Exercice : $u \in C^0_u(\mathbb{R}^n)$ ssi $\|\tau_h u - u\|_\infty \xrightarrow[h\to 0]{} 0$

$u \in C^0_u(\mathbb{R}) \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ / \ |u(y) - u(x)| \leq \varepsilon$ si $|x-y| \leq \delta$

$\iff \underbrace{\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ / \ |u(x+h) - u(x)| \leq \varepsilon \text{ si } |h| \leq \delta \ \forall x \in \mathbb{R}}_{(v)}$

$\iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ / \ \underbrace{\sup_{x\in\mathbb{R}} |u(x+h) - u(x)|}_{= \|\tau_h u - u\|_\infty} \leq \varepsilon$ si $|h| \leq \delta$

$$\|\tau_h u - u\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |u(x+h) - u(x)|$$

$(v) \iff \underbrace{\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ / \ \|\tau_h u - u\|_\infty \leq \varepsilon \text{ si } |h| \leq \delta}_{\Updownarrow}$

$$\lim_{h \to 0} \|\tau_h u - u\|_\infty = 0$$

Lemme $p, q, r \in [1, \infty]$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$ $\qquad \frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$

Si $u \in L^p$, $v \in L^q$, $w \in L^{r'}$

$$\Rightarrow \left| \iint u(x)\, v(y)\, w(x+y)\, dx\, dy \right| \leq \|u\|_p \|v\|_q \|w\|_{r'}$$

Preuve ① $u, v, w \in C^0_c(\mathbb{R}^d)$

On peut se réduire au cas $u, v, w \geq 0$

car $\left| \iint u(x) v(y) w(x+y)\, dx\, dy \right| \leq \iint |u(x)|\, |v(y)| \times |w(x+y)|\, dx\, dy$

et $\quad \|u\|_p = \|(|u|)\|_p$

Inégalité Holder pour 3 fcts : $\quad f, g, h \in C_c^0(\mathbb{R}^{2d})$

$$\left| \int f(x,y)\, g(x,y)\, h(x,y)\, dx\,dy \right| \le \|f\|_{1/a}\, \|g\|_{1/b}\, \|h\|_{1/c}$$

si $\quad \underline{\underline{a+b+c = 1}}$

$$u(x)\, v(y)\, w(x+y) = \overbrace{\left(u(x)^p\, w(x+y)^{r'}\right)^a}^{f} \overbrace{\left(v(y)^q\, w(x+y)^{r'}\right)^b}^{g} \times$$
$$\times \underbrace{\left(u(x)^p\, v(y)^q\right)^c}_{h}$$

avec $\quad a = \frac{1}{p} - \frac{1}{r}, \quad b = \frac{1}{q} - \frac{1}{r}, \quad c = \frac{1}{r}$

$$\rightsquigarrow \quad a+b+c = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{r} = \left(1 + \frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r} = 1$$

$$\|f\|_{1/a} = \left(\iint |f(x,y)|^{1/a}\, dx\,dy \right)^a = \left(\iint |u(x)|^p\, |w(x+y)|^{r'} \right)^{1/p - 1/r}$$

$$\|g\|_{1/b} = \left(\iint |g(x,y)|^{1/b}\, dx\,dy \right)^b = \left(\iint |v(y)|^q |w(x+y)|^{r'} \right)^{1/q - 1/r}$$

$$\|h\|_{1/c} = \ldots\ldots = \left(\iint |u(x)|^p\, |v(y)|^q\, dx\,dy \right)^{1/r}$$

Donc par Fubini : $\quad \|h\|_{1/c} = \left(\int |u(x)|^p dx \cdot \int |v(y)|^q\, dy \right)^{1/r}$

$$= \left(\|u\|_p^p \cdot \|v\|_q^q \right)^{1/r}$$

$$\|g\|_{1/b} = \left(\int |v(y)|^q \underbrace{\int |w(\underbrace{x+y}_{z})|^{r'}\, dx}_{= \int |w(z)|^{r'} dz \,=\, \|w\|_{r'}^{r'}}\, dy \right)^{1/q - 1/r}$$

$$= \left(\|w\|_{r'}^{r'} \cdot \|v\|_q^q \right)^{1/q - 1/r}$$

$$\|f\|_{1/a} = \left(\|w\|_{r'}^{r'} \cdot \|u\|_p^p \right)^{1/p - 1/r}$$

Hölder $\rightsquigarrow$ $$\left| \iint \underbrace{u(x)\, v(y)\, w(x+y)}_{f(x,y)\, g(x,y)\, h(x,y)} \, dx\, dy \right| \leq \|f\|_{1/a} \cdot \|g\|_{1/b} \cdot \|h\|_{1/c}$$

$$= \left(\|w\|_{r'}^{r'} \cdot \|u\|_p^p \right)^{1/p - 1/r} \left(\|w\|_{r'}^{r'} \cdot \|v\|_q^q \right)^{1/q - 1/r} \times \left(\|u\|_p^p \cdot \|v\|_q^q \right)^{1/r}$$

$$= \left(\|u\|_p^p \right)^{1/p - 1/r + 1/r} \left(\|v\|_q^q \right)^{1/q - 1/r + \frac{1}{r}} \left(\|w\|_{r'}^{r'} \right)^{\underbrace{1/p - 1/r + 1/q - 1/r}_{= 1}}$$

$$= \|u\|_p \cdot \|v\|_q \cdot \|w\|_{r'}^{r' \underbrace{(1 - 1/r)}_{= 1/r'}}$$

$$= \|u\|_p \cdot \|v\|_q \cdot \|w\|_{r'}$$

(2) Par densité · demontrer l'enoncé EXO !

$$C_c^0 \ni u_n \xrightarrow{L^p} u \in L^p, \quad C_c^0 \ni v_n \xrightarrow{L^q} v \in L^q$$

$$C_c^0 \ni w_n \xrightarrow{L^{r'}} w \in L^{r'}$$

$\square$

Corollaire Si $u \in L^p$, $v \in L^q$ $\quad p, q \in [1, +\infty]$

$$\Rightarrow \|u * v\|_r \leq \|u\|_p \|v\|_q \quad \text{où} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$$

Preuve On rappel que $f \in L^r$

$$\|f\|_r = \sup_{g \in L^{r'} \setminus \{0\}} \frac{\int fg \, dx}{\|g\|_{r'}}$$

Soit $g \in L^{r'}$,

$$\left|\int u*v(x)\cdot g(x)\,dx\right|$$

$$x-y=z$$

$$x=y+z$$

$$dx=dz$$

$$=\left|\int\int u(y)\,v(\underbrace{x-y}_{z})\,dy\; g(x)\,dx\right|$$

$$=\left|\int\int u(y)\,v(z)\,g(z+y)\,dy\,dz\right|$$

Lemme $\rightarrow$

$$\leq \|u\|_p\,\|v\|_q\,\|g\|_{r'}$$

$$\leq \frac{\left|\int (u*v)g\right|}{\|g\|_{r'}} \leq \|u\|_p\|v\|_q$$

$$\|u*v\|_r = \sup_{g\in L^{r'}\setminus\{0\}} \boxed{\frac{\int (u*v)\,g\,dx}{\|g\|_{r'}}}$$

$$\leq \|u\|_p\cdot\|v\|_q \quad \Rightarrow \quad u*v\in L^r$$

$\square$

Rmq On a aussi mq $u*v$ peut être definie comme la seule fct de L^r t.q.

$$\int (u*v)\cdot\varphi = \int\int u(x)\,v(y)\,\varphi(x+y)\,dx\,dy$$

~~$\forall\varphi\in L^{r'}$~~

$\forall\varphi\in C_c^0$

$$\boxed{p=1,\ q=1 \Rightarrow r=1 \qquad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=2=1+\frac{1}{r}}$$

Cette définition s'etends à $u,v\in\mathcal{M}^1(\mathbb{R}^d)$

$\mu,\nu\in\mathcal{M}^1(\mathbb{R}^d)$ $\quad (\mu*\nu)\in\mathcal{M}^1(\mathbb{R}^d)$ t.q.

$$\int\varphi\,d(\mu*\nu) = \int\int\varphi(x+y)\,d\mu(x)\,d\nu(y) \qquad \forall\varphi\in C_c^0$$

Rmq Si X,Y variables aléatoires sur $\mathbb{R}^d$

loi de proba de X et Y $\quad \mu\in\mathcal{M}^1(\mathbb{R}^d)$ $\quad \|\mu\|=1$

$\nu\in\mathcal{M}^1(\mathbb{R}^d)$ $\quad \|\nu\|=1$

Si X et Y sont indépendantes

$X+Y$ a comme loi de proba $\mu * \nu$.

PROPRIÉTÉS DE LA CONVOLUTION

- $u * v = v * u$
- $(u * v) * w = u * (v * w)$
- Cherchons $\mu \in \mathcal{M}^1$ / $u * \mu = u \quad \forall u \in L^1$

$$\Leftrightarrow \int u(x)\varphi(x)dx = \int (u * \mu)\varphi \qquad \forall \varphi \in C_c^1$$

$$= \iint \varphi(x+y)\, u(x)\, dx\, d\mu(y)$$

$$= \int \left(\int \varphi(x+y)\, d\mu(y) \right) \cdot u(x)\, dx$$

Comme l'égalité est vraie $\forall u \in L^1$

$$\Rightarrow \underbrace{\varphi(x)}_{\tau_{-x}\varphi(0)} = \int \varphi(x+y)\, d\mu(y) \qquad \forall x$$

$$= \int \tau_{-x}\varphi\, d\mu \qquad \forall \varphi \in C_c^0$$

$$\Rightarrow \delta_0 = \mu$$

- $\tau_h (u * v)(x) = u * v\,(x-h)$

$$= \int u(y)\, v(x-h-y)\, dy$$

$$= \int u(y)\, \tau_h v(x-y)\, dy$$

$$= u * \tau_h v\,(x)$$

•) $\tau_h u = \tau_h(u * \delta_0) = u * \underbrace{\tau_h \delta_0}_{\delta_h} = u * \delta_h$.

Lemme $p, q \in [1, \infty]$ $\quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad (q = p')$

Si $u \in L^p$, $v \in L^q \Rightarrow u * v \in C^0_{b,u}$

Preuve On sait que $u * v \in L^r$ où $r \,/\, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$

donc $u * v \in L^\infty$

Donc il suffit de démontrer que $u * v \in C^0_u$.

mq $\lim_{h \to 0} \| \tau_h(u*v) - u*v \|_\infty = 0$ (exo de hier)

$$\tau_h(u*v) - u*v = (\tau_h u) * v - u * v = [\tau_h u - u] * v$$

$$\Rightarrow \| \tau_h(u*v) - u*v\|_\infty = \| (\tau_h u - u) * v \|_\infty \leq \| \tau_h u - u\|_p \cdot \|v\|_{p'}$$

Si $p < +\infty$ on a mq $\lim_{r \downarrow 0} \sup_{|h| < r} \| \tau_h u - u\|_p = 0$

$\Rightarrow \| \tau_h(u*v) - u*v\|_\infty \xrightarrow[h \to 0]{} 0$

Si $p = +\infty$, on a $p' = 1$ et donc il suffit d'echanger u et v. □

Rmq l'exemple de hier avec $u =$ fct Heviside $\in L^\infty$, $v =$  $\in L^1$

nous $\underline{mq}$ $u * v \in C^0_{b,u}$

<u>Proposition</u> $\varphi \in C^1$, $u \in L^p$

Si $\varphi, |\nabla \varphi| \in L^{p'}$ $\Rightarrow$ $\varphi * u \in C^1_{b,u}$

$$\nabla(\varphi * u) = (\nabla \varphi) * u$$

$$(\nabla\varphi) * u(x) = \int \underbrace{u(y)}_{\in \mathbb{R}} \underbrace{\nabla\varphi(x-y)}_{\in \mathbb{R}^d} dy$$

$$= \begin{pmatrix} \int u(y)\, \partial_{x_1}\varphi(x-y)\, dy \\ \vdots \\ \int u(y)\, \partial_{x_d}\varphi(x-y)\, dy \end{pmatrix}$$

<u>Ingredient principale</u>

$\nabla\varphi(x) \in \mathbb{R}^d$ $\qquad$ $h \in \mathbb{R}^d$

$$h \cdot \nabla\varphi(x) = \lim_{t\to 0} \frac{\varphi(x-th) - \varphi(x)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\tau_{-th}\varphi(x) - \varphi(x)}{t}$$

ponctuel en $x \in \mathbb{R}^d$

$\underline{mq}$ la limite est uniforme

$$\tau_{-th}\varphi(x) = \varphi(x-th) = \varphi(x) + \int_0^1 \frac{d}{ds}\varphi(x - s\cdot th)\, ds$$

$$= \varphi(x) - th \cdot \int_0^1 \nabla\varphi(x - sth)\, ds$$

$$\left| \frac{\tau_{-th}\varphi - \varphi}{t}(x) - h\cdot\nabla\varphi(x) \right|$$

$$= \left| -h \cdot \int_0^1 \nabla\varphi(x - sth)\,ds - h \cdot \nabla\varphi(x) \right|$$

$\left|\int f\right| \leq \int |f| \longrightarrow$

$$\leq |h| \int_0^1 |\nabla\varphi(x-sth) - \nabla\varphi(x)|\,ds$$

$$\leq |h| \sup_{s\in[0,1]} |\nabla\varphi(x-\underbrace{sth}_{|sth| \leq |t||h|}) - \nabla\varphi(x)|$$

$$\leq |h| \sup_{k,\,|k|\leq |t|\cdot|h|} \|\nabla\varphi(\cdot - k) - \nabla\varphi\|_\infty$$

$$= |h| \cdot \underbrace{\sup_{k,\,|k|\leq|t|\cdot|h|} \|\tau_k\nabla\varphi - \nabla\varphi\|_\infty}_{\xrightarrow[t\downarrow 0]{} 0} \qquad \text{si } \nabla\varphi \in C^0_{b,u}$$

Pour montrer la proposition

$$h\cdot\nabla(\varphi * u)(x) = \lim_{t\to 0} \frac{\tau_{-th}(\varphi * u) - \varphi * u}{t}(x)$$

$$= \lim_{t\to 0}\left[\underbrace{\left(\frac{\tau_{-th}\varphi - \varphi}{t}\right)}_{\text{ici on peut appliquer le lemme}} * u\right](x)$$

l'argument "principale" permet de passer à la limite

$$= \left[\lim_{t\to 0} \frac{\tau_{-th}\varphi - \varphi}{t}\right] * u$$

$\boxed{\text{EXO : bien rédiger la preuve}}$

<u>Corollaire</u> $\varphi \in C^k$, $u \in L^p$, $\partial^\alpha\varphi \in L^{p'}$ $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$

$$\Rightarrow \varphi * u \in C^k$$

$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$

$$C^\infty = \left\{ f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R} \;/\; \partial^\alpha f \in C^0(\mathbb{R}^d) \quad \forall |\alpha| \le k, \ \forall k \in \mathbb{N} \right\} = \bigcap_{k \ge 0} C^k$$

$$C_c^\infty = \left\{ f \in C^\infty \;/\; \operatorname{supp} f \subset\subset \mathbb{R}^d \right\}$$

$$C^\omega = \left\{ f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R} \;/\; f \text{ analytique} \right\} \subset C^\infty$$

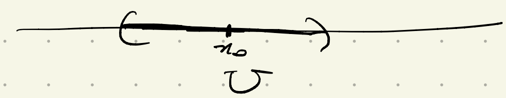
$$f(x) = \sum_{k \ge 0} a_k x^k \qquad \sin, \cos, e^{\cdot} \in C^\omega$$

$$C_c^\omega = \left\{ f \in C^\omega \;/\; \operatorname{supp} f \subset\subset \mathbb{R}^d \right\} = \{0\}$$

Thm $f \in C^\omega$ et $\exists (x_k)_k \subset \mathbb{R}^d$, avec $\operatorname{adh}((x_k)_k) \neq \emptyset$ t.q. $f(x_k) = 0 \ \forall k \Rightarrow f \equiv 0$.

Si $f|_U \equiv 0$, $\emptyset \neq U$ ouvert $\subset \mathbb{R}$

$x_0 \in \operatorname{int}(U)$



$\Rightarrow f'(x_0) = 0, \dots\dots, f^{(k)}(x_0) = 0, \dots$

c-à-d. le DL de f en x_0 est $\equiv 0$

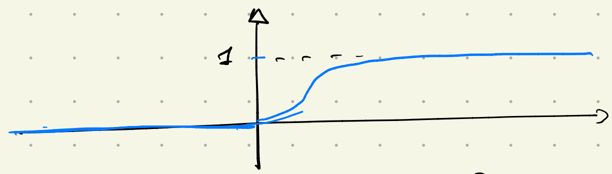
$\Leftrightarrow$ si $f(x) = \sum_k a_k (x - x_0)^k$ alors $a_k = 0 \ \forall k$

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$

Proposition $C_c^\infty \neq \{0\}$. De plus il est dense dans $L^p \ \forall p < +\infty$

Preuve $d=1$

$$g(x) = e^{-1/x}\chi_{(0,+\infty)}(x)$$



mq $g \in C^\infty$

$$g'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} e^{-1/x} & x>0 \\ 0 & x<0 \end{cases}$$

$g' \in C^0(\mathbb{R})$ car $\lim\limits_{x\downarrow 0} \frac{1}{x^2} e^{-1/x} = 0$

$$g^{(2)} = \begin{cases} 0 & x<0 \\ \underbrace{\left(-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\frac{1}{x^2}}_{P_2(1/x)} e^{-1/x} & \text{si } x>0 \end{cases}$$

où $P_2 \in \mathbb{R}[y]$

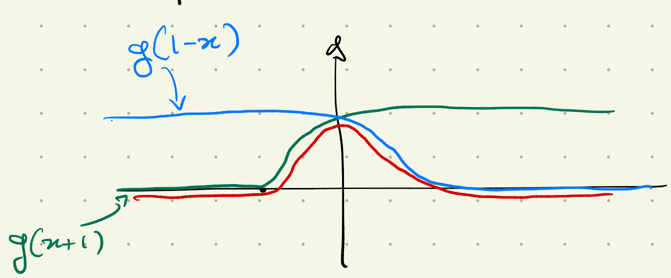
$$\lim_{x\downarrow 0} g^{(2)}(x) = \lim_{x\downarrow 0} P_2(1/x)e^{-1/x} = \lim_{y\to+\infty} P_2(y)e^{-y} = 0$$

$\Rightarrow g^{(2)}$ continue

Par recurrence : $g^{(k)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ P_k(1/x)\, e^{-1/x} & \text{si } x>0 \end{cases}$

$$\lim_{x\downarrow 0} g^{(k)}(x) = \lim_{y\to+\infty} P_k(y)e^{-y} = 0 \Rightarrow g^{(k)} \in C^0.$$

On pose maintenant $h(x) = g(x+1)\, g(1-x)$



$h \in C^\infty$

$= e^{-\frac{2}{1-x^2}}\chi_{(-1,1)}(x)$

$\Rightarrow h \in C_c^\infty(\mathbb{R})$

$$h'(0) = \frac{d}{dx}\left(-\frac{2}{1-x^2}\right) e^{-\frac{2}{1-x^2}}\Big|_{x=0}$$

$$= +2 \cdot \frac{1}{(1-x^2)^2} \cdot (-2x)\, e^{-\frac{2}{1-x^2}}\Big|_{x=0} = 0 .$$

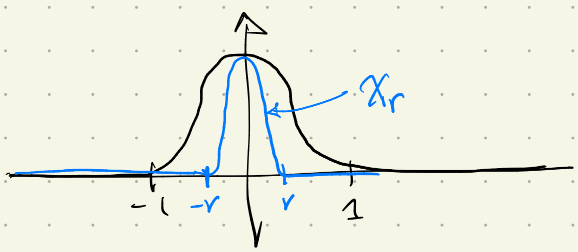
<u>d quelconque</u> : $\chi(x) = h(|x|)$ radiale, C^∞

$\chi(x_1, \dots, x_d)$ supp $k \subset \{|x|<1\}$

$$\rightsquigarrow \quad C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \neq \{0\}$$

<u>mq</u> C_c^∞ dense dans L^p

$$u \in L^p \rightsquigarrow \chi * u \in C^\infty \cap L^p$$



$$\chi_r(x) = \chi(x/r)\, e^2$$

supp $\chi_r \subset \{|x| \le r\}$

$$\lim_{r\to+\infty} \chi_r(x) = 1$$

$$\lim_{r\to+\infty} \exp\left(-\frac{2}{1-(x/r)^2}\right) e^2$$

$$\lim_{r\to+\infty} \exp\left(-\frac{2r^2}{r^2-x^2}\right) e^2 = 1$$

$$\rho_\nu(x) := \frac{\chi(x/\nu)}{\nu^d \int \chi}$$

soit $u \in L^p$, $\varepsilon > 0$.

On sait que $v = u\chi_r$, supp $v \subset B_r$ conv. dominée

$$\|u-v\|_{L^p} = \int \underbrace{\underbrace{|1-\chi_r|}_{\xrightarrow[r\to+\infty]{} 0}{}^p\, |u|^p}_{\le |u|^p \in L^1} dx \xrightarrow[r\to+\infty]{} 0$$

$\exists R > 0 \,/\, \forall r > R$ on a $\|u-v\|_p \le \varepsilon/2$

$$w = \rho_\nu * v \qquad 0 < \nu \leq 1$$

$$w \in C^\infty, \qquad \operatorname{supp}(\rho_\nu * v) \subset \overline{\left(\operatorname{supp}(\rho_\nu) + \operatorname{supp} v\right)}$$

$$\subset \overline{B_\nu + B_r} \subset \overline{B}_{r+1}$$

$$\Rightarrow \quad w \in C_c^\infty$$

$$\rho_\nu(x) := \frac{\chi(x/\nu)}{\nu^d \int \chi} \quad \Rightarrow \quad \int_{\mathbb{R}^d} \rho_\nu(x)\,dx = \frac{1}{\nu^d \int_{\mathbb{R}^d} \chi\,dx} \cdot \int_{\mathbb{R}^d} \chi(x/\nu)\,dx$$

$$\overset{y = \frac{x}{\nu}}{=} \frac{1}{\nu^d \int_{\mathbb{R}^d} \chi\,dx} \cdot \int_{\mathbb{R}^d} \chi(y)\,\nu^d dy = 1$$

mq Pour ν assez petit, $\|w - v\|_p \leq \varepsilon/2$

$$v(x) = v(x) \cdot \int_{\mathbb{R}^d} \rho_\nu(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^d} v(x)\,\rho_\nu(y)\,dy$$

$$w(x) = \int v(y)\,\rho_\nu(x-y)\,dy = \int \rho_\nu(y)\,v(x-y)\,dy$$

$$v(x) - w(x) = \int \rho_\nu(y)\left[v(x) - v(x-y)\right]dy$$

$$\|v - w\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^d} |v(x) - w(x)|^p\,dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \left| \int_{\mathbb{R}^d} \rho_\nu(y)\left[v(x) - v(x-y)\right]dy \right|^p dx$$

$$\rho_v(y) = \frac{\chi(y/v)}{v^d \int_{\mathbb{R}^d} \chi \, dz} = \frac{1}{v^d} \boxed{\frac{\chi(y/v)}{\int \chi \, dz}} = \frac{1}{v^d} \rho_1(y/v)$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left| \int_{\mathbb{R}^d} \rho_1(\underbrace{y/v}_{z}) \underbrace{\frac{1}{v^d} \left[v(x) - v(x-y) \right] dy}_{dz = dy/v^d} \right|^p dx$$

supp $\rho_1 \subset B_1$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \left| \int_{\mathbb{R}^d} \rho_1(z) \left[v(x) - v(x - zv) \right] dz \right|^p dx$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\rho_1(z)|^p \cdot |v(x) - v(x-zv)|^p \, dz \, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} |\rho_1(z)|^p \underbrace{\left[\int_{\mathbb{R}^d} |v(x) - v(x-zv)|^p \, dx \right]}_{\| v - \tau_{zv} v \|_p^p} dz$$

$$\leq \|\rho_1\|_\infty \cdot \sup_{|z| \leq 1} \| v - \tau_{zv} v \|_p^p$$

$$\leq \|\rho_1\|_\infty \cdot \sup_{|h| \leq v} \| v - \tau_h v \|_p^p$$

$$\|v - w\|_p \leq c \cdot \underbrace{\sup_{|h| \leq v} \|v - \tau_h v\|_p}_{} \xrightarrow[v \downarrow 0]{} 0$$

car $v \in L^p$

$\Rightarrow \exists \, v \leq 1$ t.q. $\|v - w\|_p \leq \varepsilon/2$

Finalement $\|u - w\|_p \leq \|u - v\|_p + \|v - w\|_p \leq \varepsilon$.

$\square$

Definition Une <u>approximation de l'identité</u> (ou l'unité) est une suite $(\rho_n)_n$ de la forme

$$\rho_n(x) := \frac{\rho(x/\varepsilon_n)}{\varepsilon_n^d} \quad \text{où} \quad \lim_n \varepsilon_n = 0$$

$$\text{et} \int \rho \, dx = 1$$

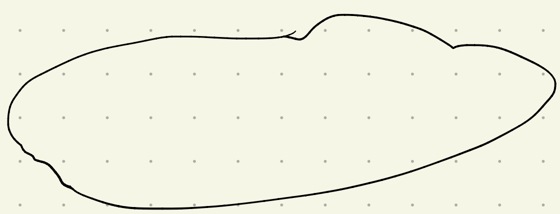
Typiquement : •) $\rho \in C^\infty$

•) $\operatorname{supp} \rho \subset B_1 \Rightarrow \operatorname{supp} \rho_n \subset B_{\varepsilon_n}$

On appelle aussi <u>appr. de l'identité</u> les operateurs

$$R_n u = \rho_n * u \quad \text{où} \quad (\rho_n)_n \text{ est une } \underline{\text{a.d.i.}}$$

Ex $\mathbb{R}^d$ $\quad U \subset \mathbb{R}^d$



U

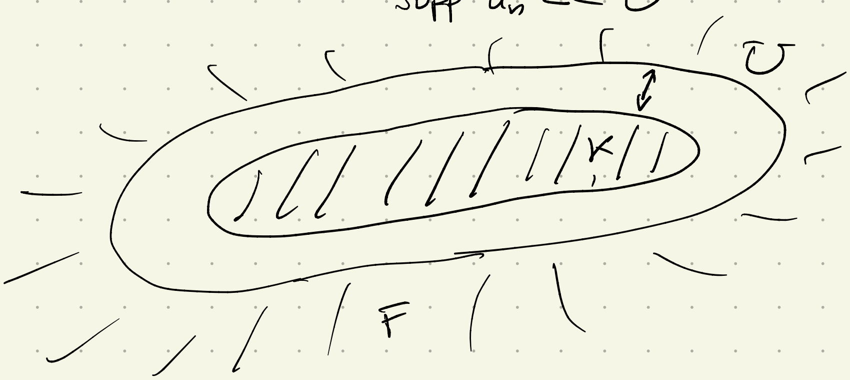
$u \in L^p(\mathbb{R}^d)$

on veut souvent restreindre u à U

$\tilde{u} = u \chi_U \Rightarrow \tilde{u} \in L^p(U)$ mais pas de rég.

Plutot : $(u_n)_n \subset L^p(U)$, $\quad u_n \xrightarrow{L^p} U$

$\operatorname{supp} u_n \subset\subset U$



$K \subset\subset U$

$\chi : U \longrightarrow \mathbb{R}$

$\chi(x) = 1$ si $x \in K$

$\chi(x) = 0$ si $x \notin$ vois. de K

$$d_K(x) = \inf\{|x-y|,\ y\in K\}$$

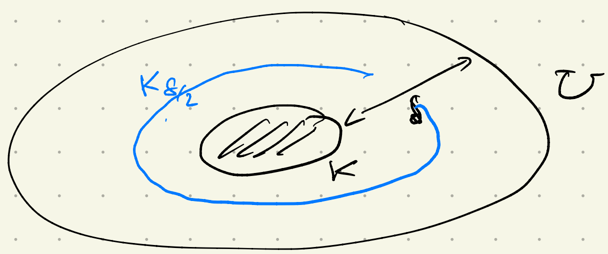
$F = \mathbb{R}^d \setminus U$ (fermé) $\qquad d_F(x) = \inf\{|x-y|,\ y\in F\}$

$\delta = \min\limits_{x\in K} d_F(x)$, si $\underbrace{d_K(x) < \delta \Rightarrow x\in U}$

En effet $x\notin U \Leftrightarrow d_F(x) = 0$

mais $d_F(x) \geq \delta - d_K(x) > 0$

$$K_{\delta/2} = \{y\in\mathbb{R}^d \mid d_K(x) \leq \delta/2\} \subset U$$



$\chi_n = \chi_{K_{\delta/2}} * \rho_n = R_n \chi_{K_{\delta/2}}$

Si $\rho\in C^\infty$, $\chi_n \in C^\infty$

$$\operatorname{supp} \chi_n \subset \operatorname{adh}\Big(\underbrace{K_{\delta/2} + B_{\varepsilon_n}}_{= K_{\delta/2+\varepsilon_n}}\Big) \subset U \quad \text{si } \varepsilon_n < \delta/2$$

<u>On a mq :</u>

<u>Prop</u> $K \subset\subset U \subset \mathbb{R}^d \Rightarrow \exists \chi : \mathbb{R}^d \to [0,1]$ t.q.

$\chi(x) = 1$ si $x\in K$

$\chi(x) = 0$ si $x \notin K_{\frac{3}{4}\delta}$, $\qquad \chi\in C^\infty$

DERIVÉS FAIBLES

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\qquad f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$f \in C^1(\mathbb{R})$

IPP $\qquad \int_a^b f(x)\, g'(x)\, dx = -\int_a^b f'(x)\, g(x)\, dx + f(x)g(x)\Big|_a^b$

$f, g \in C^1([a,b])$

Si $g \in C_c^1([a,b]) \Rightarrow \int_a^b f g'\, dx = -\int_a^b f' g\, dx$

De plus si $g \in C_c^1([a,b])$ $\qquad \int_a^b f g'\, dx \in \mathbb{R}$

$\forall f \in L^1_{loc}([a,b])$

Ici : $L^1_{loc}(\Omega) = \{ u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ mes. $/ \ \forall K \subset\subset \Omega,\ u\chi_K \in L^1 \}$

$= \{ \quad$ " $\quad / \ \forall K \subset\subset \Omega,\ \int_K |u| < +\infty \}$

$u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\qquad u(x) = x^2 \qquad u \notin L^1$

$u(x) = 1 \qquad u \in L^1_{loc}$

Definition $\quad v \in L^1_{loc}(\Omega)$ est dérivé faible de $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ par rapport à x_j si

$$\int_\Omega v \varphi \, dx = -\int_\Omega u\, \partial_{x_j} \varphi \qquad \forall \varphi \in C_c^1(\Omega)$$

Si v existe, elle est unique et on notera $v = \partial_{x_j} u$

mq le dérivé faible est unique

Supposons $\exists\, v_1, v_2 \in L^1_{loc}$ dérivés faibles.

$$\int_\Omega v_1 \varphi \, dx = - \int_\Omega u \, \partial_{x_j} \varphi \, dx$$

$$\int_\Omega v_2 \varphi \, dx = - \int_\Omega u \, \partial_{x_j} \varphi \, dx$$

$$\int_\Omega (v_1 - v_2) \varphi \, dx = 0 \qquad \forall \varphi \in C^1_c(\Omega)$$

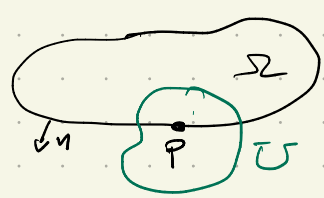
$$\boxed{\text{EXO : pourquoi ceci implique } v_1 = v_2 \text{ ?}}$$

Déf Si $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, $v \in L^1_{loc}(\Omega; \mathbb{R}^d)$ est le gradient faible de u si

$$\int_\Omega v \cdot \varphi = - \int_\Omega u \, \operatorname{div} \varphi \qquad \forall \varphi \in C^1_c(\Omega; \mathbb{R}^d)$$

Ici on utilise le thm de la divergence

$\Omega \subset \mathbb{R}^d$ $\quad \underbrace{\partial\Omega \in C^\infty}$



$\forall p \in \partial\Omega \quad \exists\, U \subset \mathbb{R}^d$ ouvert

$\exists\, \Phi : U \longrightarrow \mathbb{R}$ t.q. $\Phi^{-1}(0) = \partial\Omega \cap U$

et $\nabla \Phi(x) \neq 0 \quad \forall x \in U$

$\Phi \in C^\infty$

$n(p) = \pm \nabla \Phi(p)$ direction normale au bord de Ω

on choisi la direction sortant de Ω

Thm divergence

$$\int_{\Omega} \mathrm{div}(f)\, dx = \int_{\partial\Omega} f \cdot n \, dx \qquad \forall u \in C^1(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^d)$$

ici $\mathrm{div}(f) = \sum_{j=1}^{n} \partial_{x_j} u$

On récupère la formule du grad. faible si on pose

$$f = \underset{C^1(\bar{\Omega})}{u}\, \underset{C^1_c(\Omega; \mathbb{R}^d)}{\varphi} \Rightarrow \mathrm{div}\, f = u \,\mathrm{div}\, \varphi + \nabla u \cdot \nabla \varphi$$

$$\Rightarrow \int_{\Omega} \left(u \,\mathrm{div}\, \varphi + \nabla u \cdot \nabla \varphi \right) dx = 0$$