

Métodos Numéricos

Prova teórica

Recorrência: 08-01-2019

Esta prova tem uma página e 5 questões.

Duração: 1h:30m.

Apresente detalhadamente todos os cálculos

Escreva todas as fórmulas usadas.

1. (3.0 valores) Descreva, tão detalhadamente quanto possível, **2** maneiras distintas de construir o polinómio interpolador a um conjunto de dados

$$\{(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)\}$$

2. (3.0 valores) Usando desenvolvimentos de Taylor apropriados deduza a fórmula

$$f''(t) = \frac{4f\left(t + \frac{h}{2}\right) - 8f(t) + 4f\left(t - \frac{h}{2}\right)}{h^2} + O(h^2)$$

3. (3.0 valores) Escreva as duas primeiras iteradas, $\mathbf{x}^{(1)}$ e $\mathbf{x}^{(2)}$, do método de Gauss-Seidel para o sistema

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 = 24 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 30 \\ -x_2 + 4x_3 = -24 \end{cases}$$

usando a aproximação inicial $\mathbf{x}^{(0)} = (1, 1, 1)$.

4. (3.0 valores) Descreva o método do trapézio, com passo h , para calcular aproximações à solução $x(t)$ do problema de valores iniciais

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq T,$$

5. (3.0 valores) Considere a equação do calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \alpha > 0$$

Usando as aproximações

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) \approx \frac{u(t+h, x) - u(t-h, x)}{2h}$$

e

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) \approx \frac{u(t, x+l) - 2u(t, x) + u(t, x-l)}{l^2}$$

para $h \approx 0$, deduza o esquema às diferenças finitas

$$w_j^{k+1} = w_j^{k-1} + 2\alpha\mu(w_{j+1}^k - 2w_j^k + w_{j-1}^k), \quad \mu = \frac{h}{l^2}$$

e mostre que este esquema é instável para $\mu > \frac{1}{8\alpha}$.

(Total: 15 valores)

Fim