

Métodos Numéricos

Prova teórica

1ª Data: 10-12-2019

Esta prova tem duas páginas e 5 questões.

Duração: 1h:30m.

Apresente detalhadamente todos os cálculos

Escreva todas as fórmulas usadas.

1. (3.0 valores) Descreva as relações que tem que ser impostas aos polinómios

$$S_k(x), \quad k = 0, \dots, n$$

de modo a que a função

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) & \text{se } x_0 \leq x \leq x_1 \\ \vdots & \\ S_k(x) & \text{se } x_k \leq x \leq x_{k+1} \\ \vdots & \\ S_{n-1}(x) & \text{se } x_{n-1} \leq x \leq x_n \end{cases}$$

seja um spline cúbico natural, nos pontos

$$(x_k, y_k), \quad k = 0, \dots, n$$

2. (3.0 valores) Calcule, usando a regra de Simpson composta, o valor de

$$\int_0^{2\pi} \cos x \, dx$$

com erro absoluto inferior a 0.001.

3. (3.0 valores) Obtenha a fatorização LU da matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 3 & -3 \\ 1 & -1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

4. (3.0 valores) Descreva o método de Taylor, de ordem 2, com passo h , para calcular aproximações à solução $x(t)$ do problema de valores iniciais

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq T,$$

5. (3.0 valores) Considere a equação de transporte

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad c > 0$$

Usando as aproximações

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) \approx \frac{u(t+h, x) - u(t-h, x)}{2h}$$

e

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t, x) \approx \frac{u(t, x+l) - u(t, x-l)}{2l}$$

para $h, l \approx 0$, deduza o esquema salto-de-rã:

$$w_j^{k+1} = w_j^{k-1} + \lambda c (w_{j-1}^k - w_{j+1}^k), \quad \lambda = \frac{h}{l}$$

e mostre que este esquema é estável.

(Total: 15 valores)

Fim