Sumário

1 Introdução

Esta monografia tem como finalidade principal o detalhamento da teoria que envolve o acoplamento de ondas eletromagnéticas e ondas elásticas que se propagam em meios estratificados, e homogêneos por camada, no subsolo terrestre. O desenvolvimento dessa teoria segue o modelo apresentado por [?] que trata da propagação de ondas elásticas num campo eletromagnético (geomagnético), onde essa propagação gera pequenas alterações geomagnéticas que se propagam, não com a velocidade da luz, mas "acompanhando" a onda elástica mantendo a velocidade desta última.

A teoria é essencialmente uma combinação de elasticidade infinitesimal e teoria eletromagnética linearizada, e para torna o texto o mais auto-didata possível, serão apresentados nos capítulos 2 e 3 os principais conceitos e definições acerca das teorias básicas sobre eletromagnetismo e elasticidade.

Esta monografia faz parte de um conjunto de pesquisas que objetivam desenvolver um novo modelo matemático-computacional para descrever os fenômenos que envolvem a propagação simultânea de ondas eletromagnéticas e elásticas em subsuperfície, de modo que tal levantamento possa ser usado para aprimorar as técnicas de exploração de petróleo ou outro bem mineiral.

2 Fundamentos de eletromagnetismo

2.1 Introdução

2.2 Fatos experimentais

2.2.1 Lei de Gauss para os fluxos elétrico e magnético

De acordo com [Jackson(1999)] e [Sommerfeld(1952)] , os conceitos, definições e resultados em eletromagnetismo clássico partem das experiências de Cavendish e Coulomb no final do Séc. $XVIII$. A partir desses experimentos foi estabelecida a Lei de Coulomb

$$\mathbf{F}_e = k\,\frac{q_1\,q_2}{||\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2||^2}\,\frac{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2}{||\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2||}, \tag{2.1}$$

onde q_i são as cargas elétricas (campos escalares) presentes nos pontos $\mathbf{x}_i$, respectivamente, k (campo escalar) é uma constante de proporcionalidade cujo valor depende do sistema de unidades de medida adotado, $||\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2||^2$ é a distância Euclidiana entre as cargas e $\mathbf{F}$ é a força elétrica exercida pela carga q_1 sobre a carga q_2. As notações em negrito representam campos vetorias pertencentes ao espaço $\mathbb{R}^3$, e o vetor normal que fornece a direção de interação entre as cargas é dado por $(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)/||\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2||$.

O campo elétrico $\mathbf{E}$ é definido como sendo a força elétrica por unidade de carga em um determinado ponto que contém a carga de prova q_2, portanto é uma função vetorial que depende da posição da carga de prova em relação à carga fonte q_1, ou seja,

$$\mathbf{E} = \lim_{q_2 \to 0} \frac{\mathbf{F}_e}{q_2}. \tag{2.2}$$

A carga de prova foi tomada infinitesimalmente pequena para que o campo gerado por ela não perturbe a carga fonte. Experimentalmente, tanto a direção da força como a razão entre a força e a quantidade de carga vão se tornando constantes à medida que a quantidade de carga se torna cada vez menor, definindo a magnitude e a direção do campo elétrico. No SI, a unidade de medida de carga é o *coulomb* (C), o campo elétrico é o *newton/coulomb* (N/C) ou o *volt/metro* (V/m), e a constante $k = (4\pi\,\epsilon_0)^{-1}$ onde $\epsilon_0 \simeq 8.854 \times 10^{-12}$ é a *permissividade elétrica no vácuo* medida em *farad/m* (F/m).

Substituindo a equação 2.2 em 2.1 temos que o campo elétrico agindo num ponto $\mathbf{x}$ qualquer devido a uma carga q_1 no ponto $\mathbf{x}_1$ é

$$\mathbf{E} = k\,\frac{q_1}{||\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}||^2}\,\frac{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}}{||\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}||}, \tag{2.3}$$

como podemos observar na figura 1 simulando um sistema de coordenadas qualquer.

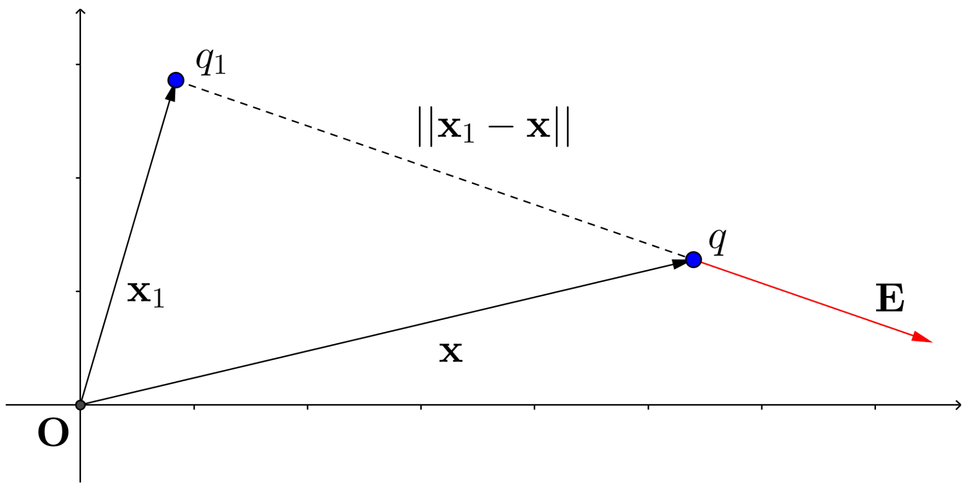

Figura 1 – *Exemplificação da interação entre cargas elétricas devido à geração, em função de q_1 (positiva), de um campo elétrico. A força elétrica $\boldsymbol{F}$ atuando numa carga qualquer q tem mesma direção do campo elétrico $\boldsymbol{E}$, com mesmo sentido ou sentido oposto conforme a carga q é positiva ou negativa, respectivamente.*

Num sistema com mais de uma carga fonte produzindo campos elétricos, foi observado experimentalmente que o campo elétrico total atuando num ponto $\mathbf{x}$ é simplesmente o somatório dos campos produzidos por cada carga, o que ficou conhecido como a *Superposição Linear* e pode ser expressada na forma

$$\mathbf{E} = k\sum_{i=1}^{n} q_i\,\frac{\mathbf{x}_i - \mathbf{x}}{||\mathbf{x}_i - \mathbf{x}||^3}.$$

O campo elétrico devido a um pequeno número de cargas pode ser calculado a partir do princípio da superposição linear. Mas se temos uma quantidade muito grande de cargas num determinado volume V, devemos calcular a *densidade volumétrica de carga elétrica* ρ_e num volume infinitesimal situado em $\mathbf{x}_0$ e em seguida integrar sobre o volume V para obter a quantidade total de carga Q. A densidade de carga é definida por

$$\rho_e(\mathbf{x}_0) = \lim_{\Delta V_i \to 0} \frac{\Delta q_i}{\Delta V_i} = \frac{d\,q}{d\,V},$$

medida, no SI, em C/m^3. A quantidade total de carga $Q = \sum_i \Delta\, q_i$ no volume V é

$$Q = \iiint_V \rho_e(\mathbf{x}_0)\,dV. \tag{2.4}$$

O *fluxo elétrico* é definido como a quantidade linhas do campo elétrico que atravessam uma superfície qualquer, e é dado pela equação

$$\Phi_{\mathbf{E}} = \mathbf{E}\cdot\mathbf{A}.$$

O *vetor área* é definido como a magnitude da área da superfície atravessada apontando na direção do vetor normal à superfície, $\mathbf{A} = A\,\mathbf{n}$, e estamos considerando um campo elétrico uniforme $\mathbf{E}$ que se desloca na direção $\mathbf{n}$, ou seja, é perpendicular à superfície A

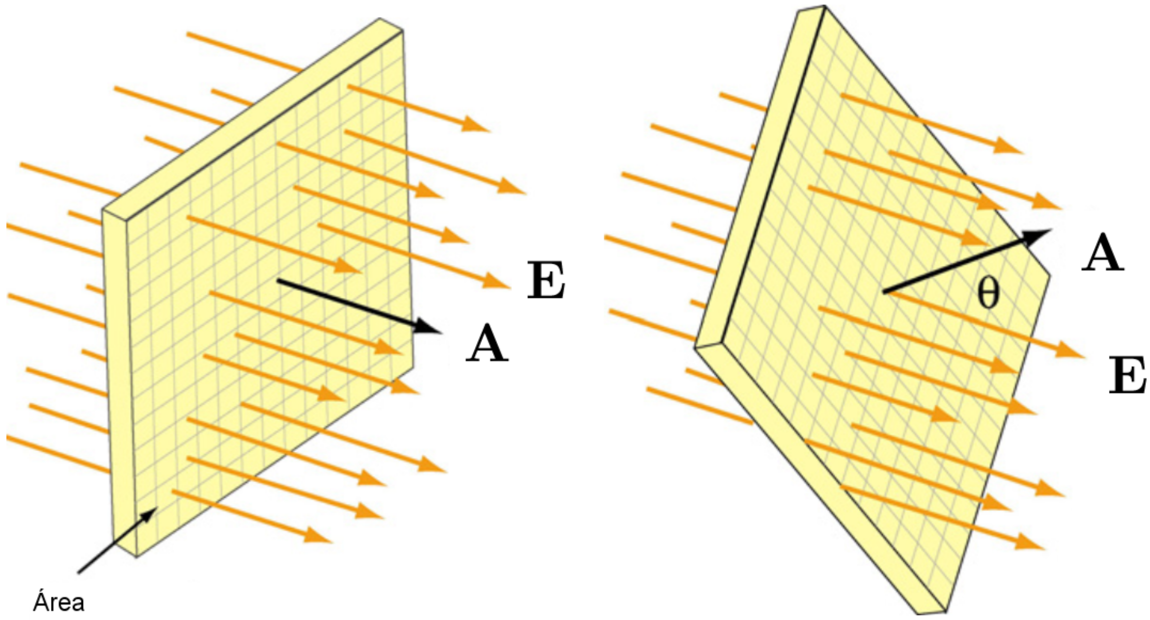

Figura 2 – *Fluxo elétrico, linhas de campo elétrico passando através de uma superfície.*

como podemos observar na figura 2. Mas se o campo elétrico se propaga formando um ângulo θ com o vetor normal da superfície, então o fluxo elétrico é dado por

$$\Phi_{\mathbf{E}} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{A} = E\,A\,\cos\theta,$$

com $E = \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}$ sendo a componente do campo elétrico na direção $\mathbf{n}$. Em geral uma superfície S pode ser curva e estamos interessados numa superfície *fechada*, ou seja, aquela que engloba um determinado volume, o qual contém uma carga elétrica (exemplo na figura 3). Tomando uma área bem pequena dessa superfície, $\Delta\mathbf{A}_i$, o campo elétrico pode ser variável em cada parte da superfície e nessas condições temos que o fluxo nessa pequena região é dado por

$$\Delta\,\Phi_{\mathbf{E}} = \mathbf{E}_i \cdot \Delta\,\mathbf{A}_i.$$

O fluxo positivo atravessando toda a superfície de dentro para fora é calculado tomando o limite quando $\Delta\mathbf{A}_i \to 0$ e aumentando infinitamente a quantidade dessas pequenas áreas até cobrir a superfície S

$$\Phi_{\mathbf{E}} = \lim_{i\to\infty} \sum_i \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{A}_i = \oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}. \tag{2.5}$$

Considere uma carga pontual positiva q localizada no centro de uma esfera imaginária de raio r, onde essa carga produz um campo elétrico que aponta na direção radial conforme a figura 3. Sabemos que a área da superfície dessa esfera é dada por $A = 4\pi\,r^2$ e que, segundo a equação 2.3, a magnitude do campo elétrico em qualquer ponto da superfície esférica é

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\,r^2},$$

assim o fluxo elétrico é calculado usando a equação 2.5.

$$\begin{aligned}
\Phi_{\mathbf{E}} &= \oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} \\
&= \oiint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}\, dA \\
&= E \oiint_S dA \\
&= E\, A \\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0\, r^2}\, 4\pi\, r^2 \\
&= \frac{q}{\epsilon_0}.
\end{aligned}$$

Na demonstração acima escolhemos uma esfera como *superfície Gaussiana* mas, introduzindo o conceito de *ângulo sólido*, vemos que a demonstração é válida para qualquer superfície fechada, utilizada em aplicações que apresentem mais ou menos alguma simetria (esférica, planar ou cilíndrica). Para mais detalhes consultar [Jackson(1999)]. Assim, concluímos que o fluxo elétrico através de uma superfície fechada que apresente mais ou menos alguma simetria é diretamente proporcional à quantidade de carga enclausurada pela superfície. Matematicamente, a *lei de Gauss* para o fluxo elétrico é

$$\Phi_{\mathbf{E}} = \oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{q}{\epsilon_0}. \tag{2.6}$$

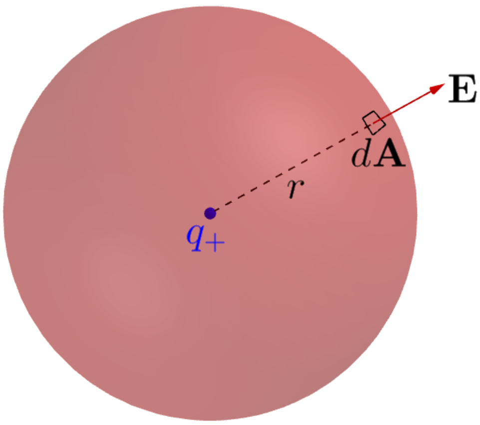

Figura 3 – *Esfera Gaussiana enclausurando uma carga positiva q. Nessas condições, o ângulo entre o vetor campo elétrico e o vetor normal à superfície infinitesimal $d\boldsymbol{A}$ é zero.*

Uma carga elétrica produz um campo elétrico, e de maneira similar uma barra magnética, ou ímã, produz um *campo magnético* **B**. Um ímã possui um polo norte de onde partem as linhas de campo magnético e um polo sul por onde as linhas de campo magnético retornam ao ímã (figura 4). Diferentemente das cargas elétricas que são observadas isoldamente na natureza, os dois polos magnéticos sempre aparecem aos pares, ou seja, monopolos magnéticos não existem isoladamente apesar de a suposição de sua existência ser de interesse teórico. Assim, sempre que um ímã é fracionado, mesmo que em partes muito elementares, o resultado sempre será um novo ímã com dois polos magnéticos conforme a figura 4. Como não existem monopolos magnéticos, o campo magnético deve ser definido

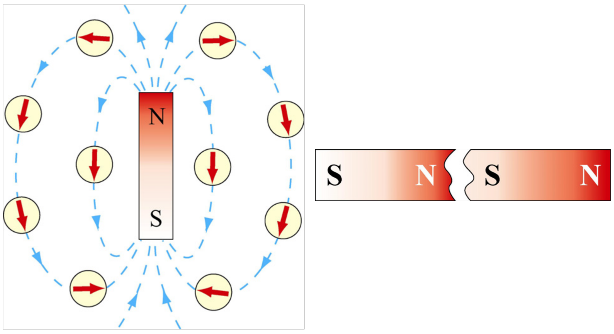

Figura 4 – *Barras magnéticas onde polos de mesmo sinal se repelem e polos de sinais contrários se atraem.*

de forma diferente do campo elétrico, e experimentalmente foram observadas algumas características relacionadas ao movimento de uma carga elétrica q com velocidade $\mathbf{v}$ num campo magnético $\mathbf{B}$:

- a magnitude da força magnética $\mathbf{F}_m$ é proporcional à v, B e q, onde v e B são as magnitudes da velocidade e do campo magnético respectivamente,
- a direção de $\mathbf{F}_m$ é perpendicular ao plano formado por $\mathbf{v}$ e $\mathbf{B}$,
- $\mathbf{F}_m$ é proporcional ao $\sin\theta$, o ângulo formado por $\mathbf{v}$ e $\mathbf{B}$. Se $\mathbf{v}$ e $\mathbf{B}$ são paralelos então $\mathbf{F}_m = 0$, e
- o sentido de $\mathbf{F}_m$ depende do sinal da carga q.

Essas observações são ilustradas na figura 5 e a força magnética é definida como

$$\mathbf{F}_m = q\,\mathbf{v} \times \mathbf{B}. \tag{2.7}$$

A equação 2.7 é conhecida também como a *força de Lorentz* e na presença também de um campo elétrico, dado pela equação 2.2, podemos somar as duas forças e definir mais geralmente a força de Lorentz como

$$\mathbf{F}_L = q\,(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \tag{2.8}$$

a qual é um dos axiomas fundamentais da teoria eletromagnética. Uma característica muito importante da força magnética é que a mesma não produz *trabalho*, pois quando a carga de prova q se desloca uma quantidade infinitesimal $d\mathbf{l} = \mathbf{v}\,dt$ num campo magnético $\mathbf{B}$, temos

$$\begin{aligned} dW_m &= \mathbf{F}_m \cdot d\mathbf{l} \\ &= (q\,\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{v}\,dt) \\ &= 0. \end{aligned} \tag{2.9}$$

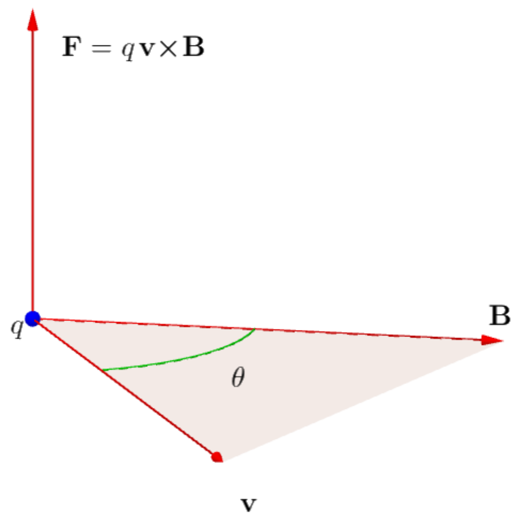

Figura 5 – *Força magnética agindo numa carga elétrica que se desloca num campo magnético.*

A última igualdade se deve ao fato de os vetores $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ e $\mathbf{v}$ serem ortogonais. Assim, o campo magnético altera a direção de deslocamento da partícula q, mas não acelera nem retarda seu movimento.

Teoricamente, poderíamos tentar determinar a lei de Gauss para o fluxo magnético com o mesmo procedimento aplicado ao fluxo elétrico e obter

$$\Phi_{\mathbf{B}} = \oiint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = \frac{q_m}{\mu_0},$$

onde q_m é a carga magnética (suposto monopolo magnético) enclausurado pela superfície Gaussiana, $\mathbf{B}$ é o campo magnético e μ_0 é a *permeabilidade magnética no vácuo* com valor $\mu_0 = 4\,\pi \times 10^{-7}\,T\,m/A$. No entanto, não foi constatada a existência de qualquer carga magnética isolada mesmo após muitos esforços. Como $q_m = 0$, temos que a lei de Gauss para o magnetismo é

$$\Phi_{\mathbf{B}} = \oiint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0. \tag{2.10}$$

Conforme podemos ver na figura 6, a equação 2.10 implica que a quantidade de linhas do campo magnético saindo da superfície é igual à quantidade que está entrando, ou seja, não há uma origem isolada e um término isolado para o fluxo magnético como há para o fluxo elétrico. Outro problema é que a barra imantada atravessa a superfície que, de acordo com as hipóteses da lei de Gauss, deveria ser fechada.

2.2.2 A Lei de Ampère

Correntes elétricas podem ser produzidas por cargas elétricas que se movem num fio condutor. Essas correntes elétricas são fontes de campos magnéticos $d\,\mathbf{B}$, num determinado ponto $\mathbf{x}$, e que podem ser calculados em função da corrente I num intervalo infinitesimal $d\,\mathbf{l}$ do fio. Visualização na figura 7. A fonte de corrente infinitesimal é dada por $I\,d\,\mathbf{l}$

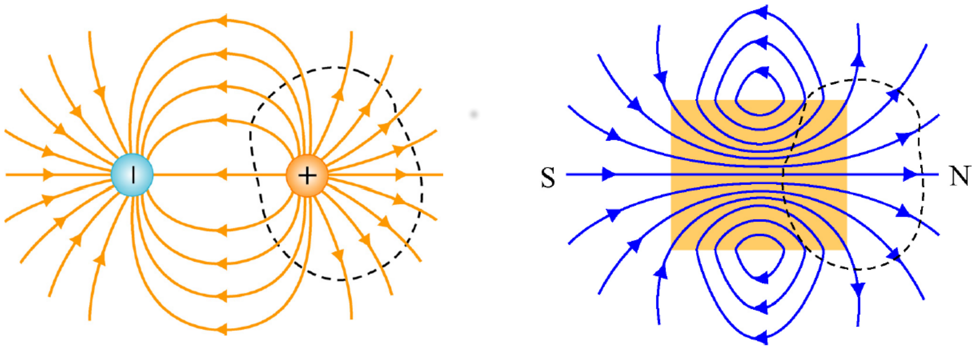

Figura 6 – *As linhas do campo magnético que emanam do polo norte do ímã em direção ao polo sul retornam para dentro da superfície Gaussiana descrevendo um laço fechado.*

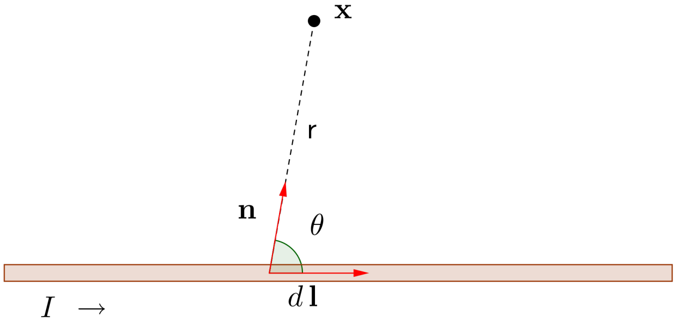

Figura 7 – *Campo magnético no ponto* $\mathbf{x}$ *devido a passagem de uma corrente elétrica* I *pelo fio. Observe que a magnitude do campo depende também do ângulo* θ *entre* $\boldsymbol{l}$ *e* $\boldsymbol{n}$.

e r é a distância entre o ponto de aplicação do campo magnético e a fonte de corrente infinitesimal. O vetor $\mathbf{n}$ é o vetor normal que aponta na direção de $\mathbf{x}$ e o vetor $d\,\mathbf{l}$ aponta na direção e sentido da corrente I. Repare ainda que o campo magnético depende do ângulo θ entre $\mathbf{n}$ e $d\mathbf{l}$. Assim sendo, a *Lei de Biot-Savart* tem definição análoga à do campo elétrico (derivada da lei de Coulomb) e pode ser expressa como

$$d\,\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\,\pi}\frac{I}{r^2}\,d(\mathbf{l}\times\mathbf{n}), \tag{2.11}$$

e o campo magnético no volume ao redor do fio pode ser obtido integrando sobre a direção perpendicular ao plano formado por $\mathbf{l}$ e $\mathbf{n}$ ao longo do comprimento do fio.

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\,\pi}\int_{\mathbf{l}}\frac{d(\mathbf{l}\times\mathbf{n})}{r^2}. \tag{2.12}$$

Considere agora um laço circular (linha de campo magnético) de raio r contido num plano perpendicular ao fio condutor, onde esse laço está dividido em pequenos comprimentos $\Delta\mathbf{s} = \Delta s\,\boldsymbol{\phi}$, cujos vetores correspondentes a cada ponto do laço apontam na direção do vetor tangencial à circunferência naquele ponto, conforme a figura 8. Esse laço fechado contido num plano é denominado *laço Amperiano* e é usado para calcular o campo magnético referente àquela linha de campo tomando o limite quando $\Delta\mathbf{s}\to 0$ e integrando no intervalo dado pelo comprimento da circunferência. Nesse caso, $\theta = \pi$ e $\boldsymbol{\phi}$ é perpendicular ao plano formado por $\mathbf{l}$ e $\mathbf{n}$, portanto a magnitute do vetor $\mathbf{B}$ na direção $\boldsymbol{\phi}$ é dada pela lei de Biot-Savart na equação 2.11.

$$\oint_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = B \oint_s ds = \frac{\mu_0 I}{2\pi\, r} 2\pi\, r = \mu_0 I.$$

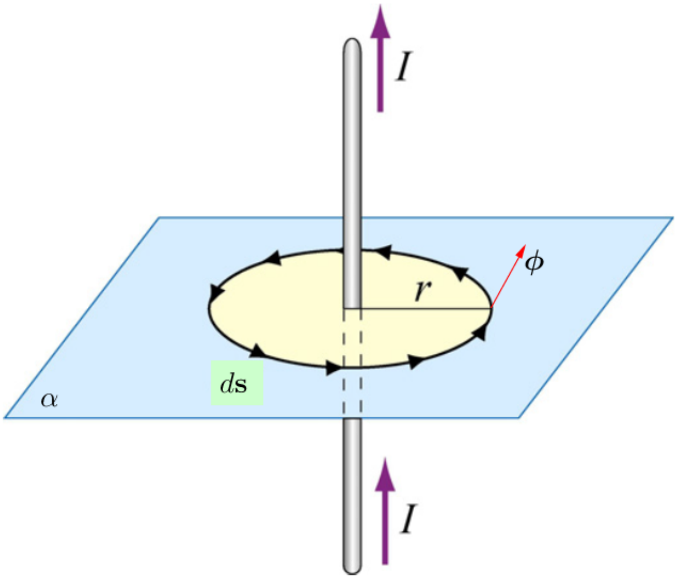

Figura 8 – *Laço amperiano seguindo a regra da mão direita: posicionando o polegar no sentido da corrente, o campo magnético tem o mesmo sentido dos demais dedos curvando em torno do fio.*

Vamos considerar um outro exemplo de laço amperiano cujo contorno denotado por $abcda$ se sobrepõe a duas linhas de campo magnético coplanares, observado na figura 9. No desenvolvimento abaixo, a primeira e terceira integrais zeram pois o campo magnético é perpendicular ao caminho de integração nesses intervalos, e $B_2(r_2\theta)$ e $B_1[r_1(2\pi - \theta)]$ são os comprimentos dos arcos bc e da, respectivamente. A integral de linha do campo magnético no contorno $abcda$ é

$$\begin{aligned}
\oint_{abcda} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} &= \oint_{ab} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} + \oint_{bc} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} + \oint_{cd} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} + \oint_{da} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} \\
&= 0 + B_2(r_2\theta) + 0 + B_1[r_1(2\pi - \theta)] \\
&= \frac{\mu_0 I}{2\pi\, r_2}(r_2\theta) + \frac{\mu_0 I}{2\pi\, r_1}[r_1(2\pi - \theta)] \\
&= \frac{\mu_0 I}{2\pi}\theta + \frac{\mu_0 I}{2\pi}(2\pi - \theta) \\
&= \mu_0 I.
\end{aligned}$$

Vemos o mesmo resultado se o laço amperiano envolve uma ou duas linhas de campo magnético e, usando coordenadas cilíndricas, podemos demonstrar que o mesmo resultado

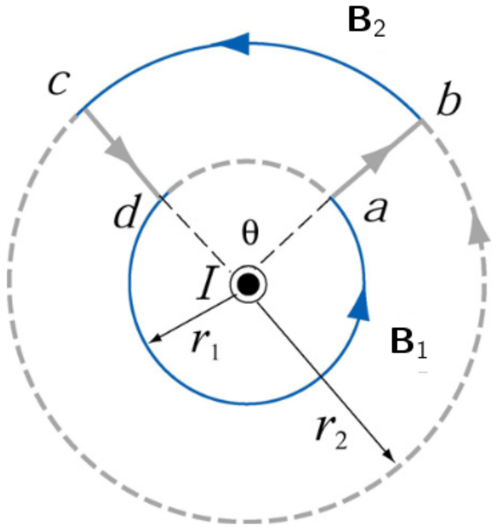

Figura 9 – *Laço amperiano passando por duas linhas de campo magnético. O ponto no centro significa que o sentido da corrente elétrica está "saindo do plano do papel".*

é válido para uma quantidade arbitrária de linhas de campo magnético, ou seja, a integral de linha do campo magnético através de qualquer laço amperiano fechado é proporcional à corrente elétrica inscrita no laço. A *Lei de Ampère* é dada por

$$\oint_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I.$$

Analogamente à lei de Gauss para campos elétricos, para ser aplicada a lei de Ampère é necessário que o laço possua alguma simetria em relação ao fio. No caso de um fio condutor suficientemente comprido para que suas extremidades não interfiram na aplicação, temos uma simetria cilíndrica e a lei de Ampère pode ser aplicada normalmente. Caso o fio não seja suficientemente comprido, devemos utilizar a lei de Biot-Savart.

Agora considere a seguinte situação, descrita por Maxwell, onde o circuito elétrico está interrompido por um capacitor. Como vimos pela lei de Ampère, o campo magnético depende somente da corrente no circuito e do comprimento da circunferência que limita a superfície atravessada pelo fio condutor, e não depende dessa superfície em si. Portanto, o campo magnético referente à curva C da figura 10 pode ser calculado considerando a superfície S_1 ou a superfície S_2. A superfície S_1 é atravessada pela corrente I a qual produz o campo magnético $\mathbf{B}$, mas superfície S_2 não é atravessada por I e, no entanto, é produzido o mesmo campo magnético $\mathbf{B}$. Assim podemos sugerir que exista um outro fenômeno físico entre as placas do capacitor que seja responsável pela geração de $\mathbf{B}$. À medida que o capacitor vai sendo carregado, cargas elétricas opostas vão se acumulando em suas placas gerando um campo elétrico variável entre as placas, o qual produz um fluxo elétrico variável através da área da placa do capacitor. Maxwell mostrou que o produto da variação desse fluxo elétrico pela permissividade elétrica no vácuo era numericamente igual à corrente I, e por isso produzia o mesmo campo $\mathbf{B}$ quando integrado ao longo da

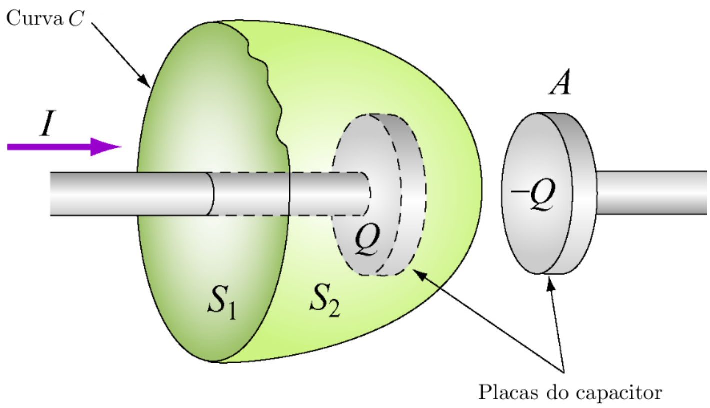

Figura 10 – *Quando há corrente no circuito, cargas positivas se acumulam numa placa do capacitor assim como cargas negativas se acumulam na outra placa. Tal acúmulo gera um fluxo elétrico variável entre as placas.*

curva C,

$$I_d = \epsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt}.$$

Tal produto foi denominado *corrente deslocada* e foi adicionado à lei de Ampère, a qual se tornou a *lei de Ampére generalizada* ou *lei de Ampère-Maxwell*,

$$\oint_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt}. \tag{2.13}$$

Note que quando consideramos a superfície S_1, $I_d = 0$ já que o fluxo elétrico é constante e assim $\mathbf{B}$ é dado somente por I. Quando consideramos a superfície S_2, $I = 0$ e $\mathbf{B}$ é dado somente por I_d.

2.2.3 A Lei de Faraday

Analogamente ao caso da força gravitacional, o *trabalho* W_e realizado por uma força elétrica $\mathbf{F}_e$ para levar uma carga elétrica q de um ponto A até um ponto B é definido como

$$W_e = \int_A^B \mathbf{F}_e \cdot d\mathbf{s}. \tag{2.14}$$

A diferença entre a *energia potencial* U em cada um dos pontos A e B é o que ocasiona o deslocamento da carga, assim a variação da energia potencial tem definição

$$\Delta U = U_b - U_a = -\int_A^B \mathbf{F}_e \cdot d\mathbf{s} = -W_e. \tag{2.15}$$

A *diferença de potencial elétrico*, ΔV, também chamada *ddp*, é a variação da energia potencial por unidade de carga elétrica q. Utilizando a equação 2.2, que relaciona força elétrica e campo elétrico, podemos definir a ddp como

$$\Delta V = -\int_A^B \frac{\mathbf{F}_e}{q} \cdot d\mathbf{s} = -\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \tag{2.16}$$

A ddp representa a quantidade de trabalho por unidade de carga para mover a carga do ponto A ao ponto B e sua unidade de medida no SI é o volt ($V = \frac{J}{C}$). Observe nas definições acima que só importa os valores no pontos A e B, e não importa necessariamente o caminho que a carga vai percorrer de um ponto até o outro.

Agora, num circuito elétrico fechado, as cargas percorrem um determinado caminho a partir de uma fonte de energia elétrica. Essa fonte é chamada de *força eletromotriz*, representada por ε, e que pode ser pensada como uma "bomba"de cargas que as impulsiona de um potencial menor para um potencial maior. A força eletromotriz é definida como o trabalho realizado para mover uma carga unitária na direção de maior potencial, matematicamente,

$$\varepsilon = \frac{dW_e}{dq},$$

também medida em volt. Como o campo magnético não produz trabalho, o trabalho realizado sobre o movimento das cargas é devido a um campo elétrico e para escrever a força eletromotriz em termos do campo elétrico de forma análoga ao que foi feito nas equações 2.14, 2.15 e 2.16, devemos utilizar uma integral de linha, pois nesse caso a corrente percorre um determinado caminho. Como o campo elétrico é não-conservativo (senão não haveria corrente) o valor da integral na equação 2.16 é diferente de zero. Assim,

$$\varepsilon = \oint_s \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{s}. \tag{2.17}$$

O *fluxo magnético* é definido de maneira similar ao fluxo elétrico e seu entendimento também pode ser acompanhado pela figura 2. O fluxo magnético através de uma superfície é definido como

$$\phi_{\mathbf{B}} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = B\,A\,\cos\theta,$$

onde o vetor área é $\mathbf{A} = A\mathbf{n}$, $\mathbf{n}$ é o vetor normal à superfície atravessada, A é a magnitude da área, $B = \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}$ é a componente do campo magnético na direção do vetor normal e θ é o ângulo entre $\mathbf{B}$ e $\mathbf{A}$. Tomando um elemento infinitesimal da área e integrando sobre a superfície o fluxo magnético é

$$\phi_{\mathbf{B}} = \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}, \tag{2.18}$$

medido em *Weber*, T/m^2.

Em 1831, Faraday descobriu que se pode criar um campo elétrico variando um campo magnético em função do tempo num fenômeno que foi batizado de *indução eletromagnética*. Um dos experimentos de Faraday (figura 11) consiste em movimentar um ímã dentro de uma bobina feita de fio condutor onde se pode observar a geração de uma corrente elétrica, como se a bobina estivesse conectada a fonte de força eletromotriz. O experimento mostra que a força eletromotriz induzida é proporcional à taxa (negativa) de variação do fluxo magnético através da bobina, a *lei de Faraday* é

$$\varepsilon = -\frac{d\phi_{\mathbf{B}}}{dt}.$$

Podemos reescrever a lei de Faraday usando a equação 2.17,

$$\varepsilon = \oint_s \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{s} = -\frac{d\phi_{\mathbf{B}}}{dt}, \tag{2.19}$$

o que implica que a variação do fluxo magnético induz um campo elétrico não-conservativo que varia com o tempo, diferente do campo elétrico conservativo gerado por cargas elétricas estacionárias.

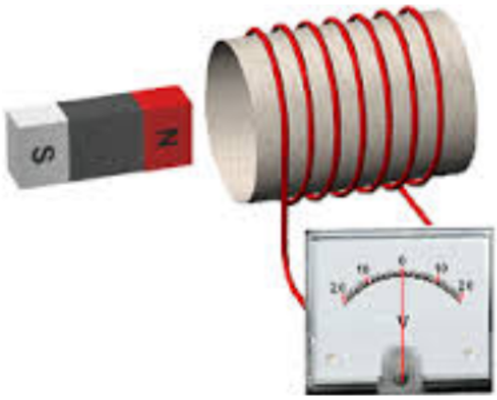

Figura 11 – *Experimento de indução eletromagnética promovido por Michael Faraday.*

2.3 Equações de Maxwell

Vimos pela equação 2.6, que o fluxo elétrico através de uma superfície fechada é proporcional à quantidade de carga elétrica enclausurada por essa superfície. Quando temos uma quantidade de carga muito grande devemos calcular o fluxo elétrico devido à densidade carga, e substituindo a equação 2.4 na equação 2.6 temos

$$\begin{aligned}
\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} &= \frac{q}{\epsilon_0} \\
&= \frac{Q}{\epsilon_0} \\
&= \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho_e \, dV \\
\oiint_S \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} &= \iiint_V \rho_e \, dV.
\end{aligned}$$

A equação acima é conhecida como a primeira equação de Maxwell para o eletromagnetismo escrita na forma integral.

A segunda equação de Maxwell é similar à primeira e, como não existem monopolos magnéticos, tal equação fica definida como a propria equação 2.10 já discutida na subseção 2.2.1,

$$\oiint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0.$$

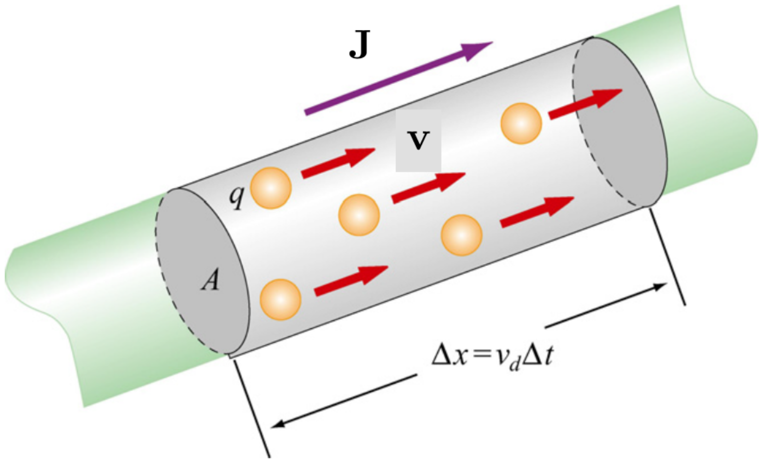

Figura 12 – *Cargas elétricas fluindo no intervalo Δx de um condutor com área de seção transversal A.*

A *corrente elétrica média* é definida como a taxa com que uma quantidade de carga atravessa uma determinada área de seção transversal de um meio condutor,

$$I_m = \frac{\Delta Q}{\Delta t},$$

medida em coulomb por segundo (C/s) no SI. Em termos microscópicos, a quantidade de carga que atravessa uma superfície infinitesimal num determinado tempo é dada em função da *densidade de corrente elétrica* $\mathbf{J}$,

$$I = \iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A}, \tag{2.20}$$

onde a densidade de corrente elétrica é medida em (A/m^2) no SI. Observando a figura 12 que mostra uma corrente fluindo num condutor, onde q é a carga elétrica de cada partícula, n é quantidade de partículas num determinado volume do condutor e Δx é o comprimento do mesmo, temos que a quantidade de carga nesse volume é $\Delta Q = n\,q\,(A\,\Delta x)$. Se as partículas se movem com velocidade v, então a posição a cada intervalo de tempo é dada por $\Delta x = v\,\Delta t$, e a corrente elétrica média nesse intervalo do condutor é

$$I_m = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = n\,q\,A\,v.$$

Como a densidade de corrente é a corrente média por área, temos que a mesma pode ser escrita como

$$\mathbf{J} = n\,q\,\mathbf{v}. \tag{2.21}$$

A terceira equação de Maxwell em sua forma integral pode ser obtida substituindo as equações 2.21 e 2.6 na equação 2.13,

$$\oint_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt}$$
$$\oint_s \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \cdot d\mathbf{s} = \iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A} + \frac{d}{dt} \oiint_S \epsilon_0\, \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}$$

A quarta e última equação de Maxwell é obtida substituindo a equação do fluxo magnético 2.18 na lei de Faraday 2.19,

$$\oint_s \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d\phi_{\mathbf{B}}}{dt}$$
$$\oint_s \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}.$$

Todos os fenômenos eletromagnéticos são governados por essas quatro equações de Maxwell e os últimos duzentos anos acumularam evidências suficientes para tal fato. Como vimos, todas as equações têm princípios experimentais, são deduzidas formalmente em termos de cálculo diferencial e integral, e são satisfeitas pelas variáveis físicas ρ_e e $\mathbf{J}$ que são as fontes dos campos elétrico e magnético respectivamente. As equações são sumarizadas a seguir:

$$\oiint_S \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \iiint_V \rho_e \, dV, \tag{2.22}$$

$$\oiint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0, \tag{2.23}$$

$$\oint_s \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \cdot d\mathbf{s} = \iint_S \mathbf{J} \cdot \, d\mathbf{A} + \frac{d}{dt} \oiint_S \epsilon_0 \, \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}, \tag{2.24}$$

$$\oint_s \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}. \tag{2.25}$$

2.4 Generalizações da teoria

2.4.1 Ação do campo elétrico na matéria

Nosso intuito é utilizar as equações de Maxwell para ajudar a determinar a composição de uma determinada região da subsuperfície. As informações sobre as propriedades eletromagnéticas de um material que compõe uma região dependem dos parâmetros ρ_e e $\mathbf{J}$ de cada região, e esses parâmetros são usados para definir e inserir nas equações de Maxwell dois campos vetoriais, $\mathbf{D}$ e $\mathbf{H}$, que estão diretamente ligados às características do meio como veremos a seguir.

De acordo com [Griffiths(1999)], um átomo eletricamente neutro também tem algumas de suas características alteradas quando expostos a campo elétrico $\mathbf{E}$, pois as cargas positivas (no núcleo) são empurradas numa direção e as cargas negativas (elétrons) são empurradas num sentido oposto. Na verdade, se o campo elétrico é muito forte, pode ser criada uma alteração permanente “ionizando”o átomo. A aplicação de campo elétrico não tão extremo faz com que um equilíbrio seja rapidamente estabilizado criando um centro

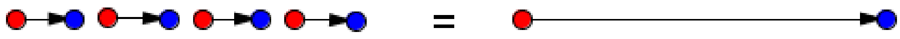

Figura 13 – *As cargas em vermelho são negativas e em azul as positivas.*

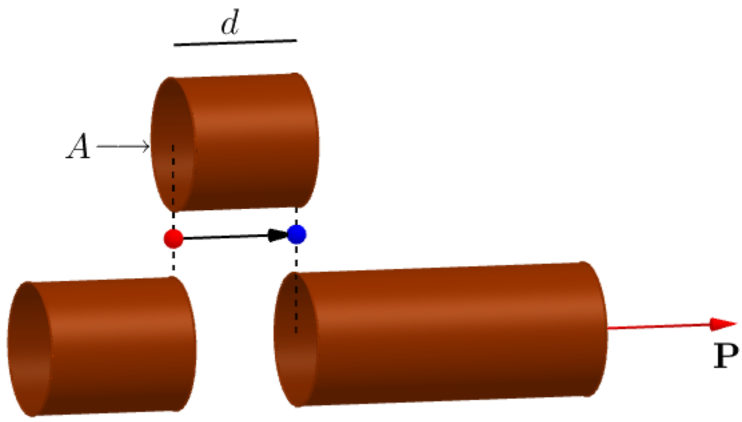

Figura 14 – *Momento de dipolo elétrico numa pequena amostra do cilindro.*

de cargas positivas e outro de cargas negativas deixando o átomo *polarizado*, o qual agora passa a ter um pequeno *momento de dipolo elétrico*, $\mathbf{p}$, que tem a mesma direção do campo elétrico e é proporcional ao mesmo.

$$\mathbf{p} = \alpha\,\mathbf{E},$$

onde α é a constante de *polarizabilidade atômica.*

Numa substância dielétrica (isolante) qualquer quando exposta a um campo elétrico, cada átomo eletricamente neutro gera um pequeno momento de dipolo elétrico que se alinha como o campo aplicado. Se as moléculas já possuem naturalmente um momento de dipolo, todos eles experimentam um torque e também se alinham ao campo elétrico, assim a substância se torna polarizada e podemos definir a *polarização* $\mathbf{P}$ de uma substância como o momento de dipolo elétrico por unidade de volume,

$$\mathbf{P} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\mathbf{p}}{\Delta V}. \tag{2.26}$$

Suponha que temos uma longa cadeia de dipolos conforme a figura 13, onde cada concentração de cargas se cancela com a concentração vizinha mas que ao final restarão duas concentrações de cargas opostas, como se vários pequenos deslocamentos resultassem num único deslocamento maior. As cargas nas extremidades são chamadas *cargas de fronteira* e para calcular o acúmulo dessas cargas resultantes de uma polarização $\mathbf{P}$ vamos considerar um tubo feito de um material dielétrico paralelo a $\mathbf{P}$ de acordo com a figura 14. Sendo P a polarização de uma minúscula amostra do volume, A a área de seção transversal do tubo e d o comprimento da amostra, temos que o momento de dipolo da amostra é dado por $P\,A\,d$. Em termos de carga elétrica, esse momento de dipolo também pode ser definido como $q\,d$, onde q é a carga elétrica no limite direito da amostra, e de onde se deduz que $q = P\,A$. Com a polarização, cargas são acumuladas no inteiror do corpo formando uma densidade de carga de polarização ρ_p, ocorrendo então um fenômeno de divergência da polarização através da superfície do tubo análago ao fenômeno da lei de Gauss. Assim, como um corpo dielétrico é eletricamente neutro, a quantidade total de carga negativa acumulada no interior do tubo é igual e oposta à quantidade de carga positiva empurrada através da superfície,

$$\iiint_V \rho_p \, dV = -\oiint_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{A}. \tag{2.27}$$

Um meio não possui somente cargas de polarização mas também pode possuir *cargas livres*, as quais se movimentam livremente sob a ação de um campo elétrico. Denotando por Q_f a quantidade de cargas livres e Q_p as cargas de polarização, temos que a quantidade total de cargas de um meio qualquer é dada por

$$Q = Q_f + Q_p,$$

e usando a equação 2.4, temos que a densidade de carga do meio é

$$\iiint_V \rho_e \, dV = \iiint_V \rho_f \, dV + \iiint_V \rho_p \, dV. \tag{2.28}$$

Substituindo a equação 2.28 na equação 2.22, a lei de Gauss para o fluxo elétrico se torna

$$\oiint_S \epsilon_0 \, \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \iiint_V \rho_f \, dV + \iiint_V \rho_p \, dV. \tag{2.29}$$

Substituindo a equação 2.29 na equação 2.27, temos uma relação entre as cargas livres e de polarização com a lei de Gauss,

$$\begin{aligned} \oiint_S \epsilon_0 \, \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} &= \iiint_V \rho_f \, dV + \iiint_V \rho_p \, dV \\ \oiint_S \epsilon_0 \, \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} &= \iiint_V \rho_f \, dV + \oiint_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{A} \\ \oiint_S (\epsilon_0 \, \mathbf{E} - \mathbf{P}) \cdot d\mathbf{A} &= \iiint_V \rho_f \, dV, \end{aligned}$$

onde a expressão $\mathbf{D} = \epsilon_0 \, \mathbf{E} - \mathbf{P}$ é chamada *campo de densidade de fluxo elétrico*, e por fim

$$\oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A} = \iiint_V \rho_f \, dV.$$

Para muitas substâncias, a polarização é proporcional ao campo elétrico

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E},$$

onde χ_e é a *susceptibilidade elétrica* do meio e depende das características deste, os quais são chamados *dielétricos lineares*. Substituindo essa relação na equação do campo de desnidade de fluxo elétrico temos

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \epsilon_0 \mathbf{E} - \mathbf{P} \\ &= \epsilon_0 \mathbf{E} - \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E} \\ &= \epsilon_0 (1 - \chi_e) \mathbf{E} \\ &= \epsilon \, \mathbf{E}, \end{aligned} \tag{2.30}$$

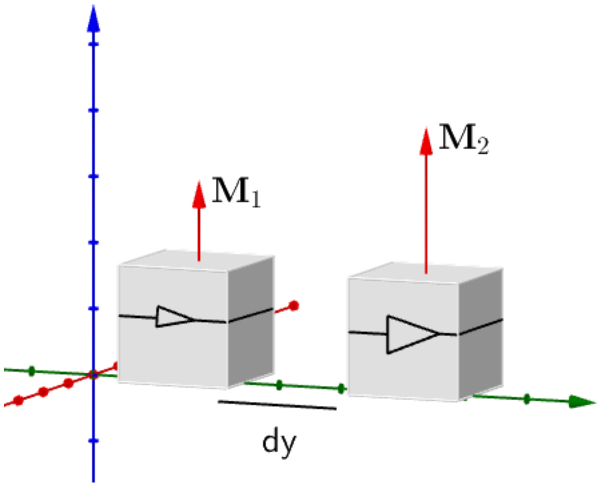

Figura 15 – *A magnetização não uniforme produz densidade de corrente de magnetização.*

e assim vemos que, para materiais dielétricos lineares, **D** também é proporcional a **E**, onde ϵ é chamado *permissividade elétrica do meio.*

2.4.2 Ação de campo magnético na matéria

Vimos na subseção 2.2.2 que correntes elétricas geram campos magnéticos, mas na verdade todos os fenômenos magnéticos são devidos a cargas elétricas em movimento. Se examinarmos um material magnético qualquer em nível atômico, encontraremos pequenas correntes, as do elétron orbitando o núcleo do átomo e a rotação de cada elétron em torno de seu próprio eixo. Em termos macroscópicos essas correntes em laços são tão pequenas que são tratados como o *momento de dipolo magnético*, **m**, similar ao que foi feito para o momento de dipolo elétrico. Quando um campo magnético externo é aplicado ocorre o alinhamento desses dipolos magnéticos e o corpo se torna magneticamente polarizado ou *magnetizado.* O estado de polarização magnética de um material é medido pelo momento de dipolo magnético por unidade infinitesimal de volume, ou *magnetização*

$$\mathbf{M} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\mathbf{m}}{\Delta V}.$$

A densidade de corrente elétrica pode ser composta pelas *densidade de correntes livres* $\mathbf{J}_f$, *densidade de correntes de polarização* $\mathbf{J}_p$ e *densidade de correntes de magnetização* $\mathbf{J}_m$. Quando a magnetização de um material é uniforme, as correntes dos laços internos (sem considerar a superfície) se cancelam e não há a geração de densidade de correntes de magnetização, e quando a magnetização é não uniforme a diferença entre as correntes em cada laço faz com que $\mathbf{J}_m$ seja diferente de zero. Na figura 15 é apresentado um exemplo com duas amostras infinitesimais de um material juntamente com os vetores que indicam a intensidade e a direção da magnetização, e os triângulos que indicam o sentido e intensidade da corrente. Nas superfícies onde as amostras se juntam a corrente final na direção do eixo x é dada pela diferença entre as correntes em cada amostra, geradas por suas respectivas magnetizações na direção do eixo z. Analogamente, sendo a magnetização no sentido do eixo y, a corrente resultante também será na direção do eixo x mas em sentido oposto. Usando essa diferença de sentido das correstes resultantes e a equação 2.21 podemos demonstrar que a densidade de corrente de magnetização é dada por

$$\iint_S \mathbf{J}_m \cdot d\mathbf{A} = \oint_s \mathbf{M} \cdot d\mathbf{s}. \tag{2.31}$$

Se a concentração de cargas em um volume muda, então essa diferença entre a quantidade inicial e a final tem que ter passado pela superfície (saindo ou entrando) que enclausura o volume. Assim, a variação no tempo de uma quantidade carga saindo de um certo volume é igual a corrente que atravessa a superfície desse volume. Considerando a densidade de cargas e correntes de polarização, e usando as equações 2.4 e 2.21, temos

$$\frac{d\,Q}{d\,t} = -\iint_S \mathbf{J}_p \cdot d\mathbf{A}$$
$$\iiint_V \frac{\partial}{\partial\,t}\rho_p\,dV = -\iint_S \mathbf{J}_p \cdot d\mathbf{A}.$$

Mas, pela equação 2.27, podemos escrever

$$\iint_S \mathbf{J}_p \cdot d\mathbf{A} = \oiint_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{A}. \tag{2.32}$$

Considerando os três tipos de densidade de correntes, $\mathbf{J}_f$, $\mathbf{J}_p$ e $\mathbf{J}_m$, podemos escrever a lei de Ampère generalizada dada pela equação 2.24 na forma

$$\oint_s \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \cdot d\mathbf{s} = \iint_S \mathbf{J} \cdot\, d\mathbf{A} + \frac{d}{dt}\oiint_S \epsilon_0\,\mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}$$

$$\oint_s \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \cdot d\mathbf{s} - \frac{d}{dt}\oiint_S \epsilon_0\,\mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \iint_S \mathbf{J}_f \cdot\, d\mathbf{A} + \iint_S \mathbf{J}_p \cdot\, d\mathbf{A} + \iint_S \mathbf{J}_m \cdot\, d\mathbf{A}.$$

Substituindo as equações 2.31 e 2.32, podemos reescrever a lei de Ampère generalizada como

$$\oint_s \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \cdot d\mathbf{s} - \frac{d}{dt}\oiint_S \epsilon_0\,\mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \iint_S \mathbf{J}_f \cdot\, d\mathbf{A} + \oiint_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{A} + \oint_s \mathbf{M} \cdot d\,\mathbf{s}$$

$$\oint_s \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}\right) \cdot d\mathbf{s} = \iint_S \mathbf{J}_f \cdot\, d\mathbf{A} + \frac{d}{dt}\oiint_S (\epsilon_0\,\mathbf{E} + \mathbf{P}) \cdot d\mathbf{A},$$

onde $\frac{1}{\mu_0}\mathbf{B} - \mathbf{M} = \mathbf{H}$ é definido como o *campo magnético auxiliar*. Em atividades experimentais é mais fácil medir o campo $\mathbf{E}$ a partir da aplicação de uma diferença de potencial num circuito elétrico do que medir o campo $\mathbf{D}$ a partir da concentração de cargas elétricas. Com o campo $\mathbf{H}$ acontece o contrário, é mais fácil medi-lo a partir da corrente elétrica numa bobina do que medir o campo magnético $\mathbf{B}$, já que este último depende do tipo de material usado. Portanto, alguns pesquisadores e autores costumam chamar $\mathbf{H}$ de campo magnético e $\mathbf{B}$ de campo de densidade de fluxo magnético, mas esta última definição, como vimos, pode se confundir com outro tipo de medida, $\phi_{\mathbf{B}}$.

Para algumas substâncias, a magnetização é proporcional ao campo magnético auxiliar

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H},$$

onde χ_m é a *susceptilidade magnética do meio* e depende das características deste. Substituindo essa última equação na equação do campo magnético auxiliar temos

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \mu_0 \left(\mathbf{H} + \mathbf{M}\right) \\ &= \mu_0 \left(\mathbf{H} + \chi_m \mathbf{H}\right) \\ &= \mu_0 \left(1 + \chi_m\right) \mathbf{H} \\ &= \mu \, \mathbf{H}, \end{aligned} \tag{2.33}$$

onde μ é a *permeabilidade magnética do meio.*

Assim, podemos escrever as equações de Maxwell considerando a ação dos campos elétrico e magnético na matéria como

$$\oint\!\!\!\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A} = \iiint_V \rho_f \, dV, \tag{2.34}$$

$$\oint\!\!\!\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0, \tag{2.35}$$

$$\oint_s \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \iint_S \mathbf{J}_f \cdot \, d\mathbf{A} + \frac{d}{dt} \oint\!\!\!\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A}, \tag{2.36}$$

$$\oint_s \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}. \tag{2.37}$$

2.4.3 Forma diferencial das Equações de Maxwell

Experimentalmente tem-se obtido excelentes resultados aplicando as equações de Maxwell em sua forma diferencial, onde são assumidas algumas hipóteses acerca da diferenciabilidade dos campos envolvidos. Utilizando essas hipóteses, podemos transcrever as equações da forma integral para a forma diferencial.

Portanto, considerando uma região fechada do espaço $\mathbb{R}^3$ de volume V e limitada pela superfície A, temos pela equação 2.34 que

$$\oint\!\!\!\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A} = \iiint_V \rho_f \, dV.$$

Supondo que o campo de densidade de fluxo elétrico seja de classe C^1, podemos usar o teorema da Divergência

$$\oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A} = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{D} \, dV,$$

e realizar a substituição

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{D} \, dV = \iiint_V \rho_f \, dV.$$

Como a relação acima é válida para qualquer volume V e supondo ρ_f contínuo, podemos reescrever a primeira equação de Maxwell como

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f.$$

Analogamente à situação anterior, usando ainda o teorema da Divergência e supondo que o campo magnético $\mathbf{B}$ seja de classe C^1, podemos escrever a segunda equação de Maxwell, equação 2.35, como

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{B} \, dV = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0.$$

Utilizando o teorema de Stokes e considerando que o campo magnético auxiliar $\mathbf{H}$ seja de classe C^1, temos

$$\oint_s \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{H}) \, d\mathbf{A}.$$

Supondo que a superfície A seja constante no tempo, podemos substituir a expressão anterior na lei de Ampère-Maxwell (equação 2.36) para chegar a

$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{H}) \, d\mathbf{A} - \oiint_S \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A} = \iint_S \mathbf{J}_f \, \cdot d\mathbf{A}.$$

Matematicamente não podemos usar a arbitrariedade de escolha da superfície A, mas resultados experimentais tem sustentado que, de fato,

$$\nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D} = \mathbf{J}_f.$$

Com desenvolvimento similar ao anteiror, podemos deduzir que a forma diferencial da quarta equação de Maxwell, equação 2.37, é

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}.$$

Sumarizando as equações de Maxwell em suas formas diferenciais e considerando as propriedades eletromagnéticas do meio, temos

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f, \tag{2.38}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \tag{2.39}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f + \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{D}, \tag{2.40}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B}. \tag{2.41}$$

2.4.4 Condições de Contorno entre Meios de Diferentes Composições

Segundo [Jackson(1999)], as equações de Maxwell em suas formas integrais (2.34 a 2.37) podem ser usadas para dedução de relações envolvendo as componentes tangenciais e normais dos campos elétrico e magnético em ambos os lados da superfície de contato entre dois meios com características eletromagnéticas diferentes. Para a utilização das equações 2.34 e 2.35, consideramos um cilindro com altura infinitesimal onde cada uma de suas bases circulares pertencem a uma das camadas em questão. E para estudar as equações 2.36 e 2.37, utilizamos um circuito retangular também de altura infinitesimal com cada um dos lados maiores pertencentes a uma das camadas. O esquema geométrico dessa abordagem pode ser visto na figura 16. Como a altura do cilindro tende a zero, a

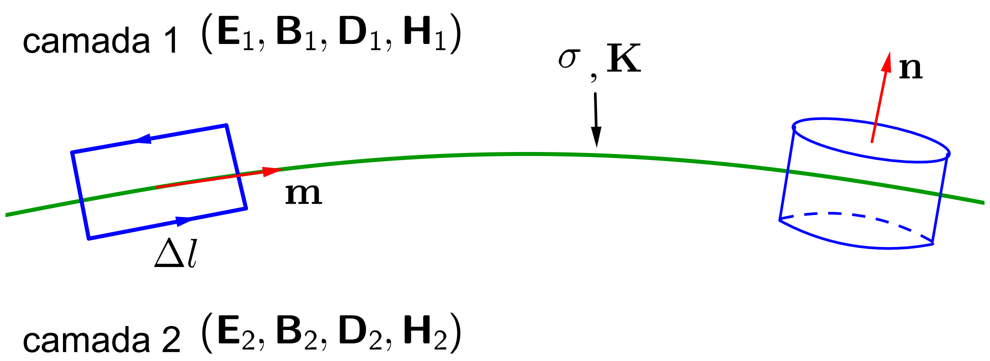

Figura 16 – *As densidades de carga e corrente superficiais presentes na interface de contato entre as camadas geram descontinuidades na propagação do campo de densidade de fluxo elétrico e campo magnético auxiliar, respectivamente.*

superfície lateral do cilindro não contribui para o cálculo da integral do lado esquerdo da equação 2.34, ou seja, a contribuição total é devida somente às áreas das bases que são paralelas entre si e tangentes a superfície que separa as duas camadas. Nessas condições temos

$$\oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A} = (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \mathbf{n}\, \Delta A,$$

onde $\mathbf{D}_i$ é o campo de densidade de fluxo elétrico nas camadas 1 e 2, e $\mathbf{n}$ é o vetor normal à superfície infinitesimal dA. Se a densidade volumétrica de carga é singular na superfície de contato de forma a produzir uma densidade de carga superficial, σ, então a integral do lado direito da equação 2.34 fica

$$\iiint_V \rho_f \, dV = \sigma \, \Delta A.$$

Assim, a componente normal da diferença entre os campos de densidade de fluxo elétrico em cada camada é dado por

$$(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \mathbf{n} = \sigma.$$

Usando a definição de *salto* da componente normal de um campo encontrada em [**?**], temos

$$(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \mathbf{n} = [[\mathbf{D}]]_n = \sigma. \tag{2.42}$$

Analogamente, podemos determinar o salto da componente normal do campo magnético a partir da equação 2.35,

$$(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \cdot \mathbf{n} = [[\mathbf{B}]]_n = 0.$$

Ou seja, a componente normal do campo magnético é contínua na transição das camadas, e a descontinuidade da componente normal do campo de densidade de fluxo elétrico é igual a densidade superficial de carga no ponto de transição.

Agora vamos utilizar um circuito Stokesiano para determinar as componentes dos campos elétrico e magnético auxiliar que são tangenciais à superfície de separação das camadas. Considerando desprezível a altura da superfície formada pelo circuito retangular da figura 16, e que seus outros dois lados são paralelos e têm comprimento Δl, então o lado esquerdo da equação 2.36 é calculado como

$$\oint_s \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{t}) \Delta l. \tag{2.43}$$

As integrais do lado direito da equação 2.36 não zeram se há uma densidade de corrente superficial se deslocando na superfície de contato. Nessas circunstâncias podemos escrever

$$\iint_S \mathbf{J}_f \cdot \, d\mathbf{A} + \frac{d}{dt} \oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{t}\, \Delta l + 0, \tag{2.44}$$

onde $\mathbf{K}$ é a densidade de corrente superficial, e $\mathbf{t}$ é o vetor tangente à superfície de contato entre as camadas, e normal à área do circuito retangular, ou seja, $\mathbf{t} = \mathbf{m} \times \mathbf{n}$. A segunda parcela é zero pois a variação no tempo do campo de densidade de fluxo elétrico através de uma superfície é finita, e a superfície em questão (enclausurada pelo circuito retangular) é zero quando sua altura tende a zero. Igualando os resultados das equações 2.43 e 2.44 e aplicando as regras da análise vetorial temos

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = [[\mathbf{H}]]_m = \mathbf{K}. \tag{2.45}$$

Similarmente ao desenvolvimento para o salto do campo magnético auxiliar, temos o salto do campo elétrico deduzido a partir da equação 2.37,

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = [[\mathbf{E}]]_m = 0. \tag{2.46}$$

O lado direito da equação acima é zero pelo mesmo argumento dado anteriormente, a variação no tempo de um campo magnético finito através de uma superfície retangular nula, pois sua altura tende a zero. Pela equação 2.45 temos que a densidade de corrente superficial tem somente componentes paralelas à superfície de contato entre as camadas, e a componente tangencial do campo magnético auxiliar é descontinua por uma quantidade cuja magnitude é igual à magnitude da densidade de corrente superficial e cuja direção é paralela ao vetor $\mathbf{n} \times \mathbf{K}$. Pela equação 2.46 temos que a componente tangencial do campo elétrico através da interface é continua. As descontinuidades apresentadas nas equações 2.42 e 2.45 são prestativas para resolver as equações de Maxwell em diferentes regiões e conectar as soluções para obter campos para qualquer lugar do espaço.

3 Fundamentos de Elasticidade

3.1 Introdução

A teoria formal da propagação de ondas sísmicas repousa nas interações entre as partículas infinitesimais discretas do meio à medida que uma deformação se propaga. É muito difícil estudar individualmente cada uma dessas interações, mas dados experimentais que foram coletados como resultados dessas interações sugerem que as mesmas podem ser consideradas em conjunto. Assim, o estudo da propagação de ondas sísmicas através de camadas de subsuperfície num material discretizado pode ser feito considerando o meio como contínuo, e tais estudos são os objetos da *mecânica do contínuo*.

No desenvolvimento teórico da mecânica do contínuo não são consideradas as características atômicas da matéria bem como as interações entre essas partículas, ou seja, a matéria não é estudada do ponto de vista microscópico. Segundo [Slawinski(2007)], tal abordagem se justifica pelo fato de que a matéria é formada por partículas suficientemente pouco espaçadas e suas características e comportamento podem ser descritos por funções contínuas e diferenciáveis. Assim, é assummido que elementos infinitesimais da matéria têm as mesmas propriedades observadas em experimentos macroscópicos, pois essa hipótese permite a criação de um modelo matemático abstrato *efetivo* na descrição da realidade física. Como exemplo, vamos considerar a cor de um objeto. Prótons e elétrons não possuem cor, mas os meios materiais (que são formados por prótons e elétrons) têm a capacidade de absorver ou refletir determinados comprimentos de ondas eletromagnéticas as quais determinam a cor de cada meio.

3.2 Fatos experimentais

A teoria sobre elasticidade está baseada em conceitos primitivos e conclusões estabelecidas a partir de fatos experimentais verificados em vários textos sobre o assunto como [Liu(2002)], [Dahlem and Tromp(1998)] e [Slawinski(2007)]. Adicionalmente, em geral as equações que governam a propagação de ondas em meios elásticos são não-lineares. Contudo, em experimentos sísmicos foi constatado que aspectos importantes da propagação de ondas podem ser analisados a partir de equações lineares, resultando numa abordagem chamada *teoria da elasticidade linearizada*.

3.2.1 Deformação

A *deformação* de um meio elástico contínuo é a mudança na posição dos pontos que compõem o corpo em relação uns aos outros. Ou seja, há uma mudança relativa entre os

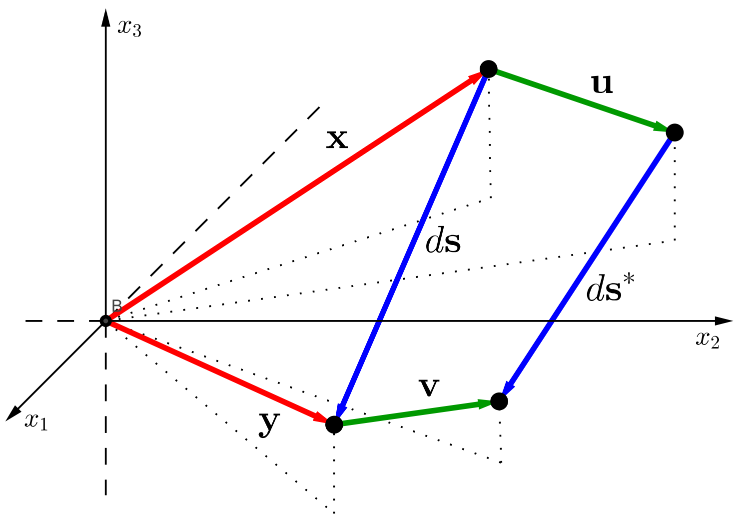

Figura 17 – *Mudança na posição relativa entre os pontos que compõem um meio elástico contínuo.*

pontos e não um deslocamento do corpo como um todo e sem mudança de sua forma, caso em que teríamos um *movimento rígido*. Nesta subseção estamos interessados nas características geométricas relativas à deformação de um corpo. Não estamos considerando as causas de deformação de um corpo, como aplicação de carga ou variação de temperatura, nem discutiremos a composição do material, assumindo apenas que o mesmo seja contínuo e elástico. Assim, vamos relacionar as características geométricas de um corpo antes da deformação com as características após a deformação.

3.2.2 Dedução do Tensor de Deformações

Para determinar o tensor de deformações vamos considerar dois pontos pertencentes ao espaco $\mathbb{R}^3$ bastante próximos um do outro denotados por

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \quad \text{e}$$
$$\mathbf{y} = \mathbf{x} + d\mathbf{s} = (x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3),$$

e que podem ser observados na figura 17. O quadrado da distância entre esses dois pontos é

$$\|d\mathbf{s}\|^2 = (dx_1)^2 + (dx_2)^2 + (dx_3)^2. \tag{3.1}$$

A aplicação de uma deformação depende do ponto de aplicação, ou seja, a deformação aplicada no ponto $\mathbf{x}$ difere da aplicação no ponto $\mathbf{y}$. Caso o vetor que dá a deformação tenha componentes constantes, não teremos uma deformação relativa, apenas uma translação dos pontos. Assim, podemos definir o *vetor de deslocamento* para cada ponto de aplicação

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = (u_1, u_2, u_3),$$
$$\mathbf{v}(\mathbf{y}) = (v_1, v_2, v_3),$$

e somá-los aos respectivos pontos $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ para obter suas posições após a deformação,

$$\mathbf{x}^* = (x_1 + u_1, x_2 + u_2, x_3 + u_3)$$
$$\mathbf{y}^* = (x_1 + dx_1 + v_1, x_2 + dx_2 + v_2, x_3 + dx_3 + v_3).$$

Subtraindo, obtemos o vetor que dá a diferença entre os pontos após a deformação

$$d\mathbf{s}^* = (dx_1 + v_1 - u_1, dx_2 + v_2 - u_2, dx_3 + v_3 - u_3). \tag{3.2}$$

Como a variação entre os pontos $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ é infinitesimal, vamos aplicar a expansão de Taylor de segunda ordem em torno do ponto $\mathbf{x}$ e desprezar o resto de Lagrange para escrever as componentes de $\mathbf{v}$ em função das componentes de $\mathbf{u}$, aproximadamente,

$$v_1 \approx u_1 + \left.\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right|_{\mathbf{x}} dx_1 + \left.\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right|_{\mathbf{x}} dx_2 + \left.\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right|_{\mathbf{x}} dx_3$$

$$v_2 \approx u_2 + \left.\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right|_{\mathbf{x}} dx_1 + \left.\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right|_{\mathbf{x}} dx_2 + \left.\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right|_{\mathbf{x}} dx_3$$

$$v_3 \approx u_3 + \left.\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right|_{\mathbf{x}} dx_1 + \left.\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right|_{\mathbf{x}} dx_2 + \left.\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right|_{\mathbf{x}} dx_3.$$

Substituindo esses valores na equação 3.2, simplificando e introduzindo a notação de somatório temos

$$d\mathbf{s}^* \approx \left(dx_1 + \sum_{i=1}^{3} \left.\frac{\partial u_1}{\partial x_i}\right|_{\mathbf{x}} dx_i\, ,\, dx_2 + \sum_{i=1}^{3} \left.\frac{\partial u_2}{\partial x_i}\right|_{\mathbf{x}} dx_i\, ,\, dx_3 + \sum_{i=1}^{3} \left.\frac{\partial u_3}{\partial x_i}\right|_{\mathbf{x}} dx_i \right).$$

O quadrado da distância entre os pontos após a deformação é dado por

$$\|d\mathbf{s}^*\|^2 \approx \left(dx_1 + \sum_{i=1}^{3} \left.\frac{\partial u_1}{\partial x_i}\right|_{\mathbf{x}} dx_i \right)^2 + \left(dx_2 + \sum_{i=1}^{3} \left.\frac{\partial u_2}{\partial x_i}\right|_{\mathbf{x}} dx_i \right)^2 + \left(dx_3 + \sum_{i=1}^{3} \left.\frac{\partial u_3}{\partial x_i}\right|_{\mathbf{x}} dx_i \right)^2.$$

Abrindo cada uma das parcelas quadráticas, temos

$$\|d\mathbf{s}^*\|^2 \approx (dx_1)^2 + 2\, dx_1 \sum_{i=1}^{3} \left.\frac{\partial u_1}{\partial x_i}\right|_{\mathbf{x}} dx_i + \left(\sum_{i=1}^{3} \left.\frac{\partial u_1}{\partial x_i}\right|_{\mathbf{x}} dx_i \right)^2$$

$$+ (dx_2)^2 + 2\, dx_2 \sum_{i=1}^{3} \left.\frac{\partial u_2}{\partial x_i}\right|_{\mathbf{x}} dx_i + \left(\sum_{i=1}^{3} \left.\frac{\partial u_2}{\partial x_i}\right|_{\mathbf{x}} dx_i \right)^2$$

$$+ (dx_3)^2 + 2\, dx_3 \sum_{i=1}^{3} \left.\frac{\partial u_3}{\partial x_i}\right|_{\mathbf{x}} dx_i + \left(\sum_{i=1}^{3} \left.\frac{\partial u_3}{\partial x_i}\right|_{\mathbf{x}} dx_i \right)^2.$$

Pela equação 3.1, a coluna da esquerda é $\|d\mathbf{s}\|^2$. Como estamos trabalhando com quantidades infinitesimais, podemos negligenciar a coluna da direita por se tratar do quadrado do gradiente de cada componente do vetor de deslocamento num produto escalar com o vetor que dá a distância entre os pontos $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$. A coluna do meio se desdobra em dezoito parcelas que podem ser reagrupadas num somatório duplo. Assim,

$$\|d\mathbf{s}^*\|^2 \approx \|d\mathbf{s}\|^2 + \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\left(\left.\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right|_{\mathbf{x}} + \left.\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right|_{\mathbf{x}}\right) dx_i\, dx_j,$$

onde o termo entre parênteses é definido como o *tensor de deformação* na teoria da elasticidade,

$$\varepsilon_{i,j} = \frac{1}{2}\left(\left.\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right|_{\mathbf{x}} + \left.\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right|_{\mathbf{x}}\right), \qquad \text{e} \qquad i,j \in \{1,2,3\}.$$

Considerando deslocamentos infinitesimais, os componentes desse tensor nos permitem descrever as deformações associadas a esses deslocamentos entre os pontos iniciais. Analisando as entradas do tensor vemos que se o vetor de deslocamento é constante então $\epsilon_{i,j} = 0$ para todo o tensor, e não há deformação, apenas movimento rígido como descrito anteriormente. Como se trata de uma matriz simétrica, no espaço $\mathbb{R}^3$ temos apenas seis componentes independentes para o tensor.

3.2.3 Interpretação Geométrica do Tensor de Deformação

Existem basicamente dois tipos de deformações descritas pelo tensor, uma onde podemos ter mudança de comprimento em alguma dimensão ocasionando mudança de volume, mas sem mudança na forma do corpo estudado. Outra com mudança na forma mas sem mudança de volume. Vamos analisar como cada entrada do tensor é responsável por alterações geométricas do meio.

3.2.3.1 Alteração Relativa de Comprimento

Considerando o caso unidimensional, vamos aplicar as deformações $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ aos pontos $\mathbf{x} = (x_1, 0, 0)$ e $\mathbf{y} = (x_1 + dx_1, 0, 0)$, respectivamente,

$$\mathbf{x}^* = (x_1 + u_1, u_2, u_3) \quad \text{e} \quad \mathbf{y}^* = (x_1 + dx_1 + v_1, v_2, v_3).$$

Calculando a distância entre os pontos após a deformação temos

$$d\mathbf{s}^* = (dx_1 + v_1 - u_1, v_2 - u_2, v_3 - u_3).$$

Analogamente a subseção 3.2.2, vamos usar a expansão de Taylor e ignorar o resto de Lagrange para escrever a primeira componente de $\mathbf{v}$ em função da primeira componente de $\mathbf{u}$.

$$v_1(\mathbf{y}) = u_1(\mathbf{x}) + \left.\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right|_{\mathbf{x}} dx_1 + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}\right|_{\mathbf{x}} (dx_1)^2 + \cdots$$

Novamente, utilizando a aproximação para os dois primeiros termos e substituindo a primeira componente do vetor $d\mathbf{s}^*$, temos

$$dx_1^* \approx dx_1 + \left.\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right|_{\mathbf{x}} dx_1 \approx \left(1 + \left.\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right|_{\mathbf{x}}\right) dx_1. \tag{3.3}$$

Usando a notação dos componentes do tensor de deformação, temos

$$dx_1^* \approx (1 + \epsilon_{11})\, dx_1. \tag{3.4}$$

Assim, vemos que ϵ_{11} é uma contração ou dilatação ao longo do eixo x_1 e, analogamente, podemos demonstrar que ϵ_{22} e ϵ_{33} determinam a distensão ou contração ao longo dos eixos x_2 e x_3, respectivamente. Utilizando um abuso de notação, podemos escrever a expressão 3.4 como

$$\frac{dx_1^*}{dx_1} \approx \frac{\partial x_1 + \partial u_1}{\partial x_1},$$

e desse jeito podemos perceber que o fator $(1 + \epsilon_{11})$ é uma mudança relativa (citada na subseção 3.2.2) no comprimento ao longo do eixo x_1 devido a deformação.

3.2.3.2 Alteração Relativa de Volume

Para estudar as alterações no volume de um sólido elástico vamos considerar uma caixa retangular (paralelepípedo) com dimensões $\Delta x_1, \Delta x_2$ e Δx_3 nas direções dos eixos coordenados. Dessa forma, o volume do paralelepípedo é dado por

$$V = \Delta x_1\, \Delta x_2\, \Delta x_3.$$

Conforme subseção 3.2.3.1, aplicando a mudança relativa de comprimento a cada uma das três dimensões, temos que após a deformação, o volume do sólido é dado por

$$\begin{aligned} V^* &= (1 + \epsilon_{11})\Delta x_1\, (1 + \epsilon_{22})\Delta x_2\, (1 + \epsilon_{33})\Delta x_3 \\ &= (1 + \epsilon_{11})\, (1 + \epsilon_{22})\, (1 + \epsilon_{33})\, V. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Como a deformação aplicada tem tamanho infinitesimal, estamos supondo que as alterações relativas de comprimento não fujam significativamente das direções canônicas dos eixos coordenados, assim há alteração apenas no volume do sólido e não no seu formato. Ainda por conta do valores infinitesimais de ϵ_{ii}, podemos negligenciar os termos não lineares resultantes da multiplicação na equação 3.5 e aproximar o volume após a deformação para

$$V^* \approx (1 + \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33})\, V. \tag{3.6}$$

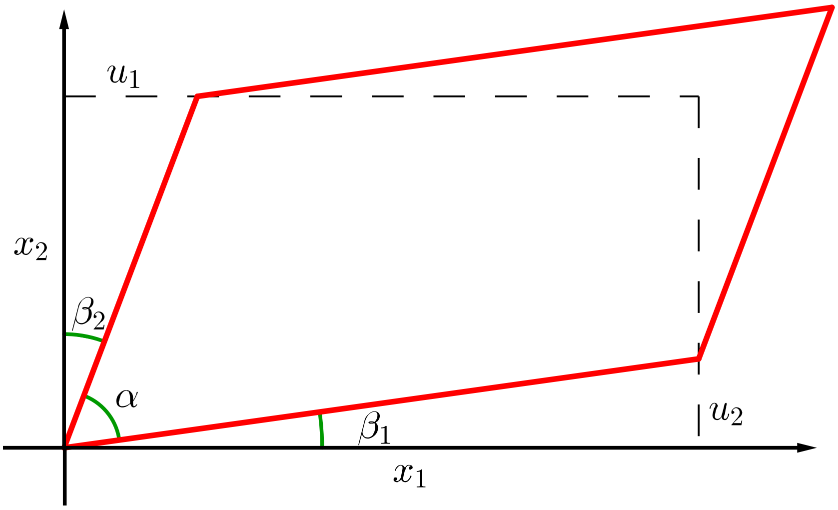

Figura 18 – *Exemplo em duas dimensões de como algumas componentes do tensor de deformação promove a variação no formato do meio.*

Observe que $\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}$ é o traço do tensor de deformação, pode ser calculado através do divergente do vetor de deslocamento e será denotado por φ definindo a *dilatação*,

$$
\begin{aligned}
\varphi &= \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33} \\
&= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \cdot (u_1, u_2, u_3) \\
&= \nabla \cdot \mathbf{u}.
\end{aligned}
$$

Como o traço de uma matriz é um escalar e este não se altera quando é aplicada uma transformação nos eixos coordenados, temos que a dilatação e a consequente alteração no volume de um sólido não depende do sistema de coordenadas escolhido. Manipulando a equação 3.6 podemos constatar que a dilatação se trata de uma mudança relativa do volume

$$\frac{V^* - V}{V} \approx \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}.$$

3.2.3.3 Alteração Relativa na Forma

O tensor de deformação também descreve uma mudança no formato do corpo, conforme podemos acompanhar pela figura 18, onde um retângulo é transformado num paralelogramo. O angulo reto inicialmente formado pelos eixos coordenados x_1 e x_2 é reduzido a um ângulo α que obedece à relação

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta_1 - \beta_2,$$

onde β_1 e β_2 são os ângulos formados pelos lados do paralelogramo e os eixos x_1 e x_2, respectivamente. Como a variação angular é bastante pequena, temos que cada ângulo β_i

pode ser aproximado por sua respectiva tangente, e considerando deslocamentos infinitesimais, temos

$$\begin{aligned}\beta_1 + \beta_2 &\approx \tan(\beta_1) + \tan(\beta_2)\\ &= \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\\ &= 2\epsilon_{12} = 2\epsilon_{21}.\end{aligned}$$

Portanto, temos que o tensor de deformação também é responsável pela alteração na direção dos seguimentos que compõem um corpo, mudando assim seu formato.

3.2.4 Conservação da Massa, Tensão e o Equilíbrio do Momento Linear

O princípio de conservação da massa é fundamental em mecânica do contínuo na determinação da relação entre o vetor de deslocamento $\mathbf{u}$ e a densidade de massa ρ de um corpo. Por definição, a quantidade de massa ocupando um volume V num dado tempo t é

$$m = \iiint_V \rho \, dV,$$

onde tanto a massa como a densidade não dependem apenas do tempo mas também da posição $\mathbf{x}$. Fixado um volume V, a taxa de variação da massa no tempo é dada por

$$\frac{d}{dt}m = \iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV. \tag{3.7}$$

Assumindo que não há destruição nem produção de massa dentro do volume, a variação da massa se dá apenas pelo quantidade de massa que passa pela volume, ou que passa através de uma das superfícies que limita esse volume, o que pode ser escrito como

$$\frac{dm}{dt} = -\iint_S \rho \, \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}, \tag{3.8}$$

onde $\mathbf{v}$ é a velocidade da quantidade de massa que atravessa a superfície S. A superfície infinitesimal dS é pequena o suficiente para ser considerada plana e tem o mesmo fluxo de massa em todos os seus pontos, e o sinal negativo decorre do fato de que o vetor normal à superfície aponta no sentido de saída do volume.

Substituindo a equação 3.8 na equação 3.7 temos

$$\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = -\iint_S \rho \, \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}, \tag{3.9}$$

ou seja, a taxa de variação da quantidade de massa num determinado volume é proporcional à taxa de variação da quantidade de massa que atravessa a superfície que limita esse volume. Pelo teorema do divergente temos que

$$\iint_S \rho \, \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \nabla \cdot (\rho \, \mathbf{v}) \, dV, \tag{3.10}$$

onde substiutindo a equação 3.10 na equação 3.9 e agrupando os integrandos sob um mesmo volume, temos

$$\iiint_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \, \mathbf{v})\right] dV = 0,$$

que é a equação que descreve a *conservação de massa* num determinado volume V.

Em geral, as forças agindo no interior de um meio continuo são as chamadas *forças de superfície*, ou seja, quando um material é submetido ao contato de uma carga em sua superfíce, forças internas se propagam no inteiror do material através de outras superfícies internas e imaginárias provocando a deformação desse material. Assim, podemos definir a *tensão* como o conjunto dessas forças de superfíce, fazendo com que tensão e deformação estejam diretamente relacionadas. Matematicamente, tensão média é definida como a força por unidade de área

$$\overline{\mathbf{T}} = \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta S}, \tag{3.11}$$

e segundo o princípio fundamental da mecânica do contínuo estabelecido por Cauchy, existe o limite para o valor da tensão quando $\Delta S \to 0$,

$$\mathbf{T}^{\mathbf{n}} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta S} = \frac{d\mathbf{F}}{dS}.$$

O vetor $\mathbf{n}$ é normal a superfície de aplicação da tensão $\mathbf{T}^{\mathbf{n}}$ e é útil para identificar que determinada tensão se aplica a determinada superfície.

Além das forças de superfície temos também as forças de corpo que agem à distância como a força gravitacional ou a força elétrica que agem sobre um corpo material ou sobre uma carga elétrica, respectivamente. Denotando tal força por $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ temos que a força total atuando num corpo é

$$\mathbf{F}_T = \iint_S \mathbf{T} \, dS + \iiint_V \mathbf{f} \, dV, \tag{3.12}$$

onde V é o volume enclausurado pela superfície S. Usando a definição de força dada pela segunda lei de Newton, podemos reescrever a equação 3.12 como

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} \, dV = \iint_S \mathbf{T} \, dS + \iiint_V \mathbf{f} \, dV, \tag{3.13}$$

onde $\mathbf{u}$ é o vetor deslocamento. A equação 3.13 estabelece o equilíbrio do *momento linear*, ou seja, a taxa de variação do momento linear de uma partícula no meio contínuo é igual ao somatório de forças externas agindo nessa partícula. Discretizando a última integral da equação acima podemos escrever

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (\mathbf{F}_{ji} + \mathbf{F}_{ij}),$$

onde $\mathbf{F}_{ji}$ é a força exercida na partícula i devida à partícula j. Pela terceira lei de Newton, forças entre partículas tem mesma intensidade e direção e sentidos opostos,

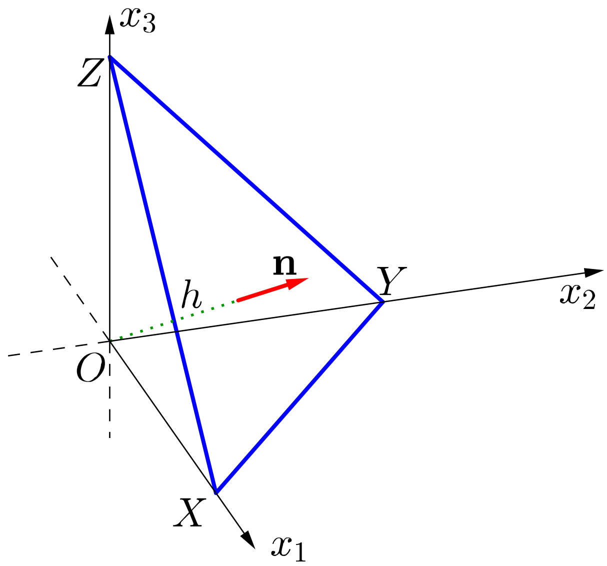

Figura 19 – *Tetraedro de Cauchy, com forças superficiais agindo em cada uma das faces ortogonais e na face oblíqua.*

assim, $\mathbf{F}_{ji} = -\mathbf{F}_{ij}$. Mais ainda, uma partícula não exerce uma força em si mesma, então $\mathbf{F}_{ii} = 0$. Portanto, a equação 3.13 se resume a

$$\frac{d}{dt}\iiint_V \rho \frac{d\mathbf{u}}{dt}\, dV = \iint_S \mathbf{T}\, dS.$$

Somente forças externas são responsáveis por alterações no momento linear.

3.2.5 O Tensor de Tensões

Para derivação do tensor de tensões vamos utilizar o argumento do tetraedro de Cauchy, estudando as forças agindo no inteiror de um meio contínuo em relação a um plano imaginário com orientação arbitrária. O tetraedro é limitado pelos pontos $O(0,0,0)$, $X(x,0,0)$, $Y(0,y,0)$ e $Z(0,0,z)$, contendo faces ortogonais, OYZ, XOZ e XYO e a face oblíqua XYZ, conforme a figura 19.

Utilizando o equilíbro do momento linear dado pela equação 3.13, podemos determinar a força agindo na face oblíqua de área ΔS, considerando um tetraedro de dimensões finitas.

$$\overline{\rho}\,\Delta V \frac{d\overline{\mathbf{v}}}{dt} = \Delta\mathbf{F} + \Delta\mathbf{F}^{(\mathbf{e}_1)} + \Delta\mathbf{F}^{(\mathbf{e}_2)} + \Delta\mathbf{F}^{(\mathbf{e}_3)} + \overline{f}\Delta V, \tag{3.14}$$

onde $\Delta\mathbf{F}$ é a força superficial agindo na face oblíqua, $\Delta\mathbf{F}^{(\mathbf{e}_i)}$ é a força superficial agindo na face ortogonal cujo a normal é o eixo x_i, $\overline{f}$ é a força de campo agindo no tetraedro de volume ΔV e densidade ρ, e $\frac{d\overline{\mathbf{v}}}{dt}$ é a velocidade usada no cálculo da taxa de variação do momento linear. As barras acima de cada símbolo significam valores médios para tetraedros de dimensões finitas. Substituindo a equação 3.11 na equação 3.14 temos

$$\overline{\rho}\,\Delta V \frac{d\overline{\mathbf{v}}}{dt} = \overline{\mathbf{T}}^{(\mathbf{n})}\,\Delta S - \overline{\mathbf{T}}^{(\mathbf{e}_1)}\,\Delta S_1 - \overline{\mathbf{T}}^{(\mathbf{e}_2)}\,\Delta S_2 - \overline{\mathbf{T}}^{(\mathbf{e}_3)}\,\Delta S_3 + \overline{f}\,\Delta V, \tag{3.15}$$

onde ΔS_i é a área da face cujo a normal é o eixo x_i. Note, ainda pela figura 19, que as faces ortogonais tem suas respectivas normais com a mesma direção mas sentido oposto ao respectivo vetor unitário $\mathbf{e}_i$ do eixo correspondente, daí o sinal negativo na equação acima por conta da terceira lei de Newton. Para continuarmos nossa dedução precisamos relacionar a área da face oblíqua com as áreas das faces ortogonais. Observe que cada componente n_i do vetor $\mathbf{n}$ é, por definição,

$$\begin{aligned}
n_1 &= \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_1 = \|\mathbf{n}\| \, \|\mathbf{e}_1\| \cos(X\hat{O}N) \\
n_2 &= \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_2 = \|\mathbf{n}\| \, \|\mathbf{e}_2\| \cos(Y\hat{O}N) \\
n_3 &= \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_3 = \|\mathbf{n}\| \, \|\mathbf{e}_3\| \cos(Z\hat{O}N)
\end{aligned}$$

Usando a definição de cosseno nos triângulos XON, YON e ZON temos que

$$h = \overline{XO}\, n_1 = \overline{YO}\, n_2 = \overline{ZO}\, n_3,$$

e calculando o volume do tetraedro em relação a cada uma das faces temos

$$\Delta V = \frac{1}{3} h\, \Delta S = \frac{1}{3} \overline{XO} \Delta S_1 = \frac{1}{3} \overline{YO} \Delta S_2 = \frac{1}{3} \overline{ZO} \Delta S_3, \tag{3.16}$$

e daí temos a relação entre as áreas,

$$\Delta S = \Delta S_i n_i, \quad \text{onde} \quad i = 1, 2, 3. \tag{3.17}$$

Usando as equações 3.16 e 3.17 podemos escrever a equação 3.15 como

$$\overline{\rho}\, \frac{1}{3} h\, \Delta S \frac{d\overline{\mathbf{v}}}{dt} = \overline{\mathbf{T}}^{(\mathbf{n})}\, \Delta S - \overline{\mathbf{T}}^{(\mathbf{e}_1)}\, n_1\, \Delta S - \overline{\mathbf{T}}^{(\mathbf{e}_2)}\, n_2\, \Delta S - \overline{\mathbf{T}}^{(\mathbf{e}_3)}\, n_3\, \Delta S + \overline{f}\, \frac{1}{3} h\, \Delta S.$$

Cancelando ΔS, temos

$$\overline{\rho}\, \frac{1}{3} h \frac{d\overline{\mathbf{v}}}{dt} = \overline{\mathbf{T}}^{(\mathbf{n})} - \overline{\mathbf{T}}^{(\mathbf{e}_1)}\, n_1 - \overline{\mathbf{T}}^{(\mathbf{e}_2)}\, n_2 - \overline{\mathbf{T}}^{(\mathbf{e}_3)}\, n_3 + \overline{f} \frac{1}{3} h.$$

Reduzindo o tetraedro de dimensões finitas a um tetraedro infinitesimal, fazemos $h \to 0$ mantendo o vértice O centrado na origem e sem alterar a direção de h,

$$\mathbf{T}^{(\mathbf{n})} = \mathbf{T}^{(\mathbf{e}_1)}\, n_1 + \mathbf{T}^{(\mathbf{e}_2)}\, n_2 + \mathbf{T}^{(\mathbf{e}_3)}\, n_3.$$

Em termos matriciais, temos

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}^{(\mathbf{n})} &= \begin{bmatrix} T_1^{(\mathbf{e}_1)} \\ T_2^{(\mathbf{e}_1)} \\ T_3^{(\mathbf{e}_1)} \end{bmatrix} n_1 + \begin{bmatrix} T_1^{(\mathbf{e}_2)} \\ T_2^{(\mathbf{e}_2)} \\ T_3^{(\mathbf{e}_2)} \end{bmatrix} n_2 + \begin{bmatrix} T_1^{(\mathbf{e}_3)} \\ T_2^{(\mathbf{e}_3)} \\ T_3^{(\mathbf{e}_3)} \end{bmatrix} n_3 \\
&= \begin{bmatrix} T_1^{(\mathbf{e}_1)} & T_1^{(\mathbf{e}_2)} & T_1^{(\mathbf{e}_3)} \\ T_2^{(\mathbf{e}_1)} & T_2^{(\mathbf{e}_2)} & T_2^{(\mathbf{e}_3)} \\ T_3^{(\mathbf{e}_1)} & T_3^{(\mathbf{e}_2)} & T_3^{(\mathbf{e}_3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Ou seja, se sabemos as tensões em três planos mutuamente ortogonais com relação a um determinado ponto P, podemos determinar a tensão num outro plano qualquer passando por P.

Definindo a matrix

$$\tau = \begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{bmatrix},$$

onde cada componente τ_{ij} representa a j-ésima componente da força superficial agindo no plano cuja normal tem mesma direção do eixo x_i. Assim, comparando a matriz da equação 3.18 com a matriz τ e considerando as definições dadas para os índices, vemos que

$$\tau_{ij} = T_j^{(\mathbf{e}_i)},$$

ou seja, a equação 3.18 pode ser escrita compactamente como

$$\mathbf{T}^{(\mathbf{n})} = \tau^\top \mathbf{n}. \tag{3.19}$$

A matriz τ é chamada de *tensor de tensões de Cauchy*, o símbolo $\top$ indica transposição e $\mathbf{T}^{(\mathbf{n})}$ é a tensão aplicada em um plano qualquer com orientação $\mathbf{n}$. Utilizando a notação de somatório podemos escrever a equação 3.19 na forma

$$\mathbf{T}^{(\mathbf{n})} = \sum_{j=1}^{3} \tau_{ji} n_j, \quad \text{para} \quad i = 1, 2, 3. \tag{3.20}$$

3.2.6 Equação do Movimento de um Corpo Elástico e Contínuo

Para deduzir a equação do movimento vamos fazer uso do conceito de equilíbrio do momento linear estabelecido na subseção 3.2.4 e da definição do tensor de tensões estabelecido na subseção 3.2.5. Assim, substituindo a equação 3.20 na equação 3.13 temos

$$\iiint_V \rho \frac{d^2\mathbf{u}}{dt^2}\, dV = \iint_S \mathbf{T}\, dS + \iiint_V \mathbf{f}\, dV$$
$$\iiint_V \rho \frac{d^2u_i}{dt^2}\, dV = \iint_S \sum_{j=1}^{3} \tau_{ji} n_j dS + \iiint_V f_i\, dV, \quad \text{para} \quad i = 1, 2, 3.$$

Para escrever todas as integrais como integral sobre volume vamos usar o teorema do divergente,

$$\iiint_V \rho \frac{d^2u_i}{dt^2}\, dV = \iiint_V \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} dV + \iiint_V f_i\, dV, \quad \text{para} \quad i = 1, 2, 3 \tag{3.21}$$

e como os volumes são os mesmos em cada integral, podemos usar a linearidade da integração e escrever

$$\iiint_V \left(\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} + f_i - \rho \frac{d^2u_i}{dt^2} \right) dV = 0, \quad \text{para} \quad i = 1, 2, 3. \tag{3.22}$$

Para satisfazer essa integral o integrando deve ser nulo, de onde podemos concluir que

$$\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} + f_i = \rho \frac{d^2 u_i}{dt^2}, \quad \text{para} \quad i = 1, 2, 3. \tag{3.23}$$

Essa equação é conhecida como a *equação do movimento de Cauchy* ou *primeira lei do movimento de Cauchy*, e relaciona dois tipos de força, superficial e de corpo, com a aceleração de um corpo num meio contínuo e elástico. Ou seja, a aceleração de um corpo num meio contínuo e elástico resulta da aplicação desses dois tipos de força.

3.3 Equações de Lamé

3.3.1 Relações Constitutivas

As relações constitutivas, ou relações de tensão-deformação, foram estabelecidas experimentalmente e descrevem como as forças aplicadas em materiais elásticos estão linearmente relacionadas com a deformação observada nesses materiais. As relações constitutivas são conhecidas também como a lei de Hooke, a qual estabelece que cada componente do tensor de tensões está linearmente relacionada com todas as componentes do tensor de deformações. Dessa forma, a lei de Hooke pode ser escrita como

$$\tau_{ij} = \sum_{k=1}^{3} \sum_{l=1}^{3} c_{ijkl}\, \varepsilon_{kl} \tag{3.24}$$

onde $i, j = 1, 2, 3$ e c é constante. Dadas as simetrias de ambos os tensores, a lei de Hooke pode ser escrita na forma matricial contendo seis equações independentes. Para isso, vamos realizar uma mudança de índices criando uma lista ordenada com os pares ordenados (i, j) onde $i \leq j$, e considerando o número $m = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ que dá a posição de cada par nessa lista. Assim, temos que os possíveis pares ordenados são substituidos pelos seguintes valores de m

$$(1,1) \to 1 \quad (2,2) \to 2 \quad (3,3) \to 3 \quad (2,3) \to 4 \quad (1,3) \to 5 \quad (1,2) \to 6.$$

Ou seja, estamos fazendo a substituição $(i, j) \to m$ com

$$\begin{cases} m = i & \text{se} \quad i = j \\ m = 9 - (i + j) & \text{se} \quad i \neq j. \end{cases}$$

Analogamente, podemos fazer a substituição dos índices $(k, l) \to n$ e escrever c_{ijkl} como C_{mn}, obtendo a *matriz de elasticidade* $C = C_{mn}$ com $m, n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Dessa forma, as equações de tensão-deformação definidas em 3.24 podem ser escritas na forma matricial como

$$\begin{bmatrix} \tau_{11} \\ \tau_{22} \\ \tau_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\,\varepsilon_{23} \\ 2\,\varepsilon_{13} \\ 2\,\varepsilon_{12} \end{bmatrix}.$$

Podemos notar que, por conta da simetria dos tensores de tensão e de deformação, basta considerar apenas seis das nove equações iniciais dadas pela relação 3.24.

3.3.2 Os Parâmetros de Lamé

Considere um material com determinadas características e com posição medida em relação a um determinado sistema de coordenadas. Podemos alterar o sistema de coordenadas sem alterar as características do material em questão. Essa invariância das características de um corpo em relação a uma mudança no sistema de coordenadas é chamada *simetria material*. Num certo sistema de coordenadas, a matriz de elasticidade nos permite reconhecer qual o tipo de simetria que um corpo apresenta (são oito no total), pois uma alteração no sistema de coordenadas gera um efeito nas equações de tensão-deformação. Além disso, sob determinadas condições, a matriz de elasticidade é invariante para algumas alterações no sistema de coordenadas. Estamos interessados em transformação de coordenadas que preservam distâncias entre pontos, ou seja as rotações e reflexões, também conhecidas como *tansformações ortogonais*. Dado um ponto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, uma transformação ortogonal é dada por uma matriz $A_{3\times 3}$ onde

$$\hat{\mathbf{x}} = A\,\mathbf{x},$$

com $A^\top A = I$, ou $A^\top = A^{-1}$, e I é a matriz identidade 3×3. O conjunto de todas as transformações ortogonais A que não alteram as características elásticas de um meio contínuo são chamadas *grupo de simetria*. Dentre os grupos de simetria, o que nos interessa é o caso *isotrópico contínuo*, que contém todas as transformações ortogonais usadas nas deduções dos grupos anteriores, fazendo com que qualquer sistema de coordenadas seja efetivo no estudo das características elásticas de um meio não sendo necessária uma orientação em particular. Assim, através dos grupos de simetria anteriores, podemos demonstrar que a matriz de elasticidade para o grupo isotrópico contínuo é

$$C_{iso} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\,\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\,\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\,\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}, \tag{3.25}$$

onde os parâmetros λ e μ são conhecidos como os *parâmetros de Lamé*, e estão estreitamente relacionados aos autovalores da matriz C_{iso}. Fisicamente, μ está relacionado com a rigidez do sólido em questão e λ com sua compressibilidade.

3.3.3 Condições de Contorno

Vimos que a matriz de elasticidade para meios isotrópicos possui os parâmetros λ e μ que definem as características elásticas do meio. Uma mudança abrupta nesses parâmetros indica uma alteração na composição do meio de propagação da deformação, indicando que a mesma atravessou uma superfície de contato entre duas camadas de subsuperfície. Vamos analisar como a descontinuidade dos parâmetros de Lamé afetam os tensores de tensão e de deformação.

Dados dois meios M_1 e M_2 com características elásticas distintas contidos no espaço $\mathbb{R}^3$, separados por uma superfície de contato S com direção normal $\mathbf{n}$. Sendo $\mathbf{F}$ o campo de forças de contato, $\mathbf{p}_0 \in S$, $\mathbf{p}_1 \in M_1$ e $\mathbf{p}_2 \in M_2$, queremos calcular a diferença entre os limites de $\mathbf{F}$ aplicada a $\mathbf{p}_1$ e $\mathbf{p}_2$ quando esses pontos tendem a $\mathbf{p}_0$ através dos meios M_1 e M_2, respectivamente. Ou seja, queremos calcular o salto de $\mathbf{F}$ em $\mathbf{p}_0$ e assumindo que os limites parciais existem, temos

$$[[\mathbf{F}]] = \lim_{\mathbf{p}_1 \to \mathbf{p}_0} \mathbf{F}(\mathbf{p}_1) - \lim_{\mathbf{p}_2 \to \mathbf{p}_0} \mathbf{F}(\mathbf{p}_2).$$

Fixado um ponto $\mathbf{p}_0 \in S$ qualquer vamos utilizar um cilindro infinitesimal centrado em $\mathbf{p}_0$, com altura dh e área das bases dA, com orientação normal $\mathbf{n}$ e onde cada metade do cilindro se encontra nos meios M_1 e M_2 conforme a figura 20. Considerando ainda que

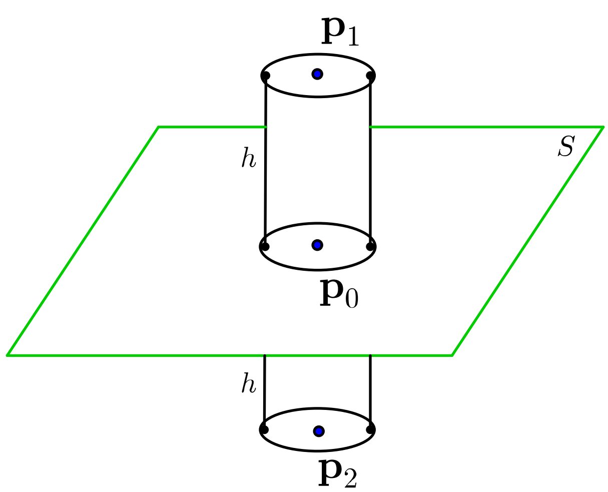

Figura 20 – *Cilindro de dimensões infinitesimais dividido pela interface separadora dos meios 1 e 2.*

cada um dos pontos $\mathbf{p}_1$ e $\mathbf{p}_2$ são os centros de cada uma das bases do cilindro, temos que os pontos $\mathbf{p}_0$, $\mathbf{p}_1$ e $\mathbf{p}_2$ estão alinhados. Utilizando novamente a equação 3.14 e desprezando as forças aplicadas na parede do cilindro (já que vamos fazer $h \to 0$), temos que o equilíbrio de forças aplicadas ao cilindro é dado por

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{p}_1) + \mathbf{F}(\mathbf{p}_2) + f$$

onde f é uma força de campo. Utilizando a segunda lei de Newton, utilizando a equação 3.11 e desprezando as forças de campo, temos

$$\rho\, dh\, dA \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{T}(\mathbf{p}_1, \mathbf{n})dA + \mathbf{T}(\mathbf{p}_2, -\mathbf{n})dA.$$

Fazendo o limite quando $h \to 0$ e mantendo constantes as áreas das bases do cilindro, temos que os pontos $\mathbf{p}_i$ convergem para $\mathbf{p}_0$, e a equação acima se torna

$$\mathbf{T}(\mathbf{p}_0, \mathbf{n}) - \mathbf{T}(\mathbf{p}_0, \mathbf{n}) = \mathbf{0}.$$

Como o ponto $\mathbf{p}_0$ é tomado arbitrariamente, temos que o salto do tensor de tensões ao longo da superfície S é nulo

$$[[\mathbf{T}]] = \mathbf{0}.$$

Considerando um modelo onde uma camada não vai invadir a outra temos que a componente normal do vetor de deslocamento $\mathbf{u} \in S$ é nula. Da mesma forma, considerando que uma camada não desliza sobre a outra, temos que as componentes tangenciais de $\mathbf{u}$ também são zero, e daí assumimos que o salto de $\mathbf{u}$ é nulo bem como sua velocidade,

$$[[\mathbf{u}]] = \mathbf{0} \quad \text{e} \quad \left[\left[\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{u}\right]\right] = \mathbf{0}.$$

4 Acoplamento Magneto-elástico

4.1 Introdução

Como vimos na subseção 2, quando uma estrutura condutiva se movimenta num campo magnético, uma corrente elétrica e um campo magnético variável são gerados nessa estrutura. Segundo [Mikhailenko and Soboleva(1997)], a passagem de uma onda sísmica pela subsuperfície terrestre gera o movimento do material que compõe essa subsuperfície. Considerando que esse material é contínuo e elástico, contém uma certa distribuição de cargas elétricas e que o planeta Terra possui um campo geomagnético natural, temos que o movimento relativo entre o material e o campo geomagnético vai gerar variações geomagnéticas locais associadas às ondas sísmicas que provocaram o movimento do material. Mais ainda, segundo [S.V. Anisimov and Goncharov(1985)] e [Sadovsky(1980)], a onda eletromagnética induzida é "congelada" à onda sísmica e se propaga não com a velocidade da luz, mas com a velocidade da onda P ou da onda S, dependendo do tipo de onda sísmica, e podemos registrar e estudar essa variação geomagnética. Um corpo nessas condições é chamado de sólido eletromagnético-elástico, essas variações no campo geomagnético são chamadas de *ondas sismomagnéticas* e esse efeito recebeu o nome de *efeito sismomagnético* ou *efeito magnetoelástico*.

Segundo [**?**], é possível investigar algumas interações dinâmicas que podem ocorrer entre campos eletromagnéticos e campos elásticos em sólidos homogêneos e isotrópicos. Assim, esses autores desenvolveram um modelo matemático de combinação entre a teoria de elasticidade infinitesimal e a teoria eletromagnética linearizada, o qual será apresentado a seguir. A interação se deve principalmente à força de corpo de Lorentz, à modificação das equações constitutivas e das condições de contorno provocada pela velocidade do material, e às forças superficiais introduzidas pelos campos.

4.2 Equações Constitutivas do Meio

Seguindo a notação apresentada em [**?**], temos que os vetores que representam os campos eletromagnéticos no meio (propriamente dito) de propagação das ondas, são representados por $\mathbf{E}^0$, $\mathbf{D}^0$, $\mathbf{B}^0$, $\mathbf{H}^0$ e $\mathbf{J}^0$. Essas mesmas quantidades, quando se referirem às medidas observadas em laboratório são denotadas apenas retirando-se o sobre-escrito ^{0}. Transferindo essa notação para as equações 2.30 e 2.33 temos

$$\mathbf{D}^0 = \epsilon\,\mathbf{E}^0 \quad \text{e} \quad \mathbf{B}^0 = \mu\,\mathbf{H}^0. \tag{4.1}$$

Em muitos materiais, a densidade de corrente elétrica é linearmente dependente de um campo elétrico externo, e tal relação, conhecida como a *lei de Ohm*, pode ser escrita usando a notação apresentada acima como

$$\mathbf{J}^0 = \sigma\,\mathbf{E}^0, \tag{4.2}$$

onde σ é a *condutividade* do meio. As equações 4.1 juntamente com a equação 4.2 são denominadas *equações eletromagnéticas contitutivas do meio*, quando o mesmo é isotrópico, homogêneo e se encontra em repouso. As mesmas equações se mantêm quando o meio se move por ocasião da passagem de uma onda sísmica.

Experimentalmente, para pequenas velocidades, os campos eletromagnéticos do meio próprio se relacionam com aqueles medidos em laboratório através das relações dadas por [Dunkin and Eringen(1963)]

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}^0 &= \mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B} \qquad & \mathbf{D}^0 &= \mathbf{D} + \epsilon_0\,\mu_0\,\mathbf{v}\times\mathbf{H} \\
\mathbf{H}^0 &= \mathbf{H} - \mathbf{v}\times\mathbf{D} \qquad & \mathbf{B}^0 &= \mathbf{B} - \epsilon_0\,\mu_0\,\mathbf{v}\times\mathbf{E}\,, \\
\mathbf{J}^0 &= \mathbf{J} - \rho_e\,\mathbf{v} \qquad & \rho_e^0 &= \rho_e
\end{aligned} \tag{4.3}$$

onde μ_0 é a permeabilidade magnética do vácuo e ϵ_0 é a permissividade elétrica do vácuo. Substituindo as equações 4.3 nas equações 4.1 e 4.2, e desprezando os termos de ordem maior ou igual a v^2/c^2, temos que o campo de densidade de fluxo elétrico é dado por

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}^0 &= \epsilon\,\mathbf{E}^0 \\
\mathbf{D} + \epsilon_0\,\mu_0\,\mathbf{v}\times\mathbf{H} &= \epsilon\,(\mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B}) \\
\mathbf{D} &= \epsilon\,\mathbf{E} + \epsilon\,\mathbf{v}\times\mathbf{B} - \epsilon_0\,\mu_0\,\mathbf{v}\times\mathbf{H}.
\end{aligned}$$

Usando a equação 2.33, temos

$$\begin{aligned}
\mathbf{D} &= \epsilon\,\mathbf{E} + \epsilon\,\mathbf{v}\times\mu\,\mathbf{H} - \epsilon_0\,\mu_0\,\mathbf{v}\times\mathbf{H} \\
\mathbf{D} &= \epsilon\,\mathbf{E} + \alpha\,\mathbf{v}\times\mathbf{H},
\end{aligned} \tag{4.4}$$

onde $\alpha = \epsilon\,\mu - \epsilon_0\mu_0$.

Analogamente, para o campo magnético temos

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}^0 &= \mu\,\mathbf{H} \\
\mathbf{B} - \epsilon_0\,\mu_0\,\mathbf{v}\times\mathbf{E} &= \mu\,(\mathbf{H} - \mathbf{v}\times\mathbf{D}) \\
\mathbf{B} &= \mu\,\mathbf{H} - \mu\,\mathbf{v}\times\mathbf{D} + \epsilon_0\,\mu_0\,\mathbf{v}\times\mathbf{E}.
\end{aligned}$$

Usando a equação 2.30, temos

$$\begin{aligned}
\mathbf{B} &= \mu\,\mathbf{H} - \mu\,\mathbf{v}\times\epsilon\,\mathbf{E} + \epsilon_0\,\mu_0\,\mathbf{v}\times\mathbf{E} \\
\mathbf{B} &= \mu\,\mathbf{H} - \alpha\mathbf{v}\times\mathbf{E}.
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Para o campo de densidade de corrente elétrica, temos

$$\mathbf{J} - \rho_e\,\mathbf{v} = \sigma\,(\mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B}). \tag{4.6}$$

As equações 4.4, 4.5 e 4.6 são as equações constitutivas do meio em termos dos campos definidos em laboratório.

4.3 Interface entre Camadas de Materiais Diferentes

4.3.1 Equações Eletromagnéticas

Vamos escrever as equações de Maxwell dadas na forma diferencial pelas equações 2.38 a 2.39 numa forma mais conveniente para a aplicação das relações constitutivas. As equações 2.38 e 2.39 se matêm inalteradas,

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f \quad \text{e} \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \tag{4.7}$$

Para equação 2.40

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f + \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{D} \qquad \Leftrightarrow$$

$$\nabla \times \mathbf{H} - \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{D}) = \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{D} + \mathbf{v}(\nabla \cdot \mathbf{D}) - \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \mathbf{J}_f - \rho_f \mathbf{v} \qquad \Leftrightarrow \tag{4.8}$$

$$\nabla \times (\mathbf{H} - \mathbf{v} \times \mathbf{D}) = \left[\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{D} + \mathbf{v}(\nabla \cdot \mathbf{D}) - \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B})\right] + \mathbf{J}_f - \rho_f \mathbf{v} \tag{4.9}$$

Para equação 2.41

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B} \qquad \Leftrightarrow$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = -\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B} - \mathbf{v}(\nabla \cdot \mathbf{B}) + \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \qquad \Leftrightarrow \tag{4.10}$$

$$\nabla \times (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = -\left[\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B} + \mathbf{v}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B})\right] \tag{4.11}$$

Integrando as equações 4.7 sobre uma superfície S' enclusurada por uma curva C, e integrando as equações 4.8 e 4.10 sobre um volume V enclusurado por uma superfície S, temos

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{D}\, dV = \iiint_V \rho_f\, dV$$

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{B}\, dV = 0$$

$$\iint_S \nabla \times (\mathbf{H} - \mathbf{v} \times \mathbf{D}) \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \left[\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{D} + \mathbf{v}(\nabla \cdot \mathbf{D}) - \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B})\right] \cdot d\mathbf{S} + \iint_S [\mathbf{J}_f - \rho_f \mathbf{v}] \cdot d\mathbf{S}$$

$$\iint_S \nabla \times (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{S} = -\iint_S \left[\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B} + \mathbf{v}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B})\right] \cdot d\mathbf{S}$$

Aplicando o teorema do Divergente nas duas primeiras equações, e aplicando o teorema de Stokes nas duas últimas equações, temos

$$\oiint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \rho_f \, dV \tag{4.12}$$

$$\oiint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \tag{4.13}$$

$$\oint_C (\mathbf{H} - \mathbf{v} \times \mathbf{D}) \cdot d\mathbf{C} = \frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} + \iint_S [\mathbf{J}_f - \rho_f \mathbf{v}] \cdot d\mathbf{S} \tag{4.14}$$

$$\oint_C (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{C} = -\frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}, \tag{4.15}$$

onde nas duas últimas equações usamos a relação abaixo, sendo $\mathbf{A}$ um vetor qualquer,

$$\frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \left[\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} + \mathbf{v}(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{A}) \right] \cdot d\mathbf{S}.$$

Acompanhando pela figura 16 juntamente com a argumentação apresentada na subseção 2.4.4, temos que o salto da componente normal de cada um dos campos, magnético e densidade de fluxo elétrico, deduzidos a partir das equações 4.12 e 4.13, são

$$[[\mathbf{D}]]_n = \sigma_f \qquad \text{e} \qquad [[\mathbf{B}]]_n = 0. \tag{4.16}$$

Analogamente, temos o salto das componentes tangenciais dos campos elétrico e magnético auxiliar, deduzidos a partir das equações 4.14 e 4.15,

$$[[\mathbf{H} - \mathbf{v} \times \mathbf{D}]]_m = K_t - \sigma_t \qquad \text{e} \qquad [[\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}]]_m = 0, \tag{4.17}$$

onde K é a magnitude da densidade superficial de corrente e σ é a magnitude da densidade superficial de carga.

A última equação no estudo das condições de fronteira entre camadas segue do princípio de conservação de cargas elétricas. A quantidade total de cargas concentradas num determinado volume é dada pela equação 2.4, e qualquer variação na quantidade de carga desse volume é devida a uma corrente elétrica, dada pela equação 2.21, que atravessa a superfície que está enclausurando o volume. Assim, o princípio de conservação de cargas estabelece que

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho_e \, dV = -\oiint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}. \tag{4.18}$$

Reescrevendo o lado esquerdo da equação acima e aplicando o teorema do Divergente ao lado direito temos que

$$\iiint_V \frac{\partial}{\partial t} \rho_e \, dV = -\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{J} \, dV,$$

e como a equação se mantém para qualquer tipo de volume, temos

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{J}.$$

Esta é a *equação da continuidade* ou equação da *conservação local de carga*, e pode ser derivada a partir das equações de Maxwell por ser uma consequência das leis da eletrodinâmica.

Usando a conservação da carga na forma dada pela equação 4.18, e aplicando ao volume V analogamente ao que foi feito com a equação 4.12, e substituindo a expressão para $\mathbf{J}$ dada na equação 4.6, temos a última equação para condição de contorno

$$[[\sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})]]_n = -\frac{\partial}{\partial t}\sigma_e = \left[\left[\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{D}\right]\right]_n.$$

4.3.2 Equações Elásticas

As equações de campo para movimento de corpos elásticos e contínuos são deduzidas a partir da equação de equilíbrio do momento linear aplicada a um volume de material V que é enclausurado por uma superfície fechada S, como podemos constatar na equação 3.13. Estamos assumindo que o único efeito mecânico de forças eletromagnéticas é dado pela adição da *força de corpo de Lorentz*, dada pela equação 2.8. Substituindo a equação 2.21 na equação 2.8, escrevemos a força de Lorentz como

$$\mathbf{F}_L = q\,\mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}. \tag{4.19}$$

Integrando a força de Lorentz sobre o volume V e adicionando-a à equação de equilíbrio do momento linear, temos

$$\frac{d}{dt}\iiint_V \rho\frac{d\mathbf{u}}{dt}\,dV = \iint_S \mathbf{T}\,dS + \iiint_V \mathbf{f}\,dV + \iiint_V \mathbf{F}_L\,dV. \tag{4.20}$$

Substituindo a equação 3.20 e aplicando o teorema do Divergente na integral da superfície S, temos que a equação acima se torna similar à equação 3.21,

$$\iiint_V \rho\frac{d^2u_i}{dt^2}\,dV = \iiint_V \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j}dV + \iiint_V f_i\,dV + \iiint_V F_{Li}\,dV \quad \text{para} \quad i = 1,2,3.$$

Como estamos assumindo deformações infinitesimais e o volume é o mesmo para cada integral, temos que

$$\rho\frac{d^2u_i}{dt^2} = \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} + f_i + F_{Li} \quad \text{para} \quad i = 1,2,3$$

são as equações do movimento de Cauchy como o acoplamento da força de Lorentz.

Para derivar as condições de fronteira, vamos primeiramente escrever a força de Lorentz em função do tensor de tensões eletromagnéticas de Maxwell τ_{ij}^e, e em função do momento eletromagnético g_i,

$$F_{Li} = \frac{\partial}{\partial x_i}\tau_{ij}^e - \frac{\partial}{\partial t}g_i. \tag{4.21}$$

onde τ_{ij}^e e g_i sao dados por

$$\tau_{ij}^e = E_i\,D_j + H_i\,B_j - \frac{1}{2}(E_\lambda\,D_\lambda\, + H_\lambda\,B_\lambda)\delta_{ij}$$
$$\mathbf{g} = \mathbf{D}\times\mathbf{B}.$$

Podemos somar e subtrair a expressão abaixo na força de Lorentz,

$$F_{Li} = \frac{\partial}{\partial x_i}\tau_{ij}^e + \frac{\partial}{\partial x_j}(g_i^e\,v_j) - \frac{\partial}{\partial t}g_i - \frac{\partial}{\partial x_j}(g_i^e\,v_j), \tag{4.22}$$

integrar sobre o volume V e aplicar o teorema do Divergente para escrever o tensor de Maxwell e momento eletromagnético numa integral de superfície chegando a

$$\iiint_V F_{Li}\,dV = \iint_S(\tau_{ij}^e + g_i^e\,v_j)\,n_i\,dS - \iiint_V\left(\frac{\partial}{\partial t}g_i + \frac{\partial}{\partial x_j}(g_i^e\,v_j)\right)\,dV. \tag{4.23}$$

De acordo com [Eringen(1962)], é válida a expressão

$$\frac{d}{dt}\iiint_V \rho\frac{d}{dt}u_i\,dV = \iiint_V\left[\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}u_i + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho\frac{d}{dt}u_i\,v_i\right)\right]\,dV. \tag{4.24}$$

Usando a expressão acima e o equilíbrio do momento linear dado pela equação 3.13, temos

$$\iint_S\left(\tau_{ij} + \tau_{ij}^e + g_i\,v_j\right)\,n_j\,dS + \iiint_V f_i\,dV = \frac{d}{dt}\iiint_V\left(\rho\frac{d}{dt}u_i + g_i\right)\,dV, \tag{4.25}$$

a qual está na forma ideal para aplicarmos as condições de fronteira para tensões aplicadas na interface que separa duas camadas de subsuperfície. Considerando S e V como a superfície e o volume de um cilindro infinitesimal com bases paralelas à superfície que separa as duas camadas, conforme a figura 20, vamos tomar o limite quando a altura do cilindro tende a zero e obter o salto

$$\left[\left[\tau_{ij} + \tau_{ij}^e + g_i v_j\right]\right]\,n_j = 0. \tag{4.26}$$

No caso de uma camada de contato com o ar temos que $\tau_{ij} = 0$ na parte externa do corpo, e a expressão acima se torna

$$\tau_{ij}\,n_j = \left[\left[\tau_{ij}^e + g_i v_j\right]\right]\,n_j, \tag{4.27}$$

onde agora o colchete duplo deve ser interpretado como a quantidade de fora do corpo menos a quantidade no interior.

As equações constitutivas são dadas pela lei de Hook apresentada na subseção 3.3.1, mas que também pode ser escrita como

$$\tau ij = \lambda\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\delta_{ij} + \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), \tag{4.28}$$

onde consideramos que a tensão e a deformação para este sistema tem os mesmos valores tanto medidos propriamente nas camadas como em medições de laboratório. Assumimos também que a lei de Hook para corpos puramente elásticos não é afetada pela presença de campos eletromagnéticos.

4.4 Modelo de Dunkin e Erigen

Podemos resumir o acoplamento magneto-elástico proposto por [**?**] destacando as equações básicas de campo e as condições de contorno a serem aplicadas em sólidos eletromagnéticos e elásticos.

4.4.1 Equações de campo

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B} \tag{4.29}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{D} \tag{4.30}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_e \tag{4.31}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{4.32}$$

$$\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x_j}\tau_{ij} + \rho_e\, E_i + (\mathbf{J} \times \mathbf{B})_i + f_i. \tag{4.33}$$

4.4.2 Equações Constitutivas

$$\mathbf{D} = \epsilon\, \mathbf{E} + \alpha\, \mathbf{v} \times \mathbf{H}$$

$$\mathbf{B} = \mu\, \mathbf{H} - \alpha \mathbf{v} \times \mathbf{E}$$

$$\mathbf{J} - \rho_e\, \mathbf{v} = \sigma\, (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

$$\tau_{ij} = \lambda\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\delta_{ij} + \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right).$$

4.4.3 Condições de Fronteira

$$[[\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}]]_m = 0$$

$$[[\mathbf{B}]]_n = 0$$

$$[[\sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})]]_n = -\frac{\partial}{\partial t}\sigma_e$$

$$[[\mathbf{D}]]_n = \sigma_f$$

$$\left[\left[\tau_{ij} + \tau_{ij}^e + g_i v_j\right]\right] \ n_j = 0.$$

5 Recondicionamento do Modelo de Dunkin e Erigen

Uma das contribuições dessa monografia é a utilização de hipóteses simplificadoras de ordem física e experimental, disponíveis na literatura, para reescrever o modelo do acoplamento magneto-elástico de forma que o mesmo possa receber um tratamento matemático e computacional, no sentido de solução de um problema direto.

Como vimos na subseção 2.4, a polarização e magnetização de um determinado material depende das características de cada material. De acordo com [Jackson(1999)] e [Griffiths(1999)], as equações constitutivas apresentadas na subseção 4.4.2 podem não ser simples pois existe uma diversidade enorme de propriedades elétricas e magnéticas dos materias, especialmente em sólidos cristalínicos e materias ferroelétricos e ferromagnéticos que têm polarização e magnetização não nulos mesmo na abstenção de aplicação de campos eletromagnéticos. Com excessão desses tipos de materias, a aplicação de campos eletromagnéticos produzem polarização e magnatização proporcional aos campos aplicados, e a relação do campo de densidade de fluxo elétrico com o campo elétrico bem como a relação do campo magnético auxiliar com o campo magnético são consideradas lineares, pois a contribuição das parcelas não-lineares tornam-se desprezíveis.

Com isso, temos que o escalar α definido em 4.4 tem seu valor considerado nulo, e as expressões para o campo de densidade de fluxo elétrico e o campo magnético da subseção 4.4.2 se tornam

$$\mathbf{D} = \epsilon\,\mathbf{E} \tag{5.1}$$

$$\mathbf{B} = \mu\,\mathbf{H}. \tag{5.2}$$

Substituindo a equação 5.1 na equação 4.29 e aplicando a transformada de Fourier, temos a relação entre o campo elétrico e o campo magnético auxiliar dada por

$$\nabla \times \widehat{\mathbf{E}} = i\,\omega\,\mu_0 \widehat{\mathbf{H}}, \tag{5.3}$$

onde i é um número complexo, ω é a frequência temporal e a notação $\widehat{\cdot}$ significa que a função vetorial está no domínio da frequência temporal.

Ondas eletromagnéticas se propagam com velocidade da luz que é limitada. Segundo [Jackson(1999)], num sistema onde as dimensões são pequenas comparadas ao comprimento de onda eletromagnética e comparadas à escala de tempo dominante, podemos tratar a velocidade da luz como instantânea num regime denominado *quasi-estacionário*. Como consequência dessa premissa, em meios condutivos a contribuição do campo de densidade de fluxo elétrico é muito pequena quando comparada à contribuição da densidade de corrente elétrica na produção de campos magnéticos. Assim, podemos desprezar a parcela referente a corrente deslocada introduzida por Maxwell na lei de Amperè, o que implica (pela equação 4.31) em $\rho_e = 0$. Vamos supor ainda que o campo magnético auxiliar medido durante o efeito magnetoelástico seja uma combinação do campo magnético gerado $\mathbf{H}$ mais o campo magnético natural da Terra $\mathbf{H}^0$, e para manter a notação vamos usar a substituição

$$\mathbf{H} \longrightarrow \mathbf{H} + \mathbf{H}^0. \tag{5.4}$$

Utilizando a equação 5.2, o campo de densidade de corrente elétrica dado pela subseção 4.4.2 poder ser reescrito como

$$\mathbf{J} = \sigma\,\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \sigma\,\mu_0 \mathbf{H}. \tag{5.5}$$

Substituindo esta última relação juntamente com a equação 5.1 na equação 4.30, e aplicando a transformada de Fourier, temos

$$\nabla \times \widehat{\mathbf{H}} = (\sigma - i\,\epsilon\,\omega)\,\widehat{\mathbf{E}} + \widehat{\mathbf{v}} \times \sigma\mu_0 \mathbf{H}^0, \tag{5.6}$$

onde $\widehat{\mathbf{v}} = -i\,\omega\widehat{\mathbf{u}}$ é a velocidade de deslocamento do meio. Na dedução da equação acima, estamos considerando que a contribuição da parcela $\mathbf{v} \times \sigma\mu_0\mathbf{H}$ é desprezível se comparada à contribuição do campo geomagnético, ainda como uma consequência do regime quasi-estacionário.

De acordo com [**?**], a alteração que o campos eletromagnéticos aplicam em ondas elásticas é desprezível, e assim podemos excluir a força de Lorentz e reescrever a equação 4.33 no domínio da frequência na forma matricial como

$$-i\,\omega\rho\,\widehat{\mathbf{v}} = \nabla \cdot \widehat{\tau} + \widehat{\mathbf{F}}. \tag{5.7}$$

A lei de Hooke dada na subseção 4.4.2 pode ser reescrita no domínio da frequência e em sua forma matricial como

$$\widehat{\tau} = \lambda\,\nabla \cdot \widehat{\mathbf{u}} \cdot\, I + \mu\,(\nabla\,\widehat{\mathbf{u}} + \nabla\widehat{\mathbf{u}}^\top), \tag{5.8}$$

onde I é a matriz identidade e $\nabla\widehat{\mathbf{u}} = (\nabla u_1, \nabla u_2, \nabla u_3)$ é o gradiente do campo vetorial que dá o deslocamento do meio de propagação das ondas.

Substituindo a equação 5.2 na equação 4.32 e aplicando a transformada de Fourier, temos

$$\nabla \cdot \widehat{\mathbf{H}} = 0. \tag{5.9}$$

Assumindo as hipóteses simplificadoras acima, com a dependência do tempo dada por $\exp(-i\,\omega\,t)$, as equações diferenciais parciais linearizadas de magnetoelasticidade são

$$\nabla \times \widehat{\mathbf{E}} = i\,\omega\,\mu_0 \widehat{\mathbf{H}}$$

$$\nabla \times \widehat{\mathbf{H}} = (\sigma - i\,\epsilon\,\omega)\,\widehat{\mathbf{E}} + \widehat{\mathbf{v}} \times \mathbf{H}^0$$

$$-i\,\omega\rho\,\widehat{\mathbf{v}} = \nabla \cdot \widehat{\tau} + \widehat{\mathbf{F}}$$

$$\widehat{\tau} = \lambda\,\nabla \cdot \widehat{\mathbf{u}} \cdot\ I + \mu\,(\nabla\,\widehat{\mathbf{u}} + \nabla \widehat{\mathbf{u}}^{\top})$$

$$\nabla \cdot \widehat{\mathbf{H}} = 0$$

Vamos definir $\sigma^* = (\sigma - i\,\epsilon\,\omega)$ e, de acordo com FULANO, vamos considerar a aproximação quasi-estacionárias das equações de Maxwell ($\sigma >> \epsilon\,\omega$) e no subsolo temos $\sigma^* = \sigma$. No ar, a condutividade é zero e a permeabilidade elétrica é próxima a do vácuo, assim temos $\sigma^* = -i\,\epsilon_0\omega$.

6 Conclusões

Referências

[Azeredo(2013)] M. M. Azeredo. *Modelagem Matemática e Computacional da Propagação de Ondas Sísmicas em Meios Poroelásticos Estratificados*. UENF, 2013.

[Dahlem and Tromp(1998)] F. A. Dahlem and J. Tromp. *Theoretical Global Seismology*. Princeton University Press, 1998.

[Dunkin and Eringen(1963)] J.W. Dunkin and A.C. Eringen. On the propagation of waves in an electromagnetic elastic solid. *International Journal of Engineering Science*, 1, 1963. doi: 10.1016/0020-7225(63)90004-1. URL `http://gen.lib.rus.ec/scimag/index.php?s=10.1016/0020-7225(63)90004-1`.

[Eringen(1962)] A. C. Eringen. *Nonlinear Theory of Continuous Media*. McGraw-Hill New York, 1962.

[Griffiths(1999)] D. J. Griffiths. *Introduction to Electrodynamics*. Prentice-Hall, 1999.

[Jackson(1999)] J. D. Jackson. *Classical electrodynamics*. Wiley, New York, NY, 3rd ed. edition, 1999. ISBN 9780471309321. URL `http://cdsweb.cern.ch/record/490457`.

[Liu(2002)] I. S. Liu. *Continuum Mechanics*. Spring-Verlag, Berlim-Heidelberg, 2002.

[Mikhailenko and Soboleva(1997)] B. G. Mikhailenko and O. N. Soboleva. Mathematical modeling of seismomagnetic efects arising in the seismic wave motion in the earth's constant magnetic field. *Applied Mathematics Lettures*, 10(3):47–51, 1997.

[Sadovsky(1980)] M.A. Sadovsky. Electro magnetic precursors of earthquakes. *Dokl. Acad. Nauka*, 1980.

[Slawinski(2007)] M. A. Slawinski. *Waves And rays in elastic continua*. World Scientific Publishing Company, 2 edition, 2007. ISBN 9789814289009,9814289000. URL `http://gen.lib.rus.ec/book/index.php?md5=4B1483CD09E5DE0051F6053338032FE6`.

[Sommerfeld(1952)] A. Sommerfeld. Electrodynamics. *Academic Press*, 1952.

[S.V. Anisimov and Goncharov(1985)] E.A. Ivanov M.V. Pedanov N.N.Rusakov V.A. Troizhkya S.V. Anisimov, M.B. Gokhberg and V.E. Goncharov. Short period oscillations of electromagnetic field of the earth after explosion. *Dokl. Acad. Nauka*, 281(3):556–559, 1985.

[Ursin(1983)] B. Ursin. Review of elastic and electromagnetic wave propagation in horizontally layered media. *The Leading Edge*, 48, 08 1983. doi: 10.1190/1.1441529. URL `http://gen.lib.rus.ec/scimag/index.php?s=10.1190/1.1441529`.

[White and Zhou(2006)] B.S. White and M. Zhou. Eletroseismic prospecting in layered media. *Society for Industrial and Applied Mathematics*, 67(1):69–98, 2006.