Лекция 7:

7.1 Второй замечательный предел

Пример 1: Докажем, что $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$.

Пусть $Y=\mathbb{N}$, $\overset{\circ}{U}_Y(\infty)=\{n\in\mathbb{N}: n\geq N\}$, $X=\{x\in\mathbb{R}: x>0\}$, $\overset{\circ}{U}_X(+\infty)=\{x\in\mathbb{R}: x>R\}$, где $N\in\mathbb{N}$ и $R>0$. Пусть $f: X\to Y$, т.ч. $f(x)=[x]$, где $[x]$ – целая часть x.

Для всякой $\overset{\circ}{U}_Y(\infty)=\{n\geq N\}$ можно найти $\overset{\circ}{U}_X(+\infty)=\{x>N+1\}$ со свойством, что для $x\in\{x>N+1\}$ целая часть $[x]\in\{n\geq N\}$.

Рассмотрим $g(n)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $g_1(n)=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n$ и $g_2(n)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$, которые имеют своим пределом при $n\to\infty$ число e. Тогда по теореме 2

$$(g\circ f)(x)=\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]},\quad (g_1\circ f)(x)=\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]},\quad (g_2\circ f)(x)=\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}$$

стремятся при $x\to+\infty$ к числу e.

Заметим, что при $x\geq 1$

$$\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]}<\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1},$$

поэтому $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$. Далее, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim\limits_{(-t)\to-\infty}\left(1-\frac{1}{t}\right)^{-t}=\lim\limits_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^t=$

$$=\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t-1}\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)=\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t-1}=\lim_{u\to+\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^u=e$$

Осталось только заметить, что из $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$ и $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$ вытекает

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$$

В силу $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$, для $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta_+>0\ \forall x\ (x>\delta_+)\Rightarrow\left|\left(1+\frac{1}{x}\right)^x-e\right|<\varepsilon$, а в силу $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$, для $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta_->0\ \forall x\ (x<\delta_-)\Rightarrow\left|\left(1+\frac{1}{x}\right)^x-e\right|<\varepsilon$. Тогда для $\forall\varepsilon>0$ при $|x|>\delta=\max\{|\delta_-|,|\delta_+|\}$ будем иметь, что

$$\left|\left(1+\frac{1}{x}\right)^x-e\right|<\varepsilon.$$

По определению это и означает, что $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$. ◀

7.2 Предел монотонных функций

Определение 7.1: Функция $f: X\to\mathbb{R}$ называется

1) убывающей на X $\Leftrightarrow$ $\forall x';x''\in X$, т.ч. $x'<x''\Rightarrow f(x')>f(x'')$;
2) невозрастающей на X $\Leftrightarrow$ $\forall x';x''\in X$, т.ч. $x'<x''\Rightarrow f(x')\geq f(x'')$;
3) неубывающей на X $\Leftrightarrow$ $\forall x';x''\in X$, т.ч. $x'<x''\Rightarrow f(x')\leq f(x'')$;
4) возрастающей на X $\Leftrightarrow$ $\forall x';x''\in X$, т.ч. $x'<x''\Rightarrow f(x')<f(x'')$.

Функция называется монотонной на X, если она одного из типов 1) – 4).

Теорема 7.1: (о пределе монотонной функции) Неубывающая на множестве X функция f имеет предел при $x \to s$, где $s = \sup X$, тогда и только тогда, когда f ограничена сверху (т.е. $\exists C \in \mathbb{R}\ \forall x \in X \Rightarrow f(x) < C$).
Аналогично, невозрастающая на множестве X функция f имеет предел при $x \to i$, где $i = \inf X$, тогда и только тогда, когда f ограничена снизу.

Доказательство: Пусть существует $\lim\limits_{x\to s} f(x)$, и он равен A. Тогда по определению предела найдётся проколотая окрестность $\overset{\circ}{U}(s)$ точки s во множестве X, т.ч. функция f ограничена на $\overset{\circ}{U}(s)$. Поскольку функция f неубывающая, то f ограничена сверху на X.

Пусть неубывающая функция f ограничена сверху на X. Докажем что $\lim\limits_{x\to s} f(x)$ существует. В силу ограниченности сверху существует $A = \sup\limits_{x\in X\setminus\{s\}} f(x)$. По определению точной верхней грани $\forall \varepsilon > 0\ \exists x' \in X \setminus \{s\}$, т.ч.

$$A - \varepsilon < f(x') \leq A < A + \varepsilon.$$

В силу неубывания для всех $x \in X \setminus \{s\}$, т.ч. $x' < x$, будем иметь

$$A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon.$$

Так как $s = \sup X$, то $\lim\limits_{x\to s} f(x) = A$.

Второй случай рассматривается аналогично ◀

7.3 Сравнение функций

Определение 7.2: Функция f называется бесконечно малой по сравнению с функцией g при $x \to x_0$ ($x_0 \in \mathbb{R}$ или x_0 – одна из бесконечностей) $\Leftrightarrow$ когда существует $\overset{\circ}{U}(x_0)$, т.ч. в ней выполняется соотношение

$$f(x) = \alpha(x)\, g(x),$$

где $\alpha(x)$ — бесконечно малая функция при $x \to x_0$.

Обозначение: $f = o(g)$ („f является о-малым от g")

Если $f = o(g)$ при $x \to x_0$, и g — бесконечно малая функция при $x \to x_0$, то f называется бесконечно малой более высокого порядка по сравнению с g при $x \to x_0$.

Если $f = o(g)$ при $x \to x_0$, и f, g — бесконечно большие при $x \to x_0$, то функция g называется бесконечно большой более высокого порядка по сравнению с f при $x \to x_0$.

Пример 7.2: 1) $x^2 = o(x)$ при $x \to 0$, т.к. $x^2 = x \cdot x$.

2) $x = o(x^2)$ при $x \to \infty$, т.к. $x = \frac{1}{x} \cdot x^2$ при $x \neq 0$

3) $f = o(1)$ при $x \to x_0 \Rightarrow f$ является бесконечно малой при $x \to x_0$.

4) $\frac{1}{x^2} = o\left(\frac{1}{x}\right)$ при $x \to \infty$ и $\frac{1}{x} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0 \Rightarrow \frac{1}{x^2}$ – бесконечно малая более высокого порядка по сравнению с $\frac{1}{x}$ при $x \to \infty$

5) $\frac{1}{x} = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ при $x \to 0$ и $\frac{1}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} \infty$, $\frac{1}{x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} \infty$

$\Rightarrow \frac{1}{x^2}$ – бесконечно большая более высокого порядка по сравнению с $\frac{1}{x}$ при $x \to 0$.

Определение 7.3: Будем писать $f = O(g)$ при $x \to x_0$ („f является O-большим относительно g“) $\Leftrightarrow$ когда существует $\mathring{U}(x_0)$, т.ч. в ней выполнено соотношение $f(x) = \beta(x) g(x)$, где $\beta(x)$ — ограниченная в $\mathring{U}(x_0)$ функция.

Функции f и g являются **функциями одного порядка при $x \to x_0$** $\Leftrightarrow$ когда при $x \to x_0$ $f = O(g)$ и $g = O(f)$. Это, очевидно, эквивалентно тому, что в некоторой $\mathring{U}(x_0)$ выполняется

$$C_1 |g(x)| \leqslant |f(x)| \leqslant C_2 |g(x)|,$$

где $C_1 > 0$ и $C_2 > 0$ — фиксированные константы

Пример 7.3: 1) $\left(\sin x + \frac{1}{x}\right) x = O(x)$ при $x \to \infty$, т.к. $\left|\sin x + \frac{1}{x}\right| \leqslant 2$ для достаточно больших $|x|$.

2) Заметим, что $x \leqslant (2 + \sin x) x \leqslant 3x$ для всех $x \in \mathbb{R}$. Поэтому функции x и $(2 + \sin x)x$ являются функциями одного порядка при $x \to \infty$. Однако, x и $(1 + \sin x)x$ уже не являются функциями одного порядка при $x \to \infty$.

Утверждение 7.1: При $x \to x_0$

1) $o(f) + o(f) = o(f)$;
2) $o(f)$ является $O(f)$;
3) $O(f) + O(f) = O(f)$;
4) $o(f) + O(f) = O(f)$;
5) Если $g(x) \neq 0$, то $\dfrac{o(f(x))}{g(x)} = o\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)$ и $\dfrac{O(f(x))}{g(x)} = O\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)$

Доказательство: 1) Рассмотрим сумму двух функций, которые являются $o(f)$ при $x \to x_0$:

$$\alpha_1(x) f(x) + \alpha_2(x) f(x) = (\alpha_1(x) + \alpha_2(x)) f(x) = \alpha_3(x) f(x),$$

где $\alpha_3(x) := \alpha_1(x) + \alpha_2(x) \longrightarrow 0 + 0$ при $x \to x_0$.

2) Если $\alpha(x)$ — бесконечно малая при $x \to x_0$, то $\alpha(x)$ ограничена в некоторой $\mathring{U}(x_0)$.

3) Рассмотрим сумму двух функций, которые являются $O(f)$ при $x \to x_0$:

$$\beta_1(x) f(x) + \beta_2(x) f(x) = (\beta_1(x) + \beta_2(x)) f(x) = \beta_3(x) f(x),$$

где $\beta_3(x) := \beta_1(x) + \beta_2(x)$ является ограниченной в некоторой $\mathring{U}(x_0)$.

4) Вытекает из 2) и 3)

5) Заметим, что

$$\frac{o(f(x))}{g(x)} = \frac{\alpha(x) f(x)}{g(x)} = \alpha(x) \frac{f(x)}{g(x)} = o\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)$$

и

$$\frac{O(f(x))}{g(x)} = \frac{\beta(x) f(x)}{g(x)} = \beta(x) \frac{f(x)}{g(x)} = O\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right).$$

Определение 7.4: Функция f **эквивалентна** функции g при $x \to x_0$ ($f \sim g$ при $x \to x_0$) $\Leftrightarrow$ когда существует $\mathring{U}(x_0)$, т.ч. в ней выполнено соотношение

$$f(x) = \gamma(x) g(x), \quad \text{где} \quad \lim_{x \to x_0} \gamma(x) = 1.$$

Так как $\lim\limits_{x\to x_0}\gamma(x)=1 \iff \gamma(x)=1+\alpha(x)$ в некоторой $\overset{\circ}{U}(x_0)$, где $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$, то $f\sim g$ при $x\to x_0 \iff f(x)=g(x)+\alpha(x)g(x)=g(x)+o(g(x))$ при $x\to x_0$.

Пример 7.4: 1) $\ln(1+x)\sim x$ при $x\to 0$ или $\ln(1+x)=x+o(x)$ при $x\to 0$.

Действительно,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{1/x}\overset{?}{=}\ln\left(\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}\right)=\ln\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right)=\ln e=1.$$

2) $e^x=1+x+o(x)$ при $x\to 0$ или $e^x-1\sim x$ при $x\to 0$.

Действительно,

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\Big/\begin{matrix}\text{замена}\\ x=\ln(1+t)\end{matrix}\Big/=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\ln(1+t)}=1.$$

3) $(1+x)^\alpha=1+\alpha x+o(x)$ при $x\to 0$ или $(1+x)^\alpha\sim 1+\alpha x$ при $x\to 0$.

Действительно,

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha\ln(1+x)}-1}{\alpha\ln(1+x)}\cdot\frac{\alpha\ln(1+x)}{x}=\Big/\begin{matrix}\text{замена}\\ t=\alpha\ln(1+x)\end{matrix}\Big/=\alpha\lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\alpha$$

Утверждение 7.2: Пусть $f_1\sim f_2$ при $x\to x_0$. Тогда $\lim\limits_{x\to x_0}f_1(x)g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}f_2(x)g(x)$, если один из этих пределов существует.

Доказательство:

$$\lim_{x\to x_0}f_1(x)g(x)=\lim_{x\to x_0}\gamma(x)f_2(x)g(x)=\left(\lim_{x\to x_0}\gamma(x)\right)\left(\lim_{x\to x_0}f_2(x)g(x)\right)=\lim_{x\to x_0}f_2(x)g(x)\ \blacktriangleleft$$

Пример 7.5: 1)
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{\sin x^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos^2 x}{x^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-\sin^2 x)}{x^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{-\sin^2 x}{x^2}=$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{-x^2}{x^2}=-\frac{1}{2}.$$

2)
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}-1\right)=\lim_{x\to+\infty}x\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)-1\right)=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}+x\cdot o\left(\frac{1}{x}\right)\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}+o(1)\right)=\frac{1}{2}.\ \blacktriangleleft$$

7.4 Таблица асимптотических формул

При $x\to 0$ справедливы асимптотические разложения

$$e^x=1+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\dots+\frac{1}{n!}x^n+O(x^{n+1})$$
$$\sin x=\frac{1}{1!}x-\frac{1}{3!}x^3+\dots+\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}+O(x^{2k+3})$$
$$\cos x=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+\dots+\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}+O(x^{2k+2})$$
$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\dots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n+O(x^{n+1})$$
$$(1+x)^\alpha=1+\frac{\alpha}{1!}\cdot x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\dots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{n!}+O(x^{n+1})$$

Отметим, что

$$O(x^{n+1})=x^{n+1}\cdot O(1)=x^n\cdot x\cdot O(1)=x^n o(1)=o(x^n)\ \text{при}\ x\to 0.$$