Лекция I

1 Вещественные числа

Мы будем называть некоторое множество *множеством вещественных* или *действительных чисел* и обозначать его $\mathbb{R}$, если для него выполняются следующие аксиомы.

I. Аксиомы сложения. Определено отображение[1]

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; + : (x, y) \mapsto x + y,$$

называемое операцией сложения. При этом выполняются

I.1 Существует *нейтральный* элемент 0 такой, что $x + 0 = 0 + x = x$ для любого $x \in \mathbb{R}$.

I.2 Для любого $x \in \mathbb{R}$ существует *противоположный* к x элемент $-x \in \mathbb{R}$ такой, что $x + (-x) = (-x) + x = 0$.

I.3 *Ассоциативность сложения:* для всех x, y и $z \in \mathbb{R}$ выполняется равенство

$$x + (y + z) = (x + y) + z.$$

I.4 *Коммутативность сложения:* для всех x и $y \in \mathbb{R}$ выполняется равенство

$$x + y = y + x.$$

II. Аксиомы умножения. Определено отображение

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; \cdot : (x, y) \mapsto x \cdot y,$$

называемое операцией умножения. При этом выполняются

II.1 Существует *нейтральный* элемент $1 \in \mathbb{R} \setminus 0$ такой, что $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$ для любого $x \in \mathbb{R}$.

II.2 Для любого $x \in \mathbb{R} \setminus 0$ существует *обратный* к x элемент $x^{-1} \in \mathbb{R}$ такой, что $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1$.

[1] Множество $X \times Y$ называется *прямым* или *декартовым произведением* множества X на множество Y. Оно состоит из всевозможных упорядоченных пар (x, y) элементов $x \in X$ и $y \in Y$, то есть

$$X \times Y := \{(x, y) : (x \in X) \wedge (y \in Y)\}.$$

II.3 *Ассоциативность умножения:* для всех x, y и $z \in \mathbb{R}$ выполняется равенство

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z.$$

II.4 *Коммутативность сложения:* для всех x и $y \in \mathbb{R}$ выполняется равенство

$$x \cdot y = y \cdot x.$$

III. Связь сложения и умножения. *Дистрибутивность*: для всех x, y и $z \in \mathbb{R}$ выполняется равенство

$$(x + y)z = xz + yz.$$

IV. Аксиомы порядка. Между элементами $\mathbb{R}$ имеется отношение линейного порядка $\leq$, то есть бинарное отношение на $\mathbb{R}$, для которого выполнены следующие условия:

IV.1 Для всех $x \in \mathbb{R}$ справедливо $x \leq x$.

IV.2 Если $x \leq y$ и $y \leq x$, то $x = y$.

IV.3 Если $x \leq y$ и $y \leq z$, то $x = z$.

IV.4 Для всех $x \in \mathbb{R}$ и $y \in \mathbb{R}$ либо $x \leq y$, либо $y \leq x$.

V. Связь сложения и порядка. Для x, y и $z \in \mathbb{R}$, если $x \leq y$, то

$$x + z \leq y + z.$$

VI. Связь сложения и умножения. Для $x, y \in \mathbb{R}$ таких, что $x \leq 0$ и $y \leq 0$, выполняется

$$0 \leq x \cdot y.$$

VII. Аксиома полноты. Пусть X и Y – непустые подмножества $\mathbb{R}$, такие, что для всех $x \in X$ и $y \in Y$ выполнено $x \leq y$. Тогда существует $c \in \mathbb{R}$ такое, что $x \leq c \leq y$ для всех $x \in X$ и $y \in Y$.

2 Принцип верхней грани

Определение 1. Множество $X \subset \mathbb{R}$ – *ограничено сверху* тогда и только тогда, когда существует такое $c \in \mathbb{R}$, что для всех $x \in X$ выполнено $x \leq c$. Число c называется при этом *мажорантой* множества X.

Аналогично определяются *ограниченное снизу* множество и его *миноранта*.

Определение 2. Множество – *ограничено*, если оно ограничено сверху и снизу.

Определение 3. Пусть $X \subset \mathbb{R}$. Элемент $a \in X$ называется *максимальным* элементом множества X, если для всех $x \in X$ выполнено $x \leq a$. Обозначения: $\max X$ или $\max_{x \in X} x$. Короткая запись

$$a = \max X \Leftrightarrow (a \in X) \wedge \forall x \in X (x \leq a)$$

Предположим, что a_1, a_2 – два максимальных элемента множества X. Из определения максимума следует, что $a_1 \le a_2$ и $a_2 \le a_1$. Поэтому по аксиоме IV.2 $a_1 = a_2$. Мы доказали, что максимальный элемент является единственным.

Пример интервала $(0, 1)$ показывает, что минимальных и максимальных элементов может и не существовать.

Определение 4. Число $s \in \mathbb{R}$ называется *точной верхней гранью* множества $X \subset \mathbb{R}$ или *супремумом* множества X, если выполнены условия

i. Для всех $x \in X$ выполнено $x \le s$.

ii. Если $s' < s$, то существует такой $x' \in X$, что $s' < x'$.

Обозначения: $\sup X$ и $\sup_{x \in X} x$.

Условия определения эквивалентны тому, что

$$\sup X := \min\{c \in \mathbb{R} : \forall x \in X\ (x \le c)\}.$$

Лемма 1. *Пусть X – непустое ограниченное подмножество $\mathbb{R}$. Тогда существует и единственна точная верхняя грань s множества X.*

Доказательство. Поскольку точная верхняя грань является минимумом множества мажорант, она единственна. От нас требуется доказать лишь ее существование.

Рассмотрим $Y = \{y \in \mathbb{R} : \forall x \in X(x \le y)\}$ – множество мажорант множества X. Оно является непустым, в силу ограниченности множества X. В силу аксиомы полноты существует такое $s \in \mathbb{R}$, что $x \le s \le y$ для всех $x \in X$ и всех $y \in Y$. Из левого неравенства следует, что s лежит в Y, что вместе с правым неравенством дает $s = \min Y$.

Итак, $s = \min Y := \sup X$. □

3 Множество натуральных чисел и принцип математической индукции

Определение 5. Множество $X \subset \mathbb{R}$ называется *индуктивным*, если для всех $x \in X$ выполнено, что $x + 1 \in X$.

Например, $\mathbb{R}$ является индуктивным множеством.

Предложение 1. *Пусть $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ – семейство индуктивных множеств. Тогда их пересечение $X = \bigcap\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$ тоже является индуктивным множеством.*

Доказательство. По определению пересечения[2] и индуктивного множества

$$x \in X = \bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha \Rightarrow \forall \alpha \in A(x \in X_\alpha) \Rightarrow \forall \alpha \in A((x+1) \in X_\alpha) \Rightarrow (x+1) \in \bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha = X.$$

□

Определение 6. Множеством *натуральных чисел* $\mathbb{N}$ называется пересечение всех индуктивных множеств, содержащих 1.

[2] Напомним, что $A \cap B := \{a : (a \in A) \wedge (a \in B)\}$.

Принцип математической индукции. *Пусть* $E \subset \mathbb{N}$ *такое, что* $1 \in E$ *и вместе с каждым элементом* $x \in E$ *во множестве* E *лежит и* $x + 1$*. Тогда* $E = \mathbb{N}$.

Пример 1. Докажем, что для всех $n \in \mathbb{N}$ справедлива формула

$$1 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Пусть E – множество таких натуральных чисел n, для которых выполняется это равенство.

Легко видеть, что $1 \in E$. Действительно, при $n = 1$ левая и правая части указанной формулы равны 1.

Предположим, что какое-то натуральное $k \in E$, то есть для него выполняется

$$1 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

В силу этого предложения выполняется цепочка равенств

$$(1 + \ldots + k) + k + 1 = \frac{k(k+1)}{2} + k + 1 = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Из которой мы заключаем, что $k + 1 \in E$, а значит по принципу математической индукции множество $E = \mathbb{N}$, и доказываемая формула справедлива для всех $n \in \mathbb{N}$.

4 Принцип Архимеда

Положение 1. *Пусть* $h > 0$*. Тогда для всякого* $x \in \mathbb{R}$ *существует единственное* $k \in \mathbb{Z}$ *такое, что*

$$(k-1)h \leq x < kh.$$

Доказательство. Рассмотрим непустое (так как множество $\mathbb{Z}$ не является ограниченным сверху) и ограниченное снизу множество

$$S := \{n \in \mathbb{Z} : \tfrac{x}{h} < n\} \subset \mathbb{Z}.$$

По лемме о нижней грани существует точная нижняя грань $i = \inf S$. По определению которой найдется целое $k \in S$ такое, что $i \leq k < i + 1$. Откуда легко видно, что $k - 1 < i \leq k$, а значит $k = \min S$.

Поскольку k является минимальным элементом множества S, то справедливо неравенство $k - 1 \leq \frac{x}{h} < k$, эквивалентное искомому

$$(k-1)h \leq x < kh.$$

Единственность следует из единственности минимума. □