Лекция 15:

15.1 Равномерная сходимость функциональных рядов

Переформулируем определения 13.1 и 13.2 поточечной и равномерной сходимости функциональной последовательности $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ на мн-ве E, в терминах величин

$$r_n(x) := |f_n(x) - f(x)| \quad \text{и} \quad r_n := \sup_E r_n(x).$$

$$(15.1) \qquad f_n(x) \underset{n\to\infty}{\to} f(x) \text{ на } E \Leftrightarrow \forall x \in E \;\; r_n(x) \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

$$(15.2) \qquad f_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f(x) \text{ на } E \Leftrightarrow r_n \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Пример 15.1: Рассмотрим послед-ть $f_n(x) = \dfrac{\sin n^2 x}{n} \underset{n\to\infty}{\to} 0$ на $\mathbb{R}$.
В силу $r_n = \sup\limits_{\mathbb{R}} \left|\dfrac{\sin n^2 x}{n}\right| \le \dfrac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\to} 0$ заключаем, что
$$\frac{\sin n^2 x}{n} \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} 0 \text{ на } \mathbb{R}$$

Теорема 15.1: (критерий Коши равномерной сходимости функц посл-ти)
$$f_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f(x) \text{ на } E \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0 \; \exists N \in \mathbb{N}, \text{ т.ч. } \forall n>N \; \forall m>N \text{ и } \forall x \in E \Rightarrow |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Доказательство: ($\Rightarrow$) Пусть $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f(x)$ на E. Тогда $\forall \varepsilon>0 \; \exists N \in \mathbb{N}$, т.ч. $\forall n > N$ и $\forall x \in E$ будет выполняться неравенство $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/2$. Значит для любых $n>N$, любых $m>N$ и $\forall x \in E$ будет
$$|f_n(x) - f_m(x)| \le |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

($\Leftarrow$) Пусть $\forall \varepsilon>0 \; \exists N \in \mathbb{N}$, т.ч. $\forall n>N \; \forall m>N$ и $\forall x \in E \Rightarrow |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$. Тогда, очевидно, что $f_m(x) \underset{m\to\infty}{\to} f(x)$ на E. Поэтому, переходя к пределу по $m\to\infty$, получим, что
$$\forall \varepsilon>0 \; \exists N \in \mathbb{N}, \text{ т.ч. } \forall n>N \text{ и } \forall x \in E \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon.$$
Откуда $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f(x)$ на E.

Следствие 1: (критерий Коши равномерной сходимости функц-го ряда)
Функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится равномерно на $E \Leftrightarrow$ когда $\forall \varepsilon>0 \; \exists N \in \mathbb{N}$, т.ч. $\forall m \ge n > N$ и $\forall x \in E$ выполняется
$$\left|\sum_{k=n}^{m} f_k(x)\right| < \varepsilon.$$

Следствие 2: (необходимое условие равномерной сходимости ряда)
Пусть функц- ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится равномерно на E.
Тогда $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} 0$ на E.

Пример 15.2: Известно, что $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ на $\mathbb{R}$ (даже на $\mathbb{C}$). При этом $r_n = \sup\limits_{\mathbb{R}} \frac{x^n}{n!} = +\infty$. Поэтому, этот ряд не сходится равномерно на $\mathbb{R}$. ◀

15.2 Признак Вейерштрасса равномерной сходимости ряда

Теорема 15.2 Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n(x)$, т.ч. $|f_n(x)| \leq g_n(x)$ для всех $x \in E$ и для всех достаточно больших $n \in \mathbb{N}$. Тогда, если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ сходится равномерно на E, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится на E абсолютно и равномерно.

Доказательство: В силу условия и неравенства треугольника справедлива оценка

$$(*) \qquad \left| \sum_{k=n}^{m} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n}^{m} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n}^{m} g_k(x) = \left| \sum_{k=n}^{m} g_k(x) \right|$$

Из равномерной сходимости $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ на E по критерию Коши $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}$, т.ч. $\forall m \geq n > N$ выполняется $\left| \sum\limits_{k=n}^{m} g_k(x) \right| < \varepsilon$.
Но тогда по критерию Коши из $(*)$ следует, что на E равномерно сходятся $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$. ◀

Следствие 1. (мажорантный признак Вейерштрасса равн. сходимости) Пусть функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ такой, что существует сходящийся числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ с $|f_n(x)| \leq a_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$ достаточно больших и всех $x \in E$. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится на E абсолютно и равномерно.

Доказательство: Сходящийся числовой ряд можно считать равномерно сходящимся на E функциональным рядом с $g_n(x) = a_n$ для $x \in E$. ◀

Определение 15.1: Функциональный ряд вида $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$, где $a_n \in \mathbb{R}$, $x, x_0 \in \mathbb{R}$ ($a_n \in \mathbb{C}$, и $x, x_0 \in \mathbb{C}$), называется **степенным рядом**. Точка x_0 – центр этого ряда.

Теорема 15.3: Пусть степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ сходится в т. $t \neq x_0$. Тогда он сходится абсолютно и равномерно на интервале (круге в комплексном случае) $|x - x_0| < q|t - x_0|$ где $0 < q < 1$.

Доказательство: Числовой ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (t-x_0)^n$ сходится, поэтому при $n \to \infty$ $a_n (t-x_0)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Если $|x - x_0| < q|t - x_0|$, то

$$|a_n (x-x_0)^n| = |a_n (t-x_0)^n| \left| \frac{x-x_0}{t-x_0} \right|^n \leq |a_n (t-x_0)^n| \cdot q^n < q^n$$

при всех достаточно больших $n \in \mathbb{N}$. Тогда по признаку Вейерштрасса в силу сходимости $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ при $0 < q < 1$ ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ сходится абсолютно и равномерно на $|x - x_0| < q|t - x_0|$. ◀

Теорема 15.4: Степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ сходится в интервале сходимости $(-R+x_0, x_0+R)$ (круге $|x-x_0|<R$ в комплексном случае) радиус, которого определяется по формуле Коши - Адамара
$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$
Вне замыкания этого интервала (круга) ряд расходится. На любом подотрезке $[a;b] \subset (-R+x_0, x_0+R)$ (замкнутом круге, лежащем строго внутри круга $|x-x_0|<R$) степенной ряд сходится абсолютно и равномерно.

Пример 15.3: Степенные ряды $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ имеют радиусы сходимости, равные 1. В тоже время первый ряд не сходится равномерно на $(-1;1)$, т.к для всех $n \in \mathbb{N}$ и x достаточно близких к 1
$$\left| \frac{x^n}{n} + \ldots + \frac{x^{2n}}{2n} \right| > \frac{1}{2} \left| \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{2n} \right| > \frac{1}{4}.$$
Второй ряд в силу оценки $\left|\frac{x^n}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$ на $[-1;1]$ по признаку Вейерштрасса сходится абсолютно и равномерно на $[-1;1]$. ◀

15.3 Признак Абеля – Дирихле

Определение 15.2: Функциональная последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ равномерно ограничена на множестве E, если существует $M \in \mathbb{R}$, т.ч. для всех $n \in \mathbb{N}$ и всех $x \in E$ справедливо $|f_n(x)| \leq M$ (альтернат. $\sup\limits_E |f_n(x)| \leq M$)

Определение 15.3: Функциональная последовательность $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ называется неубывающей (невозрастающей) на E, если для любого $x_0 \in E$ числовая последовательность $\{g_n(x_0)\}$ не убывает (не возрастает).
Неубывающие и невозрастающие — монотонные.

Теорема 15.5: (признак Абеля - Дирихле равномерной сходимости)
Для равномерной сходимости на мн-ве E ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) g_n(x)$ достаточно, чтобы выполнялась любая пара условий:

$\alpha_1)$ последовательность $\{S_n(x)\}$, где $S_n(x) = f_1(x) + \ldots + f_n(x)$, равномерно ограничена на E;

$\beta_1)$ последовательность $\{g_n(x)\}$ монотонна на E и $g_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} 0$ на E;

или

$\alpha_2)$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится равномерно на E;

$\beta_2)$ последовательность $\{g_n(x)\}$ монотонна на E и равномерно ограничена на E.

Пример 15.4: Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} e^{inx}$. В силу $\left|\frac{1}{n^\alpha} e^{inx}\right| = \frac{1}{n^\alpha}$ можно заключить, что ряд расходится при $\alpha < 0$ и сходится абс. и равномерно на $\mathbb{R}$ при $\alpha > 1$.

Теорема 15.6: (вторая теорема Абеля о степенных рядах)

Пусть степенной ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ сходится в некоторой точке $\xi \in \mathbb{R}$. Тогда он сходится равномерно на отрезке с концами x_0, ξ.

Доказательство: Точки отрезка параметризуются в виде

$$x = x_0 + (\xi - x_0)t,$$

где $0 \le t \le 1$. Подставив выражение для x в ряд, получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (\xi - x_0)^n t^n$$

По условию числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (\xi - x_0)^n$ сходится (выполняется α_2), а последовательность t^n монотонна и равномерно ограничена на отрезке $[0;1]$ (выполняется β_2). Поэтому по признаку Абеля-Дирихле степенной ряд сх-ся равномерно на отрезке ◀