Δημήτριος Πλατάκης 4/59

Άσκηση 1 Σειρά Ασκήσεων 2

- Έχουμε το πλήθος παρατηρήσεων $X=\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$
- Αρχικά ας υποθέσουμε ότι έχουμε μονάχα την παρατήρηση x_1 τότε το likelihood θα είναι -δεδομένου x_1-: $L(\lambda|x_1)=\lambda\cdot e^{-\lambda x_1}$
- Παρομοίως δεδομένου μονάχα το x_2: $L(\lambda|x_2)=\lambda\cdot e^{-\lambda x_2}$

- Τώρα αν υποθέσουμε ότι έχουμε και τις δυο παρατηρήσεις x_1 και x_2: $L(\lambda|x_1 \text{ και } x_2)=L(\lambda|x_1)\cdot L(\lambda|x_2)$

$$= \lambda\cdot e^{-\lambda x_1}\cdot\lambda\cdot e^{-\lambda x_2}$$
$$= \lambda^2\cdot e^{-\lambda(x_1+x_2)}$$

- Τέλος ας υποθέσαμε ότι έχουμε όλο το σύνολο παρατηρήσεων $X=\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$: $L(\lambda|x_1,x_2,\dots,x_n)=L(\lambda|x_1)\cdot L(\lambda|x_2)\cdots L(\lambda|x_n)$

$$=\lambda\cdot e^{-\lambda x_1}\cdot\lambda\cdot e^{-\lambda x_2}\cdots\lambda\cdot e^{-\lambda x_n}$$
$$=\lambda^n\cdot\left[e^{-\lambda(x_1+x_2+\dots+x_n)}\right]$$

- Τώρα για να βρούμε το μέγιστο θα βρούμε που μηδενίζεται η παράγωγος. Για ευκολία στις πράξεις θα ψάξουμε τις παραγώγου του λογαρίθμου, πράγμα που μπορούμε να κάνουμε αφού μηδενίζονται στο ίδιο μέρος

$$\frac{d}{d\lambda}\log\left[L(\lambda|x_1,x_2,\dots,x_n)\right]=\frac{d}{d\lambda}\log\left(\lambda^n\cdot\left[e^{-\lambda(x_1+x_2+\dots+x_n)}\right]\right)=$$

$$=\frac{d}{d\lambda}\left(\log(\lambda^n)+\log\left(e^{-\lambda(x_1+x_2+\dots+x_n)}\right)\right)=\frac{d}{d\lambda}\left(n\cdot\log\lambda-\lambda(x_1+x_2+\dots+x_n)\right)=\frac{n}{\lambda}-(x_1+x_2+\dots+x_n)$$

Εξισώνω με το 0 $\rightarrow \frac{n}{\lambda}-(x_1+x_2+\dots+x_n)=0\Rightarrow\frac{n}{\lambda}=x_1+x_2+\dots+x_n\Rightarrow\lambda=\frac{n}{x_1+x_2+\dots+x_n}$