Examen pour le cours de M. Prandi

Il faudra envoyer votre copie à `dario.prandi@centralesupelec.fr` avant le

mercredi 30 juin à 23h59 (heure Béninoise)

Le travail doit être mené individuellement. La copie doit être rédigé dans une calligraphie compréhensible, et bien numérisé.

1 Exercices du cours

1. Est-ce que l'espace des fonctions uniformément continues et bornés, avec la norme $\|\cdot\|_\infty$ est complet ? Le prouver ou donner un contre-exemple.
2. Soit $u(x) = e^{|x|}$. Montrer que $T_u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ mais que $T_u \notin \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Qu'est-ce qu'on peux en dire par rapport à $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$?
3. Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et posons $\varphi_n(x) := \varphi(x/n)$, $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\{\varphi_n\}_n$ est une suite de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ qui n'est pas convergente.
4. Montrer que si $P(D)$ est un opérateur différentiel dont le symbole principale ne s'annule pas sauf pour $\xi = 0$, alors $P(D)$ est elliptique.

2 Convolutions

Definition 1. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. Une suite $\{u_k\}_k \subset L^1_{loc}(\Omega)$ est dite "à forme de δ" pour $a \in \Omega$, si*

1. $u_k(x) \geq 0$ *pour tout* $x \in \Omega$ *et* $k \in \mathbb{N}$;
2. $\int_\Omega u_k(x)\,dx = 1$ *pour tout* $k \in \mathbb{N}$;
3. *pour tout voisinages* $U \subset \Omega$ *de* a *on a*

$$\lim_{k\to+\infty} \int_{\Omega\setminus U} u_k(x)\,dx = 0.$$

On vous demande de:

1. Montrer que toute approximation de l'identité est une suite à forme de δ dans l'origine.

2. Montrer que la suite $u_k : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ définie par

$$u_k(x) := \begin{cases} c_k(1-|x|^2)^k & \text{si } |x| \leq 1, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \tag{1}$$

   est à forme de δ en 0 pour une choix approprié des constants $c_k > 0$.

3. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ensemble compact. Soit $\{v_k\}_k \subset C^0(\Omega)$ une suite à forme de δ en $a \in \Omega$. Montrer que pour tout $f \in C^0(\Omega)$ on a que $v_k \star f \to f(a)$, uniformement sur Ω, quand $k \to +\infty$.

4. Supposons que une fonction $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est polynomiale dans la boule $B_R = \{x \in \mathbb{R}^d \mid |x| \leq R\}$, et $\varphi(x) = 0$ si $|x| > R$. Montrer que si $\psi \in L^1(\mathbb{R}^d)$ est telle que $\operatorname{supp}\psi \subset B_r$, $0 < r < R$, alors $\operatorname{supp}(\varphi \star \psi) \subset B_{R+r}$ et que $\varphi \star \psi$ est polynomiale sur B_{R-r}.

3 Espaces de Sobolev

Notre but est de prouver le résultat suivant.

Proposition 1. *Soit $\Omega = (0,1) \subset \mathbb{R}$ et considérons $u \in W^{1,p}(I)$, $p \in [1, +\infty)$. Alors, $u' = 0$ presque partout sur $E = \{x \in I \mid u(x) = 0\}$.*

Soit $G \in C^1(\mathbb{R})$ telle que, pour une constante $C > 0$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a

$$|G(t)| \leq 1, \qquad |G'(t)| \leq C.$$

De plus, on suppose que $G(t) = 1$ si $t \geq 1$, $G(t) = -1$ si $t \leq -1$ et $G(t) = t$ si $|t| \leq 1/2$. Posons,

$$v_n(x) := \frac{1}{n} G(nu(x)), \qquad \forall x \in I.$$

1. Vérifier que $\|v_n\|_\infty \to 0$ pour $n \to +\infty$.

2. Montrer que $v_n \in W^{1,p}(I)$ et calculer v_n'.

3. En déduire que $|v_n'|$ est borné par une fonction de $L^p(I)$ qui ne dépend pas de n.

4. Montrer que $v_n'(x) \to f(x)$ p.p. sur I, pour $n \to +\infty$, et identifier f. (On suggère de considérer les cas $x \in E$ et $x \notin E$ séparément).

5. Déduire que $v_n' \to f$ en $L^p(I)$.

6. Prouver que $f = 0$ p.p. sur I et en tirer que $u' = 0$ p.p. sur E.

4 Solution fondamentale

Considérons l'equation de la chaleur sur $\mathbb{R}^d$:

$$\partial_t u = \Delta u, \qquad u|t = 0 = u_0.$$

Dans cet exercice on va déterminer le noyau de la chaleur, c'est-à-dire, la solution fondamentale de l'opérateur $\partial_t - \Delta$ sur $\mathcal{D}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$

1. Montrer que, si u_0 est assez régulier qu'on veut, pour tout $t > 0$ on a
$$u(t,x) = (k_t \star u_0)(x), \qquad k_t(x) = (4\pi t)^{-d/2} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}.$$
2. Posons $k : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ définie par
$$k(t,x) := \begin{cases} k_t(x) & \text{si t>0,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{2}$$
Justifier que $T_k \in \mathcal{D}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$.
3. Pour $\varepsilon > 0$ soit $K_\varepsilon(t,\varepsilon) = k(t,x)$ si $t > \varepsilon$ et $K_\varepsilon(t,x) = 0$ sinon. Montrer que $T_{K_\varepsilon} \to T_k$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$ pour $\varepsilon \downarrow 0$.
4. En utilisant une intégration par parties et le fait que $k(t,x) = k(t,-x)$, montrer que
$$\langle (\partial_t - \Delta) T_{K_\varepsilon}, \varphi \rangle = [k(\varepsilon, \cdot) \star \varphi(\varepsilon, \cdot)]\,(0), \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d).$$
Ici la convolution est seulement par rapport à $x \in \mathbb{R}^d$.
5. En déduire que $(\partial_t - \Delta) T_{K_\varepsilon} \to \delta_0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$.
6. Conclure que $(\partial_t - \Delta) k = \delta_0$.