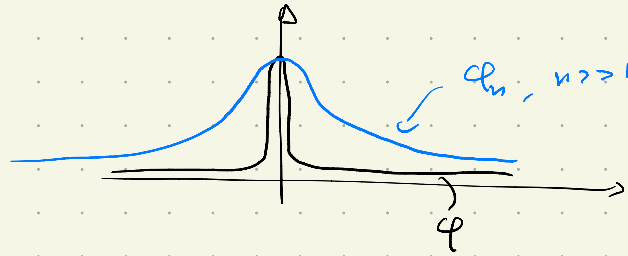
Exo : $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\varphi_n(x) = \varphi(x/n)$



mq $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{O}_M} \varphi(0)$ ← fct constante $\varphi_\infty(x) = \varphi(0)$

$\mathcal{O}_M$ esp. multiplieurs $f \in \mathcal{O}_M$ ssi $\partial^\alpha f$ croissance lente $\forall \alpha$

$\downarrow$

$\forall \alpha \in \mathbb{N}^d \ \exists p \in \mathbb{N}$ t.q. $\Lambda^{p} \partial^\alpha f$ est borné.

Dans $\mathcal{O}_M$ on a que $(f_n)_n$ t.q. $f_n \xrightarrow{\mathcal{O}_M} f$

ssi $\forall \alpha \in \mathbb{N}^d \ \exists p$ t.q. $\Lambda^{p} \partial^\alpha f_n \longrightarrow \Lambda^{p} \partial^\alpha f$ uniformement

① $\alpha \in \mathbb{N}^d \setminus \{0\}$, $\|\partial^\alpha \varphi_n\|_\infty = \dfrac{\|\partial^\alpha \varphi\|_\infty}{n^{|\alpha|}} \xrightarrow[n]{} 0 = \|\partial^\alpha \varphi_\infty\|_\infty$

② $\alpha = 0$, est-ce que il $\exists p \in \mathbb{N}$ t.q.

$$\|\Lambda^{p}(\varphi_n - \varphi_\infty)\|_\infty \xrightarrow[n]{} 0$$

Soit $x \in \mathbb{R}$ $\Lambda^{-p}(\varphi_n - \varphi_\infty)(x) = \dfrac{\varphi(x/n) - \varphi(0)}{(1+|x|^2)^{p/2}}$

$y = \frac{x}{n}$ $= \dfrac{\varphi(y) - \varphi(0)}{(1 + n^2|y|^2)^{p/2}}$

$\rightsquigarrow \|\Lambda^{-p}(\varphi_n - \varphi_\infty)\|_\infty = \underbrace{\sup_{y \in \mathbb{R}} \dfrac{|\varphi(y) - \varphi(0)|}{(1 + n^2|y|^2)^{p/2}}} \leq 2\|\varphi\|_\infty \cdot \sup_y (1 + n^2|y|^2)^{-p/2}$

on observe que si $p=0$ cette quantité ne tend pas vers 0.

$\underline{p=2}$

$$\Delta^{-2}(\varphi_n-\varphi_\infty)(x) = \frac{\varphi(y)-\varphi(0)}{1+n^2|y|^2} \begin{cases} \le \dfrac{\|\nabla\varphi\|_\infty \cdot |y|}{1+n^2|y|^2} \\ \le \dfrac{2\|\varphi\|_\infty}{1+n^2|y|^2} \end{cases}$$

$$\le \begin{cases} \|\nabla\varphi\|_\infty \cdot 1/\sqrt{n}, & 0\le |y| < 1/\sqrt{n} \\ \dfrac{2\|\varphi\|_\infty}{1+n}, & |y|\ge 1/\sqrt{n} \end{cases}$$

$$\le C\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \vee \frac{1}{n+1}\right) = \frac{C}{\sqrt{n}}$$

$$\Rightarrow \quad \|\Delta^{-2}(\varphi_n-\varphi_\infty)\|_\infty \le \frac{C}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n]{} 0.$$

$$\boxed{\underline{\underline{\text{Exo}}} \quad \underline{\text{mq}} \quad \varphi_n \overset{\mathcal{S}}{\not\longrightarrow} \varphi(0)}$$

Distributions

$\mathcal{D}(\Omega)$ esp. vectoriel topologique

$\rightsquigarrow$ $\mathcal{D}'(\Omega)$ le <u>dual topologique</u> de $\mathcal{D}(\Omega)$ — <u>espace de distributions</u>

$T\in\mathcal{D}'(\Omega)$ ssi $T:\mathcal{D}(\Omega)\longrightarrow\mathbb{R}$ linéaire et continue

$\varphi\in\mathcal{D}(\Omega)$, $T(\varphi) = \langle T,\varphi\rangle$

① $\mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$

$$\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \longmapsto T_\varphi \in \mathcal{D}'(\Omega)$$

$$\langle T_\varphi, \psi \rangle := \int_\Omega \varphi \psi \, dx \qquad \forall \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

$\underline{mq}$ $\quad T_\varphi \in \mathcal{D}'(\Omega)$

a) $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) = C_c^\infty(\Omega) \Rightarrow \langle T_\varphi, \psi \rangle \in \mathbb{R} \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$

b) $$\begin{aligned} \langle T_\varphi, \psi_1 + \alpha \psi_2 \rangle &= \int_\Omega \varphi (\psi_1 + \alpha \psi_2) \, dx \\ &= \int_\Omega \varphi \psi_1 \, dx + \alpha \int \varphi \psi_2 \, dx \\ &= \langle T_\varphi, \psi_1 \rangle + \alpha \langle T_\varphi, \psi_2 \rangle \end{aligned}$$

$\Rightarrow T_\varphi$ linéaire

c) T_φ est-elle continue ?

Soit $(\psi_n)_n \subset \mathcal{D}(\Omega)$ t.q. $\psi_n \xrightarrow[n]{\mathcal{D}(\Omega)} 0$

$$\begin{aligned} |\langle T_\varphi, \psi_n \rangle| &= \left| \int_\Omega \varphi \, \psi_n \right| = \int_{\operatorname{supp} \varphi} |\varphi| |\psi_n| \, dx \\ &\leq \|\varphi\|_1 \cdot \sup_{\operatorname{supp} \varphi} |\psi_n| \xrightarrow[n]{} 0 \end{aligned}$$

D'une façon équivalente on pourrait mq

$\forall n, \quad |\langle T_\varphi, \psi \rangle| \leq p_n(\psi) \, c_\varphi \quad$ où $c_\varphi > 0 \quad$ et

$$p_n(\varphi) = \sup_{x \in K_n} \sup_{|\alpha| \le n} |\partial^\alpha \varphi(x)| \quad \text{où} \quad (K_n)_n$$

est une suite exhaust. de Ω

Déf L'espace de distributions est $\mathcal{D}'(\Omega)$

distributions tempérées et $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$

distribution à supp. compact $\mathcal{E}'(\Omega)$

$$\mathcal{D} \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{E} \implies \mathcal{E}' \subset \mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'$$

Exemple Soit δ_0 la masse de Dirac

Mq $\delta_0 \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$

$$\langle \delta_0, \varphi \rangle := \varphi(0) \qquad \forall \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$$

δ_0 est linéaire $\to$ évident

mq δ_0 est continue

Soit $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{E}(\Omega)} 0 \implies \sup_{x \in K} |\varphi_n(x)| \xrightarrow[n]{} 0 \quad \forall K \subset \mathbb{R}^d$

$\implies \varphi_n(0) \xrightarrow[n]{} 0 \quad \forall n$

$\implies \langle \delta_0, \varphi_n \rangle \xrightarrow[n]{} 0$.

Déf Une distribution T est nulle sur U ouvert

si $\langle T, \varphi \rangle = 0 \quad \forall \varphi$ test , $\operatorname{supp} \varphi \subset U$

Le support de T est $\operatorname{supp} T = \left[\bigcup_{U / T \text{ est nulle sur } U} U \right]^c$ (fermé)

Proposition

Exo : trouver l'ordre de δ_0 et le support

① Une forme linéaire T sur $\mathcal{D}(\Omega)$ est dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ si $\forall K \subset\subset \Omega$ cpt, $\exists m \in \mathbb{N}$, $C > 0$ t.q.

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C \sup_{x \in K} \sup_{|\alpha| \leq m} |\partial^\alpha \varphi(x)|, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),\ \operatorname{supp} \varphi \subset K$$

On dit alors que T a <u>ordre</u> au plus <u>m</u> sur K

② T linéaire sur $\mathcal{E}(\Omega)$ est dans $\mathcal{E}'(\Omega)$ si $\exists K \subset\subset \Omega$ cpt, $\exists m \in \mathbb{N}$, $C > 0$ t.q.

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C \sup_{x \in K} \sup_{|\alpha| \leq m} |\partial^\alpha \varphi(x)|, \quad \forall \varphi \in \mathcal{E}(\Omega)$$

On dit alors que T a support dans K et ordre au plus <u>m</u>

③ T linéaire sur $\mathcal{S}$ est dans $\mathcal{S}'$ si $\exists m \in \mathbb{N}$, $C > 0$ t.q.

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \sup_{|\alpha| \vee |\beta| \leq m} |x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)|$$

Preuve ②

T linéaire sur $\mathcal{E}(\Omega)$ t.q.

$\exists K$ cpt, $m \in \mathbb{N}$ (∗) $\quad |\langle T, \varphi \rangle| \leq C \sup_{x \in K} \sup_{|\alpha| \leq m} |\partial^\alpha \varphi(x)|, \quad \forall \varphi \in \mathcal{E}(\Omega)$

<u>mq</u> $T \in \mathcal{E}'(\Omega)$ c-à-d T continue

Si $(\varphi_n)_n \subset \mathcal{E}(\Omega)$ t.q. $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{E}(\Omega)} 0$

$$\Rightarrow \langle T, \varphi_n \rangle \xrightarrow[n]{} 0$$

$\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{E}(\Omega)} 0 \Leftrightarrow \forall K' \subset\subset \Omega$ cpt

$$\sup_{x \in K} |\partial^\alpha \varphi_n(x)| \xrightarrow[n]{} 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^d$$

$$(\circ) \Rightarrow |\langle T, \varphi_n \rangle| \leq C \sup_{x \in K} \sup_{|\alpha| \leq m} |\partial^\alpha \varphi_n(x)|$$

$$\leq C \max_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \varphi_n(x)| \longrightarrow 0$$

$\Rightarrow T$ continue. $\square$

$\boxed{\text{Exo} \quad \text{Prouver ① et ③}}$

Exemples

•) Fonctions : $u \in L^1_{loc}(\Omega) \longmapsto T_u : \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\langle T_u, \varphi \rangle = \int_\Omega u \varphi \, dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

On vérifie que $T_u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ en utilisant ①

supp $\varphi \subset K$, $\quad |\langle T_u, \varphi \rangle| \leq \int_\Omega |u| \cdot |\varphi| \, dx = \int_K |u| \, |\varphi| \, dx$

$$\leq \left(\sup_{x \in K} |\varphi(x)| \right) \cdot \underbrace{\int_K |u|}_{C > 0}$$

$\mathcal{E}' \subset \mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'$

$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \,/\,$ supp $\varphi \subset K \Rightarrow |\langle T_u, \varphi \rangle| \leq C \sup_{x \in K} |\varphi(x)|$

En particulier T_u a ordre 0

<u>Question</u>: est-ce que $T_u \in \mathcal{S}'$ si $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$?

On devrait <u>mq</u> $|\langle T_u, \varphi \rangle| \le C \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \sup_{|\alpha| \vee |\beta| \le m} |x^\alpha \partial_x^\beta \varphi(x)|$

$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

Ceci est faux en général.

Par contre si $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ <u>et</u> $\exists k \in \mathbb{N} \,/\, \Lambda^{-k} u \in L^1$

$$|\langle T_u, \varphi \rangle| \le \int_{\mathbb{R}^d} |u(x)|\,|\varphi(x)|\,dx$$

$$\left[\frac{(1+|x|^2)^{1/2}}{(1+|x|^2)^{1/2}}\right]^k \longrightarrow$$

$$\le \int_{\mathbb{R}^d} |\Lambda^{-k} u(x)| \cdot |\Lambda^k \varphi(x)|\,dx$$

$$\le \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |\Lambda^k \varphi(x)| \cdot \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} |\Lambda^{-k} u|\,dx}_{C > 0}$$

$$\Lambda^k \le \max\{1, |x|^k\} \longrightarrow$$

$$\le C \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \sup_{|\beta| \vee |\alpha| \le k} |x^\beta \partial^\alpha \varphi(x)|$$

$\Rightarrow T_u \in \mathcal{S}'$

$\boxed{\text{\underline{Exo} \underline{mq} si } u(x) = e^{|x|},\ x \in \mathbb{R} \ \Rightarrow\ T_u \notin \mathcal{S}'}$

$(T_u \in \mathcal{D}'(\Omega))$

Il faut trouver $(\varphi_n)_n \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\varphi_n \longrightarrow 0$

$\langle T_u, \varphi_n \rangle \not\longrightarrow 0$.

Proposition $\left[\mathcal{E}'(\Omega) = \{ T \in \mathcal{D}'(\Omega) \mid \text{supp } T \text{ est cpt} \} \right]$

Preuve exercice

$\to \quad u \in L^1_{loc}(\Omega)$, supp u compact $\Rightarrow T_u \in \mathcal{E}'(\Omega)$

Mesures μ mesure de Radon $(\mu \in \mathcal{M}^1_{loc}(\Omega))$

$$\Rightarrow \langle T_\mu, \varphi \rangle = \int_\Omega \varphi \, d\mu \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

et $T_\mu \in \mathcal{D}'(\Omega)$

Valeur principale de $\frac{1}{x}$

$u(x) = \frac{1}{x}$ $\qquad$ u mes. sur $\mathbb{R}$

$u \notin L^1_{loc}(\mathbb{R})$, $\nexists \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{1}{x} \, dx$

valeur principale

$$\left\langle \left[vp \, \frac{1}{x} \right], \varphi \right\rangle = \int_0^\infty \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} \, dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

① $\varphi \in C_c^\infty$, supp $\varphi \subset (0, +\infty)$

$$\left\langle vp \, \frac{1}{x}, \varphi \right\rangle = \int_0^\infty \frac{\varphi(x)}{x} \, dx$$

oui donc $vp \frac{1}{x}$ "généralise $\frac{1}{x}$ à $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$"

② mq $vp \, \frac{1}{x} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$

(A) $\quad |\varphi(x) - \varphi(-x)| \leq \|\varphi'\|_\infty \cdot 2x$

(B) $\quad |\varphi(x) - \varphi(-x)| \leq 2\|\varphi\|_\infty$

$$
\begin{aligned}
|\langle vp\tfrac{1}{x}, \varphi\rangle| &\leq \int_0^\infty \frac{|\varphi(x) - \varphi(-x)|}{x}\,dx \\
&\leq \underbrace{\int_0^1 \frac{|\varphi(x) - \varphi(-x)|}{x}\,dx}_{\overset{(A)}{\leq}\, 2\|\varphi'\|_\infty} + \int_1^\infty \frac{|\varphi(x) - \varphi(-x)|}{x}\,dx \\
&\leq 2\|\varphi'\|_\infty + \int_1^\infty \frac{|x||\varphi(x) - \varphi(-x)|}{x^2}\,dx \\
&\leq 2\|\varphi'\|_\infty + 2\sup_{x\in\mathbb{R}} |x\varphi(x)| \underbrace{\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx}_{c>0} \\
&\leq C \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \sup_{\alpha+\beta\leq 1} |x^\alpha \varphi^{(\beta)}(x)|
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow \quad vp\tfrac{1}{x} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}), \quad m = 1$$

NOTION DE TOPOLOGIE SUR LES DISTRIBUTIONS

$\mathcal{D}$, $\mathcal{S}$, $\mathcal{E}$ ne sont pas des evn, mais ils ont une topologie

$\Updownarrow$

Ils sont métrizables

$\mathcal{E}'$, $\mathcal{S}'$, $\mathcal{D}'$ $\quad \overset{?}{=}$

$\mathcal{E}', \mathcal{S}', \mathcal{D}'$ ont une topologie "induite" par la dualité

$\Updownarrow$

Est la topologie de la convergence ponctuelle

$(T_n)_n \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ $\qquad T_n \xrightarrow{\mathcal{D}'(\Omega)} T$

$\Updownarrow$

$\langle T_n, \varphi \rangle \longrightarrow \langle T, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$