Sumário

1 Introdução

Como podemos constatar em [?], existe uma similaridade matemática entre a propagação de ondas eletromagnéticas e elásticas em camadas que compõem a subsuperfície terrestre, que faz com que todas essas ondas tridimensionais possam ser representadas por equações que possuem as mesmas propriedades. Verificamos também que é possível realizar o acoplamento dessas ondas, dentro de uma teoria conhecida como *magnetoelasticidade*. Assim, segundo [?], podemos aplicar a mesma abordagem para tratamento tanto de ondas acústicas como de ondas eletromagnéticas, e esse trabalho visa fazer o levantamento teórico de tal aplicação. A abordagem consiste basicamente em usar as tranformadas de Fourier, Laplace e Bessel no sistema de equações diferenciais parciais que descrevem o acoplamento magnetoelástico, escrevendo-o em função da frequência temporal e numa forma matricial. Através de transformação das coordenadas laterais, o sistema é deixado em função apenas da profundidade e o sistema inical de EDP's é transformado em dois sistemas de equações diferenciais ordinárias onde cada grandeza pode ser calculada separadamente. Tal procedimento é denominado *método matricial*.

Alguns pesquisadores já utilizaram o método matricial em sistema acoplados. [?] utilizaram em métodos de *Eletrosísmica* que estuda a conversão de ondas eletromagnéticas em ondas sísmicas na subsuperfície terrestre na prospecção de hidrocarbonetos. A conversão entre as ondas ocorre em meios porosos onde uma onda eletromagnética pode excitar uma onda sísmica de mesma frequência e vice-versa, através do movimento dos fluidos contidos nos poros. A alteração que uma onda eletromagnética promove numa onda sísmica de mesma frequência pode ser registrada na superfície terrestre trazendo informações sobre as propriedades elétricas da subsuperfície.

[?] aplica o método matricial para resolver de forma analítico-numérica equações de poroelasticidade que descrevem a propagação de ondas em meio plano estratificado formado por camadas homogêneas e isotrópicas. O método fornece fórmulas explícitas para a construção de algoritmo computacional para obter a solução do problema.

2 Método Matricial de Ursin para Solução de EDP's

2.1 Introdução

Este capítulo trata da utilização de um método matricial para estudar a propagação de ondas em subsuperfície terrestre, conforme estruturado em [?]. Graças a similaridade matemática entre sistemas de EDP's eletromagnéticas e sistemas de EDP's elásticas, podemos dar um desenvolvimento unificado para esses sistemas. Utilizamos um conjunto de transformadas (Fourier, Laplace e Bessel) para escrever cada um desses sistemas de EDP's numa forma matricial, em função apenas da profundidade, composta por $2n$ equações diferenciais ordinárias. Os coeficientes desse sistema de EDO's podem ser reunidos numa matriz A de dimensão $2n \times 2n$, a qual pode ser particionada em quatro submatrizes de dimensão $n \times n$, e é usada como o ponto de partida para o estudo da propagação de ondas em subsuperfície.

As propriedades de simetria da matriz A nos permitem separar o campo de ondas em ascendentes e descendentes através de uma decomposição em autovetores. Essas propriedades nos permitem também deduzir características invariantes da propagação, onde uma dessas características é válida apenas para meios de baixa dissipação de ondas e correspondem à conservação de energia. A matriz de propagação de ondas pode ser computada para camadas homogêneas ou não, através de um método relativamente simples. Dado o vetor de ondas na camada superficial, podemos calcular seu valor para qualquer camada usando a matriz de propagação.

A propagação de ondas em meios estratificados produz fenômenos de transmissão e reflexão de ondas. Dadas as definições das matrizes de transmissão e reflexão, podemos relacioná-las com a matriz de propagação, bem como deduzir propriedades de simetrias para essas matrizes através das características invariantes da propagação. Podemos ainda deduzir as matrizes de transmissão e reflexão modificadas para pilha de camadas limitadas superiormente por uma superfície livre.

2.2 Sistema de EDP's do Efeito Magnetoelástico

Segundo [?], o acoplamento entre ondas eletromagnéticas e elásticas se propagando no subsolo caracteriza o efeito magnetoelástico, e esse acoplamento pode ser modelado matematicamente através de um sistema de equações diferencias parciais. Conforme minha monografia, podemos aplicar uma série de hipóteses que visam simplificar e linearizar essas EDP's de forma que as mesmas possam receber um tratamento matemático adequado no sentido de se obter numericamente os valores dos campos eletromagnéticos e elásticos envolvidos no sistema. Desta forma, vamos utilizar o método matricial encontrado em [**?**] na solução do seguinte sistema de EDP's da magnetoelasticidade

$$\nabla \times \widehat{\mathbf{E}} = i\,\omega\,\mu_0 \widehat{\mathbf{H}}$$

$$\nabla \times \widehat{\mathbf{H}} = (\sigma - i\,\epsilon\,\omega)\,\widehat{\mathbf{E}} + \widehat{\mathbf{v}} \times \sigma\mu_0 \mathbf{H}^0$$

$$-i\,\omega\rho\,\widehat{\mathbf{v}} = \nabla \cdot \widehat{\tau} + \widehat{\mathbf{F}}$$

$$\widehat{\tau} = \lambda\,\nabla \cdot \widehat{\mathbf{u}} \cdot\, I + \mu\,(\nabla\,\widehat{\mathbf{u}} + \nabla\widehat{\mathbf{u}}^\top)$$

$$\nabla \cdot \widehat{\mathbf{H}} = 0.$$

Onde, no domínio da frequência,

- $\widehat{\mathbf{E}}$ é o campo elétrico,
- $\widehat{\mathbf{B}}$ é o campo magnético,
- $\widehat{\mathbf{D}}$ é o campo de densidade de fluxo elétrico,
- $\widehat{\mathbf{H}}$ é o campo magnético auxiliar,
- τ é o tensor de tensões,
- $\widehat{\mathbf{u}}$ é o deslocamento do meio,
- $\widehat{\mathbf{v}}$ é a velocidade de deslocamento do meio,
- $\widehat{\mathbf{F}}$ é uma força aplicada ao meio,
- $\mathbf{H}^0$ é campo geomagnético,
- i é um número complexo,
- ω é a frequência temporal,
- μ_0 é a permeabilidade magnética no vácuo,
- σ é a condutividade do meio,
- ϵ é a permissividade elétrica do meio,
- ρ é a densidade do meio,
- λ e μ são parâmetros de Lamè.

Vamos definir $\sigma^* = (\sigma - i\,\epsilon\,\omega)$. No subsolo, por conta do regime quasi-estacionário, $(\sigma >> \epsilon\,\omega)$ e temos $\sigma^* = \sigma$. No ar, a condutividade é zero e a permeabilidade elétrica é próxima a do vácuo ϵ_0, assim temos $\sigma^* = -i\,\epsilon_0\omega$.

2.3 Escrevendo as Equações na Forma Matricial

Sendo $\mathbf{x} = (x, y, z)^\top$ o espaço $\mathbb{R}^3$ e aplicando as tranformadas de Fourier direta e inversa na forma

$$F(\omega, k_1, k_2, z) = \iiint_{-\infty}^{\infty} f(t, x, y, z)\, e^{i\omega t - ik_1 x - ik_2 y} dt\, dx dy$$

$$f(t, x, y, z) = \left(\frac{1}{2\,\pi}\right)^3 \iiint_{-\infty}^{\infty} F(\omega, k_1, k_2, z)\, e^{-i\omega t + ik_1 x + ik_2 y} d\omega\, dk_1 dk_2\,,$$

podemos escrever um conjunto de EDP's que descevem a propagação de ondas sismo-magnéticas em camadas horizontais da subsuperfície terrestre somente em função da profundidade z.

A título de exemplo, tanto as EDP's de Maxwell para o eletromagnetismo

$$\begin{gathered} \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B} \\ \nabla \times \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{D} + \mathbf{G}\,, \end{gathered} \tag{2.1}$$

como as EDP's elásticas

$$\begin{gathered} \rho \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial t^2} = \nabla \cdot \tau + \mathbf{F} \\ \tau = \lambda \nabla \cdot \mathbf{U} \cdot I + \mu(\nabla \mathbf{U} + \nabla \mathbf{U}^*)\,, \end{gathered} \tag{2.2}$$

podem ser escritas no formato matricial apresentado por Ursin, ou seja, cada um desses sistemas, isoladamente, pode ser escrito na forma

$$\frac{\partial\,\mathbf{B}}{\partial\,z} = \pm\,i\,\omega\,A\,\mathbf{B} = \pm\,i\,\omega \begin{bmatrix} 0 & A_1 \\ A_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B_1} \\ \mathbf{B_2} \end{bmatrix}, \tag{2.3}$$

onde o vetor $\mathbf{B}$ representa uma onda qualquer e não o campo magnético dado em 2.1.

A equação 2.3 tem as seguintes características:

- $A_{2\,n \times 2\,n}$ é uma matriz que pode ser particionada em quatro submatrizes $n \times n$, com submatrizes de zeros na diagonal principal e submatrizes simétricas A_1 e A_2 na diagonal secundária. As componentes de A_1 e A_2 são funções dos parâmetros das EDP's 2.1 e 2.2, são funções também de z e do vetor real de retardamento $\mathbf{p} = \frac{\mathbf{k}}{\omega}$. Para meios de baixa dissipação das ondas, as matrizes A_1 e A_2 são reais;

- O vetor de onda $\mathbf{B}$ tem dimensão $2n \times 1$ e é particionado em dois vetores $\mathbf{B}_1$ e $\mathbf{B}_2$ com dimensão $n \times 1$. As componentes do vetor de onda são escolhidas de forma que $\mathbf{B}$ seja contínuo através das fronteiras entre duas camadas;

- Para ondas elásticas, metade das componentes de $\mathbf{B}$ são zeros na superfície livre, ou seja, existe uma matriz de permutação $T_{2n\times 2n}$ onde $T^{-1} = T^{\top}$ e tal que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_1(\mathbf{0}) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = T\,\mathbf{B} \quad \text{quando} \quad z = 0\,;$$

- As componentes do vetor de onda $\mathbf{B}$ são escolhidas de forma que o fluxo de energia na direção z seja dado por

$$J = -\frac{1}{4}(\mathbf{B}_1^H \mathbf{B}_2 + \mathbf{B}_2^H \mathbf{B}_1) = -\frac{1}{4}\mathbf{B}^H\, M\,\mathbf{B}\,,$$

onde H denota complexo conjugado transposto,

$$M = \begin{bmatrix} 0_{n\times n} & I \\ I & 0_{n\times n} \end{bmatrix}$$

e I é uma matriz identidade $n \times n$.

Os métodos a seguir são aplicados em equações escritas no formato matricial 2.3, com ondas se propagando numa pilha de camadas homogêneas e assumimos que os parâmetros das equações são funções contínuas no interior de cada camada que dependem apenas da profundidade z. O modelo inclui pilha de camadas homogêneas com parâmetros constantes por camada e consideramos o eixo z como sendo positivo no sentido descendente.

2.4 Decomposição em Ondas Ascendentes e Descentes

Para realizar a decomposição do vetor $\mathbf{B}$ em ondas ascendentes e descendentes aplicamos uma diagonalização em autovalores na matriz A na forma

$$A = L\,\Lambda_1 L^{-1}\,, \tag{2.4}$$

onde Λ_1 é a matriz diagonal dos autovalores λ_i para $i = 1, 2, ..., n$, e L é a matriz dos autovetores correspondentes,

$$\Lambda_1 = \begin{bmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & -\Lambda \end{bmatrix}\,. \tag{2.5}$$

A definição de autovalores e autovetores é dada por

$$\begin{bmatrix} 0 & A_1 \\ A_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{L_1} \\ \mathbf{L_2} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \mathbf{L_1} \\ \mathbf{L_2} \end{bmatrix} \tag{2.6}$$

e aplicando o procedimento

$$\begin{bmatrix} 0 & A_1 \\ A_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & A_1 \\ A_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{L_1} \\ \mathbf{L_2} \end{bmatrix} = \lambda\,\lambda \begin{bmatrix} \mathbf{L_1} \\ \mathbf{L_2} \end{bmatrix} ,$$

podemos separar o sitema 2.6 de dimensão $2n$ em dois sistemas de dimensão n

$$A_1 A_2 \mathbf{L_1} = \lambda^2 \mathbf{L_1}$$
$$A_2 A_1 \mathbf{L_2} = \lambda^2 \mathbf{L_2} ,$$

onde $\mathbf{L}_i$ são os vetores que, concatenados dois a dois, formam os autovetores que compõem L. Assim, podemos dividir a diagonalização dada em 2.4 em duas diagonalizações de dimensão n

$$\begin{aligned} A_1 A_2 &= L_1 \Lambda^2 L_1^{-1} \\ A_2 A_1 &= L_2 \Lambda^2 L_2^{-1} , \end{aligned} \tag{2.7}$$

onde L_i são submatrizes da matriz L e contêm os autovetores $\mathbf{L}_i$.

Definindo a matriz

$$L = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} L_1 & L_1 \\ L_2 & -L_2 \end{bmatrix} \tag{2.8}$$

e sua inversa

$$L^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} L_1^{-1} & L_2^{-1} \\ L_1^{-1} & -L_2^{-1} \end{bmatrix} , \tag{2.9}$$

podemos substituí-las na equação 2.4 e verificar que

$$\begin{aligned} A_1 &= L_1 \Lambda\, L_2^{-1} \\ A_2 &= L_2 \Lambda\, L_1^{-1} , \end{aligned} \tag{2.10}$$

e podemos verificar ainda que essas definições para A_1 e A_2 satisfazem também as equações 2.7.

Pelas características da equação 2.3 sabemos que as matrizes A_1 e A_2 são simétricas e podem ser escritas como

$$A_1 = L_2^{-\top} \Lambda\, L_1^{\top}$$
$$A_2 = L_1^{-\top} \Lambda\, L_2^{\top} ,$$

as quais substituídas nas equações 2.7 lucramos

$$A_1 A_2 = L_1 \Lambda^2 L_1^{-1} = L_2^{-\top} \Lambda^2 L_2^{\top} ,$$

e concluímos que, a menos da escala dos autovetores,

$$L_1 = L_2^{-\top}\,.$$

Substituindo a última igualdade na definição 2.10 temos

$$A_i = L_i \Lambda\, L_i^{\top} \qquad \text{para} \qquad i = 1\,\mathrm{e}\,2\,,$$

e substituindo em 2.9, temos

$$L^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} L_2^{\top} & L_1^{\top} \\ L_2^{\top} & -L_1^{\top} \end{bmatrix}. \tag{2.11}$$

Escrevendo o vetor de ondas na forma

$$\mathbf{B} = L\,\mathbf{W}\,, \tag{2.12}$$

aplicando a derivada parcial em relação a z, e substituindo as equações 2.3 e 2.4, obtemos

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial\, z} = \left[\pm i\omega\,\Lambda_1 - L^{-1}\frac{\partial\, L}{\partial\, z}\right] \mathbf{W}\,. \tag{2.13}$$

Para a propagação de ondas em camadas homogêneas, os coeficientes das EDP's originais são constantes por camada e esses coeficientes compõem a matriz A diagonalizada pela matriz L. Assim, para meios homogêneos, a última equação pode ser reduzida a

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial\, z} = \pm i\omega\,\Lambda_1 \mathbf{W}\,.$$

Representamos o vetor $\mathbf{W}$ como

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{D} \end{bmatrix},$$

onde $\mathbf{U}$ e $\mathbf{D}$ são vetores que representam ondas ascendentes e descendentes, respectivamente, desde que a parte real de $\pm i\omega\lambda_i$ seja não negativa para $i = 1, 2, ..., n$.

Substiutindo as equações 2.8 e 2.11 na equação 2.13 e efetuando as multiplicações matriciais obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial z} &= \pm i\omega\,\Lambda\,\mathbf{U} + F\,\mathbf{U} + G\,\mathbf{D} \\ \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial z} &= \pm i\omega\,\Lambda\,\mathbf{D} + F\,\mathbf{D} + G\,\mathbf{U} \end{aligned} \tag{2.14}$$

onde as matrizes F e G são, respectivamente,

$$F = -\frac{1}{2}\left[L_2^{\top}\frac{\partial L_1}{\partial z} + L_1^{\top}\frac{\partial L_2}{\partial z}\right]$$

$$G = -\frac{1}{2}\left[L_2^{\top}\frac{\partial L_1}{\partial z} - L_1^{\top}\frac{\partial L_2}{\partial z}\right].$$

Substituindo F e G nas expressões

$$-2(F + F^\top) \quad \text{e} \quad -2(G - G^\top)\,,$$

verificamos que ambas as expressões são nulas e, consequentemente,

$$F = -F^\top \quad \text{e} \quad G = G^\top\,.$$

Para propagação em camadas homogêneas e isotrópicas, podemos negligenciar as últimas parcelas das equações 2.14 e temos a expressão final para ondas ascendentes e descendentes, respectivamente,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial z} &= \pm i\omega\,\Lambda\,\mathbf{U} \\ \\ \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial z} &= \pm i\omega\,\Lambda\,\mathbf{D}\,. \end{aligned} \tag{2.15}$$

2.5 Matriz de Propagação

Podemos utilizar a equação 2.3 para calcular o valor do vetor de ondas numa profundidade qualquer $\mathbf{B}_z$, desde que saibamos o valor do vetor na superfície $\mathbf{B}_0$ e mantendo a frequência e o vetor de retardamento constantes. Para ondas descendentes, a *matriz de propagação* é dada pela solução da equação

$$\frac{\partial P(z,z_0)}{\partial z} = \pm i\omega\,A(z)\,P(z,z_0)\,, \tag{2.16}$$

onde $P(z_0,z_0) = I$. Para ondas ascendentes, a matriz de propagação é dada por

$$\frac{\partial P(\zeta,z_N)}{\partial \zeta} = \pm i\omega A(\zeta)\,P(\zeta,z_N)\,,$$

onde $P(z_N,z_N) = I$.

Sabendo o valor de $\mathbf{B}(z_0)$, a solução da equação 2.3 é dada por

$$\mathbf{B}(z) = P(z,z_0)\,\mathbf{B}(z_0)\,,$$

e podemos notar que

$$P^{-1}(z_N,z_0) = P(z_0,z_N)\,.$$

As condições de fronteiras preconizam que o vetor de ondas é contínuo através das interfaces, o que implica que a matriz de propagação também se mantém contínua na interface entre duas camadas homogêneas ou não.

Considerando a transformação dada pela equação 2.12, a matriz de propagação para ondas descendentes $Q(z,z_0)$ associada ao vetor $\mathbf{W}$ é a solução da equação

$$\frac{\partial\,Q(z,z_0)}{\partial z} = \begin{bmatrix} \pm i\omega\,\Lambda + F & G \\ G & \pm i\omega\,\Lambda + F \end{bmatrix} Q(z,z_0)\,, \tag{2.17}$$

onde $Q(z_0, z_0) = I$.

E, para ondas ascendentes, temos

$$\frac{\partial\, Q(\zeta, z_N)}{\partial \zeta} = - \begin{bmatrix} \pm i\omega\, \Lambda + F & G \\ G & \pm i\omega\, \Lambda + F \end{bmatrix} Q(\zeta, z_N)\,,$$

com $Q(z_N, z_N) = I$.

No caso de uma pilha de camadas homogêneas com a espessura de uma camada k dada por $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$, onde z_k é a profundidade da interface entre a camada k e a camada $k+1$. Nesta condição e usando a equação 2.4, a equação da matriz de propagação 2.16 pode ser integrada diretamente

$$\begin{aligned} P(z, z_0) &= \exp \pm i\omega\, A(z - z_0) \\ &= L\, \left[\exp \pm i\omega\, \Lambda_1 (z - z_0)\right]\, L^{-1}\,. \end{aligned}$$

Ou, escrevendo em termos matriciais e usando as equações 2.5, 2.8 e 2.11, temos

$$P(z, z_0) = \begin{bmatrix} L_1 \cosh[\pm i\omega\, \Lambda(z - z_0)] L_2^\top & L_1 \sinh[\pm i\omega\, \Lambda(z - z_0)] L_1^\top \\ L_2 \sinh[\pm i\omega\, \Lambda(z - z_0)] L_2^\top & L_2 \cosh[\pm i\omega\, \Lambda(z - z_0)] L_1^\top \end{bmatrix}\,,$$

onde

$$\cosh[\pm i\omega\, \Lambda(z - z_0)] = \frac{1}{2} \exp\left[\pm i\omega\, \Lambda(z - z_0)\right] + \frac{1}{2} \exp\left[- \pm i\omega\, \Lambda(z - z_0)\right]$$

$$\sinh[\pm i\omega\, \Lambda(z - z_0)] = \frac{1}{2} \exp\left[\pm i\omega\, \Lambda(z - z_0)\right] - \frac{1}{2} \exp\left[- \pm i\omega\, \Lambda(z - z_0)\right]\,.$$

Integrando a equação 2.17 e considerando camadas homogêneas, a matriz de propagação Q fica

$$Q(z, z_0) = \begin{bmatrix} \exp \pm i\omega\, \Lambda(z - z_0) & 0 \\ 0 & \exp \pm i\omega\, \Lambda(z - z_0) \end{bmatrix}\,. \tag{2.18}$$

2.6 Propriedades Invariantes da Propagação

As propriedades da matriz A determinam as características de propagação do vetor de ondas $\mathbf{B}$. Como as matrizes A_1 e A_2 são simétricas, podemos verificar que a função G dada por

$$G(\mathbf{B}, \mathbf{C}) = -(\mathbf{B}_1^\top \mathbf{C_2} - \mathbf{B_2}^\top \mathbf{C_1})\,,$$

ou por

$$G(\mathbf{B}, \mathbf{C}) = -\mathbf{B}^\top N\, \mathbf{C} \qquad \text{com} \qquad N = \begin{bmatrix} 0_{n\times n} & I \\ -I & 0_{n\times n} \end{bmatrix}\,,$$

é constante para vetores de onda $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ que satisfazem a equação 2.3. Usando as matrizes de autovalores das equações 2.8 e 2.11, podemos verificar que

$$-L^\top N\, L = N\,. \tag{2.19}$$

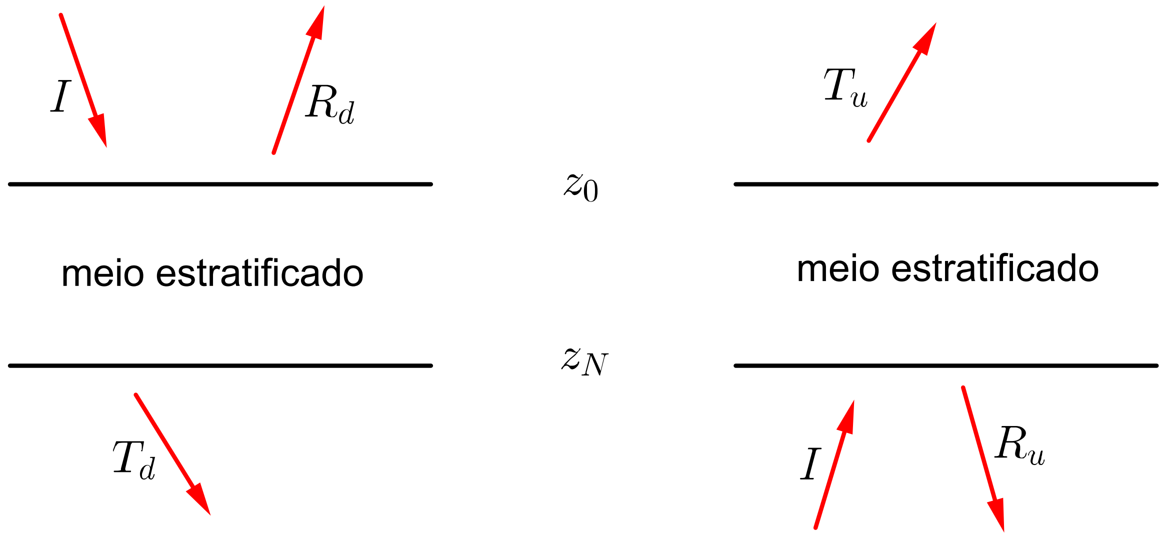

Figura 1 – *Direção e sentido de propagação de ondas ascendentes e descendentes em camadas homogêneas.*

Empregando a transformação dada pela equação 2.12 e a transformação

$$\mathbf{C} = L\,\mathbf{V}$$

podemos deduzir que

$$G(\mathbf{W},\mathbf{V}) = \mathbf{W}^\top N\,\mathbf{V} \tag{2.20}$$

também é constante para os vetores transformados $\mathbf{W}$ e $\mathbf{V}$. Aplicando o determinante na equação 2.19 e sabendo que $\det(N) = \det(-N)$ concluímos que

$$\det{}^2(N) = 1\,.$$

2.7 Matrizes de Transmissão e Reflexão

Temos dois tipos de ondas refletidas e dois tipos de ondas transmitidas ao atravessarem as fronteiras entre camadas, conforme a propagação é ascendente ou descendente. No caso de propagação descendente de força I, as ondas refletidas e transmitidas são dadas respectivamente por R_d e T_d. No caso ascendente, também de força I, temos R_u e T_u, onde todas as cinco matrizes são de dimensão $n \times n$. A propagação das ondas ocorre como mostrado na figura 1. Vamos usar a constância da função dada na equação 2.20 para igualar seus valores calculados no topo e no fundo da pilha de camadas. Mas aqui, vamos tomar as ondas V e W com força I em sentido descendente e ascendente, respectivamente.

$$\begin{bmatrix} R_d^\top & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_u \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & T_d^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ R_u \end{bmatrix},$$

de onde concluímos que

$$T_u = T_d^\top\,. \tag{2.21}$$

Podemos ainda calcular o valor da função usando somente ondas descendentes $G(V,V)$. Igualando seus valores para o topo e a base da pilha de camadas, temos

$$\begin{bmatrix} R_d^\top & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_d \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & R_d^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ R_d \end{bmatrix} ,$$

de onde concluímos que

$$R_d = R_d^\top . \tag{2.22}$$

Analogamente, para ondas ascendentes $G(W,W)$, temos

$$R_u = R_u^\top . \tag{2.23}$$

Utilizando as equações 2.21, 2.22 e 2.23, podemos definir uma matriz R onde as componentes representam todas as ondas refletidas e transmitidas,

$$R = \begin{bmatrix} R_d & T_u \\ T_d & R_u \end{bmatrix} ,$$

e verificar que

$$R = R^\top .$$

A matriz R está relacionada à matriz S usada em *Teoria de Dispersão* de ondas,

$$S = \begin{bmatrix} T_d & R_u \\ R_d & T_u \end{bmatrix} ,$$

e a matriz S relaciona, de forma linear, ondas saindo de uma pilha de camadas com ondas entrando na pilha,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D}(z_N) \\ \mathbf{U}(z_0) \end{bmatrix} = S(z_0, z_N) \begin{bmatrix} \mathbf{D}(z_0) \\ \mathbf{U}(z_N) \end{bmatrix} .$$

2.7.1 Relação das Matrizes de Transmissão e Reflexão com a matriz de Propagação

As matrizes de reflexão e transmissão podem ser escritas em termos das submatrizes da matriz de propagação, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} T_u(z_0, z_N) &= Q_{11}^{-1}(z_N, z_0) , \\ R_u(z_0, z_N) &= Q_{21}(z_N, z_0)\, Q_{11}^{-1}(z_N, z_0) , \\ R_d(z_0, z_N) &= -Q_{11}^{-1}(z_N, z_0)\, Q_{12}(z_N, z_0) , \\ T_d(z_0, z_N) &= Q_{22}(z_N, z_0) - Q_{21}(z_N, z_0)\, Q_{11}^{-1}(z_N, z_0)\, Q_{12}(z_N, z_0) , \end{aligned} \tag{2.24}$$

e a matriz de propagação é dada em função das matrizes de reflexão e transmissão por

$$Q(z_0, z_N) = \begin{bmatrix} T_u^{-1} & -T_u^{-1} R_d \\ R_u T_u^{-1} & T_d - R_u T_u^{-1} R_d \end{bmatrix} .$$

Para o caso de camadas homogêneas, usando as equações 2.18 e 2.24, podemos deduzir que, para matrizes de transmissão,

$$T_d(z_0, z) = T_u(z_0, z) = \exp\left[\pm i\omega\, \Lambda(z - z_0)\right] \,,$$

e para matrizes de reflexão

$$R_d(z_0, z) = R_u(z_0, z) = 0\,.$$

Vamos definir $E_{k+1}(-\pm i\omega) = \exp\left[-\pm i\omega\, \Lambda(z_{k+1} - z_k)\right]$. Assim, a matriz S para uma camada homogênea e para interface para a próxima camada é dada pelo *produto estrela*,

$$\begin{aligned}
S(z_{k+}, z_{k+1+}) &= S(z_{k+}, z_{k+1-}) * S(z_{k+1-}, z_{k+1+}) \\
&= \begin{bmatrix} E_{k+1}(-\pm i\omega) & 0 \\ 0 & E_{k+1}(-\pm i\omega) \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} T_{d,k+1} & R_{u,k+1} \\ R_{d,k+1} & T_{u,k+1} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} T_{d,k+1} E_{k+1}(-\pm i\omega) & R_{u,k+1} \\ E_{k+1}(-\pm i\omega) R_{d,k+1} E_{k+1}(-\pm i\omega) & E_{k+1}(-\pm i\omega) T_{u,k+1} \end{bmatrix} .
\end{aligned}$$