Лекция 4:

4.1 Формула Ньютона – Лейбница

Теорема 4.1: Пусть функция $f: [a;b] \to \mathbb{R}$ непрерывна на $[a;b]$. Тогда эта функция имеет на этом отрезке первообразную, при этом любая первообразная функции f на отрезке $[a;b]$ имеет вид
$$\mathcal{F}(x) = \int_a^x f(t)dt + C, \text{ где } C \in \mathbb{R}.$$

Доказательство: Т.к. функция f непрерывна на $[a;b]$, то она и интегрируема на $[a;b]$. Поэтому по лемме 3.2 функция f имеет первообразную на $[a;b]$, равную интегралу $F(x)$ с переменным верхним пределом. Как следует из теоремы Лагранжа о конечном приращении две первообразные функции f на промежутке $[a;b]$ отличаются на постоянную. Следовательно,
$$\mathcal{F}(x) = \int_a^x f(t)dt + C.$$
◀

Первообразная F на промежутке $[a;b]$ функции f – это функция, т.ч. $F'(x) = f(x)$ во всех точках промежутка. Расширим понятие первообразной: будем требовать выполнение равенства $F'(x) = f(x)$ во всех точках промежутка за исключением, может быть, конечного их числа.

Теорема 4.2: Пусть $f: [a;b] \to \mathbb{R}$ ограничена на $[a;b]$ и имеет на $[a;b]$ конечное число точек разрыва. Тогда функция f имеет на $[a;b]$ первообразную (в расширенном смысле), при этом любая первообразная функции f на $[a;b]$ имеет вид
$$\mathcal{F}(x) = \int_a^x f(t)dt + C, \quad \text{где } C \in \mathbb{R}.$$

Доказательство: Т.к. f имеет конечное число точек разрыва на $[a;b]$, то функция $f \in R[a;b]$. По лемме 3.2 интеграл $F(x)$ с переменным верхним пределом является первообразной функции f (в расширенном смысле) на отрезке $[a;b]$. При этом функция $F(x)$ непрерывна на $[a;b]$. Если $\mathcal{F}(x)$ – другая первообразная функции f на $[a;b]$, то разность $\mathcal{F}(x) - F(x)$ является постоянной на каждом промежутке разбиения отрезка $[a;b]$ точками разрыва функции f. В силу непрерывности $\mathcal{F}(x) - F(x)$ на $[a;b]$ следует, что $\mathcal{F}(x) - F(x) \equiv C$ на $[a;b]$ ◀

Теорема 4.3: Пусть $f: [a;b] \to \mathbb{R}$ – функция, ограниченная на $[a,b]$, с конечным числом точек разрыва. Тогда $f \in R[a;b]$, и
$$\int_a^b f(x)\,dx = \mathcal{F}(b) - \mathcal{F}(a),$$
где $\mathcal{F}$ – любая из первообразных функции f на $[a;b]$.

Доказательство: Из теоремы 4.2 $\mathcal{F}(x) = \int_a^x f(t)dt + C$. Положив $x=a$ в это равенство, получим $\mathcal{F}(a) = C$, т.е.

$$\int_a^x f(t)dt = \mathcal{F}(x) - \mathcal{F}(a).$$

В частности, $\int_a^b f(x)dx = \mathcal{F}(b) - \mathcal{F}(a)$ ◀

4.2 Интегрирование по частям в определённом интеграле.

Лемма 4.1: Пусть $u, v \in C^{(1)}(I)$, где I — отрезок с концами $[a;b]$. Тогда

$$(4.1) \qquad \int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx.$$

Доказательство: Будем исходить из хорошо известного равенства

$$(u\cdot v)'(x) = u'(x)\cdot v(x) + u(x)v'(x).$$

В силу непрерывной дифференцируемости функций u и v с помощью формулы Ньютона-Лейбница и линейности интеграла получим, что

$$u(x)v(x)\Big|_a^b = \int_a^b u'(x)v(x)dx + \int_a^b u(x)v'(x)dx.$$ ◀

Лемма 4.2: Пусть функция f имеет на отрезке с концами a и x непрерывные производные до порядка n включительно. Тогда выполняется формула Тейлора

$$(4.2) \qquad f(x) = f(a) + \frac{1}{1!}f'(a)(x-a) + \ldots + \frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)(x-a)^{n-1} + r_{n-1}(a;x),$$

где $r_{n-1}(a;x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1}dt$ — остаток в интегральной форме.

Доказательство: Рассмотрим разность $f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)dt =$

$= -\int_a^x f'(t)(x-t)'dt = -f'(t)(x-t)\Big|_a^x + \int_a^x f''(t)(x-t)dt = f'(a)(x-a) -$

$-\frac{1}{2}\int_a^x f''(t)\left((x-t)^2\right)'dt = f'(a)(x-a) - \frac{1}{2}f''(t)(x-t)^2\Big|_a^x + \frac{1}{2}\int_a^x f'''(t)(x-t)^2dt =$

$= f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 - \frac{1}{2\cdot 3}\int_a^x f'''(t)\left((x-t)^3\right)'dt = \ldots =$

$= f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + \ldots + \frac{1}{2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-1)}f^{(n-1)}(a)(x-a)^{n-1} + r_{n-1}(a;x).$ ◀

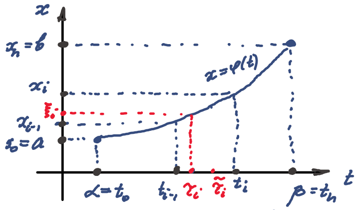
С помощью первой теоремы о среднем $\exists\xi$, т.ч. $r_{n-1}(a;x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1}dt =$

$= \frac{1}{(n-1)!}f^{(n)}(\xi)\int_a^x (x-t)^{n-1}dt = \frac{1}{(n-1)!}f^{(n)}(\xi)\left(-\frac{1}{n}(x-t)^n\right)\Big|_a^x = \frac{1}{n!}f^{(n)}(\xi)(x-a)^n.$

4.3 Замена переменной в интеграле

Теорема 4.4: Пусть $\varphi : [\alpha;\beta] \to [a;b]$ — непрерывно дифференцируемая, строго монотонная функция, переводящая отрезок $\alpha \le t \le \beta$ в отрезок $a \le x \le b$, т.ч. $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ или $\varphi(\alpha) = b$, $\varphi(\beta) = a$. Если функция $f(x) \in R[a;b]$, то функция $f(\varphi(t))\varphi'(t) \in R[\alpha;\beta]$, и справедливо равенство

$$\int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$



Доказательство: Любое разбиение P_t отрезка $[\alpha;\beta]$ с помощью функции φ порождает $P_x = \{x_i\}$, где $x_i = \varphi(t_i)$, $i = 0, \dots, n$, разбиение отрезка $[a;b]$. Обратное тоже верно, любое разбиение P_x отрезка $[a;b]$ порождает разбиение P_t отрезка $[\alpha;\beta]$. При этом в силу равномерной непрерывности ф-ции φ на $[\alpha;\beta]$ $\lambda(P_t) \to 0 \Leftrightarrow \lambda(P_x) \to 0$.

Теперь рассмотрим интегральную сумму

$$\sigma(f; P_x, \xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(\varphi(\tau_i))\varphi'(\tilde{\tau}_i)(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(\varphi(\tau_i))\varphi'(\tilde{\tau}_i)\Delta t_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(\varphi(\tau_i))\varphi'(\tau_i)\Delta t_i + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} f(\varphi(\tau_i))(\varphi'(\tilde{\tau}_i) - \varphi'(\tau_i))\Delta t_i}_{\alpha}.$$

Тк $f \in R[a;b]$, то $f \in B[a;b]$, т.е. $|f(x)| \le C$ на $[a;b]$. Тогда

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(\varphi(\tau_i))(\varphi'(\tilde{\tau}_i) - \varphi'(\tau_i))\Delta t_i \right| \le C \cdot \sum_{i=1}^{n} \omega(\varphi'; \Delta_i)\Delta t_i \xrightarrow[\lambda(P_t)\to 0]{} 0$$

где Δ_i — отрезок с концами t_{i-1}, t_i.

Таким образом, переходя к пределу по $\lambda(P_x) \to 0$ в равенстве

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f(\varphi(\tau_i))\varphi'(\tau_i)\Delta t_i + \alpha,$$

получим, что $\sum_{i=1}^{n} f(\varphi(\tau_i))\varphi'(\tau_i)\Delta t_i \xrightarrow[\lambda(P_t)\to 0]{} \int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx$. При этом интегральная сумма $\sum_{i=1}^{n} f(\varphi(\tau_i))\varphi'(\tau_i)\Delta t_i$ может считаться произвольной. Таким образом, $f(\varphi(t))\varphi'(t) \in R[\alpha;\beta]$, и

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx.$$

◀