Notre but :

Théorème (Rellich-Kondrakov)

Si $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^d \Rightarrow W^{1,p}(\Omega) \subset\subset L^p(\Omega) \quad \forall p \geq 1.$

Théorème (Ascoli) (X, d_X), (Y, d_Y) esp. métriques

X est précompact

$\mathcal{F} \subset C_u(X, Y)$

$\mathcal{F}$ précompact dans $(C_u(X,Y), \|\cdot\|_\infty)$ $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{F}$ est uniform. equicontinue et $\forall x \in X$ $\mathcal{F}(x) = \{ f(x) \,/\, f \in \mathcal{F} \}$ est précompact dans Y

Rmq $\mathcal{F}$ unif. equicontinue $\Longleftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ t.q. $d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq \varepsilon$ si $f \in \mathcal{F}$, $x_1, x_2 \in X$ t.q. $d_X(x_1, x_2) \leq \delta$

$\Longleftrightarrow$

Il existe un module de continuité $\omega_{\mathcal{F}}$ commun à toute $f \in \mathcal{F}$:

$$\omega_{\mathcal{F}} : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+ \quad \text{t.q.} \quad \lim_{r \downarrow 0} \omega_{\mathcal{F}}(r) = 0$$

$$\text{et} \quad d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq \omega_{\mathcal{F}}(d_X(x_1, x_2)) \quad \forall x_1, x_2 \in X,\ f \in \mathcal{F}$$

"Moralement"

$\omega_{\mathcal{F}} : \delta \longmapsto \varepsilon$

Ex $X = \mathbb{R}^d$, $Y = \mathbb{R}$, $\mathcal{F}$ unif. equi cont

$\Leftrightarrow$ $\omega_{\mathcal{F}}(r) := \sup\limits_{|h|<r} \sup\limits_{f\in\mathcal{F}} \|\tau_h f - f\|_\infty$ est un module de cont.

En particulier: $d_Y(f(x_1), f(x_2)) = |f(x_1) - f(x_2)|$

$$
\begin{aligned}
&= |f(x_2 - h) - f(x_2)|, \quad h = x_2 - x_1 \\
&\leq \|\tau_h f - f\|_\infty \\
&\leq \sup_{g\in\mathcal{F}} \|\tau_h g - g\|_\infty \\
&\leq \sup_{|k|\leq|x_2-x_1|} \sup_{g\in\mathcal{F}} \|\tau_k g - g\|_\infty \\
&= \omega_{\mathcal{F}}(|x_2 - x_1|)
\end{aligned}
$$

Donc $\omega_{\mathcal{F}}$ est module de continuité pour $\mathcal{F}$ si (et seulement si)

$$0 = \lim_{r\downarrow 0} \omega_{\mathcal{F}}(r) = \lim_{r\downarrow 0} \sup_{|h|<r} \sup_{f\in\mathcal{F}} \|\tau_h f - f\|_\infty$$

Prop $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $\mathcal{F} \subset C_u(\Omega, \mathbb{R})$

$\mathcal{F}$ unif equi cont. $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{r\downarrow 0} \sup\limits_{|h|<r} \sup\limits_{f\in\mathcal{F}} \|\tau_h f - f\|_\infty = 0$

Prop $\mathcal{F} \subset L^p(\mathbb{R}^d)$, $p \geq 1$, t.q.

$$\sup_{u\in\mathcal{F}} \|\tau_h u - u\|_p \xrightarrow[|h|\downarrow 0]{} 0$$

Alors, pour tout $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^d$,

$$\mathcal{F}|_\Omega = \{ u|_\Omega : u \in \mathcal{F} \} \text{ est pré cpt dans } L^p(\Omega)$$

Avant de le prouver. On obs que le théorème de Rellich-Kondrakov est un corollaire de cette prop.

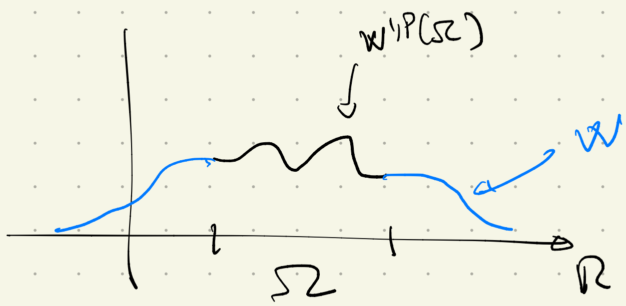
Preuve RK: Si $\mathcal{F} = W^{1,p}(\mathbb{R}^d) \rightsquigarrow \mathcal{F}|_\Omega = W^{1,p}(\Omega)$

$A \subset\subset B$
$\Updownarrow$
$\exists K \subset B$ cpt t.q. $A \subset K$

ATTENTION ! $\mathcal{F}|_\Omega \subset W^{1,p}(\Omega)$ immédiat

$\mathcal{F}|_\Omega \supset W^{1,p}(\Omega)$ pas triviale!

Pb de l'extension!



$\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^d)} \le C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$

On veut mq $W^{1,p}(\Omega) \subset\subset L^p(\Omega)$ si $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^d$

Soit $(u_n)_n \subset W^{1,p}(\Omega)$ t.q. $\|u_n\|_{W^{1,p}(\Omega)} \le C$ $\forall n$

On choisit donc $\mathcal{F} \subset W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ t.q.

$$\mathcal{F}|_\Omega = (u_n)_n \subset W^{1,p}(\Omega)$$

Thm d'extension $\longrightarrow$ et t.q. $\sup_{v \in \mathcal{F}} \|v\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^d)} \le \tilde{C}$ pour $\tilde{C} > 0$

cor. par dualité

On a donc $\sup_{v \in \mathcal{F}} \|\tau_h v - v\|_p \le C_3 \sup_{v \in \mathcal{F}} \|\nabla v\|_p \cdot |h|$

$\le C_3 \cdot \tilde{C} \cdot |h| \xrightarrow[h \to 0]{} 0$

Par la prop $\Rightarrow$ $(u_n)_n \subset W^{1,p}(\Omega)$ précompact en $L^p(\Omega)$

$\Rightarrow$ <u>RK</u>

$\square$

<u>Preuve de la prop</u>

<u>$p=\infty$</u>

$$\sup_{f\in\mathcal{F}} \|\tau_h f - f\|_\infty \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

$$\Updownarrow$$

$\mathcal{F}$ est unif. equicontinue

$\mathcal{F}$ est bornée $\Leftrightarrow$ $\|u\|_\infty \leq C \quad u\in\mathcal{F}$

$\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}^d, \quad |u(x)| \leq C$ si $u\in\mathcal{F}$

$\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R}^d, \quad \mathcal{F}(x) \subset [-c, c]$

et donc est pre comp.

Par thm Ascoli $\Longrightarrow$ $\mathcal{F}$ pre compact

$\Rightarrow$ $\mathcal{F}|_\Omega$ pre compact

<u>$p<\infty$</u>

$$\omega_{\mathcal{F}}(r) := \sup_{|h|<r} \sup_{u\in\mathcal{F}} \|\tau_h u - u\|_p$$

Hypothèses: •) $\omega_{\mathcal{F}}(r) \xrightarrow[r\to 0]{} 0$

•) $\|u\|_p \leq C \quad \forall u\in\mathcal{F}$

$\forall \varepsilon>0$, $\quad \rho_\varepsilon(x) := \dfrac{\rho(x/\varepsilon)}{\varepsilon^d}$ où $\rho\in C_c^1(\mathbb{R}^d)$, $\int\rho = 1$, $\rho\geq 0$

$$(u*\rho_\varepsilon - u)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} u(x-y)\frac{\rho(\overbrace{y/\varepsilon}^{z})}{\varepsilon^d}\,dy - u(x)$$

$z = y/\varepsilon$, $dz = \dfrac{dy}{\varepsilon^d}$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} u(x - z\varepsilon)\rho(z)\,dz - \int_{\mathbb{R}^d} u(x)\rho(z)\,dz$$

$$\stackrel{!}{=} \int_{\mathbb{R}^d} \big(u(x - z\varepsilon) - u(x) \big) \rho(z)\, dz$$

$$\|u * \rho_\varepsilon - u\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^d} |u * \rho_\varepsilon - u|^p\, dx$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \phi\left(\int_\Omega f\, d\mu\right) \leq \int_\Omega \phi(f)\, d\mu \\ \phi \text{ convexe} \\ \mu(\Omega) = 1 \\ \hline \mu(z) = \rho(z)\, dz \\ \int_{\mathbb{R}^d} \mu = \int \rho\, dz = 1 \end{array}}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \left| \int_{\mathbb{R}^d} \big(u(x - z\varepsilon) - u(x)\big) \rho(z)\, dz \right|^p dx$$

Inégalite de Jensen $\rightarrow$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |u(x - z\varepsilon) - u(x)|^p\, \rho(z)\, dz\, dx$$

Fubini $\rightarrow$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \|\underbrace{\tau_{z\varepsilon}}_{|z| \leq 1} u - u\|_p^p\, \rho(z)\, dz$$

On choisit $\operatorname{supp} \rho \subset B_1$ $\rightarrow$

$$\leq \underbrace{\sup_{|z| \leq 1} \sup_{v \in \mathcal{F}_1} \|\tau_{z\varepsilon} v - v\|_p^p}_{= \omega_{\mathcal{F}_1}(\varepsilon)^p} \cdot \underbrace{\int \rho(z)\, dz}_{= 1}$$

$$\leq \omega_{\mathcal{F}_1}(\varepsilon)^p$$

On pose $\mathcal{F}_\varepsilon^1 = \{ u * \rho_\varepsilon \mid u \in \mathcal{F}_1 \}$

① Si $\mathcal{F}_\varepsilon^1|_\Omega$ pré compact $\forall \varepsilon > 0$ $\Rightarrow$ $\mathcal{F}_\varepsilon^1|_\Omega \subset \bigcup_{j=1}^{n} B(u_j, \varepsilon)$

$\Rightarrow$ $\mathcal{F}|_\Omega \subset \bigcup_{j=1}^{n} B(u_j, \varepsilon + \omega_{\mathcal{F}_1}(\varepsilon))$

$\Rightarrow$ Si $\eta \ll 1$, $\exists \varepsilon \mid \omega_{\mathcal{F}_1}(\varepsilon) < \eta/2$

donc $\mathcal{F}|_\Omega \subset \bigcup_{j=1}^{n} B(u_j, \eta)$

$\Rightarrow$ $\mathcal{F}|_\Omega$ pré compact

② Soit $u * \rho_\varepsilon \in \mathcal{F}_\varepsilon$

$$|u * \rho_\varepsilon(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}^d} u(x-y)\, \rho_\varepsilon(y)\, dy \right|$$

Hölder $\longrightarrow$

$$\leq \| u(x - \cdot)\|_p \cdot \|\rho_\varepsilon\|_{p'}$$

$$= \|u\|_p \cdot \|\rho_\varepsilon\|_{p'} \qquad \rho_\varepsilon \in C^1_c \subset L^{p'}$$

$$\Rightarrow \quad \|u * \rho_\varepsilon\|_\infty \leq \|u\|_p \cdot \|\rho_\varepsilon\|_{p'} \leq C \|\rho_\varepsilon\|_{p'}$$

$\mathcal{F}_1$ borné dans L^p

$$\|\nabla(u * \rho_\varepsilon)\|_\infty = \|u * (\nabla \rho_\varepsilon)\|_\infty \leq \|u\|_p \cdot \|\nabla \rho_\varepsilon\|_{p'} \leq C \|\nabla \rho_\varepsilon\|_{p'}$$

$$\nabla \rho_\varepsilon \in C^0_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d) \subset L^{p'}$$

$\Rightarrow \quad u * \rho_\varepsilon \in C^0_{b,u}$ et $\mathcal{F}_\varepsilon$ est unif. equicontinue

$$\left(\tau_h(u * \rho_\varepsilon) - (u * \rho_\varepsilon)\right)(x) \underset{\text{TAF}}{\leq} \|\nabla(u * \rho_\varepsilon)\|_\infty \cdot |h|$$

$$\Rightarrow \sup_{|h|<r} \sup_{u \in \mathcal{F}_1} \|\tau_h(u * \rho_\varepsilon) - u * \rho_\varepsilon\|_\infty \leq C \|\nabla \rho_\varepsilon\|_{p'} \cdot \cancel{|h|}\, r \xrightarrow[r \to 0]{} 0$$

③ mq $\mathcal{F}_\varepsilon|_\Omega$ est t.q. $\mathcal{F}_\varepsilon(x)$ précomp. en $\mathbb{R}$ $\forall x \in \Omega$

$$\mathcal{F}_\varepsilon(x) = \{ u * \rho_\varepsilon(x) \;/\; u \in \mathcal{F}_1 \} \subset [-C\|\rho_\varepsilon\|_{p'}, C\|\rho_\varepsilon\|_{p'}]$$

$\Rightarrow \mathcal{F}_\varepsilon(x)$ borné $\Rightarrow$ précompact

④ On a $(\mathcal{F}_\varepsilon)|_\Omega \subset C_u(\Omega, \mathbb{R})$ t.q. $(\mathcal{F}_\varepsilon|_\Omega)(x)$ precpt

$\mathcal{F}_\varepsilon|_\Omega$ unif. equicont.

et Ω est précompact

$\overset{\text{Ascoli}}{\Longrightarrow}$ $(\mathcal{F}_\varepsilon)|_\Omega$ précompact dans $(C_u(\Omega, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$

⑤ Soit $(u_n)_n \subset (\mathcal{F}_\varepsilon)|_\Omega \Longrightarrow \exists (u_{n_k})_k \subset (u_n)_n$

t.q. $\|u_{n_k} - u_{n_\ell}\|_\infty \xrightarrow[k,\ell \to +\infty]{} 0$ (de Cauchy)

$\leadsto$ $\underline{\text{mq}}$ $(u_{n_k})_k \subset L^p(\Omega)$ de Cauchy

$$\|u_{n_k} - u_{n_\ell}\|_p \overset{\text{Hölder } (u_{n_k}-u_{n_\ell})\cdot 1}{\leq} \|u_{n_k} - u_{n_\ell}\|_\infty \cdot \underbrace{\left(\int_\Omega dx\right)^{1/p'}}_{<+\infty}$$

$\Longrightarrow (\mathcal{F}_\varepsilon)|_\Omega$ est précompact dans $L^p(\Omega)$.

$\square$

DISTRIBUTIONS

$\rightsquigarrow$ Généraliser le concept de dérivé faible

$$\boxed{\int v\varphi = -\int u\varphi' \quad \forall \varphi \in C^1_c}$$

ESPACES DE FCT TEST

$\Omega \subset \mathbb{R}^d$

1.) $\mathcal{E}(\Omega) = C^\infty(\Omega)$

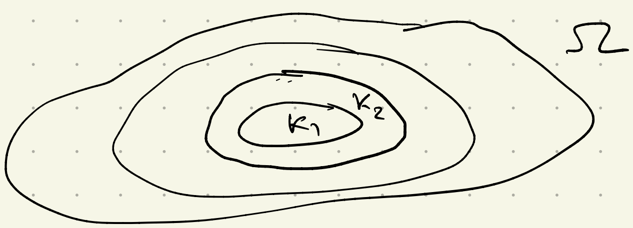
$\to$ On dit que $(\varphi_n)_n \subset \mathcal{E}(\Omega)$ t.q. $\lim_n \varphi_n = 0$

si $\sup_{x\in K} |\partial^\alpha \varphi_n(x)| \xrightarrow[n]{} 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^d \quad \forall K \subset\subset \mathbb{R}^d$

conv. uniforme sur les compacts.

$\to$ On choisit $\underbrace{\forall n \quad K_n \subset\subset \Omega, \quad \operatorname{int}(K_{n+1}) \supset K_n \quad \text{et} \quad \bigcup_{n\geq 0} K_n = \Omega}$

$\hookrightarrow$ suite exhaustive de compacts



Ex $\Omega =]0, +\infty[$ $\quad K_n = [1/n, n]$

$(K_n)_n$ suite exhaustive de compacts

On considère $p_n(\varphi) = \sup_{x\in K_n} \sup_{|\alpha|\leq n} |\partial^\alpha \varphi(x)|$

•) $\forall n$ p_n est une <u>semi-norme</u>

(comme une norme sauf que $p_n(\varphi) = 0 \not\Rightarrow \varphi \equiv 0$)

$\boxed{\text{Exo}}$ $\longrightarrow$ •) $\varphi_k \xrightarrow[k]{\mathcal{E}(\Omega)} 0 \iff \lim_k p_n(\varphi_k) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

$\rightarrow$ $\mathcal{E}(\Omega)$ n'est pas un evn mais juste un espace de Fréchet $\rightarrow$ ev topologique $\exists (p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s.n. qui donne la topologie

Exo $\mathcal{E}(\Omega)$ metrizable avec dist.

$$d(\varphi, \psi) = \sum_{n \geq 0} 2^{-n} p_n(\varphi - \psi)$$

2•) $\mathcal{D}(\Omega) = C_c^\infty(\Omega) \rightsquigarrow \mathcal{D}(\Omega) \subset \mathcal{E}(\Omega)$

$\rightarrow$ $(\varphi_n)_n \subset \mathcal{D}(\Omega)$ $\quad \varphi_n \longrightarrow 0$

ssi $\exists K \subset \Omega \,/\,$ $\operatorname{supp} \varphi_n \subset K \quad n \gg 1$

et $\sup_{x\in K} |\partial^\alpha \varphi_n(x)| \xrightarrow[n]{} 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^d$

$\rightarrow$ Une famille de semi-normes est donné par

$q_n \in C^0(\Omega)$, $\quad q_n(x) \geq 0$

$$\|u\|_{q_n} = \sup_{x\in\Omega} q_n(x) \sup_{|\alpha| \leq q_n(x)} |\partial^\alpha u(x)|$$

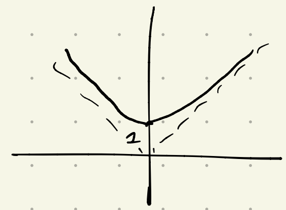
$\mathcal{E}(\Omega)$
$q_n = n\chi_{K_n}$

Exo Quelle propriété doit-on demander à $(q_n)_n$ pour avoir que

$$\varphi \equiv 0 \iff \|\varphi\|_{q_n} = 0 \quad \forall n$$

3.) $$\mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \subset \underbrace{\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)}_{\text{fct à décroissance rapide}} \subset \mathcal{E}(\mathbb{R}^d)$$

<u>Notation</u> : $\Lambda(x) = \langle x \rangle := \sqrt{1+|x|^2}$



μ^α, $\alpha \in \mathbb{N}^d$ $\qquad x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_d^{\alpha_d}$

$$(\mu^\alpha u)(x) = x^\alpha u(x)$$

Une fonction est à <u>décroissance rapide</u> si

$$\begin{cases} \Lambda^p f \text{ est bornée } \forall p \in \mathbb{N} \\ \Updownarrow \\ \mu^\alpha f \text{ est bornée } \forall \alpha \in \mathbb{N}^d \end{cases}$$

$$|\mu^\alpha f(x)| = |x^\alpha|\,|f(x)| \le \left|(\Lambda^{|\alpha|} f)(x)\right|$$

<u>Ex</u> $\Omega = \mathbb{R}$ $\qquad f(x) = \frac{1}{x^k}$ n'est pas à décroiss. rapide

$$p = k+1, \quad \left|(\Lambda^p f)(x)\right| = \frac{(1+|x|^2)^{\frac{k+1}{2}}}{|x|^k} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$$

$f(x) = e^{-|x|}$ est à décr. rap. $\qquad$ en fait $|x|^k e^{-|x|} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ $\forall k \in \mathbb{N}$.

Une fct est à croissance lente si

$\Delta^{-p} f$ est bornée pour un certain $p \in \mathbb{N}$

Ex
- $f(x) = x^p$ est à croissance lente $(p = k)$
- $f(x) = e^{|x|}$ n'est pas à cr. lente

Def $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est l'espace de fct $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$

t.q. $\partial^\alpha f$ est à décroissance rap. $\forall \alpha \in \mathbb{N}^d$

espace de Schwartz

$$\left(\mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{E}(\mathbb{R}^d) \right)$$

Sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ on considère la top. donnée par les s.n.

$$p_n(f) = \sup_{|\alpha| \vee |\beta| \leq n} \| \mu^\alpha \partial^\beta f \|_\infty$$

$\boxed{s \vee t = \max(s,t)}$

Exo mq $(\varphi_k)_k \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

$\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)} 0$ (c-à-d $p_n(\varphi_k) \xrightarrow[k]{} 0 \quad \forall n$)

$\Updownarrow$

$\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{E}(\mathbb{R}^d)} 0$

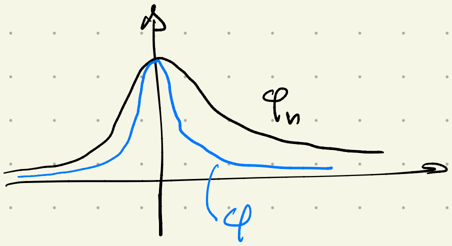
Def l'espace des multiplieurs $\mathcal{O}_M$: $u \in \mathcal{O}_M$ ssi

$u \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$: $\partial^\alpha u$ est à croissance lente

$\varphi_n \longrightarrow 0 \iff \forall \alpha \in \mathbb{N}^d \ \exists p \ / \ \| \Delta^{-p} \partial^\alpha \varphi_n \|_\infty \longrightarrow 0$

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{O}_M \subset \mathcal{E}(\mathbb{R}^d)$$

Exo $\varphi \in \mathcal{S}$, $\varphi_n(x) = \varphi(x/n)$



$\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{O}_M} ?$

$$\partial_j \varphi_n(x) = \frac{1}{n} \partial_j \varphi(x/n) \Rightarrow \partial^\alpha \varphi_n(x) = \frac{1}{n^{|\alpha|}} \partial^\alpha \varphi(x/n)$$

$\rightarrow$ $\partial^\alpha \varphi$ borné

$$\Rightarrow \|\partial^\alpha \varphi_n\|_\infty = \frac{1}{n^{|\alpha|}} \|\partial^\alpha \varphi\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

mq $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{O}_M} g$ où $g(x) = \varphi(0) \ \forall x$

$$\partial^\alpha g \equiv 0 \quad \text{si } |\alpha| \neq 0$$

$$\Rightarrow \|\partial^\alpha \varphi_n - \partial^\alpha g\|_\infty \xrightarrow[n]{} 0 \quad \forall |\alpha| \neq 0$$

Il faut donc mq $\exists p \in \mathbb{N}$ t.q.

$$\|\Delta^{-p}(\varphi_n - g)\|_\infty \xrightarrow[n]{} 0$$

$$\| \qquad \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \frac{\varphi(x/n) - \varphi(0)}{(1+|x|^2)^{p/2}}$$