Exo mq $L^p(\mathbb{R}^d) \subset L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$

$\|u\|_p < +\infty$

Soit $u \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $K \subset\subset \mathbb{R}^d$

$$\int_K |u|\,dx = \int_{\mathbb{R}^d} \chi_K(x)\,|u(x)|\,dx$$

Hölder

$$\leq \|u\|_p \,\|\chi_K\|_{p'} = \|u\|_p \,\mathcal{L}^d(K)^{1/p'} < +\infty$$

$$\|\chi_K\|_{p'} = \left(\int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{|\chi_K(x)|}_{= \begin{cases} 1 & \text{si } x \in K \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}{}^{p'}\,dx\right)^{1/p'} = \mathcal{L}^d(K)^{1/p'} < +\infty$$

car K cpt

Proposition Soit $p \in [1, +\infty]$, $u \in L^p$

1. $u \in W^{1,p}$
2. $\exists\, c_u > 0$ t.q. $\int u\, \partial_j \varphi \leq c_u \|\varphi\|_{p'}$, $\forall \varphi \in C^1_c$, $j \in \{1, \dots, d\}$
3. $\exists\, c_u > 0$ $\|\tau_h u - u\|_p \leq c_u |h|$
4. $\exists\, (u_n)_n \subset W^{1,p}$ bornée en $W^{1,p}(\Omega)$ t.q. $u_n \xrightarrow{L^p} u$

Donc : (1) $\Rightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3) $\Leftrightarrow$ (4) $\forall p \in [1, +\infty]$

$\Leftarrow$ si $p > 1$

De plus $c_u = c\,\|\nabla u\|_p$ en (2) et (3) où $c > 0$.

Preuve On a déjà mq ① ⟹ ②' et que

② ⟹ ①' si $p>1$

② ⟹ ③

$h \in \mathbb{R}^d$
$= (h_1, \dots, h_d)$

$$\int u\,(h\cdot\nabla\varphi)\,dx = \sum_{j=1}^{d} h_j \int u\,\partial_{x_j}\varphi\,dx \overset{②'}{\leq} \sum_{j=1}^{d} |h_j|\; C_u\,\|\varphi\|_{p'} \leq C\,|h|\,\|\varphi\|_{p'}$$

$$\sum_{j=1}^{d} |h_j| \leq \tilde{c}\,\underbrace{|h|}_{\sqrt{\sum |h_j|^2}}$$

mq $\|\tau_h u - u\|_p \leq C\,|h|$

$\varphi \in C_c^1$

$$\int (\tau_h u - u)\,\varphi\,dx = \int \big(u(\overbrace{x-h}^{y}) - u(x)\big)\,\varphi(x)\,dx = \int u(y)\,\big(\varphi(y+h) - \varphi(y)\big)\,dy = \int u\,\underline{(\tau_{-h}\varphi - \varphi)}\,dx$$

$$(\circ)\quad \boxed{(\tau_{-h}\varphi - \varphi)(x) = \varphi(x+h) - \varphi(x) = \int_0^1 \overbrace{h\cdot\nabla\varphi(x+sh)}^{\frac{d}{ds}\varphi(x+sh)}\,ds}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} u\left(\int_0^1 h\cdot\nabla\varphi(x+sh)\,ds\right)dx$$

Fubini ⟶

$$= \int_0^1 \left(\int_{\mathbb{R}^d} u(x)\big(h\cdot\nabla\underbrace{\varphi(x+sh)}_{\tau_{-sh}\varphi}\big)\,dx\right)ds$$

$\nabla\varphi(x+sh) = \nabla(\tau_{-sh}\varphi)$ ⟶

$$\leq \int_0^1 C|h| \underbrace{\|\tau_{-sh}\varphi\|_{p'}}_{=\|\varphi\|_{p'}} \, ds$$

$$= C|h| \, \|\varphi\|_{p'}$$

Pour resumer, on a que $\displaystyle\int (\tau_h u - u)\varphi \, dx \leq C|h| \, \|\varphi\|_{p'}$ $\quad \forall \varphi \in C^1_c$

$$\|\tau_{-h} u - u\|_p = \sup \left\{ \int (\tau_{-h} u - u) \, w \, dx \;/\; w \in L^{p'}, \ \|w\|_{p'} \leq 1 \right\}$$

$$= \sup \left\{ \int (\tau_h u - u)\varphi \, dx \;/\; \varphi \in C^1_c, \ \|\varphi\|_{p'} \leq 1 \right\}$$

$$\leq C|h| \quad \rightsquigarrow \quad (3)!$$

$\boxed{(3) \Rightarrow (2)}$

$$(\circ) \to \quad (\tau_{-th}\varphi - \varphi)(x) = th \cdot \int_0^1 \nabla\varphi(x + tsh) \, ds$$

$$\frac{\tau_{-th}\varphi - \varphi}{t} \xrightarrow{L^{p'}} h \cdot \nabla\varphi$$

$$\left\| \frac{\tau_{-th}\varphi - \varphi}{t} - h \cdot \nabla\varphi \right\|_{p'} = \left\| h \cdot \int_0^1 \left[\nabla\varphi(\cdot + tsh) - \nabla\varphi(\cdot) \right] ds \right\|_{p'}$$

$$\leq |h| \sup_{s \leq 1} \|\tau_{-tsh}\nabla\varphi - \nabla\varphi\|_{p'}$$

$$= |h| \sup_{r \leq t} \|\tau_{-rh}\nabla\varphi - \nabla\varphi\|_{p'}$$

$$\xrightarrow[t \downarrow 0]{} 0 \quad \text{car} \quad \nabla\varphi \in L^{p'}$$

$$\frac{\tau_{-th}\varphi - \varphi}{t} \xrightarrow{L^{p'}} h \cdot \nabla\varphi$$

$u \in L^p$

mq $\displaystyle\int u\,(h \cdot \nabla\varphi)\,dx \leq |h|\, C_u \|\varphi\|_{p'} \implies$ 2

$$\int u\,(h\cdot\nabla\varphi)\,dx = \lim_{t \downarrow 0} \int u\left(\frac{\tau_{-th}\varphi - \varphi}{t}\right)dx$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\int (\tau_{th}u - u)\,\varphi\,dx$$

Hölder

$$\leq \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\cdot \|\tau_{th}u - u\|_p \cdot \|\varphi\|_{p'}$$

3

$$\leq \lim_{t\to 0} \frac{1}{\cancel{t}}\cdot |\cancel{t}h|\cdot C\,\|\varphi\|_{p'}$$

$$= C\,|h|\,\|\varphi\|_{p'} \implies 2 .$$

Où on en est : 1 $\implies$ 2 $\iff$ 3 $\quad$ 4

$\Leftarrow$ si $p>1$

4 $\quad \exists (u_n)_n \subset W^{1,p}$, $\exists M>0$, $\|u_n\|_{W^{1,p}} \leq M \quad \forall n$

t.q. $\quad u_n \xrightarrow{L^p} u$

1 $\implies$ 4 $\quad$ Triviale : si $\overbrace{u \in W^{1,p}}^{1}$, $u_n = u \quad \forall n$

$\|u_n - u\|_{L^p} \leq \|u_n - u\|_{W^{1,p}} = 0 \quad \forall n$

$\implies u_n \xrightarrow{L^p} u$, $\quad \|u_n\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{W^{1,p}}$

4 $\implies$ 2 $\quad$ mq $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} u\,\partial_j\varphi \leq C\,\|\varphi\|_{p'} \quad \forall \varphi \in C_c^1$

Comme $(u_n)_n \subset W^{1,p} \implies \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} u_n\,\partial_j\varphi \leq C_{u_n}\|\varphi\|_{p'}$

On rappelle $\quad c_{u_n} = C\|\nabla u_n\|_p \le C\|u_n\|_{W^{1,p}} \le CM$

$$\int_{\mathbb{R}^d} u\,\partial_j\varphi \underset{\substack{\uparrow \\ u_n \xrightarrow{L^p} u}}{=} \lim_n \int_{\mathbb{R}^d} u_n\,\partial_j\varphi \le \lim_n c_{u_n}\|\varphi\|_{p'} \le CM\|\varphi\|_{p'}$$

$\rightsquigarrow$ (2)

$\forall p \qquad (1) \Rightarrow (2) \overset{\substack{p>1 \\ \Delta \mathrm{I}}}{\Longleftrightarrow} (3), \qquad (4) \Rightarrow (2), \qquad (1) \Rightarrow (4)$

$\boxed{(2) \Rightarrow (4)}$ $\quad p=1, \quad u \notin W^{1,1}$

on admet le résultat en ce cas

$\square$

<u>Proposition</u> $\quad p \in [1, +\infty[$

(1) C_c^1 est dense dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$

(2) $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $\quad W^{1,p}(\Omega) \cap C^1(\Omega)$ est dense dans $W^{1,p}(\Omega)$

(3) On peut remplacer C_c par C_c^∞
et $C_c^1(\Omega)$ par $C_c^\infty(\Omega)$

<u>Rmq</u> Si $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, en général $C_c^1(\Omega)$ ne sont pas denses en $W^{1,p}(\Omega)$!

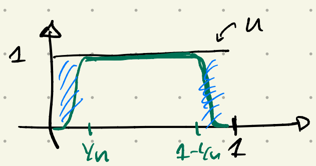
<u>Exemple:</u> $\quad \Omega = [0,1] \subset \mathbb{R}$

•) $u(x) = 1 \quad \forall x \in \Omega \quad \longrightarrow \quad u \in W^{1,p}(\Omega) \quad \forall p$

$u \in L^p(0,1) \ \forall p \quad (\|u\|_p = 1 \ \forall p)$

$u'(x) = 0 \quad \forall x \in (0,1) \quad \Rightarrow \quad \|u'\|_p = 0 \quad \forall p$

$\Rightarrow \quad \|u\|_{W^{1,p}(0,1)} = 1 \quad \forall p \ge 1$

•) 

Supposons $(u_n)_n \subset W^{1,p}(0,1)$

t.q. $u_n(x) = 1$ si $x \in (1/n, 1-1/n)$, $|u_n(x)| \leq 1$

$u_n \in C_c^1(0,1)$

$\Rightarrow \quad u_n \longrightarrow u \quad$ en L^p

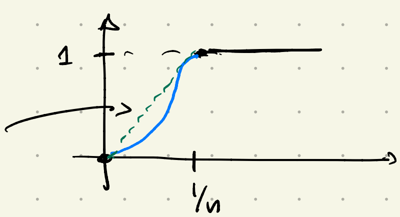
$$\int_0^1 |u_n(x) - u(x)|^p \, dx = \int_0^{1/n} \underbrace{|1 - u_n(x)|^p}_{\leq 1 + |u_n| \leq 2} dx + \int_{1-1/n}^{1} |1-u_n|^p dx$$

$$\leq 2^p \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} \right) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

Par contre $u_n \not\longrightarrow u$ en $W^{1,p}(0,1)$

$$u_n \xrightarrow{W^{1,p}} u \iff u_n \xrightarrow{L^p} u \, , \quad \underbrace{u_n' \xrightarrow{L^p} u'}_{faux}$$

$$\| u_n' - u' \|_p^p = \int_0^1 |u_n'|^p \, dx = \int_0^{1/n} |u_n'|^p dx + \int_{1-1/n}^{1} |u_n'|^p dx$$



droite de peinte n
$(y = nx)$

$$1 = u_n(1/n) = u_n(1/n) - u_n(0) = \int_0^{1/n} u_n'(x) \, dx \leq \|u_n'\|_\infty \cdot \frac{1}{n}$$

$\Rightarrow \quad \|u_n'\|_\infty \geq n$

$$1 = u_n(1/n) - u_n(0) = \int_0^{1/n} u_n'(x) \, dx \underset{\text{Hölder}}{\leq} \|u_n'\|_p \left(\frac{1}{n}\right)^{1/p'}$$

$\Rightarrow \quad \|u_n'\|_p \geq n^{1/p'}$

$$\|u_n' - u'\|_p = \|u_n'\|_p \geq n^{1/p'} \xrightarrow[n]{} \infty$$

$\Rightarrow \quad u_n' \not\longrightarrow u'$ en L^p.

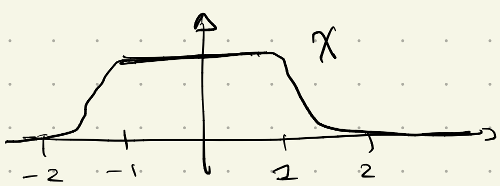
__Preuve__ mq C_c^∞ dense dans $W^{1,p}$ $\quad (p<+\infty)$

Mêmes idées que dans la preuve que C_c^∞ est dense L^p.

① __Troncature__ (cut-off) $\quad u \in W^{1,p}$ peut être approchée par $v \in W^{1,p}$, $\operatorname{supp} v \subset\subset \mathbb{R}^d$

② __Lissage__ $\quad v \in W^{1,p}$, $\operatorname{supp} v \subset\subset \mathbb{R}^d$ peut-être approchée par $w \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$

① On choisit $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ / $\chi(x) = 1$ si $x \in B_1$
$\chi(x) = 0$ si $x \notin B_2$



$$\chi_M(x) := \chi(x/M)$$

$$\operatorname{supp} \chi_M \subset B_{2M}$$

$$\chi_M(x) = 1 \text{ si } x \in B_M$$

$$v := u\chi_M \in L^p \qquad \|u-v\|_p \xrightarrow[M\to+\infty]{} 0$$

$$\nabla v = \nabla(u\chi_M) = \underbrace{\underbrace{(\nabla u)}_{\in L^p}\underbrace{\chi_M}_{\in L^\infty}}_{\in L^p} + \underbrace{u}_{\in L^p}\underbrace{(\nabla \chi_M)}_{\in L^\infty} \in L^p \Rightarrow v \in W^{1,p}$$

De plus, $v \longrightarrow u$ en L^p quand $M \longrightarrow +\infty$

mq $\nabla v \longrightarrow \nabla u$

en fait : $(\nabla u)\chi_M \xrightarrow[M\to+\infty]{} \nabla u$ (conv. dominée) $\quad |(\nabla u)\chi_M|^p \le \underbrace{|\nabla u|^p \|\chi\|_\infty^p}_{\in L^1}$

$$\nabla \chi_M(x) = \frac{1}{M}\nabla\chi(x/M) \Rightarrow \|\nabla\chi_M\|_\infty \le \frac{\|\nabla\chi\|_\infty}{M} \xrightarrow[M\to+\infty]{} 0$$

Donc $\quad \| u \nabla \chi_r \|_p \leq \| \nabla \chi_r \|_\infty \cdot \| u \|_p \leq \dfrac{\| \nabla \chi \|_\infty}{r} \cdot \| u \|_p$

$$\Rightarrow \lim_{r \to +\infty} \| u \nabla \chi_r \|_p = 0$$

Finalement : $\quad \nabla v \longrightarrow \nabla u$ en $L^p \Rightarrow v \longrightarrow u$ en $W^{1,p}$.

② Lissage $\quad v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ t.q. $\operatorname{supp} v \subset\subset \mathbb{R}^d$

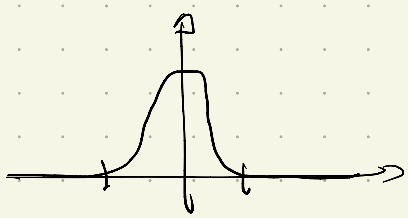
$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \ \exists w \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \ \text{ t.q.}$$

$$\| v - w \|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq \varepsilon$$

$(\rho_n)_n \quad$ approximation de l'identité

$$\rho_n(x) = \frac{\rho(x/\varepsilon_n)}{\varepsilon_n^{\,d}} \qquad \rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$$

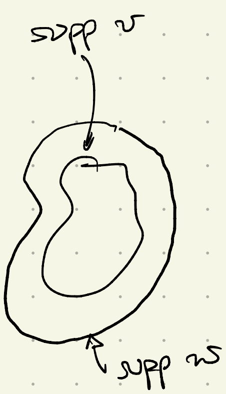
$$\int \rho \, dx = 1$$



$$\rho(x) = 1 \quad \text{si} \quad x \in B_1$$

$$\rho(x) = 0 \quad \text{si} \quad x \notin B_2$$

$$0 \leq \rho(x) \leq 1$$



$$w = v * \rho_n \quad \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \qquad \partial^\alpha w = v * \partial^\alpha \rho_n$$

$$\operatorname{supp}(w) \subset \operatorname{adh}\big(\operatorname{supp} v + \underbrace{\operatorname{supp} \rho_n}_{\subset B_{\varepsilon_n}}\big) \subset (\operatorname{supp} v)_1 \qquad \varepsilon_n \leq 1$$

On a déjà mq $\quad \| w - v \|_p \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \qquad (\circ\circ)$

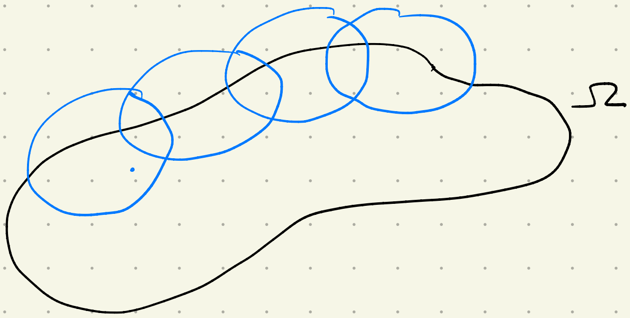
$$\lim_n \varepsilon_n = 0$$

Donc il reste à mq $\|\nabla w - \nabla v\|_p \xrightarrow[n]{} 0$

$$\nabla w = \nabla(v * \rho_n) = \nabla v * \rho_n$$

Même preuve que pour montrer (∞) permet de montrer que $\|\nabla w - \nabla v\|_p \xrightarrow[n]{} 0$.

② $\underbrace{W^{1,p}(\Omega) \cap C^\infty(\Omega) \text{ est dense dans } W^{1,p}(\Omega)}_{\text{Théorème de Meyers-Serrin}}$

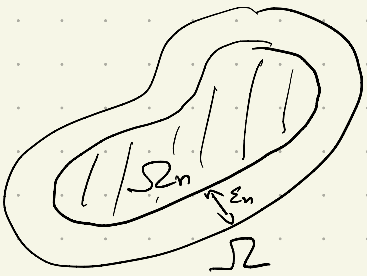


→ Partition de l'unité

→ Résultat en exo

$\square$

Exo $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $(\rho_n)_n$ approx de l'identité



$$u_n = u * \rho_n : \Omega_n \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \Omega_n = \{x \,/\, x + B_{\varepsilon_n} \subset \Omega\}$$

mq $\|u_n - u\|_{W^{1,p}(\Omega_n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

$$u_n(x) = \int_{\mathbb{R}^d} u(x-y)\, \rho_n(y)\, dy$$

supp $\rho_n \subset B_{\varepsilon_n}$ si $y \notin B_{\varepsilon_n} \Rightarrow \rho_n(y) = 0$

$$= \int_{B_{\varepsilon_n}} u(\underbrace{x-y}_{\in \Omega})\, \rho_n(y)\, dy \qquad x + B_{\varepsilon_n} \subset \Omega$$

Propriétés $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$: → caractérisation par dualité $(p>1)$

→ densité de C_c^∞ $(p<+\infty)$

→ Pre-compacité

Thm (Rellich-Kondrakov) $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^d \Rightarrow W^{1,p}(\Omega) \subset\subset L^p(\Omega)$

C'est-à-dire : Si $(u_n)_n \subset W^{1,p}(\Omega)$, $\|u_n\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq C$

$\Rightarrow \exists u \in L^p(\Omega)$ t.q. $u_n \xrightarrow[n]{L^p} u$

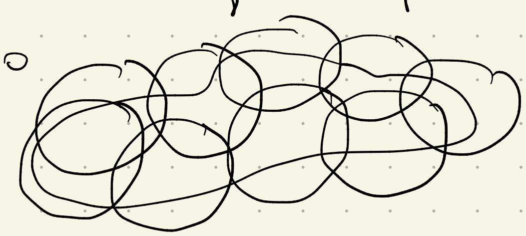
à sous-suite prés

Rappels: •) (E,d) espace métrique

E est pré compact si: $\forall \varepsilon>0 \ \exists x_1,\dots,x_n \in E$

t.q. $E \subset \bigcup_{j=1}^{n} B(x_j,\varepsilon)$

$\varepsilon>0$



(précompact ⇒ borné)

pré compact ⇔ toute suite admet une sous-suite de Cauchy.

•) (X,d_X), (Y,d_Y) esp. métriques

X pré compact

$$C_u(X,Y) = \{ f : X \longrightarrow Y \ / \ f \text{ unif. continue} \}$$

$$d(f,g) = \sup_{x\in X} d_Y(f(x),g(x)) \qquad f,g \in C_u(X,Y)$$

est une distance sur $C_u(X,Y)$

Thm (Ascoli) $\mathcal{F} \subset C_u(X,Y)$

on note $\mathcal{F}(x) = \{ f(x) \,/\, f \in \mathcal{F} \} \subset Y$, $x \in X$

$\mathcal{F}$ précompact $\iff$ $\mathcal{F}$ est uniformement equicontinue et $\mathcal{F}(x) \subset Y$ précompact $\forall x \in X$

Preuve (dans un cas simple)

$X = [0,1] \subset \mathbb{R}$, $\quad Y = \mathbb{R}$

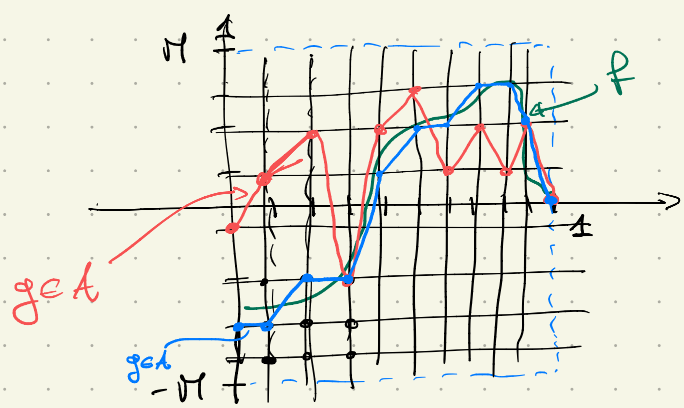
$$C_u([0,1], \mathbb{R}) = C^0([0,1]) \qquad \text{Thm Heine}$$

$\Leftarrow$ $\quad \mathcal{F} \subset C^0([0,1])$ uniform. equicont.

$$\left.\begin{array}{c} \underbrace{\exists M > 0 \,/\, |f(x)| \leq M \quad \forall x \in X}_{\Updownarrow} \\ \mathcal{F}(x) \subset Y \text{ est borné } \forall x \in X \end{array}\right\} \boxed{\text{Exo}}$$

mq $\forall \varepsilon > 0$ $\exists f_1, \dots, f_n \in C([0,1])$ t.q.

$$\mathcal{F} \subset \bigcup_{j=1}^{n} B(f_j, \varepsilon) \quad \text{où} \quad d(f,g) = \|f - g\|_\infty$$



uniforme equicont.

$\Rightarrow$ $\exists \delta > 0$ t.q. $\forall f \in \mathcal{F}$

$$|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon/4 \text{ si } |x - y| \leq \delta$$

On choisit $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_k = 1$

t.q. $|x_i - x_{i+1}| < \delta \quad \forall i \in \{0, \dots, k-1\}$

$$-M = y_0 < y_1 < \dots < y_\ell = M \quad \text{où} \quad |y_i - y_{i+1}| < \varepsilon/4$$

$$\mathcal{A} = \{ f : [0,1] \longrightarrow [-M, M] \;/\; f \text{ affine par morceaux sur } [x_i, x_{i+1}] \text{ et t.q. } f(x_i) = y_j \}$$

$\operatorname{card} \mathcal{A} < +\infty$: chaque $g \in \mathcal{A}$ déterminé par une sequence

$$(y_{j_1}, y_{j_2}, \dots, y_{j_k}) \in \mathbb{R}^k$$

t.q. $g(x_i) = y_{j_i}$

$$\uparrow$$

$$(y_j)_{j=1}^{\ell}$$

au plus $\operatorname{card} \mathcal{A} = k \cdot \ell$

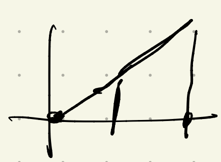
$f \in \mathcal{F}$, on choisit $g \in \mathcal{A}$

$g(x_i) = y_j$ où y_j t.q.

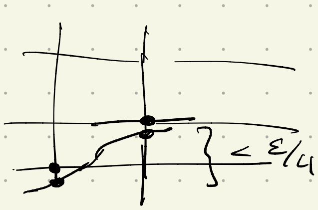
$$|y_j - f(x_i)| = \min_{v \in \{1,\dots,\ell\}} |y_v - f(x_i)| \leq \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{(taille du maillage en } y\text{)}$$

Il faut mq $\quad |f(x) - g(x)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in [0,1]$

$$|f(x) - g(x)| \leq |f(x) - f(x_i)| + |f(x_i) - \underbrace{g(x_i)}_{y_j}| + |g(x_i) - g(x)|$$



$$\leq \underbrace{\frac{\varepsilon}{4}}_{\text{unif. cont}} + \underbrace{\frac{\varepsilon}{4}}_{\text{maillage}} + \underbrace{|\underbrace{g(x_i)}_{\sim f(x_i)} - \underbrace{g(x_{i+1})}_{\sim f(x_{i+1})}|}_{\leq \frac{\varepsilon}{4}} \leq \frac{3}{4}\varepsilon$$



On a donc mq $\forall f \in \mathcal{F}_1 \ \exists g \in A$ t.q. $\|g - f\|_\infty \leq \varepsilon$

$$\Rightarrow \mathcal{F}_1 \subset \bigcup_{g \in A} B(g, \varepsilon) \quad \text{et} \quad \text{card } A < +\infty$$

$\square$

Exo Utiliser le thm d'Ascoli pour démontrer Rellich-Kondrakov pour $p = \infty$ $\left(W^{1,\infty}(\Omega)\right)$