ser sintetizadas por superposição de fontes do tipo  $\mathbf{S}_0$  e  $\mathbf{S}_1$ .

Uma solução por ser escrita como a combinação de uma solução inicial sofrendo a ação de alguma fonte, ou seja,

$$\Phi = \Phi_0 + \mathbf{S}_1 \delta(z - z_s). \quad (4.43)$$

Substituindo a equação 4.43 e a equação 4.42 na equação 4.1, temos

$$\frac{d\Phi_0}{dz} = -i\omega M \Phi_0 + [\mathbf{S}_0 - i\omega M \mathbf{S}_1] \delta(z - z_s), \quad (4.44)$$

e por simplicidade, vamos escrever

$$i\omega M \mathbf{S}_1 - \mathbf{S}_0 = \begin{pmatrix} \mathbf{S}_A \\ \mathbf{S}_B \end{pmatrix}. \quad (4.45)$$

Considerando a existência de uma interface imaginária na profundidade  $z_s$  da fonte, podemos determinar as condições de salto no local da fonte da mesma forma que estudamos as condições de salto nas interfaces que separam as camadas. Assim, integrando a equação 4.44 no intervalo que começa imediatamente acima da interface imaginária da fonte  $z_s^-$ , e termina imediatamente abaixo da interface imaginária da fonte em  $z_s^+$ , e substituindo a equação 4.45, temos como solução

$$\Phi_0(z_s^-) = \Phi_0(z_s^+) + \begin{pmatrix} \mathbf{S}_A \\ \mathbf{S}_B \end{pmatrix}.$$

Substituindo a equação 4.43 e considerando as características da função Delta de Dirac, temos a seguinte condição de salto na profundidade da fonte

$$\Phi(z_s^-) = \Phi(z_s^+) + \begin{pmatrix} \mathbf{S}_A \\ \mathbf{S}_B \end{pmatrix}. \quad (4.46)$$

Vamos agora inserir uma interface imaginária imediatamente abaixo da fonte, em  $z = z_s^+$  e utilizar os métodos do capítulo 4.3 para computar a matriz de reflexão  $\Gamma_s \equiv \Gamma(z_s^+)$  a partir do topo desta camada. Já que a interface em  $z_s^+$  é fictícia, as propriedades do meio são iguais acima e abaixo dessa interface, assim temos que  $L_2^+ = L_2^-$  e  $L_1^+ = L_1^-$ . Substituindo essas identidades nas equações 4.26 e 4.27, temos

$$J_A = \frac{1}{2} [(L_2)^\top L_1 + (L_1)^\top L_2] \quad (4.47)$$

$$J_B = \frac{1}{2} [(L_2)^\top L_1 - (L_1)^\top L_2]. \quad (4.48)$$

Substituindo as equações 4.11 e 4.12 nas equações 4.47 e 4.48, obtemos que

$$J_A = I$$

$$J_B = 0.$$

Desta forma, a onda ascendente  $\mathbf{U}(z_s^+)$  e a onda descendente  $\mathbf{D}(z_s^+)$  a partir da interface em  $z_s^+$  podem ser introduzidas na equação 4.22 para obtermos

$$\Psi(z_s^+) = \begin{pmatrix} \mathbf{U}(z_s^+) \\ \mathbf{D}(z_s^+) \end{pmatrix}.$$

Substituindo a equação 4.37 na equação acima, temos

$$\Psi(z_s^+) = \begin{pmatrix} \Gamma_s \mathbf{D}(z_s^+) \\ \mathbf{D}(z_s^+) \end{pmatrix}, \quad (4.49)$$

pois as ondas estão numa mesma camada e daí usamos que

$$\mathbf{U}^-(z_s^+) = \mathbf{U}(z_s^+)$$

$$\mathbf{D}^-(z_s^+) = \mathbf{D}(z_s^+).$$

Multiplicando a equação 4.46 por  $L^{-1}$  e substituindo a equação 4.19, obtemos

$$\Psi(z_s^-) = \Psi(z_s^+) + L^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{S}_A \\ \mathbf{S}_B \end{pmatrix}. \quad (4.50)$$

Substituindo a expressão para  $L^{-1}$  dada pela equação 4.17, juntamente com a equação 4.49 na equação 4.50, temos

$$\Psi(z_s^-) = \begin{pmatrix} \Gamma_s \mathbf{D}(z_s^+) \\ \mathbf{D}(z_s^+) \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} L_2^\top \mathbf{S}_A + L_1^\top \mathbf{S}_B \\ L_2^\top \mathbf{S}_A - L_1^\top \mathbf{S}_B \end{pmatrix}. \quad (4.51)$$

Admitindo que a fonte esteja no interior da primeira camada, ou seja,  $0 < z_s < z_1$ , a solução dada pela equação 4.51 é propagada para cima a partir de  $z_s^-$  usando a equação 4.23, e o salto através das interfaces entre camadas é dado pela equação 4.24 até que a onda atinja a interface terra/ar em  $z = 0^+$ . Assim,

$$\Psi(0^+) = e^{-i\omega \tilde{\Lambda}(0^+ - z_s^-)} \Psi(z_s^-),$$

e podemos usar as  $n$  condições de fronteira em  $z = 0$  para determinarmos as  $n$  incógnitas de  $\mathbf{D}_s$ . Os demais termos da solução são conhecidos. A diferença  $z_s^- - 0^+$  corresponde à profundidade da fonte, assim a solução anterior pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \Psi(0^+) &= e^{-i\omega \tilde{\Lambda}(-z_s)} \Psi(z_s^-) \\ \Psi(0^+) &= \begin{pmatrix} e^{i\omega \Lambda z_s} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & e^{-i\omega \Lambda z_s} \end{pmatrix} \Psi(z_s^-). \end{aligned}$$

Substituindo a equação 4.51 na equação acima, temos

$$\Psi(0^+) = \begin{pmatrix} e^{i\omega \Lambda z_s} \Gamma_s \mathbf{D}(z_s^+) \\ e^{-i\omega \Lambda z_s} \mathbf{D}(z_s^+) \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{i\omega \Lambda z_s} (L_2^\top \mathbf{S}_A + L_1^\top \mathbf{S}_B) \\ e^{-i\omega \Lambda z_s} (L_2^\top \mathbf{S}_A - L_1^\top \mathbf{S}_B) \end{pmatrix}, \quad (4.52)$$

e teremos os valores de cada campo quando as ondas retornarem à superfície.



## 5 Sistema de EDO's do Efeito Magneto-Elástico

Neste capítulo vamos aplicar algumas técnicas como rotação do sistema de coordenadas e Transformadas Laterais de Fourier em EDP's da magneto-elasticidade para que as mesmas possam ser escritas como um sistema de EDO's.

### 5.1 Transformando EDP's em EDO's

Segundo [Dunkin and Eringen(1963)], o acoplamento entre ondas eletromagnéticas e elásticas se propagando no subsolo caracteriza o efeito magneto-elástico, e esse acoplamento pode ser modelado matematicamente através de um sistema de equações diferenciais parciais. Conforme [Pinho(2018)], podemos aplicar uma série de hipóteses oriundas das características físicas do efeito magneto-elástico, as quais visam simplificar e linearizar essas EDP's de forma que as mesmas possam receber um tratamento matemático analítico adequado, para em seguida se obter numericamente os valores dos campos eletromagnéticos e elásticos envolvidos no sistema.

$$\nabla \times \mathbf{E} = i \omega \mu_0 \mathbf{H} \quad (5.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = (\sigma - i \epsilon \omega) \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \sigma \mu_0 \mathbf{H}^0 + \mathbf{j} \quad (5.2)$$

$$-i \omega \rho \mathbf{v} = \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \mathbf{F} \quad (5.3)$$

$$\boldsymbol{\tau} = \lambda \nabla \cdot \mathbf{u} \cdot \mathbf{I} + G (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) \quad (5.4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0. \quad (5.5)$$

Estas equações estão no domínio da frequência  $\omega$ , a dependência do tempo é dada por  $e^{-i\omega t}$  e

- $\mathbf{E}$  é o campo elétrico,
- $\mathbf{B}$  é o campo magnético,
- $\mathbf{D}$  é o campo de densidade de fluxo elétrico,
- $\mathbf{H}$  é o campo magnético auxiliar,

- $\tau$  é o tensor de tensões,
- $\mathbf{u}$  é o deslocamento do meio,
- $\mathbf{v}$  é a velocidade de deslocamento do meio,
- $\mathbf{F}$  é uma força aplicada ao meio,
- $\mathbf{H}^0$  é campo geomagnético,
- $i$  é um número complexo,
- $\omega$  é a frequência temporal,
- $\mu_0$  é a permeabilidade magnética no vácuo,
- $\sigma$  é a condutividade do meio,
- $\epsilon$  é a permissividade elétrica do meio,
- $\rho$  é a densidade do meio,
- $\lambda$  e  $G$  são parâmetros de Lamè.

Vamos definir  $\bar{\sigma} = (\sigma - i\epsilon\omega)$ . No subsolo, por conta do regime quasi-estacionário, ( $\sigma \gg \epsilon\omega$ ) e temos  $\bar{\sigma} = \sigma$ . No ar, a condutividade é zero e a permeabilidade elétrica é próxima a do vácuo  $\epsilon_0$ , assim temos  $\bar{\sigma} = -i\epsilon_0\omega$ .

No formato matricial, a equação 5.1 pode ser escrita como

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial E_3}{\partial y} - \frac{\partial E_2}{\partial z} \\ \frac{\partial E_1}{\partial z} - \frac{\partial E_3}{\partial x} \\ \frac{\partial E_2}{\partial x} - \frac{\partial E_1}{\partial y} \end{pmatrix} = i\omega\mu_0 \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{pmatrix}.$$

Aplicando as transformadas laterais de Fourier, dada em 3.9, temos

$$\begin{cases} ik_y \hat{E}_3 - \frac{\partial \hat{E}_2}{\partial z} = i\omega\mu_0 \hat{H}_1 \\ \frac{\partial \hat{E}_1}{\partial z} - ik_x \hat{E}_3 = i\omega\mu_0 \hat{H}_2 \\ ik_x \hat{E}_2 - ik_y \hat{E}_1 = i\omega\mu_0 \hat{H}_3. \end{cases}$$

Rotacionando o sistema de forma que a primeira coordenada esteja orientada no sentido do vetor de onda horizontal, usando o operador dado pela equação 3.11, e fazendo as simplificações, temos

$$\begin{cases} -\frac{\partial \tilde{E}_2}{\partial z} = i\omega\mu_0 \tilde{H}_1 \\ \frac{\partial \tilde{E}_1}{\partial z} = i\omega\mu_0 \tilde{H}_2 + ik\tilde{E}_3 \\ i\tilde{E}_2 = \frac{i\omega\mu_0}{k} \tilde{H}_3. \end{cases}$$

Observando que  $\mathbf{v} = -i\omega\mathbf{u}$  depois de aplicada a transformada de Fourier no tempo, a equação 5.2 pode ser escrita como

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial H_3}{\partial y} - \frac{\partial H_2}{\partial z} \\ \frac{\partial H_1}{\partial z} - \frac{\partial H_3}{\partial x} \\ \frac{\partial H_2}{\partial x} - \frac{\partial H_1}{\partial y} \end{pmatrix} = (\sigma - i\epsilon\omega) \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} - i\omega\sigma\mu_0 \begin{pmatrix} u_2H_3^0 - u_3H_2^0 \\ u_3H_1^0 - u_1H_3^0 \\ u_1H_2^0 - u_2H_1^0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \end{pmatrix}.$$

Aplicando as transformadas laterais de Fourier conforme a equação 3.9, temos

$$\begin{cases} ik_y\hat{H}_3 - \frac{\partial \hat{H}_2}{\partial z} = (\sigma - i\epsilon\omega) \hat{E}_1 - i\omega\sigma\mu_0(u_2H_3^0 - u_3H_2^0) + \hat{j}_1 \\ \frac{\partial \hat{H}_1}{\partial z} - ik_x\hat{H}_3 = (\sigma - i\epsilon\omega) \hat{E}_2 - i\omega\sigma\mu_0(u_3H_1^0 - u_1H_3^0) + \hat{j}_2 \\ ik_x\hat{H}_2 - ik_y\hat{H}_1 = (\sigma - i\epsilon\omega) \hat{E}_3 - i\omega\sigma\mu_0(u_1H_2^0 - u_2H_1^0) + \hat{j}_3. \end{cases}$$

Rotacionando o sistema usando o operador dado pela equação 3.11, e fazendo as simplificações, temos

$$\begin{cases} -\frac{\partial \tilde{H}_2}{\partial z} = (\sigma - i\epsilon\omega) \tilde{E}_1 - i\omega\sigma\mu_0 \tilde{H}_3^0 \tilde{u}_2 + i\omega\sigma\mu_0 \tilde{H}_2^0 \tilde{u}_3 + \tilde{j}_1 \\ \frac{\partial \tilde{H}_1}{\partial z} = (\sigma - i\epsilon\omega) \tilde{E}_2 + ik \tilde{H}_3 - i\omega\sigma\mu_0 \tilde{H}_1^0 \tilde{u}_3 + i\omega\sigma\mu_0 \tilde{H}_3^0 \tilde{u}_1 + \tilde{j}_2 \\ ik \tilde{H}_2 = (\sigma - i\epsilon\omega) \tilde{E}_3 - i\omega\sigma\mu_0 (\tilde{H}_2^0 \tilde{u}_1 - \tilde{H}_1^0 \tilde{u}_2) + \tilde{j}_3. \end{cases}$$

A equação 5.3 pode ser reescrita como

$$\begin{cases} -\omega^2\rho u_1 = \frac{\partial \tau_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{13}}{\partial z} + F_1 \\ -\omega^2\rho u_2 = \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{22}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{23}}{\partial z} + F_2 \\ -\omega^2\rho u_3 = \frac{\partial \tau_{31}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{32}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{33}}{\partial z} + F_3 \end{cases}$$

Aplicando as transformadas laterais de Fourier, temos

$$\begin{cases} -\omega^2\rho \hat{u}_1 = ik_x\hat{\tau}_{11} + ik_y\hat{\tau}_{12} + \frac{\partial \hat{\tau}_{13}}{\partial z} + \hat{F}_1 \\ -\omega^2\rho \hat{u}_2 = ik_x\hat{\tau}_{21} + ik_y\hat{\tau}_{22} + \frac{\partial \hat{\tau}_{23}}{\partial z} + \hat{F}_2 \\ -\omega^2\rho \hat{u}_3 = ik_x\hat{\tau}_{31} + ik_y\hat{\tau}_{32} + \frac{\partial \hat{\tau}_{33}}{\partial z} + \hat{F}_3. \end{cases}$$

Aplicando a rotação e simplificando as equações, temos

$$\begin{cases} -\omega^2\rho \tilde{u}_1 = ik\tilde{\tau}_{11} + \frac{\partial \tilde{\tau}_{13}}{\partial z} + \tilde{F}_1 \\ -\omega^2\rho \tilde{u}_2 = ik\tilde{\tau}_{12} + \frac{\partial \tilde{\tau}_{23}}{\partial z} + \tilde{F}_2 \\ -\omega^2\rho \tilde{u}_3 = ik\tilde{\tau}_{13} + \frac{\partial \tilde{\tau}_{33}}{\partial z} + \tilde{F}_3. \end{cases}$$

A equação 5.4 pode ser reescrita como

$$\begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{pmatrix} = \lambda \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z} \right) I + G \begin{pmatrix} 2 \frac{\partial u_1}{\partial x} & \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x} & \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial x} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} & 2 \frac{\partial u_2}{\partial y} & \frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial y} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial z} & \frac{\partial u_3}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial z} & 2 \frac{\partial u_3}{\partial z} \end{pmatrix},$$

onde  $I$  é uma matriz identidade. Dada a simetria do tensor  $\tau_{ij}$  temos seis equações

$$\begin{cases} \tau_{11} = \lambda \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z} \right) + 2G \frac{\partial u_1}{\partial x} \\ \tau_{12} = G \left( \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) \\ \tau_{13} = G \left( \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial x} \right) \\ \tau_{22} = \lambda \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z} \right) + 2G \frac{\partial u_2}{\partial y} \\ \tau_{23} = G \left( \frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial y} \right) \\ \tau_{33} = \lambda \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z} \right) + 2G \frac{\partial u_3}{\partial z}. \end{cases}$$

Aplicando as transformadas laterais de Fourier no sistema acima, temos

$$\begin{cases} \hat{\tau}_{11} = \lambda \left( -i k_x \hat{u}_1 - i k_y \hat{u}_2 + \frac{\partial \hat{u}_3}{\partial z} \right) - 2i G k_x \hat{u}_1 \\ \hat{\tau}_{12} = G (-i k_y \hat{u}_1 - i k_x \hat{u}_2) \\ \hat{\tau}_{13} = G \left( \frac{\partial \hat{u}_1}{\partial z} - i k_x \hat{u}_3 \right) \\ \hat{\tau}_{22} = \lambda \left( -i k_x \hat{u}_1 - i k_y \hat{u}_2 + \frac{\partial \hat{u}_3}{\partial z} \right) - 2i G k_y \hat{u}_2 \\ \hat{\tau}_{23} = G \left( \frac{\partial \hat{u}_2}{\partial z} - i k_y \hat{u}_3 \right) \\ \hat{\tau}_{33} = \lambda \left( -i k_x \hat{u}_1 - i k_y \hat{u}_2 + \frac{\partial \hat{u}_3}{\partial z} \right) + 2G \frac{\partial \hat{u}_3}{\partial z}. \end{cases}$$

E aplicando a rotação  $\Omega$  na forma dada pela equação 3.13, fazendo as simplificações, finalmente a lei de Hooke se torna

$$\begin{cases} \tilde{\tau}_{11} = i k (\lambda + 2G) \tilde{u}_1 + \lambda \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial z} \\ \tilde{\tau}_{12} = i G k \tilde{u}_2 \\ \tilde{\tau}_{13} = G \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial z} + i G k \tilde{u}_3 \\ \tilde{\tau}_{22} = \lambda \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial z} + i \lambda k \tilde{u}_1 \\ \tilde{\tau}_{23} = G \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial z} \\ \tilde{\tau}_{33} = (\lambda + 2G) \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial z} + i \lambda k \tilde{u}_1. \end{cases}$$

Vimos que as equações 5.1, 5.2, 5.3 e 5.4 escritas no espaço horizontal de Fourier e rotacionadas nos fornecem quinze equações. Isolando as variáveis  $\tilde{H}_3, \tilde{E}_3, \tilde{\tau}_{11}, \tilde{\tau}_{22}$  e  $\tilde{\tau}_{12}$ , podemos substituir algumas equações em outras e reduzir a quantidade para dez. Fazendo ainda as substituições da variável  $\dot{\tilde{\mathbf{u}}} = -i\omega \tilde{\mathbf{u}}$ , da vagarosidade horizontal conforme a equação 3.5 e isolando as derivadas parciais em relação à profundidade, temos o seguinte sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \tilde{E}_1}{\partial z} = \left( i\omega \mu_0 + \frac{i^2 \gamma^2 \omega^2}{\sigma - i\epsilon \omega} \right) \tilde{H}_2 - \frac{i\gamma \omega \sigma \mu_0 \tilde{H}_2^0}{\sigma - i\epsilon \omega} \dot{\tilde{u}}_1 + \frac{i\gamma \omega \sigma \mu_0 \tilde{H}_1^0}{\sigma - i\epsilon \omega} \dot{\tilde{u}}_2 + \frac{i\gamma \omega}{\sigma - i\epsilon \omega} \tilde{j}_3 \\ \\ \frac{\partial \tilde{E}_2}{\partial z} = -i\omega \mu_0 \tilde{H}_1 \\ \\ -\frac{\partial \tilde{H}_1}{\partial z} = -\left( \sigma - i\epsilon \omega + \frac{i^2 \gamma^2 \omega^2}{i\omega \mu_0} \right) \tilde{E}_2 + \sigma \mu_0 \tilde{H}_3^0 \dot{\tilde{u}}_1 - \sigma \mu_0 \tilde{H}_1^0 \dot{\tilde{u}}_3 - \tilde{j}_2 \\ \\ \frac{\partial \tilde{H}_2}{\partial z} = -(\sigma - i\epsilon \omega) \tilde{E}_1 - \sigma \mu_0 \tilde{H}_3^0 \dot{\tilde{u}}_2 + \sigma \mu_0 \tilde{H}_2^0 \dot{\tilde{u}}_3 - \tilde{j}_1 \\ \\ \frac{\partial \dot{\tilde{u}}_1}{\partial z} = -i\gamma \omega \dot{\tilde{u}}_3 - \frac{i\omega}{G} \tilde{\tau}_{13} \\ \\ \frac{\partial \dot{\tilde{u}}_2}{\partial z} = -\frac{i\omega}{G} \tilde{\tau}_{23} \\ \\ \frac{\partial \dot{\tilde{u}}_3}{\partial z} = -\frac{i\omega}{\lambda + 2G} \tilde{\tau}_{33} - \frac{i\omega \gamma \lambda}{\lambda + 2G} \dot{\tilde{u}}_1 \\ \\ \frac{\partial \tilde{\tau}_{13}}{\partial z} = \left[ \frac{\omega \rho}{i} - \frac{i^2 \gamma^2 \omega}{i} \cdot \frac{\lambda^2 - (\lambda + 2G)^2}{\lambda + 2G} \right] \dot{\tilde{u}}_1 - \frac{i\omega \gamma \lambda}{\lambda + 2G} \tilde{\tau}_{33} - \tilde{F}_1 \\ \\ \frac{\partial \tilde{\tau}_{23}}{\partial z} = \left[ \frac{\omega \rho}{i} + \frac{i^2 \gamma^2 \omega G}{i} \right] \dot{\tilde{u}}_2 - \tilde{F}_2 \\ \\ \frac{\partial \tilde{\tau}_{33}}{\partial z} = \frac{\omega \rho}{i} \dot{\tilde{u}}_3 - i\omega \gamma \tilde{\tau}_{13} - \tilde{F}_3. \end{array} \right.$$

O sistema acima pode ser colocado num formato matricial composto por submatrizes nulas e submatrizes simétricas, e para isso precisamos agrupar essa dez equações em quatro equações matriciais.

$$\frac{\partial}{\partial z} \begin{pmatrix} \tilde{E}_1 \\ \tilde{H}_2 \end{pmatrix} = -i\omega \begin{pmatrix} 0 & -\mu_0 - \frac{i\gamma^2\omega}{\sigma-i\epsilon\omega} \\ \frac{\sigma-i\epsilon\omega}{i\omega} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{E}_1 \\ \tilde{H}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{i\gamma\omega\sigma\mu_0\tilde{H}_1^0}{\sigma-i\epsilon\omega}\dot{u}_2 - \frac{i\gamma\omega\sigma\mu_0\tilde{H}_2^0}{\sigma-i\epsilon\omega}\dot{u}_1 + \frac{i\gamma\omega}{\sigma-i\epsilon\omega}\tilde{j}_3 \\ \sigma\mu_0\tilde{H}_2^0\dot{u}_3 - \sigma\mu_0\tilde{H}_3^0\dot{u}_2 - \tilde{j}_1 \end{pmatrix} \quad (5.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \begin{pmatrix} \tilde{E}_2 \\ -\tilde{H}_1 \end{pmatrix} = -i\omega \begin{pmatrix} 0 & -\mu_0 \\ \frac{\sigma-i\epsilon\omega}{i\omega} + \frac{i\omega\gamma^2}{i\omega\mu_0} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{E}_2 \\ -\tilde{H}_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\sigma\mu_0\tilde{H}_1^0\dot{u}_3 + \sigma\mu_0\tilde{H}_3^0\dot{u}_1 - \tilde{j}_2 \end{pmatrix} \quad (5.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \begin{pmatrix} \dot{u}_3 \\ \tilde{\tau}_{13} \\ \tilde{\tau}_{33} \\ \dot{u}_1 \end{pmatrix} = -i\omega \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\lambda+2G} & \frac{\lambda\gamma}{\lambda+2G} \\ 0 & 0 & \frac{\lambda\gamma}{\lambda+2G} & \rho + \gamma^2 \frac{\lambda^2 - (\lambda+2G)^2}{\lambda+2G} \\ \rho & \gamma & 0 & 0 \\ \gamma & \frac{1}{G} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u}_3 \\ \tilde{\tau}_{13} \\ \tilde{\tau}_{33} \\ \dot{u}_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\tilde{F}_1 \\ -\tilde{F}_3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.8)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \begin{pmatrix} \dot{u}_2 \\ \tilde{\tau}_{23} \end{pmatrix} = -i\omega \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{G} \\ \rho - G\gamma^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u}_2 \\ \tilde{\tau}_{23} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\tilde{F}_2 \end{pmatrix} \quad (5.9)$$

Uma vez que as dez variáveis das equações matricias acima tenham sido determinadas, podemos determinar também as cinco variáveis restantes usando

$$\begin{cases} \tilde{H}_3 = \frac{\gamma}{\mu_0} \tilde{E}_2 \\ \tilde{E}_3 = \frac{i\omega\gamma}{\sigma} \tilde{H}_2 - \frac{\sigma\mu_0\tilde{H}_2^0}{\sigma} \dot{u}_1 + \frac{\sigma\mu_0\tilde{H}_1^0}{\sigma} \dot{u}_2 - \frac{1}{\sigma} \tilde{j}_3 \\ \tilde{\tau}_{11} = \gamma \frac{\lambda^2 - (\lambda+2G)^2}{\lambda+2G} \dot{u}_1 + \frac{\lambda}{\lambda+2G} \tilde{\tau}_{33} \\ \tilde{\tau}_{22} = \gamma \lambda \frac{\lambda - (\lambda+2G)}{\lambda+2G} \dot{u}_1 + \frac{\lambda}{\lambda+2G} \tilde{\tau}_{33} \\ \tilde{\tau}_{12} = -\gamma G \dot{u}_2. \end{cases}$$

## 6 Condições de Contorno do Efeito Magneto-Elástico e o Espaço Original

Como estamos assumindo que as propriedades materiais não se alteram no interior de cada camada da subsuperfície, temos que a matriz  $M^{(m)}$  é constante para cada camada. Essas propriedades materiais se alteram descontinuamente conforme  $z$  varia de uma camada para outra através da interface de contato entre as camadas. Nessas interfaces vamos aplicar as condições de interface encontradas em [Pride(1994)], onde o vetor  $\mathbf{u}$ , as componentes normais de  $\tau$  e as componentes tangenciais de  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{H}$  são contínuas. Assim, constatamos que os vetores  $\Phi^{(m)}$  são contínuos através das interfaces entre as camadas.

### 6.1 Condições de Contorno

Resta estabelecer condições de contorno para os sistemas 5.6-5.9 no contato ar/superfície, ou seja, em  $z = 0$ . Aplicando ainda as condições de interface encontradas em [Pride(1994)], temos que a condição de contorno para o sistema 5.6 é

$$\tilde{H}_2 = -\frac{\epsilon_0}{q_0} \tilde{E}_1, \quad (6.1)$$

onde  $q_0$  é a vagarosidade vertical dada por 3.8. Esta é a relação para uma onda eletromagnética ascendente, e foi deduzida do fato de que não há ondas eletromagnéticas descendentes no ar, pois todas as fontes estão na subsuperfície. Para o sistema 5.7, a condição de contorno é

$$\tilde{H}_1 = \frac{q_0}{\mu_0} \tilde{E}_2, \quad (6.2)$$

onde esta relação também foi deduzida do fato de que há apenas ondas eletromagnéticas ascendentes no ar. Para o sistema 5.8, as condições de contorno são

$$\tilde{\tau}_{13} = \tilde{\tau}_{33} = 0. \quad (6.3)$$

E para o sistema 5.9, a condição de contorno é

$$\tilde{\tau}_{23} = 0. \quad (6.4)$$

Observe que para cada um dos sistemas, precisaremos de condições de contorno adicionais para especificar uma solução. Essas condições surgirão, por ocasião da aplicação nas equações da magneto-elasticidade, do fato de que não há ondas ascendentes em  $z \rightarrow \infty$ , como pudemos observar na subseção 4.3 e na figura 7.

Essas condições de contorno são utilizadas nas equações da magneto-elasticidade mas podem desde já serem inseridas na solução genérica apresentada na subseção 4.4, como foi

desenvolvido por vários autores como [White and Zhou(2006)], [Azeredo(2013)], [Miranda(2016)] e [Oliveira(2018)]. Tal abordagem é interessante por facilitar análises futuras, assim, vamos escrever a solução na superfície como

$$\mathbf{\Phi}(0^+) = \begin{pmatrix} G_A \mathbf{\Phi}_g \\ G_B \mathbf{\Phi}_g \end{pmatrix}, \quad (6.5)$$

onde as matrizes  $G_A$   $G_B$  são de dimensão  $n \times n$  e  $\mathbf{\Phi}_g$  é um vetor de dimensão  $n$  formado por incógnitas em  $z = 0$ . Considerando o sistema 5.6, temos

$$\mathbf{\Phi}^{(1)} = \begin{pmatrix} \tilde{E}_1 \\ \tilde{H}_2 \end{pmatrix}$$

e sua condição de fronteira, quando  $z = 0$  é dada pela equação 6.1,

$$\tilde{H}_2 = -\frac{\epsilon_0}{q_0} \tilde{E}_1.$$

Substituindo esta condição em  $\mathbf{\Phi}^{(1)}$ , temos

$$\mathbf{\Phi}^{(1)} = \begin{pmatrix} \tilde{E}_1 \\ -\frac{\epsilon_0}{q_0} \tilde{E}_1 \end{pmatrix}_{z=0^+}.$$

Colocando a equação acima no formato da equação 6.5, temos que

$$\mathbf{\Phi}_g^{(1)} = \tilde{E}_1, \\ G_A^{(1)} = 1 \quad \text{e} \quad G_B^{(1)} = -\frac{\epsilon_0}{q_0}.$$

De maneira análoga, vamos escrever as soluções dos três sistemas restantes na forma dada pela equação 6.5. Substituindo a condição de contorno 6.2 no sistema 5.7,  $\mathbf{\Phi}^{(2)}$  é dado por

$$\mathbf{\Phi}^{(2)} = \begin{pmatrix} \tilde{E}_2 \\ -\frac{q_0}{\mu_0} \tilde{E}_2 \end{pmatrix}_{z=0^+}$$

e temos

$$\mathbf{\Phi}_g^{(2)} = \tilde{E}_2, \\ G_A^{(2)} = 1 \quad \text{e} \quad G_B^{(2)} = -\frac{q_0}{\mu_0}.$$

Substituindo a condição de contorno 6.3 no sistema 5.8,  $\mathbf{\Phi}^{(3)}$  é dado por

$$\mathbf{\Phi}^{(3)} = \begin{pmatrix} \dot{\tilde{u}}_3 \\ 0 \\ 0 \\ \dot{\tilde{u}}_1 \end{pmatrix}_{z=0^+}$$



e temos,

$$\mathbf{\Phi}_g^{(3)} = \begin{pmatrix} \dot{\tilde{u}}_3 \\ \dot{\tilde{u}}_1 \end{pmatrix},$$

$$G_A^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad G_B^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Substituindo a condição de contorno 6.4 no sistema 5.9,  $\mathbf{\Phi}^{(4)}$  é dado por

$$\mathbf{\Phi}^{(4)} = \begin{pmatrix} \dot{\tilde{u}}_2 \\ 0 \end{pmatrix}_{z=0^+}$$

e temos,

$$\mathbf{\Phi}_g^{(4)} = \dot{\tilde{u}}_2,$$

$$G_A^{(4)} = 1 \quad \text{e} \quad G_B^{(4)} = 0.$$

De acordo com a equação 4.19, podemos escrever

$$\mathbf{\Phi}(0^+) = L \mathbf{\Psi}(0^+),$$

e substituindo as equações 4.52, 6.5 e 4.15 na equação acima, temos

$$G_A \mathbf{\Phi}_g = \frac{1}{\sqrt{2}} (L_1 e^{i\omega \Lambda z_s} \Gamma_s \mathbf{D}_s + L_1 e^{-i\omega \Lambda z_s} \mathbf{D}_s) \quad (6.6)$$

$$+ \frac{1}{2} [L_1 e^{i\omega \Lambda z_s} (L_2^\top \mathbf{S}_A + L_1^\top \mathbf{S}_B) + L_1 e^{-i\omega \Lambda z_s} (L_2^\top \mathbf{S}_A - L_1^\top \mathbf{S}_B)]$$

e

$$G_B \mathbf{\Phi}_g = \frac{1}{\sqrt{2}} (L_2 e^{i\omega \Lambda z_s} \Gamma_s \mathbf{D}_s - L_2 e^{-i\omega \Lambda z_s} \mathbf{D}_s) \quad (6.7)$$

$$+ \frac{1}{2} [L_2 e^{i\omega \Lambda z_s} (L_2^\top \mathbf{S}_A + L_1^\top \mathbf{S}_B) - L_2 e^{-i\omega \Lambda z_s} (L_2^\top \mathbf{S}_A - L_1^\top \mathbf{S}_B)].$$

Utilizando novamente as equações 4.11 e 4.12, podemos multiplicar pela esquerda a equação 6.6 por  $L_2^\top$  e multiplicar pela esquerda a equação 6.7 por  $L_1^\top$ , deduzindo que

$$L_2^\top G_A \mathbf{\Phi}_g = \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{i\omega \Lambda z_s} \Gamma_s \mathbf{D}_s + e^{-i\omega \Lambda z_s} \mathbf{D}_s) \quad (6.8)$$

$$+ \frac{1}{2} [e^{i\omega \Lambda z_s} (L_2^\top \mathbf{S}_A + L_1^\top \mathbf{S}_B) + e^{-i\omega \Lambda z_s} (L_2^\top \mathbf{S}_A - L_1^\top \mathbf{S}_B)]$$

e

$$L_1^\top G_B \mathbf{\Phi}_g = \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{i\omega \Lambda z_s} \Gamma_s \mathbf{D}_s - e^{-i\omega \Lambda z_s} \mathbf{D}_s) \quad (6.9)$$

$$+ \frac{1}{2} [e^{i\omega \Lambda z_s} (L_2^\top \mathbf{S}_A + L_1^\top \mathbf{S}_B) - e^{-i\omega \Lambda z_s} (L_2^\top \mathbf{S}_A - L_1^\top \mathbf{S}_B)].$$

Subtraindo a equação 6.9 da equação 6.8, temos

$$(L_2^\top G_A - L_1^\top G_B) \mathbf{\Phi}_g = \frac{2}{\sqrt{2}} e^{-i\omega \Lambda z_s} \mathbf{D}_s + e^{-i\omega \Lambda z_s} (L_2^\top \mathbf{S}_A - L_1^\top \mathbf{S}_B), \quad (6.10)$$

E isolando  $\mathbf{D}_s$  obtemos

$$\mathbf{D}_s = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\omega \Lambda z_s} (L_2^\top G_A - L_1^\top G_B) \Phi_g - \frac{1}{\sqrt{2}} (L_2^\top \mathbf{S}_A - L_1^\top \mathbf{S}_B).$$

Ao multiplicar pela esquerda a equação 6.10 por  $e^{i\omega \Lambda z_s} \Gamma_s e^{i\omega \Lambda z_s}$ , temos

$$e^{i\omega \Lambda z_s} \Gamma_s e^{i\omega \Lambda z_s} (L_2^\top G_A - L_1^\top G_B) \Phi_g = \frac{2}{\sqrt{2}} e^{i\omega \Lambda z_s} \Gamma_s \mathbf{D}_s + e^{i\omega \Lambda z_s} \Gamma_s (L_2^\top \mathbf{S}_A - L_1^\top \mathbf{S}_B), \quad (6.11)$$

e somando as equações 6.8 e 6.9, temos

$$(L_2^\top G_A + L_1^\top G_B) \Phi_g = \frac{2}{\sqrt{2}} e^{i\omega \Lambda z_s} \Gamma_s \mathbf{D}_s + e^{i\omega \Lambda z_s} (L_2^\top \mathbf{S}_A + L_1^\top \mathbf{S}_B). \quad (6.12)$$

Subtraindo a equação 6.12 da equação 6.11, obtemos uma relação para  $\Phi_g$ , dada por

$$\begin{aligned} \Phi_g = & \left[ e^{i\omega \Lambda z_s} \Gamma_s e^{i\omega \Lambda z_s} (L_2^\top G_A - L_1^\top G_B) - (L_2^\top G_A + L_1^\top G_B) \right]^{-1} \\ & \cdot e^{i\omega \Lambda z_s} \left[ \Gamma_s (L_2^\top \mathbf{S}_A - L_1^\top \mathbf{S}_B) - (L_2^\top \mathbf{S}_A + L_1^\top \mathbf{S}_B) \right]. \end{aligned}$$

Em particular, quando a fonte está imediatamente abaixo da superfície livre,  $z_s \approx 0$ , temos

$$\Phi_g = \left[ (\Gamma_s - I) L_2^\top G_A - (\Gamma_s + I) L_1^\top G_B \right]^{-1} \left[ (\Gamma_s - I) L_2^\top \mathbf{S}_A - (\Gamma_s + I) L_1^\top \mathbf{S}_B \right].$$

Após obtermos  $\Phi_g$ , é possível determinarmos todas as condições iniciais em  $z = 0$ ,  $\mathbf{D}_s$  e  $\mathbf{U}_s = \Gamma \mathbf{D}_s$ . Em seguida, podemos obter a solução imediatamente abaixo da fonte conforme a relação 4.49. Teoricamente, a partir de agora, a solução pode ser computada em qualquer outra profundidade utilizando a propagação através das camadas de acordo com a relação 4.23 e o salto através das camadas usando a relação 4.24. No entanto, segundo [White and Zhou(2006)], a propagação de uma onda ascendente contínua no sentido descendente é numericamente instável usando a equação 4.23, pois as exponenciais complexas crescem ao invés de diminuir com a distância. Assim, devemos obter  $\mathbf{U}$  a partir de  $\mathbf{D}$  usando  $\Gamma_m$ , ou fazer uso das matrizes de transmissão  $T_m$ .

## 6.2 Solução no Espaço Original

No processo de estabelecimento das EDP's do efeito magneto-elástico encontrado em [Pinho(2018)], a transformada de Fourier foi aplicada às equações para que as mesmas fossem escritas no domínio da frequência temporal. Aqui nesta monografia, aplicamos as transformadas laterais de Fourier deixando somente as derivadas em relação à profundidade, para em seguida aplicar uma mudança de eixos coordenados, através de uma rotação, facilitando a manipulação algébrica das equações. Para obtermos as soluções no espaço original, é necessário aplicarmos os procedimentos que invertem esses procedimentos aplicados anteriormente.

### 6.2.1 Rotação Inversa

No capítulo 5, os campos vetoriais foram rotacionados utilizando a relação 3.11, assim vamos obter os campos no sistema de coordenadas anterior aplicando a relação 3.12.

Para o campo elétrico, temos

$$\dot{E}_1 = \frac{k_x}{k} \dot{E}_1 - \frac{k_y}{k} \dot{E}_2 \quad \dot{E}_2 = \frac{k_y}{k} \dot{E}_1 + \frac{k_x}{k} \dot{E}_2 \quad \dot{E}_3 = \dot{E}_3.$$

Para o campo magnético auxiliar,

$$\dot{H}_1 = \frac{k_x}{k} \dot{H}_1 - \frac{k_y}{k} \dot{H}_2 \quad \dot{H}_2 = \frac{k_y}{k} \dot{H}_1 + \frac{k_x}{k} \dot{H}_2 \quad \dot{H}_3 = \dot{H}_3.$$

Para velocidade de deslocamento do meio temos

$$\dot{u}_1 = \frac{k_x}{k} \dot{u}_1 - \frac{k_y}{k} \dot{u}_2 \quad \dot{u}_2 = \frac{k_y}{k} \dot{u}_1 + \frac{k_x}{k} \dot{u}_2 \quad \dot{u}_3 = \dot{u}_3.$$

Para o tensor de tensões vamos aplicar a rotação inversa dada pela equação 3.14,

$$\hat{\tau}_{11} = \frac{k_x^2}{k^2} \tilde{\tau}_{11} - 2 \frac{k_x k_y}{k^2} \tilde{\tau}_{12} + \frac{k_y^2}{k^2} \tilde{\tau}_{22} \quad \hat{\tau}_{13} = \frac{k_x}{k} \tilde{\tau}_{13} - \frac{k_y}{k} \tilde{\tau}_{23}$$

$$\hat{\tau}_{12} = \frac{k_x k_y}{k^2} (\tilde{\tau}_{11} - \tilde{\tau}_{22}) + \left( \frac{k_x^2 - k_y^2}{k^2} \tilde{\tau}_{12} \right) \quad \hat{\tau}_{23} = \frac{k_y}{k} \tilde{\tau}_{13} + \frac{k_x}{k} \tilde{\tau}_{23}$$

$$\hat{\tau}_{22} = \frac{k_y^2}{k^2} \tilde{\tau}_{11} + 2 \frac{k_x k_y}{k^2} \tilde{\tau}_{12} + \frac{k_x^2}{k^2} \tilde{\tau}_{22} \quad \hat{\tau}_{33} = \tilde{\tau}_{33}.$$

As relações acima podem ser simplificadas dependendo do tipo de fonte de onda sísmica utilizada.

### 6.2.2 Transformada de Hankel e Transformada Lateral de Fourier

Agora devemos inverter a transformada lateral de Fourier usando a relação 3.10 para obtermos as soluções no espaço real. Observe que as matrizes das equações 5.6 a 5.9 dependem somente da vagarosidade  $\gamma$ , ou da magnitude  $k$  do vetor  $(k_x, k_y)^\top$  e não da direção desse vetor. No entanto, fatores contendo  $k_x$  e  $k_y$  foram introduzidos pela transformada dada pela relação 3.9. Assim, para aplicar a transformada lateral inversa de Fourier de forma prática, vamos utilizar a seguinte relação onde  $\hat{g}(k)$  é uma função qualquer e  $m_1$  e  $m_2$  são inteiros positivos,

$$\Theta_{m_1, m_2} [k_x^{m_1} k_y^{m_2} \hat{g}(k)] = (-i)^{m_1 + m_2} \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)^{m_1} \left( \frac{\partial}{\partial y} \right)^{m_2} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{g}(k) e^{ik} dk. \quad (6.13)$$

Escrevendo as coordenadas cartesianas como coordenadas cilíndricas, temos

$$x_1 = r \cos \theta \quad x_2 = r \sin \theta \quad x_3 = z, \quad (6.14)$$

e podemos calcular a transformada dada pela equação 6.13 através da transformada inversa de Hankel, descrita na subseção 3.6. Considere

$$\mathcal{B}[\hat{g}(k)] = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty k^{m_1} J_{m_2}(k r) \hat{g}(k) dk, \quad (6.15)$$

onde  $J_{m_2}$  é uma função de Bessel dada pela equação 3.20, e para os casos particulares onde  $m_1, m_2 \in [0, 3]$ , temos

$$\begin{aligned} \Theta_{0,0} &= \mathcal{B}_{1,0} & \Theta_{1,1} &= \sin\theta \cos\theta \left[ \mathcal{B}_{3,0} - \frac{2}{r} \mathcal{B}_{2,1} \right] \\ \Theta_{2,0} &= \cos^2\theta \mathcal{B}_{3,0} - \frac{\cos^2\theta - \sin^2\theta}{r} \mathcal{B}_{2,1} & \Theta_{1,0} &= i \cos\theta \mathcal{B}_{2,1} \\ \Theta_{0,1} &= i \sin\theta \mathcal{B}_{2,1} & \Theta_{0,2} &= \sin^2\theta \mathcal{B}_{3,0} + \frac{\cos^2\theta - \sin^2\theta}{r} \mathcal{B}_{2,1} \end{aligned}$$

## 7 Aplicando a Diagonalização de Ursin

### 7.1 Aplicando a Diagonalização de Ursin na Equação 5.6

Comparando a equação 5.6 com a equação 4.1 temos as matrizes

$$M_1^{(1)} = \frac{-\mu_0\sigma - i\gamma^2\omega}{\bar{\sigma}} \quad \text{e} \quad M_2^{(1)} = \frac{\bar{\sigma}}{i\omega}.$$

Definimos autovalores e autovetores relacionados ao operador  $M_1^{(1)} \cdot M_2^{(1)}$  na forma

$$\frac{-\mu_0\sigma - i\gamma^2\omega}{\bar{\sigma}} \cdot \frac{\bar{\sigma}}{i\omega} \mathbf{a}^{(1)} = q^{(1)} \mathbf{a}^{(1)}, \quad (7.1)$$

e para termos um autovetor não trivial, é necessário o autovalor

$$q^{(1)} = \sqrt{\frac{-\mu_0\sigma - i\gamma^2\omega}{i\omega}}.$$

Substituindo o autovalor acima na equação 7.1, temos que o autovetor  $\mathbf{a}^{(1)}$  é o autoespaço relativo ao autovalor  $q^{(1)}$  e 1 é uma base para esse autoespaço.

O autovetor relacionado ao operador  $M_2^{(1)} \cdot M_1^{(1)}$  é dado por

$$\mathbf{b}^{(1)} = \frac{\bar{\sigma}}{i\omega \sqrt{\frac{-\mu_0\sigma - i\gamma^2\omega}{i\omega}}} \cdot \mathbf{a}^{(1)}.$$

Tomando arbitrariamente o valor  $\mathbf{a}^{(1)} = 1$  temos que as submatrizes de diagonalização são

$$L_1^{(1)} = 1 \quad \text{e} \quad L_2^{(1)} = \frac{\bar{\sigma}}{i\omega \sqrt{\frac{-\mu_0\sigma - i\gamma^2\omega}{i\omega}}},$$

e as matrizes para diagonalização são dadas por

$$L^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{\bar{\sigma}}{i\omega \sqrt{\frac{-\mu_0\sigma - i\gamma^2\omega}{i\omega}}} & -\frac{\bar{\sigma}}{i\omega \sqrt{\frac{-\mu_0\sigma - i\gamma^2\omega}{i\omega}}} \end{pmatrix}$$

$$L^{(1)-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{i\omega \sqrt{\frac{-\mu_0\sigma - i\gamma^2\omega}{i\omega}}}{\bar{\sigma}} \\ 1 & -\frac{i\omega \sqrt{\frac{-\mu_0\sigma - i\gamma^2\omega}{i\omega}}}{\bar{\sigma}} \end{pmatrix}.$$

A matriz semelhante a  $M^{(1)}$  é

$$\tilde{\Lambda}^{(1)} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{-\mu_0\sigma - i\gamma^2\omega}{i\omega}} & 0 \\ 0 & -\sqrt{\frac{-\mu_0\sigma - i\gamma^2\omega}{i\omega}} \end{pmatrix}.$$

## 7.2 Aplicando a Diagonalização de Ursin na Equação 5.7

Comparando a equação 5.7 com a equação 4.1 temos as matrizes

$$M_1^{(2)} = -\mu_0 \quad \text{e} \quad M_2^{(2)} = \frac{\bar{\sigma} \mu_0 + i \omega \gamma^2}{i \omega \mu_0}.$$

Definimos autovalores e autovetores relacionados ao operador  $M_1^{(2)} \cdot M_2^{(2)}$  na forma

$$-\mu_0 \cdot \frac{\bar{\sigma} \mu_0 + i \omega \gamma^2}{i \omega \mu_0} \mathbf{a}^{(2)} = q^{(2)2} \mathbf{a}^{(2)}, \quad (7.2)$$

e para termos um autovetor não trivial, é necessário o autovalor

$$q^{(2)} = \sqrt{-\frac{\bar{\sigma} \mu_0 + i \omega \gamma^2}{i \omega}}.$$

Substituindo o autovalor  $q^{(2)}$  na equação 7.2, temos que o autovetor  $\mathbf{a}^{(2)}$  é o autoespaço relativo ao autovalor  $q^{(2)}$  e 1 é uma base para esse autoespaço.

O autovetor relacionado ao operador  $M_2^{(2)} \cdot M_1^{(2)}$  é dado por

$$\mathbf{b}^{(2)} = -\frac{1}{\mu_0} \sqrt{-\frac{\bar{\sigma} \mu_0 + i \omega \gamma^2}{i \omega}} \cdot \mathbf{a}^{(2)}.$$

Tomando arbitrariamente o valor  $\mathbf{a}^{(2)} = 1$  temos que as submatrizes de diagonalização são

$$L_1^{(2)} = 1 \quad \text{e} \quad L_2^{(2)} = -\frac{1}{\mu_0} \sqrt{-\frac{\bar{\sigma} \mu_0 + i \omega \gamma^2}{i \omega}},$$

e as matrizes para diagonalização são dadas por

$$L^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{\mu_0} \sqrt{-\frac{\bar{\sigma} \mu_0 + i \omega \gamma^2}{i \omega}} & \frac{1}{\mu_0} \sqrt{-\frac{\bar{\sigma} \mu_0 + i \omega \gamma^2}{i \omega}} \end{pmatrix}$$

$$L^{(2)-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -\mu_0 \left(-\frac{\bar{\sigma} \mu_0 + i \omega \gamma^2}{i \omega}\right)^{-\frac{1}{2}} \\ 1 & \mu_0 \left(-\frac{\bar{\sigma} \mu_0 + i \omega \gamma^2}{i \omega}\right)^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}.$$

A matriz semelhante a  $M^{(2)}$  é

$$\tilde{L}^{(2)} = \begin{pmatrix} \sqrt{-\frac{\bar{\sigma} \mu_0 + i \omega \gamma^2}{i \omega}} & 0 \\ 0 & -\sqrt{-\frac{\bar{\sigma} \mu_0 + i \omega \gamma^2}{i \omega}} \end{pmatrix}.$$

### 7.3 Aplicando a Diagonalização de Ursin na Equação 5.8

Comparando a equação 5.8 com a equação 4.1 temos as matrizes

$$M_1^{(3)} = \begin{pmatrix} \beta & \lambda \gamma \beta \\ \lambda \gamma \beta & \rho + \gamma^2 \beta (\lambda^2 - \beta^{-1}) \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad M_2^{(3)} = \begin{pmatrix} \rho & \gamma \\ \gamma & G^{-1} \end{pmatrix}$$

onde definimos  $\beta = \frac{1}{\lambda + 2G}$ .

Definimos autovalores e autovetores relacionados ao operador  $M_1^{(3)} \cdot M_2^{(3)}$  na forma

$$\begin{pmatrix} \beta & \lambda \gamma \beta \\ \lambda \gamma \beta & \rho + \gamma^2 \beta (\lambda^2 - \beta^{-1}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \rho & \gamma \\ \gamma & G^{-1} \end{pmatrix} \mathbf{a}_i^{(3)} = q_i^{(3)2} \mathbf{a}_i^{(3)},$$

para  $i = 1, 2$ . E para evitarmos soluções triviais, é necessário que seja nulo o determinante da matriz

$$\begin{pmatrix} \beta \rho + \lambda \gamma^2 \beta - q_i^{(3)2} & \beta \gamma + \lambda \gamma \beta G^{-1} \\ \lambda \gamma \beta \rho + \rho \gamma + \gamma^3 \beta (\lambda^2 - \beta^{-2}) & \lambda \gamma^2 \beta + \frac{\rho + \gamma^2 \beta (\lambda^2 - \beta^{-2})}{G} - q_i^{(3)2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (7.3)$$

Anulando o determinante da matriz acima chegamos à equação do segundo grau em  $q_i^{(3)2}$

$$\begin{aligned} & q_i^{(3)4} - \left( \beta \rho + 2 \lambda \gamma^2 \beta + \frac{\rho + \gamma^2 \beta (\lambda^2 - \beta^{-2})}{G} \right) q_i^{(3)2} \\ & - (\beta \gamma + \lambda \gamma \beta G^{-1}) [\lambda \gamma \beta \rho + \rho \gamma + \gamma^3 \beta (\lambda^2 - \beta^{-2})] \\ & + (\beta \rho + \lambda \gamma^2 \beta) \left[ \lambda \gamma^2 \beta + \frac{\rho + \gamma^2 \beta (\lambda^2 - \beta^{-2})}{G} \right] = 0. \end{aligned}$$

Os autovalores  $q_1^{(3)2}$  e  $q_2^{(3)2}$  são dados, respectivamente, tomando o sinal positivo e o sinal negativo antes da radiação na equação

$$q_i^{(3)2} = \frac{1}{2} \left[ \beta \rho + 2 \lambda \gamma^2 \beta + \frac{\rho + \gamma^2 \beta (\lambda^2 - \beta^{-2})}{G} \right] \pm \frac{1}{2} \sqrt{\Delta},$$

onde  $\Delta$  é dado por

$$\begin{aligned} \Delta &= \left[ \beta \rho + 2 \lambda \gamma^2 \beta + \frac{\rho + \gamma^2 \beta (\lambda^2 - \beta^{-2})}{G} \right]^2 \\ &- 4 (\beta \rho + \lambda \gamma^2 \beta) \left[ \lambda \gamma^2 \beta + \frac{\rho + \gamma^2 \beta (\lambda^2 - \beta^{-2})}{G} \right] \\ &+ 4 (\beta \gamma + \lambda \gamma \beta G^{-1}) [\lambda \gamma \beta \rho + \rho \gamma + \gamma^3 \beta (\lambda^2 - \beta^{-2})]. \end{aligned}$$

Como  $q_i^{(3)^2}$  foi deduzido de forma que a matriz na equação 7.3 tenha determinante nulo, temos que as linhas dessa matriz são linearmente dependentes. Assim, vamos utilizar a linha 1 para definir os autovetores

$$a_{i1} = -\frac{\beta \gamma + \lambda \gamma \beta G^{-1}}{\beta \rho + \lambda \gamma^2 \beta - q_i^{(3)^2}} a_{i2},$$

onde  $a_{i2} \in \mathbb{C}$ . Por questão de facilidade de escrita, dentro do autoespaço definido pela equação acima, vamos escolher  $a_{i2} = \beta \rho + \lambda \gamma^2 \beta - q_i^{(3)^2}$ , e os autovetores relacionados ao operador  $M_1^{(3)} \cdot M_2^{(3)}$  são

$$\mathbf{a}_1^{(3)} = \begin{pmatrix} -\beta \gamma + \lambda \gamma \beta G^{-1} \\ \beta \rho + \lambda \gamma^2 \beta - q_1^{(3)^2} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{a}_2^{(3)} = \begin{pmatrix} -\beta \gamma + \lambda \gamma \beta G^{-1} \\ \beta \rho + \lambda \gamma^2 \beta - q_2^{(3)^2} \end{pmatrix}.$$

Os autovetores relacionados ao operador  $M_2^{(3)} \cdot M_1^{(3)}$  são dados por

$$\mathbf{b}_1^{(3)} = \frac{1}{q_1^{(3)}} \begin{pmatrix} -\rho(\beta \gamma + \lambda \gamma \beta G^{-1}) + \gamma(\beta \rho + \lambda \gamma^2 \beta - q_1^{(3)^2}) \\ -\gamma(\beta \gamma + \lambda \gamma \beta G^{-1}) + G^{-1}(\beta \rho + \lambda \gamma^2 \beta - q_1^{(3)^2}) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{b}_2^{(3)} = \frac{1}{q_2^{(3)}} \begin{pmatrix} -\rho(\beta \gamma + \lambda \gamma \beta G^{-1}) + \gamma(\beta \rho + \lambda \gamma^2 \beta - q_2^{(3)^2}) \\ -\gamma(\beta \gamma + \lambda \gamma \beta G^{-1}) + G^{-1}(\beta \rho + \lambda \gamma^2 \beta - q_2^{(3)^2}) \end{pmatrix}.$$

Usando os autovetores, temos que as submatrizes de diagonalização são

$$L_1^{(3)} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1^{(3)} & \mathbf{a}_2^{(3)} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad L_2^{(3)} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1^{(3)} & \mathbf{b}_2^{(3)} \end{pmatrix},$$

e as matrizes para diagonalização são dadas por

$$L^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1^{(3)} & \mathbf{a}_2^{(3)} & \mathbf{a}_1^{(3)} & \mathbf{a}_2^{(3)} \\ \mathbf{b}_1^{(3)} & \mathbf{b}_2^{(3)} & -\mathbf{b}_1^{(3)} & -\mathbf{b}_2^{(3)} \end{pmatrix} \quad \text{e}$$

$$L^{(3)-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1^{(3)\top} & \mathbf{a}_1^{(3)\top} \\ \mathbf{b}_2^{(3)\top} & \mathbf{a}_2^{(3)\top} \\ \mathbf{b}_1^{(3)\top} & -\mathbf{a}_1^{(3)\top} \\ \mathbf{b}_2^{(3)\top} & -\mathbf{a}_2^{(3)\top} \end{pmatrix}.$$

A matriz semelhante a  $M^{(3)}$  é

$$\tilde{\Lambda}^{(3)} = \begin{pmatrix} q_1^{(3)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_2^{(3)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -q_1^{(3)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -q_2^{(3)} \end{pmatrix}.$$



## 7.4 Aplicando a Diagonalização de Ursin na Equação 5.9

Comparando a equação 5.9 com a equação 4.1 temos as matrizes

$$M_1^{(4)} = G^{-1} \quad \text{e} \quad M_2^{(4)} = \rho - G \gamma^2.$$

Definimos autovalores e autovetores relacionados ao operador  $M_1^{(4)} \cdot M_2^{(4)}$  na forma

$$G^{-1}(\rho - G \gamma^2) \mathbf{a}^{(4)} = q^{(4)2} \mathbf{a}^{(4)}, \quad (7.4)$$

e para termos um autovetor não trivial, é necessário o autovalor

$$q^{(4)2} = G^{-1}(\rho - G \gamma^2).$$

Substituindo o autovalor  $q^{(4)2}$  na equação 7.4, temos que o autovetor  $\mathbf{a}^{(4)}$  é o autoespaço relativo ao autovalor  $q^{(4)2}$  e 1 é uma base para esse autoespaço.

O autovetor relacionado ao operador  $M_2^{(4)} \cdot M_1^{(4)}$  é dado por

$$\mathbf{b}^{(4)} = [G(\rho - G \gamma^2)]^{\frac{1}{2}} \cdot \mathbf{a}^{(4)}.$$

Tomando arbitrariamente o valor  $\mathbf{a}^{(4)} = 1$  temos que as submatrizes de diagonalização são

$$L_1^{(4)} = 1 \quad \text{e} \quad L_2^{(4)} = [G(\rho - G \gamma^2)]^{\frac{1}{2}},$$

e as matrizes para diagonalização são dadas por

$$L^{(4)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ [G(\rho - G \gamma^2)]^{\frac{1}{2}} & -[G(\rho - G \gamma^2)]^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$$

$$L^{(4)-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & [G(\rho - G \gamma^2)]^{-\frac{1}{2}} \\ 1 & -[G(\rho - G \gamma^2)]^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}.$$

A matriz semelhante a  $M^{(4)}$  é

$$\tilde{\Lambda}^{(4)} = \begin{pmatrix} [G^{-1}(\rho - G \gamma^2)]^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & -[G^{-1}(\rho - G \gamma^2)]^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}.$$

## 8 Conclusões e Trabalhos Futuros

Neste trabalho apresentamos um tratamento matemático das EDP's do efeito magneto-elástico encontrado em [Pinho(2018)] , no sentido de propiciar a construção de um algoritmo numérico estável que possa descrever a propagação acoplada de ondas elásticas e eletromagnéticas. Nesse tratamento foi fundamental a aplicação de conhecimentos da Física-Matemática, Geofísica e, em particular, um método matricial que facilita a análise de propagação de ondas em meios estratificados.

Vimos na subseção 2.2 a possibilidade de análise de dispersão e de atenuação de ondas para casos diversos, onde tal análise auxilia na verificação e construção de um código computacional efetivo para descrever a propagação dessas ondas. Numa oportunidade futura, queremos aplicar a análise de atenuação e dispersão nesse sistema de EDP's do efeito magneto-elástico com a finalidade de ajudar a estudar o comportamento da propagação.

Numa determinada abordagem, a análise de casos mais simples auxilia no estudo de casos mais sofisticados. Por tanto, no intuito ainda de otimizar o estudo da propagação das ondas, faremos o tratamento matemático das EDP's de magneto-elasticidade para o caso unidimensional, considerando a propagação em função do tempo e em função da profundidade. Neste caso podemos utilizar o método matricial e a análise de atenuação e dispersão das ondas, e economizamos a utilização de transformadas e mudança de eixos coordenados.

O formato final das EDO's dado no capítulo 5 apresentou algumas variáveis incluídas como fonte, diferentemente do que é preconizado por Ursin, onde todas as variáveis devem estar inseridas no vetor  $\Phi$ . Assim, analisaremos a possibilidade da aplicação de funções de Green juntamente com o método matricial para contornar esse problema. É possível que essa abordagem traga desafios computacionais consideráveis e daí estudaremos também outras alternativas. Uma delas é considerar o efeito magneto-elástico para o caso totalmente acoplado e verificar se o novo formato das equações permite a exclusão de variáveis dadas como fonte. Outra possibilidade é escrever as equações em coordenadas cilíndricas, considerar as propriedades de isotropia das camadas e substituir as coordenadas horizontais somente pelo raio.

A implementação do algoritmo computacional será realizada em linguagem C++, por conta de algumas características apresentadas por esta linguagem descritas em [Bueno(2015)], como: ser de propósito geral podendo ser utilizada na construção de programas computacionais, aplicativos de sistemas embarcados e em computação científica; ser de alto nível e orientada a objeto, permitindo a propagação simultânea realizada por vários programadores trabalhando num mesmo projeto; fortemente tipada o que ajuda na detecção de *bugs* e controle e gerenciamento de memória; ser a mais utilizada em sistemas complexos e grandes no uso de programação paralela.

# Referências

- [Azeredo(2013)] M. M. Azeredo. *Modelagem Matemática e Computacional da Propagação de Ondas Sísmicas em Meios Poroelásticos Estratificados*. PhD thesis, Universidade Estadual do Norte Fluminense, 2013.
- [Baruch(2013)] E. M. Baruch. The classical hankel transform in the kirillov model of discrete series. *Integral Transforms and Special Functions*, 24, 2013.
- [Bueno(2015)] A. D. Bueno. *Programação Orientada a Objeto com C++*. Novatec, 2015.
- [Butkov(1988)] E. Butkov. *Física Matemática*. LTC, 1988.
- [Chew(1995)] W. C. Chew. *Waves and Fields in Inhomogeneous Media*. IEEE PRESS, 1995.
- [Dunkin and Eringen(1963)] J.W. Dunkin and A.C. Eringen. On the propagation of waves in an electromagnetic elastic solid. *International Journal of Engineering Science*, 1, 1963.
- [Savit(1988)] M. B. Dobrin e C. H. Savit. *Introduction to Geophysical Prospecting*. McGraw-Hill, 1988.
- [Farlow(1993)] S. J. Farlow. *Partial Differential Equations for Scientists and Engineers*. Dover, 1993.
- [Fatianov and Mikhailenko(1989)] A.G. Fatianov and B.G. Mikhailenko. Numerically-analytical method for calculation of theoretical seismograms in layered-inhomogeneous anelastic media. *In Proceedings of the 7 th International Mathematical Geophysics Seminar held at the Free University of Berlin*, 1989.
- [Griffiths(1999)] D. J. Griffiths. *Introduction to Electrodynamics*. Prentice-Hall, 1999.
- [Lang(1986)] S. Lang. *Introduction to Linear Algebra*. Springer, 1986.
- [Lebedev and Cloud(2003)] L. P. Lebedev and M. J. Cloud. *Tensor Analysis*. World Scientific Publishing, 2003.
- [Mikhailenko and Soboleva(1997)] B. G. Mikhailenko and O. N. Soboleva. Mathematical modeling of seismomagnetic effects arising in the seismic wave motion in the earth's constant magnetic field. *Appl. Math. Lett.*, 10(3):47–51, 1997.
- [Miranda(2016)] M. R. S. T. Miranda. *Método Matricial em Modelagem Poroelástica: Modelo de Biot-JKD*. UENF, 2016.

- [Novacki(1983)] W. Novacki. Electromagnetic effects in solid bodies. *In Panstwowe Wydawnictwo Naukowe*, 10, 1983.
- [Oliveira(2018)] I. B. Oliveira. *Modelagem de Propagação das Ondas Elásticas em Meios Porosos 1D: Modelo de Biot vs. Biot-JKD*. UENF, 2018.
- [Pinho(2018)] D. C. Pinho. *Fundamentos de Magneto-Elasticidade*. UENF, 2018.
- [Pride(1994)] S. Pride. Governing equations for the coupled electromagnetics and acustics of porous media. *Physical Review B*, 1994.
- [Ursin(1983)] B. Ursin. Review of elastic and electromagnetic wave propagation in horizontally layered media. *The Leading Edge*, 48, 08 1983.
- [Weyl(1919)] H. Weyl. Ausbreitung elektromagnetischen wellen ueber einem ebenen leiter. *Annalen der Physik*, 1919.
- [White and Zhou(2006)] B.S. White and M. Zhou. Eletroseismic prospecting in layered media. *Society for Industrial and Applied Mathematics*, 67(1):69–98, 2006.