1. Случайната величина T, която $[T] = h$, измерва продължителността на живот на случайно избрана батерия от производствената линия. Плътността на разпределение на тази величина е

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

където λ е параметър.

(а) Пресметнете математическото очакване (3)

Решение:

$$E[X] = \int_0^\infty x f(x) dx \qquad [M1]$$

$$\lambda \left[\frac{-xe^{-\lambda x}}{\lambda} \Bigg|_0^\infty + \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty e^{-\lambda x} dx \right] ... \qquad [M1]$$

$$... \frac{1}{\lambda} \qquad [O1]$$

(б) Ако средното време на разряд е $400h$, пресметнете вероятността батерия да има продължителност на живот по-малко от $500h$. (4)

Решение:

$$\frac{1}{\lambda} = 400 \text{ или } \lambda = 1/400 \qquad [M1]$$

$$P(T < 500) = \int_0^{500} f(t) dt \qquad [M1]$$

$$\exp(-t/400) \Bigg|_0^{500} \qquad [M1]$$

$$\approx 0.713 \qquad [O1]$$

(в) Намерете медианата, ако знаете че тя дели разпределението по такъв начин, че вероятността да имаме по-голяма или по-малка стойност от нея е точно 50%. (3)

Решение:

$$0.5 = \int_0^m f(x) dx \qquad [M1]$$

$$m = \lambda \ln 2 \qquad [M1]$$

$$m = 277 \qquad [O1]$$

Общо за въпрос 1.: 10 т.

2. Случайната величина X има плътност на разпределение:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{4x^2} + \dfrac{1}{4}, & 1 \leq x \leq 3 \\ 0, & x \notin [1;3] \end{cases}$$

(а) Намерете разпределението F (4)

Решение:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \qquad [M1]$$

$$F(x) = -\frac{3}{4x} + \frac{x}{4} + c, x \in [1;3] \qquad [M1]$$

$F(1) = 0$ или $F(3) = 1$ намираме $c = 1/2$ [O1]

$F(x) = 0, x < 1; F(x) = 1, x > 3$ [O1]

(б) Намерете разликата между третия и първия квартил: (3)

Решение:

$$Q_1 = F(q_1) = 0.25 \qquad [M1]$$

$$Q_3 = F(q_3) = 0.75 \qquad [M1]$$

$$Q_3 - Q_1 = 1 \qquad [O1]$$

Общо за въпрос 2.: 7 т.

3. Непрекъсната случайна величина X има плътност на разпределение:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{20}\left(3 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right), & 1 \le x \le 9 \\ 0, & x \notin [1;9] \end{cases}$$

Нека да въведем нова случайна величина $Y = \sqrt{X}$

(а) покажете, че плътността на разпределение на Y е (5)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10}(3y-1), & 1 \le x \le 3 \\ 0, & x \notin [1;3] \end{cases}$$

Решение:

намираме $F(x) = \int f(x)dx = \frac{1}{20}(3x - 2\sqrt{x} + c)$ $[M1]$

$c = -1$ с $F(1) = 0/F(9) = 1$ $[O1]$

$G(y) = F(y^2) = (1/20)(3y^2 - 2y - 1)$ $[M1]$

$g(y) = G'(y) = (1/10)(3y - 1), y \in [1;3]$ $[M1]$

$g(y) = 0, x \notin [1;3]$ $[O1]$

използваме $g(y) = f(x) \times |dx/dy|$ $[M1]$

$f(x) = (1/20)(3 - 1/y)$ $[M1]$

$dx/dy = 2y$ $[M1]$

$g(y) = (1/10)(3y - 1), x \in [1;3]$ $[M1]$

$g(y) = 0, x \notin [1;3]$ $[O1]$

(б) Намерете средната стойност на Y (2)

Решение:

$E(Y) = (1/10)\int(3y^2 - y)dy$ $[M1]$

$E(y) = 11/5 = 2.2$ $[A1]$

Общо за въпрос 3.: 7 т.

4. Непрекъснатата величина X има плътност на разпределение зададена като

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ a\exp(x \ln 2), & x \geq 0 \end{cases}$$

(а) намерете стойността на параметъра a (2)

Решение:

$$\int_0^{\infty} f(x)dx = 1 \qquad [M1]$$

$$a = \ln 2 \approx 0.693 \qquad [O1]$$

(б) намерете $E(X)$ (3)

Решение:

$$E[X] = \int_0^{\infty} xf(x)dx \qquad [M1]$$

$$\lambda \left[\frac{-xe^{-\lambda x}}{\lambda} \bigg|_0^{\infty} + \frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dx \right] ... \qquad [M1]$$

$$... \frac{1}{\lambda}, \lambda \equiv \ln 2 \qquad [O1]$$

(в) пресметнете разликата между първия и третия квартил на X (3)

Решение:

$$Q_1 = F(q_1) = 0.25 \qquad [M1]$$

$$Q_3 = F(q_3) = 0.75 \qquad [M1]$$

$$Q_3 - Q_1 = \ln 3 / \ln 2 \equiv \approx 1.58 \approx 1.59 \qquad [O1]$$

(г) ако сменим променливата $Y = 2^X$ запишете плътносттната функция на разпределение на Y (5)

Решение:

$$\text{намираме } F(x) = \int f(x)dx = 1 - e^{-\lambda x} + c \qquad [M1]$$

$$c = 0 \qquad [O1]$$

$$G(y) = F(\log_2 y) \qquad [M1]$$

$$g(y) = G'(y) = 1 - 1/y \equiv 1 - e^{\ln y}, y > 0 \qquad [M1]$$

$$g(y) = 0, x < 0 \qquad [O1]$$

използваме $g(y) = f(x) \times \|dx/dy\|$	$[M1]$
$f(x) = (1/y)\ln 2$	$[M1]$
$dx/dy = 1/(y \ln 2)$	$[M1]$
$g(y) = 1 - 1/y, x > 0$	$[M1]$
$g(y) = 0, x < 0$	$[O1]$

Общо за въпрос 4.: 13 т.

Въпрос	1	2	3	4	Общо
Точки	10	7	7	13	37
Резултат					