

УДК 681.142.2

## АЛГОРИТМ ПЛАНАРНОСТИ ГРАФА

Курапов С.В., к.ф.-м.н., доцент, Кондратьева Н.А., к.ф.-м.н., доцент

*Запорожский государственный университет*

Имеется несколько критериев планарности графа, данные Л.С.Понтрягиным, К.Куратовским, К.Вайнером, С.Маклейном. Критерии планарности таковы, что если даже удалось установить планарность графа, то нет информации о том, как строить его укладку на плоскости. В тоже время при решении практических задач, недостаточно знать, что граф планарен, а необходимо, построить его плоское изображение. Все это вызвало появление алгоритмов, которые не только проверяют граф на планарность, но и одновременно строят его плоскую укладку.

Один из таких алгоритмов разработан в 1970 г. Хопкрофтом и Тарьяном [1-3]. Они нашли алгоритм, требующий  $O(|N| \log |N|)$  единиц времени, который они в конечном счете улучшили до  $O(|N|)$ . Данный алгоритм проверяет граф на планарность и, если он планарен, производит его плоскую укладку. Однако данный алгоритм не может быть применен для решения задачи построения и выделения максимально плоского суграфа из непланарного графа, а также для решения задачи построения рисунка графа с минимальным числом пересечений для непланарного графа. Данная работа направлена на преодоление указанных недостатков и описывает алгоритм планарности, который возможно применить для решения вышеперечисленных задач.

Будем рассматривать связные несепарабельные неориентированные графы без петель и кратных ребер. Пусть  $G(X, U; P)$  - граф с множеством вершин  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  и ребер  $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ , где  $n$ -количество вершин графа и  $m$ -количество ребер графа  $G$ .

Пусть  $L$  - множество всех суграфов этого графа [4]. Относительно операции сложения

$$(X, U_1; P) \oplus (X, U_2; P) \stackrel{\text{def}}{=} (X, (U_1 \cup U_2) \setminus (U_1 \cap U_2); P) \quad (1)$$

это множество, как известно, образует абелеву 2-группу, которую можно рассматривать как векторное пространство над полем из двух элементов  $GF(2)$ . Размерность этого пространства, называемого пространством суграфов графа  $G$ , конечно и равно  $m$  ( $\dim LG = m$ ). В качестве базиса этого пространства выберем множество одnoreберных суграфов  $(u_1, u_2, \dots, u_m)$ . Тогда в этом базисе каждому элементу  $Y$  пространства  $LG$  однозначно сопоставляется последовательность координат  $(a_1, a_2, \dots, a_m)$ , где  $a_i \in \{0, 1\}$ . При этом оказывается, что ребро  $u_i$  входит в суграф  $Y$ , если  $a_i = 1$ , и не входит в данный суграф - в противном случае. В дальнейшем для удобства будем отождествлять пространство суграфов  $LG$  и его координатное пространство.

Напомним, что суграф называется квазициклом, если все его вершины имеют четную валентность (в данном случае валентность совпадает с локальной степенью вершины). Множество графа  $G$  образует, как легко можно видеть, подпространство квазициклов  $L_G^C$  пространства  $LG$  [4, 5]. Известно, что размерность подпространства  $L_G^C$  совпадает с цикломатическим числом  $\nu(G) = m - n + 1$  графа  $G$ , а порядок группы  $L_G^C$  равен  $2^{\nu(G)}$ .

Теперь мы можем сформулировать критерий планарности Мак-Лейна [6].

**Теорема 1 [Мак-Лейн].** Граф  $G$  планарен тогда и только тогда, когда существует такой базис подпространства квазициклов, где каждое ребро принадлежит не более, чем двум циклам.

Выберем некоторый базис  $(c_1, c_2, \dots, c_k)$ , где  $k = \nu(G)$  - размерность подпространства квазициклов. Рассмотрим матрицу  $C$ , строки которой соответствуют элементам указанного базиса

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{km} \end{pmatrix}$$

элементы  $a_{ij}$  этой матрицы принадлежат полю  $GF(2)=\{0,1\}$ . Очевидно, что указанный базис удовлетворяет условию Мак-Лейна тогда и только тогда, когда в каждом столбце матрицы  $C$  содержится не более двух единиц. Рассмотрим другой базис этого подпространства  $(c'_1, c'_2, \dots, c'_k)$ , которому соответствует матрица  $C'$ . Тогда эти матрицы связаны отношением

$$C' = TC, \quad (2)$$

где  $T$  - невырожденная матрица (матрица перехода от базиса  $C$  к базису  $C'$ ). Поскольку каждая невырожденная матрица разлагается в произведение элементарных матриц  $P_1, P_2, \dots, P_s$ , а умножение слева на элементарную матрицу равносильно выполнению одной элементарной операции над строками, то из (2) следует, что

$$C' = P_s P_{s-1} \dots P_1 C. \quad (3)$$

Таким образом, каждый базис в этом пространстве получается из данного базиса при помощи цепочки элементарных преобразований. А на матричном языке проблема распознавания планарности сводится к нахождению такой матрицы в классе эквивалентных матриц (т.е. матриц, которые получаются друг из друга при помощи элементарных преобразований над строками), у которой в каждом столбце содержится не более двух единиц [6].

Указанный критерий позволяет разработать методику определения планарности графа, сводя проблему планарности к отысканию минимума некоторого функционала на множестве базисов подпространства квазициклов. Определим следующий функционал на матрице  $C$ , соответствующий базису подпространства квазициклов (и будем его впредь называть функционалом Мак-Лейна)

$$F(C) = \sum_{i=1}^m (S_i - 1)(S_i - 2) = \sum_{i=1}^m S_i^2 + \sum_{i=1}^m S_i + 2m, \quad (4)$$

где  $S_i$  - сумма элементов в  $i$ -ом столбце матрицы. Очевидно, что матрица  $C$  соответствует базису Мак-Лейна (т.е. базису, удовлетворяющему условию Мак-Лейна) тогда и только тогда, когда  $F(C) = 0$ .

Функционал  $F(C)$  принимает целое неотрицательное значение и проблема отыскания базиса Мак-Лейна, таким образом, является частным случаем следующей задачи дискретной оптимизации: найти минимум  $F(C)$  на множестве матриц  $C$  размера  $k \times m$  и ранга  $k = v(G)$ .

Очевидно, что не для любого графа  $G$  минимум  $F(C)$  будет равен нулю, согласно критерию Мак-Лейна. Отметим, что нулевое значение данный функционал принимает только в случае планарного графа. В общем случае решение указанной задачи минимизации позволяет построить алгоритм выделения максимально плоского суграфа. Поэтому вначале рассмотрим свойства функционала  $F(C)$ , где  $C$  пробегает множество указанных матриц.

Введем понятие модуля пересечения на множестве квазициклов. Для двух квазициклов  $C_i$  и  $C_j$  модуль пересечения, будем обозначать его  $(C_i, C_j)$ , представляет собой скалярное произведение двух векторов и определяется из следующей формулы

$$(C_i, C_j) = |C_i \cap C_j|. \quad (5)$$

Как видно,  $(C_i, C_j)$  - длина квазицикла в ребрах, а  $|C_i \cap C_j|$  - мощность множества пересечения квазициклов  $C_i$  и  $C_j$ .

Введем для произвольно заданного базиса  $Q(G)$ ,  $Q(G) = \{c_i; i = [1, k]\}$ , следующую оценку:

$$E(C) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k (C_i, C_j) = (c_1, c_1) + (c_1, c_2) + \dots + (c_k, c_k) \quad (6)$$

где  $C^i = m$  - мерный вектор:

$$C_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{im}), a_{ip} \in \{0, 1\}$$

Учитывая также, что

$$(C^i, C^j) = \sum_{p=1}^m a_{ip} a_{jp} \quad (7)$$

Это вытекает из свойства скалярного произведения векторов. Записываем  $E(C)$  в следующем виде:

$$E(C) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \left( \sum_{p=1}^m a_{ip} a_{jp} \right) = \sum_{p=1}^m \left( \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k a_{ip} a_{jp} \right) \quad (8)$$

Легко видеть, что

$$\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k a_{ip} a_{jp} = S_p^2, \quad (9)$$

где  $S_p$  - количество циклов, содержащих  $p$ -ое ребро. Подставляя выражение (8) в (9), получим:

$$E(C) = \sum_{p=1}^m S_p^2. \quad (10)$$

Между функционалом Мак-Лейна (4) и (7) имеется следующая связь:

$$F(C) = E(C) - 3 \sum_{i=1}^k l_i + 2m, \quad (11)$$

и, таким образом, функционал Мак-Лейна можно записать через модуль пересечения квазициклов ( $l_i$  - длина  $i$ -го квазицикла)

$$F(C) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k (C_i, C_j) - 3 \sum_{i=1}^k (C_i, C_j) + 2m. \quad (12)$$

Следующее выражение, справедливое для плоских графов, связывает количество ребер плоского графа и суммарную длину квазициклов, принадлежащих выбранному базису. Для базиса Мак-Лейна ( $\tau$  – система циклов [6]):

$$\sum_{i=1}^k l_i + l_0 - 2m = 0, \quad (13)$$

где  $l_0$  - длина обода графа.

Введенное выражение (13) позволяет построить целый спектр функционалов, эквивалентных функционалу Мак-Лейна и характеризующих любой базис с учетом обода графа. Например,

$$F1(C) = \sum_{j=1}^m S_j^2 - 2 \sum_{i=1}^k l_i + l_0; \quad (14)$$

$$F2(C) = \sum_{j=1}^m S_j^2 - \sum_{i=1}^k l_i + 2l_0 - 2m; \quad (15)$$

$$F3(C) = \sum_{j=1}^m S_j^2 + 3l_0 - 4m \quad (16)$$

В качестве иллюстрации рассмотрим граф  $G$ , представленный на рис.1. Для данного графа  $G$  существует базис Мак-Лейна, функционал которого равен нулю. Матрица циклов имеет вид

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

- количество циклов, проходящих по данному ребру.

Базис Мак-Лейна, представленный в виде циклов, проходящих по соответствующим ребрам, имеет вид:

$$C_1 = \{1,4,5\}; C_2 = \{2,3,4\}; C_3 = \{3,8,9\}; C_4 = \{7,8,10\};$$

$$C_5 = \{6,7,11\}; C_6 = \{5,6,12\}; C_7 = \{10,11,12,13\};$$

$$C_0 = \{1,2,9,12\}.$$

Обод плоского графа можно представить как аддитивную сумму элементов базиса.

Вращение графа, индуцируемое данным базисом циклов и ободом графа, представлено диаграммой, полученной по правилу формирования вращения вершин

$$\begin{array}{l} 1: 2 \ 3 \ 6 \ 4 \\ 2: 3 \ 7 \ 1 \\ 3: 2 \ 4 \ 7 \\ 4: 5 \ 7 \ 3 \ 1 \\ 5: 6 \ 7 \ 4 \\ 6: 7 \ 5 \ 1 \\ 7: 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \end{array}$$

Таким образом, задача проверки графа на планарность может быть сведена к задаче поиска базиса подпространства квазициклов, у которого функционал Мак-Лейна равен нулю. Рисунок такого графа на плоскости определяется вращением  $(G, \sigma)$ , индуцированным таким базисом и ободом графа.

В задаче построения плоского графа особую роль играют простые циклы. Простые циклы - это квазициклы, у которых локальная степень вершин равна двум. Особая роль простых циклов объясняется тем, что границей грани в плоском графе, как правило, является простой цикл. Мощность подмножества простых циклов в графе меньше мощности множества квазициклов. Подмножество простых циклов обозначим  $C^c$ .

$$\text{card } C^c \leq \text{card } C_G^c \quad (17)$$

Однако, существует подмножество с мощностью еще меньшей, чем подмножество простых циклов, обладающее определенными характерными свойствами. С этой целью введем определение  $\tau$ -цикла графа.

*Определение 1.*  $\tau$ -циклом графа называется простой цикл, между двумя любыми несмежными вершинами которого в соответствующем графе не существует маршрутов меньшей длины, чем маршруты, принадлежащие данному циклу.

Подмножество, состоящее из  $\tau$ -циклов, будем называть подмножеством  $\tau$ -циклов и обозначать  $C^\tau$ . Следует также различать  $\tau$ -циклы и циклы из полной  $\tau$ -системы циклов, согласно определению Мак-Лейна. Однако, как в большинстве случаев, для трехсвязных графов и графов с более высокой степенью связности полная  $\tau$ -система циклов обязательно состоит из  $\tau$ -циклов.

Сказанное поясним на примерах. Рассмотрим суграф, состоящий из ребер 1,3,13,15 графа  $G_a$ , представленного на рис.2. Как видно, это простой цикл. Но в то же время, это не  $\tau$ -цикл, так как между вершинами 7 и 8 в графе существует маршрут меньшей длины, проходящий по ребру 14.

Рассмотрим граф  $G_b$ , представленный на рис.2. Пусть граф состоит из ребер 1,2,3,5,8,9,11,12. Данный суграф есть простой цикл. Однако этот суграф не может быть  $\tau$ -циклом, так как в соответствующем графе между вершинами 2 и 8 имеется маршрут меньшей длины (а именно, маршрут, проходящий по ребрам 4 и 10), чем маршруты, принадлежащие этому суграфу (например, маршрут, проходящий по ребрам 1,3,8,9 или 2,5,11,12).

Как следует из определения, любой  $\tau$ -цикл представляет собой подграф. Обратное не верно.

Понятие  $\tau$ -цикла графа  $G$  тесно связано с минимальными (s-t) маршрутами графа. Поэтому введем необходимые понятия и определения.

*Определение 2.* Связностью  $\chi = \chi(G)$  графа  $G$  называется наименьшее число вершин, удаление которых приводит к несвязному графу.

Очевидно, что связность несвязного графа равна 0, а связность графа, имеющего точку сочленения, равна 1. Полный граф  $K_n$  нельзя сделать несвязным, сколько бы вершин из него не удалять, а тривиальный

граф получается из  $K_n$  после удаления  $(n-1)$  вершин; поэтому  $\chi(K_n) = n-1$ . Иногда  $\chi$  называют еще вершинной связностью.

Пусть  $x_1$  и  $x_2$  - две различные вершины связного графа  $G$ .

**Определение 3.** Две простые цепи, соединяющие  $x_1$  и  $x_2$ , называются непересекающимися (или вершинно-непересекающимися), если у них нет общих вершин, отличных от  $x_1$  и  $x_2$  (и, следовательно, нет общих ребер).

В дальнейшем нам понадобится теорема Менгера.

**Теорема 2 (Теорема Менгера [15]).** Наименьшее число вершин, разделяющих две несмежные вершины  $s$  и  $t$ , равно наибольшему числу непересекающихся простых  $(s-t)$ -цепей (т.е. цепей между вершинами  $s$  и  $t$ , см. рис.3).

На рис.3 представлен граф, у которого две несмежные вершины  $s$  и  $t$  можно разделить, удалив три вершины (но не меньше). Из теоремы Менгера вытекает, что наибольшее число непересекающихся  $(s-t)$ -цепей для данного графа равно 3.

Связь между  $(s-t)$ -маршрутами графа, связностью графа и  $\tau$ -циклами можно продемонстрировать на следующем примере. Рассмотрим граф  $G$ , представленный на рис.4. Для перечисления всех  $\tau$ -циклов, проходящих по 1-му ребру, следует удалить 1-ое ребро и найти все маршруты минимальной длины, соединяющие вершины  $s$  и  $t$  (принадлежащие 1-му ребру).

Все множество маршрутов минимальной длины между вершинами  $s$  и  $t$  можно разбить на три непересекающихся подмножества, где маршруты, принадлежащие к одному подмножеству, проходят только по одной разделяющей вершине и имеют одинаковую длину.

По первой разделяющей вершине проходит единственный  $(s-t)$ -маршрут  $\{23,25\}$ .

По второй разделяющей вершине проходят следующие  $(s-t)$ -маршруты:  $\{7,9,12\}$ ;  $\{7,13,14\}$ ;  $\{7,15,20\}$ ;  $\{7,18,21\}$ .

По третьей разделяющей вершине проходят следующие  $(s-t)$ -маршруты:  $\{2,3,12\}$ ;  $\{5,6,12\}$ ;  $\{8,12,17\}$ .

Исходя из этого, можно записать все множество  $\tau$ -циклов, проходящих по 1-му ребру:

$$C_1^{\tau} = \{\{1,23,25\}; \{1,2,3,12\}; \{1,5,6,12\}; \{1,7,9,12\}; \\ \{1,7,13,14\}; \{1,7,15,20\}; \{1,7,18,21\}; \{1,8,12,17\}\}.$$

Для изучения свойств  $\tau$ -циклов нам понадобится следующая теорема.

**Теорема 3.** Для любого трехсвязного графа без петель и кратных ребер линейное подпространство квазициклов имеет базис из  $\tau$ -циклов.

**Доказательство.** Для графа без петель и кратных ребер набор всех его квазициклов может рассматриваться как линейное пространство над полем  $GF(2)$ . Если мы докажем, что набор всех  $\tau$ -циклов графа является системой образующих этого пространства, то из них, очевидно, можно выделить и базис. Известно, что любой квазицикл можно представить в виде суммы простых циклов. Значит, нам достаточно доказать, что любой простой цикл есть сумма некоторых  $\tau$ -циклов.

Пусть вершины  $A_1, A_2, \dots, A_p$  образуют простой цикл. Если это  $\tau$ -цикл, то наше утверждение справедливо. Если нет, то существуют вершины графа  $B_1, B_2, \dots, B_r$ , отличные от всех  $A_1, A_2, \dots, A_p$ , и вершины  $A_i$  и  $A_j$  ( $i < j$ ) такие, что путь  $A_i, B_1, B_2, \dots, B_r, A_j$  содержит меньше ребер, чем пути от  $A_i$  к  $A_j$  по нашему циклу. В этом случае цикл  $A_1, \dots, A_p$  есть сумма цикла  $A_1, A_2, \dots, A_i, B_1, \dots, B_r, A_j, A_{j+1}, \dots, A_p$  и цикла  $A_i, A_{i+1}, \dots, A_j, B_r, \dots, B_1$ . Отметим, что каждый из двух новых циклов имеет не более  $p-1$  вершин.

На следующем шаге, если хотя бы один из двух наших новых циклов не является  $\tau$ -циклом, то аналогично разбиваем его на сумму двух простых циклов (если оба не являются  $\tau$ -циклами - оба разбиваем). И так далее. После каждого шага цикл  $A_1, A_2, \dots, A_p$  будет суммой всех образованных нами циклов. Любой такой цикл, для которого справедливо вышесказанное, является  $\tau$ -циклом. Значит, не позже чем после  $(p-3)$  шагов, мы получим представление цикла  $A_1, A_2, \dots, A_p$  в виде линейной комбинации  $\tau$ -циклов. Если в качестве исходного базиса выбрать фундаментальную систему циклов и применить доказанное выше, получим базис, состоящий из  $\tau$ -циклов. Теорема доказана.

**Следствие 3.1.** В любом связном графе без петель и кратных ребер существует базис, состоящий из  $\tau$ -циклов с минимальным значением функционала Мак-Лейна.

Доказательство. Количество базисов, состоящих из  $\tau$ -циклов, в конечном графе всегда конечно. Следовательно, среди них обязательно имеются базисы (может быть только один), имеющие минимальное значение функционала Мак-Лейна. Следствие доказано.

Следует заметить, что не всегда удастся построить рисунок плоского графа, где границами граней являются  $\tau$ -циклы. Для этого достаточно рассмотреть следующий плоский граф  $G$  (см. рис.5).

Здесь циклы  $\{12,18,19,15,20,21,22\}$ ,  $\{1,4,6,8,20,21,24,29,30,31\}$  не являются  $\tau$ -циклами, но могут являться границами граней. Данный граф нельзя преобразовать так, чтобы границами граней были  $\tau$ -циклы. Здесь существует только единственный базис, состоящий из  $\tau$ -циклов, причем, функционал Мак-Лейна для данного базиса не равен нулю.

В общем случае процесс планаризации непланарного графа с помощью  $\tau$ -циклов может привести к построению рисунка максимально плоского несвязного суграфа, причем, в качестве компонентов связности может выступать как изолированная вершина, так и часть графа, составленная из  $\tau$ -циклов.

Построение алгоритма начинается с выделения всех ребер в графе  $G$ . Выберем любое ребро графа. Одну из вершин такого выбранного ребра пометим индексом 1, другую - индексом 2. Вершины графа, смежные с вершиной, имеющей индекс 2, и ещё не помеченные, пометим индексом 3. Вершины графа, смежные с вершиной, имеющей индекс 3, и ещё не помеченные, пометим индексом 4 и т. д. Число, выражающее индекс последней помеченной вершины (вершин) графа, будем называть глубиной проникновения разметки относительно выбранного ребра. Данный процесс представляет собой разметку вершин графа относительно выбранного ребра волновым алгоритмом.

Построим простые циклы, проходящие по выбранному ребру, относительно первоначальной ориентации. С этой целью выберем все вершины графа  $G$ , смежные с вершиной, помеченной индексом 1. Будем идти от любой выбранной вершины, имеющей глубину проникновения  $d$ , к вершинам, имеющим глубину проникновения  $(d-1)$ , проходя при этом по ребрам графа, затем от вершины  $(d-1)$  к вершинам  $(d-2)$  и т.д. Остановим этот процесс тогда, когда подойдем к вершине, имеющей индекс 2. Пройдя по всем таким образом построенным маршрутам, построим систему циклов, проходящих по выбранному ребру  $j$ . Обозначим такое множество циклов через  $S_j^1$ . Переориентируем направление ребра, т.е. вершина, имеющая индекс 1, будет иметь индекс 2, а вершина, имеющая индекс 2, будет иметь индекс 1. И вновь построим разметку вершин. Описанным выше методом выделим систему циклов и обозначим её  $S_j^2$ .  $\tau$ -циклы, проходящие по выбранному ребру, будут образованы как

$$S_j = S_j^1 \cap S_j^2. \quad (18)$$

Множество  $\tau$ -циклов графа  $G$  будет образовано как объединение всех  $\tau$ -циклов, проходящих по всем ребрам графа

$$C^\tau = \bigcup_{i=1}^m S_i \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad (19)$$

В качестве примера рассмотрим граф  $G$  (рис.1). Если в качестве выбранного ребра взять ребро 13, то процесс разметки вершин имеет вид, представленный на рис.6. Система циклов, проходящих по ребру 13, для разметки показана на рис.6.а:

$$S_{13}^1 = \{ \{5, 8, 13\}, \{1, 4, 8, 13\}, \{1, 2, 9, 13\}, \{6, 8, 12, 13\}, \{10, 11, 12, 13\} \}.$$

Система циклов, проходящих по ребру 13, для разметки, представлена на рис.6.б:

$$S_{13}^2 = \{ \{5, 8, 13\}, \{3, 5, 9, 13\}, \{1, 2, 9, 13\}, \{10, 11, 12, 13\}, \{1, 2, 9, 13\} \}.$$

Пересечение множеств  $S_{13}^1$  и  $S_{13}^2$  :

$$S_{13} = S_{13}^1 \cap S_{13}^2 = \{ \{5, 8, 13\}, \{1, 2, 9, 13\}, \{10, 11, 12, 13\} \}.$$

Каждому ребру принадлежат следующие  $\tau$ -циклы:

$$S_1 = \{ \{1, 4, 5\}, \{1, 2, 9, 13\} \};$$

$$S_2 = \{ \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 9, 13\} \};$$

$$S_3 = \{ \{2, 3, 4\}, \{3, 8, 9\} \};$$

$$S_4 = \{ \{1, 4, 5\}, \{2, 3, 4\} \};$$

$$S5 = \{\{1,4,5\}, \{5,6,12\}, \{5,8,13\}\};$$

$$S6 = \{\{5,6,12\}, \{6,7,11\}\};$$

$$S7 = \{\{6,7,11\}, \{7,8,10\}\};$$

$$S8 = \{\{5,8,13\}, \{7,8,10\}, \{3,8,9\}\};$$

$$S9 = \{\{3,8,9\}, \{1,2,9,13\}\};$$

$$S10 = \{\{7,8,10\}, \{10,11,12,13\}\};$$

$$S11 = \{\{6,7,11\}, \{10,11,12,13\}\};$$

$$S12 = \{\{5,6,12\}, \{10,11,12,13\}\};$$

$$S13 = \{\{5,8,13\}, \{1,2,9,13\}, \{10,11,12,13\}\}.$$

Множество  $\tau$ -циклов получим как объединение:

$$\begin{aligned} C^\tau = & S1 \cup S2 \cup S3 \cup S4 \cup S5 \cup S6 \cup S7 \cup S8 \cup S9 \cup S10 \cup S11 \cup S12 \cup S13 = \\ & \{\{1,4,5\}, \{2,3,4\}, \{3,8,9\}, \{5,6,12\}, \{5,8,13\}, \{6,7,11\}, \{7,8,10\}, \\ & \{1,2,9,13\}, \{10,11,12,13\}\}. \end{aligned}$$

Таким образом, множество  $\tau$ -циклов состоит из 9-ти элементов. Цикломатическое число графа  $G$  равно 7. Следовательно, для построения базиса нужно удалить два  $\tau$ -цикла. Очевидно, что для любого трехсвязного и более графа  $G$  множество  $\tau$ -циклов имеет мощность меньшую, чем мощность множества простых циклов, но большую, чем цикломатическое число графа

$$\sqrt{(G)} \leq \text{card } C^\tau \leq \text{card } C^c \leq \text{card } C_G^c. \quad (20)$$

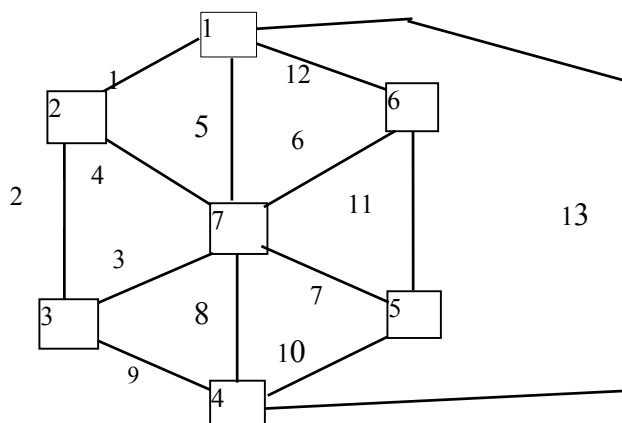
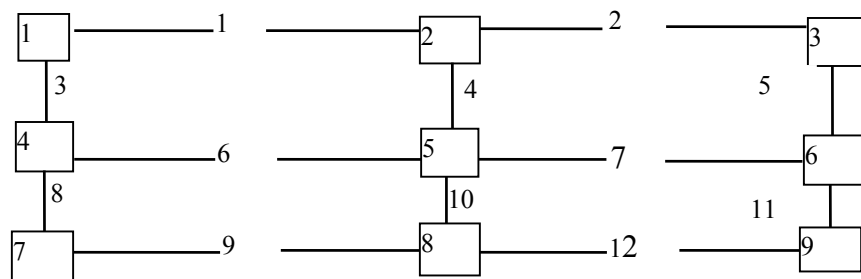
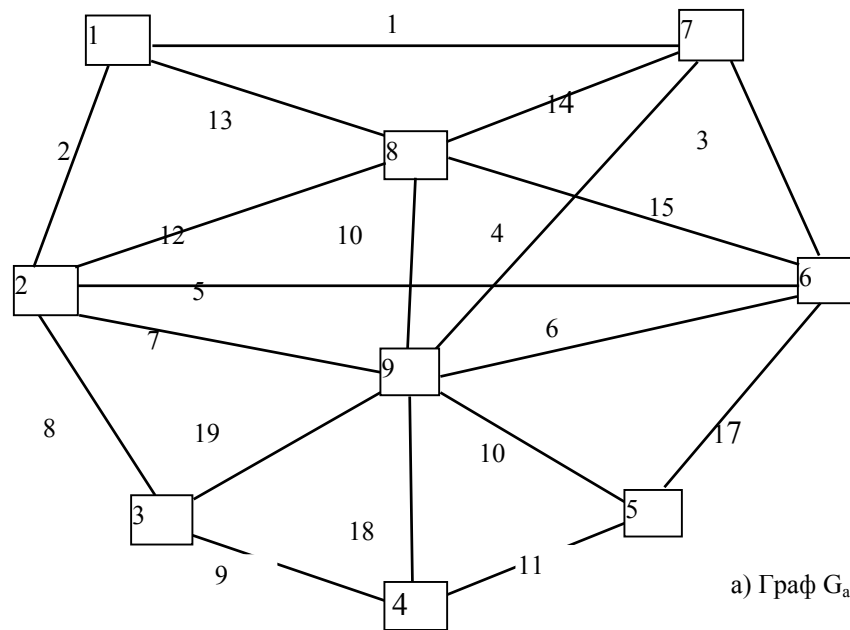


Рис.1 Граф  $G$

Рис.2 Графы  $G_a$  и  $G_b$



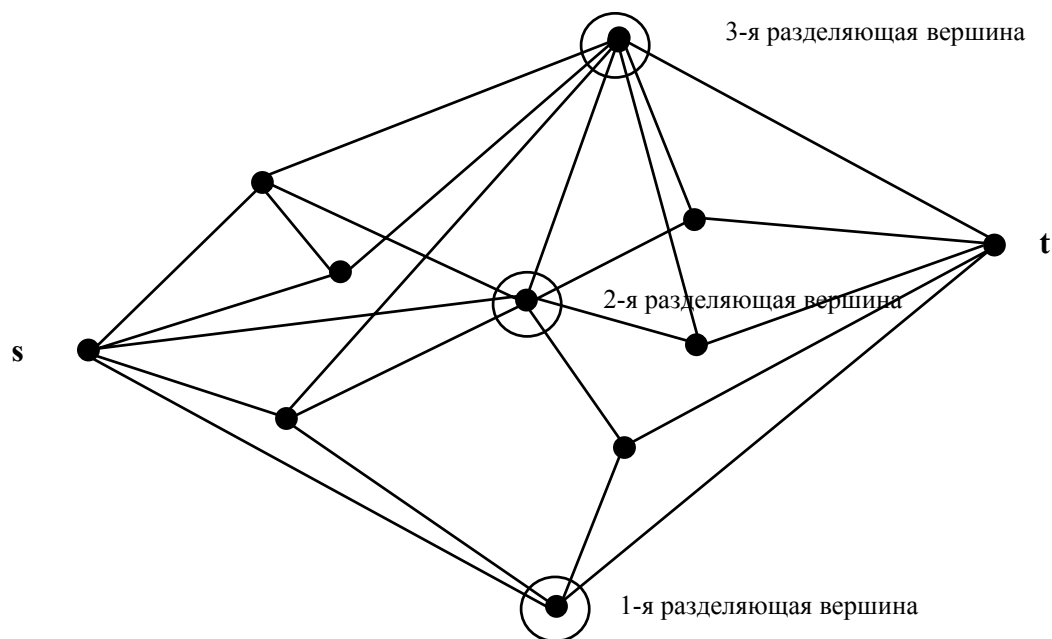


Рис.3 Граф для иллюстрации теоремы Менгера

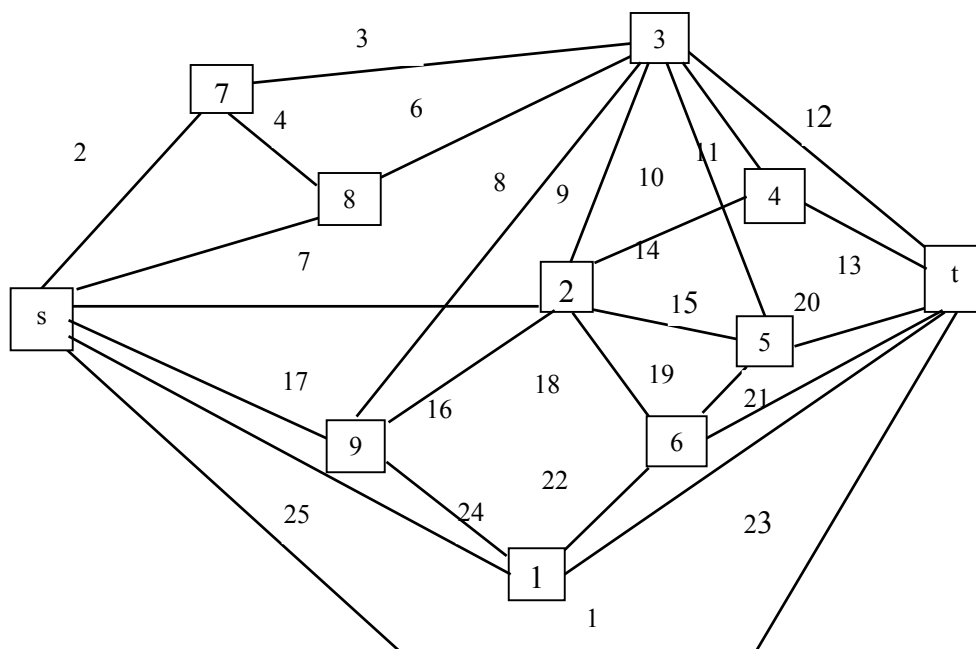


Рис.4 Граф G

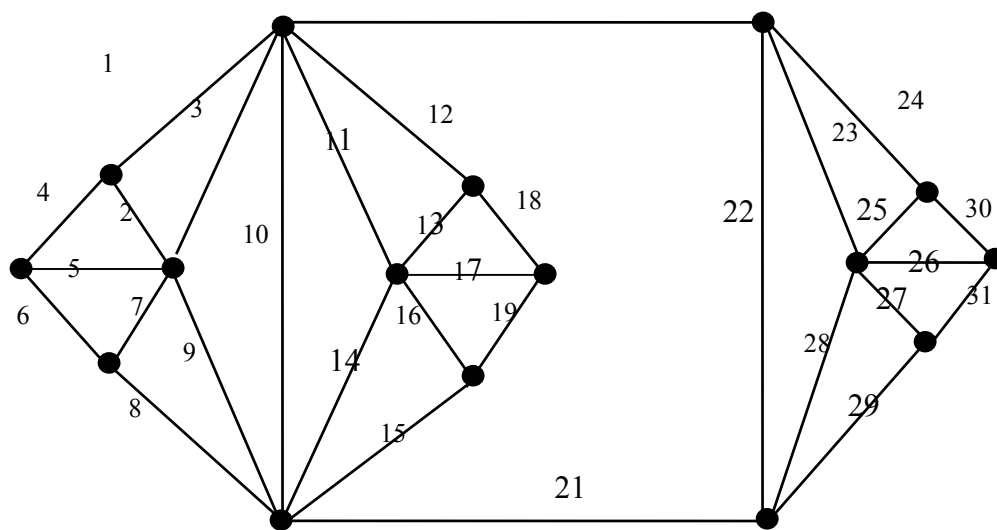


Рис. 5 Граф G

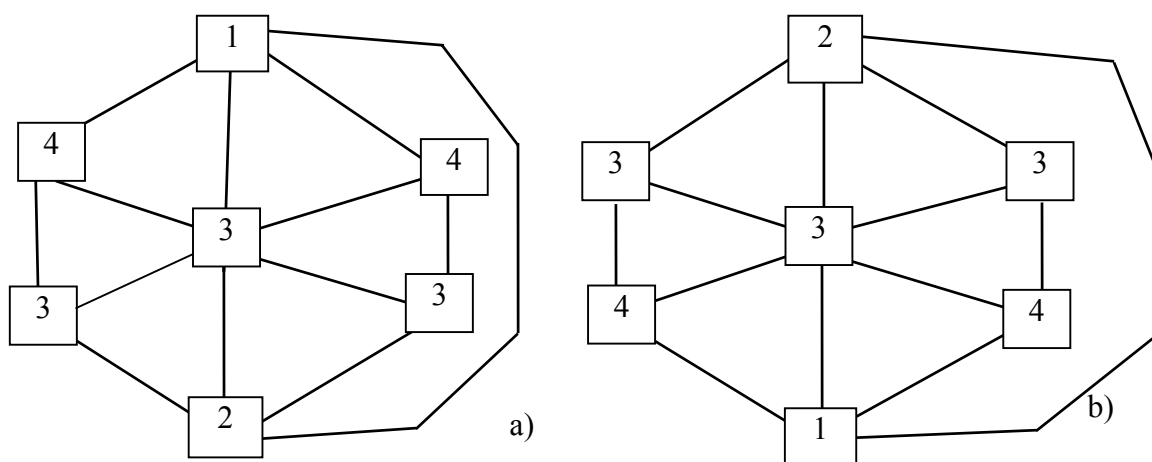


Рис.6 Процесс разметки вершин

## ЛИТЕРАТУРА

1. Хопкрофт Дж.Е., Тарьян Р.Е. Изоморфизм планарных графов//В кн.: Кибернетический сборник. Новая серия. - 1975.-вып. 12.- С.39-61.
2. Рейнгольд Э., Нивергельт Ю., Дер Н. Комбинаторные алгоритмы, теория и практика. Пер. с англ. М.: Мир, 1980. - 480с.
3. Лекции по теории графов / Емеличев В.А., Мельников О.И., Сарванов В.И., Тышкевич Р.И. - М.: Наука. ГРФМЛ.-1990. - 384с.
4. Зыков А.А. Теория конечных графов. - Новосибирск: ГРФМЛ, 1963.- 542с.
5. Свами М., Тхуласираман К. Графы, сети и алгоритмы: Пер. с англ. - М.: Мир, 1984. - 455с.
6. Мак-Лейн С. Комбинаторное условие для плоских графов//В кн.: Кибернетический сборник. Новая серия. - 1970.-вып. 7.- С.68-77.