2.МЕТОД ГОМОРИ

Одним из методов решения задач линейного целочисленного программирования является метод Гомори. Сущность метода заключается в построении ограничений, отсекающих нецелочисленные решения задачи линейного программирования, но не отсекающих ни одного целочисленного плана.

Рассмотрим алгоритм решения задачи линейного целочисленного программирования этим методом.

1. Решаем задачу симплексным методом без учета условия целочисленности. Если все компоненты оптимального плана целые, то он является оптимальным и для задачи целочисленного программирования. Если обнаруживается неразрешимость задачи, то и неразрешима задача целочисленного программирования.
2. Если среди компонент оптимального решения есть нецелые, то к ограничениям задачи добавляем новое ограничение, обладающее следующими свойствами:

*- оно должно быть линейным;*

*- должно отсекать найденный оптимальный нецелочисленный план;*

*- не должно отсекать ни одного целочисленного плана.*

Для построения ограничения выбираем компоненту оптимального плана ***с наибольшей дробной частью*** и по соответствующей этой компоненте *k*-й строке симплексной таблицы записываем ограничение Гомори.

, ,

где   *fk = xj - [xj];*

*fkj = zkj - [zkj];*

*S\** - новая переменная;

*[xj], [zkj] -*ближайшее целое, не превосходящее *xj* и *zkj*соответственно.

1. Составленное ограничение добавляем к имеющимся в симплексной таблице, тем самым получаем расширенную задачу. Чтобы получить опорный план этой задачи, необходимо ввести в базис тот вектор, для которого величина  минимальна. И если для этого вектора величина  получается по дополнительной строке, то в следующей симплексной таблице будет получен опорный план. Если же величина  не соответствует дополнительной строке, то необходимо переходить к М-задаче (вводить искусственную переменную в ограничение Гомори).
2. Решаем при помощи обычных симплексных преобразований полученную задачу. Если решение этой задачи приводит к целочисленному оптимальному плану, то искомая задача решена. Если мы получили нецелочисленное решение, то снова добавляем одно дополнительное ограничение, и процесс вычислений повторяется. Проделав конечное число итераций, либо получаем оптимальный план задачи целочисленного программирования, либо устанавливаем ее неразрешимость.

Замечания:

1. Если дополнительная переменная *S\** вошла в базис, то после пересчета какого-либо последующего плана соответствующие ей строку и столбец можно удалить (тем самым сокращается размерность задачи).
2. Если для дробного *xj* обнаружится целочисленность всех коэффициентов соответствующего уравнения (строки), то задача не имеет целочисленного решения.
3. 3.ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ МЕТОДОМ ГОМОРИ
4. **Задача:** Для приобретения нового оборудования предприятие выделяет 19 ден.ед. Оборудование должно быть размещено на площади, не превышающей 16 кв.м. Предприятие может заказать оборудование двух видов: машины типа “А” стоимостью 2 ден.ед., требующие производственную площадь 4 кв.м и обеспечивающие производительность за смену 8 т продукции, и машины типа “В” стоимостью 5 ден.ед., занимающие площадь 1 кв.м и обеспечивающие производительность за смену 6 т продукции.
5. Требуется составить оптимальный план приобретения оборудования, обеспечивающий максимальную общую производительность.
6. **Решение:** Обозначим через *x1, x2* количество машин соответственно типа “А” и “В”, через *L* - их общую производительность. Тогда математическая модель задачи:
7. *max L = 8x1 + 6x2*
8. п ри ограничениях:
9. 2*x1 + 5x2  19  
   4x1 + x2  16  
   x1  0, x2  7  
   x1 , x2- целые числа*
10. Решаем задачу симплексным методом без учета целочисленности.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Co | Бo | Хo | 8 | 6 | . | . |
| x1 | x2 | x3 | x4 |
| . . | x3 x4 | 19 16 | 2 4 | 5 1 | 1 . | . 1 |
| zj j | | 0 | . | . | . | . |
| -8 | -6 | . | . |



|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| C1 | Б1 | Х1 | 8 | 6 | . | . |
| x1 | x2 | x3 | x4 |
| . 8 | x3 x1 | 11 4 | . 1 | 9/2 1/4 | 1 . | -1/2 1/4 |
| zj j | | 32 | 80 | 2 | . | 2 |
| . | -4 | . | 2 |



|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| C2 | Б2 | Х2 | 8 | 6 | . | . | . |
| x1 | x2 | x3 | x4 | S1 |
| 6 8 | x2 x1 | 22/9 61/18 | . 1 | 1 . | 2/9 -1/18 | -1/9 5/18 | . . |
| zj j | | 376/9 | 8 | 6 | 8/9 | 14/9 | . |
| . | . | 8/9 | 14/9 | . |
|  | | 4/9 | . | . | 2/9 | 8/9 | -1 |

2. Получен оптимальный нецелочисленный план *Хопт*= (61/18;22/9).  *Lmax* = 376/9.
3. Т.к. у компоненты плана *х2* максимальная дробная часть:   
   max(4/9;7/18) = 4/9, то дополнительное ограничение записываем по первой строке.
4. *22/9 - [22/9] = (2/9 - [2/9])x3 + (-1/9 - [-1/9])x4 - S1, S1  0  
   22/9 - 2 = (2/9 - 0)x3 + (-1/9 - (-1))x4 - S1, S1  0  
   4/9 = 2/9x3 + 8/9x4 - S1, S1   0  -  первое ограничение Гомори.*
5. Составленное ограничение дописываем к имеющимся в симплексной таблице.
6. После построения дополнительного ограничения имеем новую задачу линейного программирования, в которой 3 ограничения. Для получения опорного плана этой задачи необходимо найти третий базисный вектор. Для этого определяем:
7. min  =  в базис вводим вектор *х4*.
8. Рассчитываем величину  = . Минимальное значение  получено по дополнительной строке, значит, не прибегая к искусственной переменной, получаем опорный план расширенной задачи.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| C3 | Б3 | Х3 | 8 | 6 | . | . | . | . |
| x1 | x2 | x3 | x4 | S1 | S2 |
| 6 8 . | x2 x1 x4 | 5/2 13/4 1/2 | . 1 . | 1 . . | 1/4 -1/8 1/4 | . . 1 | -1/8 5/16 -9/8 | . . . |
| zj j | | 41 | 8 | 6 | 1/2 | . | 7/4 | . |
| . | . | 1/2 | . | 7/4 | . |
|  | | 1/2 | . | . | 1/4 | . | 7/8 | -1 |

2. Найденный план оптимален, но нецелочисленный. Строим новое ограничение Гомори.
3. Т.к. максимальная дробная часть среди компонент плана равна 1/2, записываем дополнительное ограничение по первой строке (можно и по третьей).
4. *5/2 - [5/2] = (1/4 - [1/4])x3 + (-1/8 - [-1/8])S1- S2, S2  0  
   1/2 = 1/4x3 + 7/8S1 - S2, S2  0 -   второе ограничение Гомори*
5. Это ограничение добавляем в последнюю симплексную таблицу.
6. Получили задачу, в которой 4 ограничения, следовательно, в базисе должно быть 4 единичных вектора.
7. Определяем вектор, вводимый в базис: . Можно ввести либо *x3*, либо *S1*. Введем вектор *S1*.
8.  соответствует дополнительному ограничению.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| C4 | Б4 | Х4 | 8 | 6 | . | . | . | . | . |
| x1 | x2 | x3 | x4 | S1 | S2 | S3 |
| 6 8 . | x2 x1 x4 | 18/7 43/14 8/7 | . 1 . | 1 . . | 2/7 -3/14 4/7 | . . 1 | . . . | -1/7 5/14 -9/7 | . . . |
| . | S1 | 4/7 | . | . | 2/7 | . | 1 | -8/7 | . |
| zj j | | 40 | 8 | 6 | . | . | . | 2 | . |
| . | . | . | . | . | 2 | . |
|  | | 4/7 | . | . | 2/7 | . | . | 6/7 | -1 |

2. Получаем новый оптимальный нецелочисленный план. Учитывая замечание 1, вычеркиваем строку и столбец, соответствующие переменной S1.
3. В полученном плане максимальную дробную часть имеет компо-нента х2, поэтому записываем дополнительное ограничение по первой строке.
4. *4/7 = 2/7х3 + 6/7S2 - S3,    S3  0    - третье ограничение Гомори.*
5. Определяем вектор, вводимый в базис: . Это вектор х3. Минимальное значение  = 2, что соответствует дополнительной строке.
6. После проведения очередных симплексных преобразований получили:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| C5 | Б5 | Х5 | 8 | 6 | . | . | . | . | . |
| x1 | x2 | x3 | x4 | S2 | S3 | S4 |
| 6 8 . . | x2 x1 x4 x3 | 2 7/2 . 2 | . 1 . . | 1 . . . | . . . 1 | . . 1 . | -1 1 -3 3 | 1 -3/4 2 -7/2 | . . . . |
| zj j | | 40 | 8 | 6 | . | . | . | 2 | . |
| . | . | . | . | . | 2 | . |
|  | | 4/7 | . | . | . | . | . | 1/4 | -1 |

2. План Х5 - оптимальный нецелочисленный.
3. Дополнительное ограничение запишем по второй строке:
4. *1/2 = 1/4S3 - S4,  S4  0   - четвертое ограничение Гомори.*
5. Т.к. базисной компонентой может быть S3, определяем величину . Минимальное значение получилось по 3 строке, а не по строке Гомори, следовательно, переходим к М-задаче: введем дополнительную переменную х5 в ограничение Гомори.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| C5 | Б5 | Х5 | 8 | 6 | . | . | . | . | . | -M |
| x1 | x2 | x3 | x4 | S2 | S3 | S4 | x5 |
| 6 8 . . -M | x2 x1 x4 x3 x5 | 2 7/2 . 2 1/2 | . 1 . . . | 1 . . . . | . . . 1 . | . . 1 . . | -1 1 -3 3 . | 1 -3/4 2 -7/2 1/4 | . . . . -1 | . . . . 1 |
| zj j | | 40- -M/2 | 8 | 6 | . | . | 2 | -M/4 | M | -M |
| . | . | . | . | 2 | -M/4 | M | . |



|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| C6 | Б6 | Х6 | 8 | 6 | . | . | . | . | . | -M |
| x1 | x2 | x3 | x4 | S2 | S3 | S4 | x5 |
| 6 8 | x2 x1 | 2 7/2 | . 1 | 1 . | . . | -1/2 3/8 | 1/2 -1/8 | . . | . . | . . |
| . | S3 | . | . | . | . | 1/2 | -3/2 | 1 | . | . |
| . -M | x3 x5 | 2 1/2 | . . | . . | 1 . | 7/4 -1/8 | -9/4 3/8 | . . | . -1 | . 1 |
| zj j | | 40- -M/2 | 8 | 6 | . | M/8 | 2-3M/8 | . | M | -M |
| . | . | . | M/8 | 2-3M/8 | . | M | . |



|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| C7 | Б7 | Х7 | 8 | 6 | . | . | . | . | . |
| x1 | x2 | x3 | x4 | S2 | S4 | S5 |
| 6 8 . | x2 x1 x3 | 4/3 11/3 5 | . 1 . | 1 . . | . . 1 | -1/3 1/3 1 | . . . | 4/3 -1/3 -6 | . . . |
| . | S2 | 4/3 | . | . | . | -1/3 | 1 | -8/3 | . |
| zj j | | 112/3 | 8 | 6 | . | 2/3 | . | 16/3 | . |
| . | . | . | 2/3 | . | 16/3 | . |
|  | | 2/3 | . | . | . | 1/3 | . | 2/3 | -1 |

2. Дробная часть = max(1/3; 2/3) = 2/3  дополнительное ограничение записываем по второй строке.
3. *2/3 = 1/3х4 + 2/3S4 - S5  ,S5  0   -     пятое ограничение Гомори.*
4. Вектор, вводимый в базис:  вводим х4.  
     соответствует строке Гомори.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| C8 | Б8 | Х8 | 8 | 6 | . | . | . | . |
| x1 | x2 | x3 | x4 | S4 | S5 |
| 6 8 . . | x2 x1 x3 x4 | 2 3 3 2 | . 1 . . | 1 . . . | . . 1 . | . . . 1 | 2 -1 -8 2 | -1 1 3 -3 |
| zj j | | 36 | 8 | 6 | . | . | 4 | 2 |
| . | . | . | . | 4 | 2 |

2. План Х8 = (3; 2; 3; 2) - оптимальный целочисленный. *Lmax* = 36.
3. **Экономическая интерпретация:** согласно полученному решению предприятию необходимо закупить 3 машины типа "А" и 2 машины ти-па "В". При этом будет достигнута максимальная производительность работы оборудования, равная 36 т продукции за смену. Полученную экономию денежных средств в размере 3 ден.ед. можно будет направить на какие-либо иные цели, например, на премирование рабочих, которые будут заниматься отладкой полученного оборудования. На излишнюю площадь в 2 кв.м можно поставить ящик с цветами.
4. **Геометрическая интерпретация метода Гомори:** строим множество планов [(см. рисунок)](http://vtit.kuzstu.ru/books/shelf/65/doc/glava_3.html#ris1). В точке 1 - оптимальный нецелочисленный план.
5. *Первое ограничение Гомори:    2/9x3 + 8/9x4 - S1 = 4/9,  S1  0*  
   Из первого ограничения задачи:   *х3 = 19 - 2х1 - 5х2*  
   Из второго ограничения задачи:   *х4 = 16 - 4х1 - х2*
6. Подставляем*х3* и *х4* в первое ограничение Гомори и после преобразований получаем:*4х1 + 2х2 + S1 = 18, S1  0.*
7. Отсюда имеем:   *4х1 + 2х2  18.* Это ограничение отсекает от множества планов область, содержащую точку 1. Новый оптимальный нецелочисленный план - точка 2.
8. *Второе ограничение Гомори :    1/4x3 + 7/8S1 - S2 = 1/2,  S2  0*  
   Из первого ограничения задачи:   *х3 = 19 - 2х1 - 5х2*  
   Из первого ограничения Гомори:   *S1 = 18 - 4х1 - 2х2*
9. Получаем:    *4х1 + 3х2 + S2 = 20, S2  0* или *4х1 + 3х2  20.* Это ограничение отсекает от множества планов область, содержащую точку 2. Новый оптимальный нецелочисленный план - точка 3.
10. *Третье ограничение Гомори :    2/7x3 + 6/7S2 - S3 = 4/7, S3  0*  
    Из первого ограничения задачи:   *х3 = 19 - 2х1 - 5х2*  
    Из второго ограничения Гомори:   *S2 = 20 - 4х1 - 3х2*
11. После подстановки*x3 и S2* в третье ограничение Гомори получаем:*4х1 + 4х2  22.* Это ограничение отсекает от множества планов область, содержащую точку 3. Новый оптимальный нецелочисленный план - точка 4.
12. *Четвертое ограничение Гомори :    1/4S3 - S4 = 1/2, S4  0*  
    Из третьего ограничения Гомори:   *S3 = 22 - 4х1 - 4х2*
13. Получаем:   *х1 + х2 + S4 = 5, S4  0.* Отсюда имеем: *х1 + х2  5.* Это ограничение отсекает от множества планов область, содержащую точку 4. Новый оптимальный нецелочисленный план - точка 5.
14. *Пятое ограничение Гомори :    1/3x4 + 2/3S4 - S5 = 2/3, S5  0*  
    Из второго ограничения задачи:   *х4 = 16 - 4х1 - х2*  
    Из четвертого ограничения Гомори:   *S4 = 5 - х1 - х2*
15. Получаем:   *2х1 + х2 + S5 = 8, S5  0.* Отсюда: *2х1 + х2  8.* Это ограничение отсекает от множества планов область, содержащую точку 5. Оптимальный целочисленный план - точка 6 с координатами (3;2).
16. Заштрихованная часть - целочисленное множество планов.