Exercícios de Métodos Numéricos

2020/2021

1. (a) Construa o polinómio interpolador na forma de Lagrange, para a função $f(x) = 1/x$, usando os nodos $x_0 = 2$, $x_1 = 2.75$ e $x_2 = 4$.

   (b) Determine um majorante para o erro que se comete quando se usa esse polinómio para aproximar a função no intervalo $[2, 4]$.

2. (a) Escreva uma função em Matlab que, dados os coeficientes $d_0, d_1 ..., d_n$, calcule o polinómio, em forma deflacionada,

$$P^*(x) = d_0 + (x - x_0)[d_1 + (x - x_1)[d_2 + (x - x_2)[...]]]$$

   (b) Escreva uma função em Matlab que, dados os pontos

$$\{(x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n)\}$$

   calcule as diferenças divididas

$$d_0 = f[x_0], \ d_1 = f[x_0, x_1], \ ..., \ d_n = f[x_0, x_1, ..., x_n]$$

   (c) Escreva uma função em Matlab que, dados os pontos

$$\{(x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n)\}$$

   e um valor $x_0 \leq x \leq x_n$, calcule o polinómio interpolador $P^*(x)$ em x.

3. Usando interpolação, calcule um valor aproximado de $f(0.05)$ os dados seguintes:

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	1	4	11	16	13	-4

   Represente graficamente o polinómio interpolador, juntamente com os pontos $(x_k, f(x_k))$ da tabela.

4. Escreva uma função em Matlab que, dados os pontos

$$\{(x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n)\}$$

   determine o polinómio de grau $m < n$, que melhor se ajusta a estes, em termos de mínimos quadrados.

   (a) Com os dados da tabela

k	0	1	2	3	4
x_k	0	0.25	0.50	0.75	1.00
y_k	1.0000	1.2840	1.6487	2.1170	2.7183

   determine um polinómio aproximante, de grau máximo 2, pelo método dos mínimos quadrados e represente-o gráficamente, juntamente com os pontos da tabela.

   (b) Calcule o valor das aproximações $P_2^*(x_k)$

k	0	1	2	3	4
x_k	0	0.25	0.50	0.75	1.00
$P_2^*(x_k)$					

   e o valor do resíduo

$$r = \sum_{k=0}^{n} (P_2^*(x_k) - y_k)^2$$

5. Usando a aproximação dada pela derivada finita avançada, determine valores aproximados da derivada de $f(x) = \log x$, no ponto $t = 1.8$, usando $h = 0.1$, $h = 0.05$ e $h = 0.01$. Ache majorantes para os erros cometidos e compare com os valores exatos com 7 algarismos significativos.

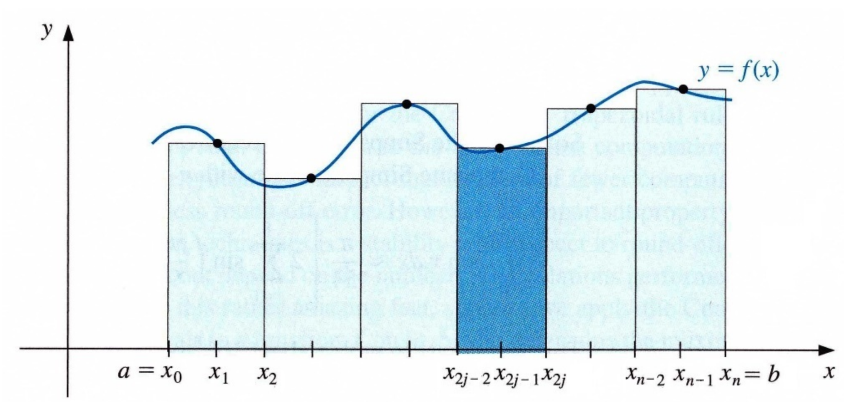
6. Para $f(x) = \sin x$, complete a tabela dada, com aproximações de $f'(0.900)$, usando a derivada finita simétrica
$$f'(0.900) \approx \frac{f(0.900+h) - f(0.900-h)}{2h}$$
Calcule também uma aproximação para o erro cometido

h	$f'(0.900)$	$f'(0.900) - \cos(0.900)$
10^{-9}		
5.10^{-10}		
2.10^{-10}		
10^{-10}		
5.10^{-11}		
2.10^{-11}		
10^{-12}		

Para que valor de h se observa o menor erro?.

7. Usando desenvolvimentos de Taylor apropriados deduza a fórmula
$$f'(t) = \frac{-3f(t) + 4f(t+h) - f(t+2h)}{2h} + O\left(h^2\right)$$

8. Com base na figura



determine a **regra do ponto médio composta**
$$\int_a^b f(x)\,dx \approx 2h \sum_{j=1}^{n/2} f(x_{2j-1})$$

9. Escreva um programa para calcular o integral de $f(x)$ no intervalo $[a, b]$, pela regra do trapésio composta.

10. Escreva um programa para calcular o integral de $f(x)$ no intervalo $[a, b]$, pela regra de Simpson composta.

11. Determine valores de h que permitam calcular uma aproximação a

$$\int_0^{\pi} \sin(x)\, dx$$

com erro inferior a 0.00002,

   (a) usando a regra do trapésio composta

   (b) usando a regra de Simpson composta

12. Use os programas dos exercícios 9 e 10 para calcular $\int_0^{\pi} \sin(x)\, dx$ com erro inferior a 0.00002.

13. Determine as regras de Newton-Cotes fechadas de ordens 2,3 e 4.

14. Calcule o integral

$$I = \int_{-1}^{1} e^x \cos x dx$$

usando quadratura de Gauss com $n = 3$ e com $n = 4$.

Compare com o valor "exato" $I = 1.9334214$.

15. Calcule o integral

$$I = \int_1^3 \left(x^6 - x^2 \sin 2x\right) dx$$

usando quadratura de Gauss com $n = 2$.

Compare com o valor "exato" $I = 317.3442466$ e com os valores obtidos usando a regra do trapésio e a regra de Simpson.

16. Calcule os polinómios de Legendre, $P_n(x)$, para $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ e ache as suas raizes.

17. Podemos definir fórmulas de quadratura mais gerais, que envolvam também os valores de $f'(x)$:

$$\sum_{k=0}^{n} c_k f(x_k) + \sum_{k=0}^{n} c'_k f'(x_k)$$

A definição de exatidão, para estas fórmulas, é a mesma que para as fórmulas normais.

Determine as constantes c_0, c_1, c'_0 e c'_1 para as quais a regra de quadratura

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, dx = c_0 f(-1) + c_1 f(1) + c'_0 f'(-1) + c'_1 f'(1)$$

é exata de grau 3.

18. Escreva um programa para implementar o método da bisseção.

A solução da equação deve vir determinada com erro inferior a 10^{-m}, com m fornecido pelo utilizador e o programa deve fornecer também o número de bisseções necessárias para atingir a solução.

19. Mostre que a equação

$$2x + 3\cos x - e^x = 0$$

tem uma solução no intervalo $[1, 2]$ e calcule-a, usando o método da bisseção, com erro inferior a 10^{-5}.

20. Mostre que

$$g(x) = \frac{1}{13}(x-1)^3$$

tem um único ponto fixo no intervalo $[-1, 1]$

21. Mostre que o método iterativo
$$x_{n+1} = 5 + x_n - x_n^2$$
não converge para a solução da equação $x^2 - 5 = 0$.

22. Escreva um programa para implementar o método iterativo $x_{n+1} = g(x_n)$.

    A solução da equação deve vir determinada com erro inferior a 10^{-m}, com m fornecido pelo utilizador e o programa deve fornecer também o número de iterações necessárias para atingir a solução.

23. Escreva um programa para implementar o método de Newton.

    A solução da equação deve vir determinada com erro inferior a 10^{-m}, com m fornecido pelo utilizador e o programa deve fornecer também o número de iterações necessárias para atingir a solução.

24. Encontre o valor de $\sqrt{5}$ com 15 casas decimais exatas:

    (a) usando o método da bisseção,

    (b) usando o método iterativo $x_{n+1} = 1 + x_n - \frac{1}{5}x_n^2$,

    (c) usando o método de Newton.

    Compare o número de iterações necessárias em cada método.

25. O montante acumulado, A, numa conta poupança é dado pela equação
$$A = \frac{P}{i}\left[(i+1)^n - 1\right]$$
onde P é a prestação mensal e i é a taxa de juro, composta mensalmente, e n é o número de meses do investimento.

    Pudendo dispor todos os meses de €1500, a que taxa de juro i teriamos €750000 daqui a 20 anos?

26. Determinação da solução de um sistema triangular:

    (a) Escreva um programa para achar a solução de um sistema triangular inferior.

    (b) Escreva um programa para achar a solução de um sistema triangular superior (Sugestão: modifique adequadamente o programa da alínea anterior).

    (c) Teste os seus programas nos sistemas
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_4 = 4 \\ -x_2 - x_3 - 5x_4 = -7 \\ 3x_3 + 13x_4 = 13 \\ -13x_4 = -13 \end{cases}, \qquad \begin{cases} -13x_1 = -13 \\ 13x_1 + 3x_2 = 13 \\ -5x_1 - x_2 - x_3 = -7 \\ 3x_1 + x_3 + x_4 = 4 \end{cases}$$

27. Implementação do método de condensação de Gauss:

    (a) Escreva um programa que permita achar a posição da componente de maior valor absoluto de um vetor dado.

    (b) Escreva um programa que determine a matriz que se obtêm, de uma matriz dada, trocando entre si a linha k pela linha l.

    (c) Escreva um programa que resolva um sistema de equações pelo método de Gauss.

(d) Teste o seu programa no sistema

$$\begin{cases} 3.3330x_1 + 15920x_2 + 10.333x_3 = 7953 \\ 2.2220x_1 + 16.710x_2 + 9.6120x_3 = 0.965 \\ -1.5611x_1 + 5.1792x_2 - 1.6855x_3 = 2.714 \end{cases}$$

cuja solução é $(1, 0.5, -1)$.

28. Use o método de condensação de Gauss para achar a inversa da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Adapte o programa do exercício 27. para implementar o método que usou na matriz A acima.

29. Escreva um programa que implemente a fatorização LU de uma matriz.

O input desse programa deverá ser a matriz a fatorizar e o output as duas matrizes L e U.

Teste o seu programa na matriz

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 3 & -3 \\ 1 & -1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

30. (*) Mostre que $P_{12}P_{23} \neq P_{23}P_{12}$.

Em que caso podemos afirmar que $P_{ij}P_{kl} = P_{kl}P_{ij}$?

31. (*) Suponha que P é o produto de m matrizes de permutação.

(a) Mostre que $\det P = (-1)^m$.

(b) Se $A = PLU$ então $\det A = (-1)^m \prod_{k=1}^{n} u_{kk}$, onde u_{kk}, $1 \leq k \leq n$, são os elementos da diagonal principal de U.

(c) Escreva um programa que calcule o determinante de uma matriz quadrada.

32. Uma matriz $A = [a_{kj}]$ diz-se **tridiagonal** se $a_{kj} = 0$ quando $|k - j| \geq 2$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n-2n-2} & a_{n-2n-1} & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & a_{n-1n-2} & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_{nn-1} & a_{nn} \end{bmatrix}$$

A fatorização LU de uma matriz triagonal tem a forma

$$L=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & l_{32} & 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & l_{n-1n-2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & l_{nn-1} & 1 \end{bmatrix}, \quad U=\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & u_{22} & u_{23} & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & u_{33} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & u_{n-2n-2} & u_{n-2n-1} & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & u_{n-1n-1} & u_{n-1n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & u_{nn} \end{bmatrix}$$

(a) (Algoritmo de Thomas) Mostre que

$$\begin{cases} u_{11}=a_{11} \\ u_{k-1k}=a_{k-1k}, \quad k=2,...,n \\ l_{kk-1}u_{k-1k-1}=a_{kk-1}, \quad k=2,...,n \\ l_{kk-1}u_{k-1k}+u_{kk}=a_{kk}, \quad k=2,...,n \end{cases}$$

(b) Escreva um programa para achar a solução de um sistema $Ax=b$ onde A é uma matriz tridiagonal. (Sugestão: da 1^a e da 3^a equações achamos l_{21} e da 2^a e da 4^a equações achamos u_{22},...).

33. Mostre que

$$\|\mathbf{x}\|_\infty < \varepsilon \Leftrightarrow |x_j| < \varepsilon,\ j=1,...,n$$

34. Escreva um programa que calcule $\|\mathbf{x}\|_\infty$.

35. Escreva um programa que implemente o método de Jacobi.

O programa deve ter como output a solução aproximada do sistema, para uma tolerância dada, e o número de iterações que foram necessárias para obter essa solução.

Teste o seu programa no sistema

$$\begin{cases} 4x_1+x_2+x_3+x_5=6 \\ -x_1-3x_2+x_3+x_4=-2 \\ 2x_1+x_2+5x_3-x_4-x_5=6 \\ -x_1-x_2-x_3+4x_4=1 \\ 2x_2-x_3+x_4+4x_5=6 \end{cases}$$

usando $\mathbf{x}^{(0)}=(0,0,0,0,0)$ e $tol=10^{-9}$.

36. Escreva um programa que implemente o método de Gauss-Seidel.

O programa deve ter como output a solução aproximada do sistema, para uma tolerância dada, e o número de iterações que foram necessárias para obter essa solução.

Teste o seu programa no sistema

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 6 \\ -x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = -2 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 - x_4 - x_5 = 6 \\ -x_1 - x_2 - x_3 + 4x_4 = 1 \\ 2x_2 - x_3 + x_4 + 4x_5 = 6 \end{cases}$$

usando $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 0, 0, 0, 0)$ e $tol = 10^{-9}$.

37. Considere a seguinte decomposição de uma matriz A:

$$A = D + L + U$$

onde D é a parte diagonal de A, L é a parte triangular inferior de A e U é a parte triangular superior de A (não confundir com a fatorização LU de A):

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn-1} & 0 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1n} \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Mostre que o método de Jacobi com relaxação se pode escrever como

$$\begin{cases} \mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n \\ \mathbf{x}^{(k+1)} = M_\omega^{-1} N_\omega \mathbf{x}^{(k)} + M_\omega^{-1} \mathbf{b} \end{cases}$$

onde

$$M_\omega = \frac{1}{\omega} D \quad \text{e} \quad N_\omega = \frac{1-\omega}{\omega} D - L - U.$$

38. (**Método de Gauss-Seidel com relaxação**) Mostre que as iterações no método de Gauss-Seidel podem ser escritas na forma

$$x_j^{(k+1)} = x_j^{(k)} + \frac{1}{a_{jj}} \left(b_j - \sum_{i=1}^{j-1} a_{ji} x_i^{(k+1)} - \sum_{i=j}^{n} a_{ji} x_i^{(k)} \right), \quad j = 1, ..., n,$$

e verifique que, introduzindo o parâmetro de relaxação ω,

$$x_j^{(k+1)} = x_j^{(k)} + \frac{\omega}{a_{jj}} \left(b_j - \sum_{i=1}^{j-1} a_{ji} x_i^{(k+1)} - \sum_{i=j}^{n} a_{ji} x_i^{(k)} \right), \quad j = 1, ..., n,$$

se pode obter um método iterativo

$$\begin{cases} \mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n \\ \mathbf{x}^{(k+1)} = M_\omega^{-1} N_\omega \mathbf{x}^{(k)} + M_\omega^{-1} \mathbf{b} \end{cases}$$

onde agora (D, L e U como no exercício anterior)

$$M_\omega = \frac{1}{\omega} D + L \quad \text{e} \quad N_\omega = \frac{1-\omega}{\omega} D - U.$$

39. Escreva um programa que implemente o método de Gauss-Seidel com relaxação.

    O programa deve ter como output a solução aproximada do sistema, para uma tolerância dada, e o número de iterações que foram necessárias para obter essa solução.

    Teste o seu programa, com $\omega = 0.9$ e com $\omega = 1.1$, no sistema

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 = 24 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 30 \\ -x_2 + 4x_3 = -24 \end{cases}$$

    usando $\mathbf{x}^{(0)} = (1,1,1)$ e $tol = 10^{-9}$.

40. Determine o valor otimal de ω, no método de Gauss-Seidel com relaxação, para o sistema

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 = 24 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 30 \\ -x_2 + 4x_3 = -24 \end{cases}$$

    usando $\mathbf{x}^{(0)} = (1,1,1)$ e $tol = 10^{-12}$.

    Compare com o número de iterações necessárias quando $\omega = 1$. (Resposta: $\omega \approx 1.25$)

41. Escreva um programa para implementar o método de Newton para sistemas de equações.

    A solução determinada com erro inferior a 10^{-m}, com m fornecido pelo utilizador e o programa deve fornecer também o número de iterações necessárias para atingir a solução.

    O programa deverá também funcionar no caso unidimensional.

42. Para aplicar o método de Newton ao sistema

$$\begin{cases} x_1\,(1 - x_1) + 4x_2 = 12 \\ (x_1 - 2)^2 + (2x_2 - 3)^2 = 25 \end{cases}$$

    qual dos vetores iniciais

$$X^{(0)} = (2,4) \quad \text{ou} \quad X^{(0)} = (0,0)$$

    é preferivel? Justifique.

    Calcule dez iteradas do método de Newton para cada um dos vectores iniciais acima.

43. Calcule a solução do sistema

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2 = 37 \\ x_1 - x_2^2 = 5 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \end{cases} .$$

    que está mais perto da origem.

44. Calcule todas as soluções complexas da equação

$$z^4 + 4z^3 + 6z^2 + 4z + 17 = 0$$

    com erro inferior a 10^{-9}.

45. Use o método de Euler para achar uma aproximação à solução do problema de valores iniciais

$$\begin{cases} x'(t) = 1 + \frac{x(t)}{t} \\ x(1) = 2 \end{cases}, \quad 1 \leq t \leq 2,$$

para $h = 0.25$, $h = 0.1$ e $h = 0.01$.

46. Repita o problema anterior usando o método de Euler regressivo (implicito).

47. A solução do problema de valores iniciais

$$\begin{cases} x'(t) = 1 + \frac{x(t)}{t} \\ x(1) = 2 \end{cases}, \quad 1 \leq t \leq 2,$$

é $x(t) = t(2 + \log t)$.

Use o método do trapésio e o método de Heun, com $h = 0.1$, para calcular aproximações a $x(t)$.

Comparando graficamente as soluções numéricas com a solução exata, qual dos dois métodos parece melhor?

48. Use o método de Taylor de ordem 2 para aproximar a solução do problema de valores iniciais

$$\begin{cases} x'(t) = 1 + (t - x(t))^2 \\ x(2) = 1 \end{cases}, \quad 2 \leq t \leq 3.$$

Use $h = 0.01$.

49. Escreva a expressão geral para o método de Taylor de ordem 3.

Aplique a expressão obtida no PVI

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) \\ x(0) = 1 \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq T,$$

e determine a expressão explícita das aproximações w_k, $k = 0, 1, ..., N$.

Trace um gráfico comparando a solução exata com as aproximações w_k quando $T = 10$ e $N = 100$.

50. Mostre que o método de Taylor de ordem 2 é absolutamente estável se e só se $h < \frac{2}{|a|}$.

51. Qual o domínio de estabilidade absoluta do método de Euler implícito?

52. Use o método das diferenças finitas para achar uma solução numérica para o problema de valores na fronteira

$$\begin{cases} y''(x) = y'(x) + 2y(x) + \cos x \\ y(0) = -0.3, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -0.1 \end{cases},$$

primeiro para $h = \frac{\pi}{10}$ e depois para $h = \frac{\pi}{100}$.

Sabendo que a solução exata é

$$\tilde{y}(t) = -\frac{1}{10}(\sin x + 3\cos x)$$

compare os resultados obtidos com os valores exatos.

53. Considere a função

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x \leq 0 \\ \\ 2x^3 - 3x^2 + 1 & \text{se} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ \\ 0 & \text{se} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

   (a) Trace o gráfico desta função.
   (b) Determine aproximações da solução do PVI

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases}, \quad 1 \leq x \leq 4$$

   para $t = 1, 2, ..., 10$ e trace o gráfico dessas soluções aproximadas usando:
      i. o método AR com $\lambda = 0.5$
      ii. o método AA com $\lambda = 0.5$
      iii. o método de Lax-Friedrichs com $\lambda = 0.8$ e com $\lambda = 1.6$

54. Repita o exercício anterior, para o PVI

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases}, \quad -4 \leq x \leq -1$$

   onde

$$u_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x \leq 0 \\ \\ 3x^2 - 2x^3 & \text{se} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ \\ 1 & \text{se} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

55. Estude a estabilidade absoluta dos métodos AA e Lax-Friedrichs para a equação de transporte

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

   Separe os casos $c > 0$ e $c < 0$.

56. Considere o PVI

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + rx\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \\ u(x,0) = x \end{cases}, \quad -4 \leq x \leq -1$$

   onde $r > 0$ é constante.

   (a) Deduza que a solução do PVI é

$$u(x,t) = xe^{-rt}$$

   (b) Determine aproximações à solução no retângulo $[0,10] \times [0,1]$ usando o esquema AR usando valores convenientes de l e h.
   (c) Compare o gráfico da solução com os gráficos das aproximações que calculou.

57. Mostre que, para a equação de adveção

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + c\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) + du(x,t) = 0$$

onde $d, c > 0$ são constantes, o esquema AR é estável se

$$\frac{h}{l} \leq \frac{1}{c}$$

58. Escreva um programa que implemente o esquema explícito para o problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \\ u(x,0) = u_0(x) & , \; 0 \leq x \leq L, \; 0 \leq t \leq T \\ u(0,t) = f(t), \; u(L,t) = g(t) \end{cases}$$

O utilizador deve introduzir os pârametros c, L, T, M (o número de subintervalos de $[0, L]$) e N (o número de subintervalos de $[0, T]$).

As funções $u_0(x)$, $f(t)$ e $g(t)$ são chamadas durante a execução do programa.

Teste o seu programa usando as funções

$$u_0(x) = x(1-x), \quad f(t) = g(t) = 0,$$

com os valores

$$c = L = T = 1$$

e com os valores

(a) $M = 50$, $N = 5000$

(b) $M = 50$, $N = 500$

59. Usando o método de von Neumann, analise a estabilidade do esquema implícito e do esquema de Crank-Nicolson.

60. Obtemos o chamado **esquema-θ**, onde $0 \leq \theta \leq 1$, substituindo na equação do calor:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t_k) = \frac{u(x_j, t_k + h) - u(x_j, t_k)}{h} + O(h)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t_k) \quad = \quad & \theta \frac{u(x_j + l, t_k + h) - 2u(x_j, t_k + h) + u(x_j - l, t_k + h)}{l^2} \\ & + (1-\theta)\frac{u(x_j + l, t_k) - 2u(x_j, t_k) + u(x_j - l, t_k)}{l^2} + O\left(l^2\right) \end{aligned}$$

(a) A que correspondem os casos especiais $\theta = 0$, $\theta = 1$ e $\theta = \frac{1}{2}$?

(b) Encontre as expressões para o esquema-θ e descreva a implementação deste esquema.

(c) Usando o método de von Neumann, estude a estabilidade do esquema-θ e determine para que valores de θ se tem estabilidade incondicional.

61. Usando a diferença finita retardada

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t_k) = \frac{u(x_j, t_k) - u(x_j, t_k - h)}{h} + O(h),$$

em vez da diferença finita avançada, na dedução do esquema explícito central, obtenha o esquema implícito central, para a equação de adveção-difusão.

62. Descreva a implementação do esquema implícito e do esquema de Crank-Nicolson, para a equação de Black-Sholes.

63. Faça um programa que implemente o esquema explícito para a equação de Black-Sholes para uma Put europeia.

    Os valores de entrada para esses programas devem incluir: a taxa de juro sem risco r, a volatilidade σ e o preço inicial $S0$ do subjacente, bem como o limite $S\max$, o strike K e a maturidade T.

    Teste o seu programa para a Put europeia com os dados

$$r = 10\%,\ \sigma = 40\%,\ S0 = 50,\ S\max = 100,\ K = 50,\ T = \frac{5}{12}$$

    Use os valores de passo $l = 0.5$ e $h = \frac{5}{2400}$. (Resposta: $v \approx 4.0718$)

    Trace o gráfico do preço desta Put para $0 \leq t \leq T$ $(t = T - \tau)$.

64. Faça um programa que implemente o esquema explícito para a equação de Black-Sholes para uma Call europeia.

    Teste o seu programa com os dados

$$r = 10\%,\ \sigma = 40\%,\ S0 = 50,\ S\max = 100,\ K = 50,\ T = \frac{5}{12}$$

    Use os valores de passo $l = 0.5$ e $h = \frac{5}{2400}$.

    Compare o resultado obtido usando a relação de paridade e o exercício 63.

65. Dados $S_0 > 0$ e $K > 0$, consideremos um valor (barreira) $S_b > \max\{S_0, K\}$.

    Uma Put Down-and-Out (PDO) é uma Put que expira se o preço S do subjacente verifica $S(\tau) < S_b$.

    Considere uma implementação da equação de Black-Sholes, para a PDO, usando diferenças finitas:

    (a) Assumindo monitorização contínua, quais as condições de fronteira que são adequadas para realizar esta implementação?

    (b) Faça um programa que implemente o esquema de Crank-Nicolson para esta opção.

    (c) Teste o seu programa com os dados

$$r = 10\%,\ \sigma = 40\%,\ S0 = 50,\ Sb = 40,\ S\max = 100,\ K = 50,\ T = \frac{5}{12}$$

    Use os valores de passo $l = 0.5$ e $h = \frac{1}{1200}$. (Resposta: $v \approx 0.5414$)

66. Implemente o método explícito para uma Put americana.

    Teste o seu programa com os dados

$$r = 10\%,\ \sigma = 40\%,\ S0 = 50,\ S\max = 100,\ K = 50,\ T = \frac{5}{12}$$

    Use os valores de passo $l = 1$ e $h = \frac{1}{100}$.

    Trace o gráfico da fronteira de exercício.

67. Implemente o método de Crank-Nicolson para uma Put americana usando o método de Gauss-Seidel para resolver o sistema de equações em cada passo.

    Teste o seu programa com os dados

$$r = 10\%,\ \sigma = 40\%,\ S0 = 50,\ S\max = 100,\ K = 50,\ T = \frac{5}{12}$$

    Use os valores de passo $l = 1$ e $h = 0.01$. (Resposta: $v \approx 4.2778$)

    Repita com os valores de passo $l = 0.01$, $h = 0.01$ e trace os gráficos do preço e da fronteira de exercício.

68. Calcule, usando o método de Monte Carlo, o integral

$$\int\int_{x^2+y^2<1} e^{x^2+y^2} dxdy$$

69. Faça um programa que permita calcular o preço de uma put europeia no modelo binomial com N periodos.

    Os dados de entrada deverão ser os valores de N, o preço inicial do ativo S_0, o strike K, a taxa de juro sem risco r, os fatores u e d e a data $t = 0, 1, ..., N-1$.

70. Faça um programa para gerar m realizações independentes de uma variável aleatória com distribuição $\exp(\mu)$.

71. Use o programa do exercício anterior para simular m realizações independentes de uma variável de Poisson.

72. Considere a função

$$f(x) = 30\left(x^2 - 2x^3 + x^4\right)\mathbf{1}_{[0,1]}$$

    (a) Mostre que $f(x)$ é a densidade de probabilidade de uma variável aleatória X e calcule a função cumulativa F_X.
    (b) Implemente o método da aceitação-rejeição para simular X (Sugestão: calcule $\max f$)
    (c) Seria fácil implementar o método da transformação inversa para simular X?

73. Faça um programa para simular a trajetória do movimento Browniano, no intervalo $[0, 1]$, usando uma partição deste intervalo em 100 partes iguais.

    Represente num mesmo gráfico 20 trajetórias distintas (a azul) e $E[W_t]$, $0 \leq t \leq 1$ (a vermelho), usando essas trajetórias.

74. Uma opção de média aritmética asiática com média discreta tem o payoff

$$U_T = \max\left(\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} S_{t_k} - K, 0\right)^+$$

    onde

$$0 = t_0 < t_1 < ... < t_k < ... < t_N = T$$

    é um conjunto fixado de datas no intervalo $[0, T]$.

    Inspirando-se no Exemplo 8.9, escreva um programa que permita calcular o preço U_0, na data t_0, desta opção, no modelo de Black-Sholes.

    Teste o seu programa com os dados:

$$S_0 = 50,\ K = 50,\ r = 10\%,\ \sigma = 0.4,\ T = 5/12,\ N = 5$$

    usando $m = 5000$ e $m = 50000$ replicações.

75. Faça um programa para simular a trajetória de um processo de Poisson, de taxa $\lambda > 0$, no intervalo $[0, T]$, $T > 0$, usando uma partição deste intervalo em 100 partes iguais.

    Os dados de entrada deverão ser o horizonte T e a taxa λ.

    Experimente com vários valores para os dados de entrada (por exemplo: $T = 10$, $\lambda = 1$) e represente os resultados graficamente.

76. Um processo de Merton é um processo estocástico da forma

$$S_t = S_0 e^{X_t}$$

    onde $S_0 > 0$ é uma constante e

$$X_t = \mu t + \sigma W_t + \sum_{k=0}^{N_t^\lambda} Y_k$$

    onde μ, σ e λ são constantes positivas, N_t^λ é um processo de Poisson de taxa λ, W_t é um movimento browniano e $Y_k \sim \mathcal{N}(0, \eta)$, $\eta > 0$ constante, para todo k.

    Escreva um programa que permita simular a trajetória de um processo de Merton, num horizonte temporal $T > 0$.

77. Considere o esquema de Euler-Maruyama para a equação

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

    Qual é a distribuição dos retornos

$$R_k = \frac{S_{t_k}}{S_{t_{k-1}}}, \; k = 1, ..., N$$

    calculados pelo esquema numérico?

    Compare com a distribuição dos retornos que se obtêm da equação.

78. Faça um programa para implementar o método de Euler-Maruyama.

    Teste o seu programa para simular trajetórias do processo de Cox-Ingersoll-Ross para as taxas a prazo r_t:

$$dr_t = \gamma (\bar{r} - r_t) dt + \sqrt{\alpha r_t} dW_t$$

    Use os valores $\gamma = 0.2$, $\alpha = 0.01$, $\bar{r} = 0.05$ e $r_0 = 0.04$.

79. Repita o exercício anterior com o método de Milstein.