

Тема1. Преобразование Фурье в оптике. Погрешности оптического преобразования Фурье.

В курсе «Оптические Технологии Искусственного Интеллекта» мы ознакомились с реализацией преобразования Фурье в оптике и узнали, что положительная линза в своей задней фокальной плоскости строит распределение амплитуд (комплексных), соответствующее Фурье-образу распределения амплитуд в передней фокальной плоскости линзы. Однако, это утверждение нуждается в ряде уточнений, которым и посвящена данная тема.

Рассмотрим оптическую систему, изображенную на Рис.1.1., и состоящую из сферической линзы L. Плоскости P_1 и P_2 расположены перед линзой и за ней на расстояниях d и f , соответственно, где f - фокусное расстояние линзы (т.е. P_2 – задняя фокальная плоскость линзы). Ось z совпадает с главной оптической осью линзы, в плоскости P_1 координаты x, y , в плоскости P_2 - v_x, v_y .

Пусть в плоскости P_1 находится транспарант, амплитудное пропускание которого $\tau(x, y)$ описывается выражением

$$\tau(x, y) = A(x, y) \exp j\phi(x, y), \quad (0.1)$$

где j – мнимая единица.

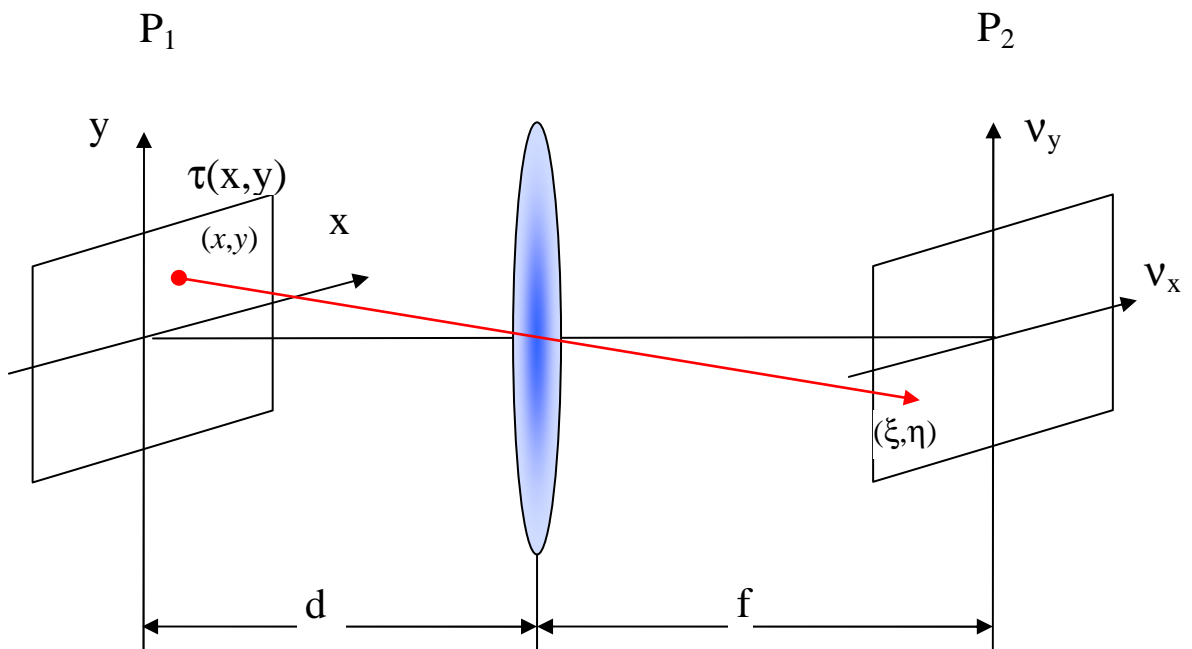


Рис.1.1. Схема, реализующая двумерное преобразование Фурье.

Пусть $E(x, y)$ – распределение комплексных амплитуд света в плоскости P_1 , а $E(\xi, \eta, z)$ – распределение амплитуд в плоскости P_2 , отстоящей от P_1 на расстояние z . Если рассмотреть схему рис.1.1. в отсутствие линзы L. То

выражение для связи комплексной амплитуды в плоскости P_2 с амплитудой в плоскости P_1 дается хорошо известным дифракционным интегралом Френеля-Кирхгофа

$$E(\xi, \eta, z) = \frac{j}{\lambda} \iint E(x, y) \frac{\exp jkr}{r} \cos \theta dx dy, \quad (0.2)$$

где j – мнимая единица, r – расстояние от точки ξ, η плоскости P_2 до точек плоскости P_1 , дающих свой вклад в амплитуду в этой точке, $k=2\pi/\lambda$ – волновое число, θ – угол между осью z и нормалью к плоскости P_1 в точке x, y , $\cos \theta$ – коэффициент наклона, учитывающий различия в количестве света, излучаемого из плоскости P_1 в разных направлениях. Нетрудно видеть, что если в схеме Рис.1.1. присутствует тонкая безабберационная положительная линза с бесконечной апертурой, то этот коэффициент не зависит от x и y и может быть представлен в виде

$$\cos \theta = \frac{f}{\sqrt{f^2 + \xi^2 + \eta^2}} \quad (0.3)$$

Тогда, с учетом (1.3), выражение (1.2) можно переписать в виде

$$E(\xi, \eta, z) = \frac{jf}{\lambda \sqrt{f^2 + \xi^2 + \eta^2}} \iint E(x, y) \frac{\exp jkr}{r} dx dy \quad (0.4)$$

Таким образом, для определения амплитуды в точке (ξ, η) необходимо найти выражение для длины оптического пути r к этой точке от точек x, y . Обычно при выводе выражения, показывающего, что положительная линза реализует двумерное преобразование Фурье используют параксиальное приближение

$$r = -\frac{\xi}{f} x - \frac{\eta}{f} y, \quad (0.5)$$

подстановка которого в (1.4) и дает требуемое выражение.

Однако, точное выражение для r имеет следующий вид

$$r = R(\xi, \eta) - \alpha x - \beta y, \quad (0.6)$$

где R и коэффициенты α и β определяются

$$\begin{aligned}
R(\xi, \eta) &= \frac{f^2 + \xi^2 + \eta^2 + df}{\sqrt{f^2 + \xi^2 + \eta^2}} \\
\alpha &= \frac{\xi}{\sqrt{f^2 + \xi^2 + \eta^2}} \\
\beta &= \frac{\eta}{\sqrt{f^2 + \xi^2 + \eta^2}}
\end{aligned} \tag{0.7}$$

Подстановка (1.6) и (1.7) в (1.4) дает

$$E(\xi, \eta, z) = \frac{jf}{\lambda} \exp jkR(\xi, \eta) \iint \frac{E(x, y) \exp[j2k(\alpha x + \beta y)]}{f^2 + \xi^2 + \eta^2 + df - x\xi - y\eta} dx dy \tag{0.8}$$

Введем новые переменные, имеющие смысл пространственных частот:

$$\begin{aligned}
\mu_x &= \frac{\alpha}{\lambda} = \frac{\xi}{\lambda \sqrt{f^2 + \xi^2 + \eta^2}} \\
\mu_y &= \frac{\beta}{\lambda} = \frac{\eta}{\lambda \sqrt{f^2 + \xi^2 + \eta^2}}
\end{aligned} \tag{0.9}$$

Почему мы использовали здесь для обозначения пространственных частот букву μ , а не привычную ν , станет ясно из дальнейшего рассмотрения.

Подставив (1.9) в (1.8), вынося при этом $(f^2 + df)$ из под знака интеграла и проведя ряд элементарных преобразований, получим выражение, описывающее распределение комплексных амплитуд в плоскости P_2

$$\begin{aligned}
E(\xi, \eta) &= \frac{-j}{\lambda(f+d)} \exp jkR(\xi, \eta) \iint E(x, y) \exp[-j2\pi(\mu_x x + \mu_y y)] dx dy + \\
&+ \frac{j}{\lambda(f+d)} \exp jkR(\xi, \eta) \iint E(x, y) \exp[-j2\pi(\mu_x x + \mu_y y)] \left\{ \frac{1}{1 + \frac{f(f+d)}{\xi(x-\xi) + \eta(y-\eta)}} \right\} dx dy
\end{aligned} \tag{0.10}$$

Нетрудно видеть, что первый интеграл в полученном выражении с точностью до фазового множителя равен Фурье-образу распределения $E(x, y)$. Второй же член выражения может рассматриваться как погрешность оптического преобразования Фурье, выполняемого идеальной положительной линзой. Если знаменатель подынтегрального выражения второго слагаемого существенно больше числителя, то и само второе слагаемое становится пренебрежимо малым. Для этого, как видно из (1.10), необходимо соответствующим образом подобрать соотношение

максимальных значений x, y и ξ, η , т.е. апертуры в соответствующих плоскостях, и фокусное расстояние линзы.

Рассмотрим этот вопрос подробнее для того, чтобы получить количественную оценку погрешности оптического преобразования Фурье в зависимости от параметров оптической схемы. Для этого перепишем выражение (1.10) в виде

$$E(\xi, \eta) = \frac{-j}{\lambda(f+d)} \exp jkR(\xi, \eta) \times \iint E(x, y) \exp[-j2\pi(\mu_x x + \mu_y y)] \left\{ 1 - \frac{1}{1 + \frac{f(f+d)}{\xi(x-\xi) + \eta(y-\eta)}} \right\} dx dy. \quad (0.11)$$

Сравним полученное выражение со строгим определением преобразования Фурье

$$E(\nu_x, \nu_y) = \iint E(x, y) \exp[-j2\pi(\nu_x x + \nu_y y)] dx dy \quad (0.12)$$

и проанализируем влияние отдельных членов, входящих в выражение (1.11) и отсутствующих в (1.12).

Частотная погрешность.

В (1.9) мы ввели новые переменные, имеющие смысл пространственных частот. Нетрудно видеть, что идеальная положительная линза формирует Фурье-образ не в своей фокальной плоскости, а на сфере радиуса f . Эта сфера касается фокальной плоскости только в точке ее пересечения главной оптической осью, а в фокальной плоскости формируется проекция Фурье-образа (сформированного на сфере). Соответственно, при измерениях в плоскости возникают систематические ошибки. Рассмотрим этот вопрос подробнее.

Подставим (1.9) в строгое определение преобразования Фурье (1.12)

$$E\left(\frac{\xi}{\lambda\sqrt{f^2 + \xi^2 + \eta^2}}, \frac{\eta}{\lambda\sqrt{f^2 + \xi^2 + \eta^2}}\right) = \iint E(x, y) \exp\left[-j2\pi\left(\frac{\xi}{\lambda\sqrt{f^2 + \xi^2 + \eta^2}}x + \frac{\eta}{\lambda\sqrt{f^2 + \xi^2 + \eta^2}}y\right)\right] dx dy \quad (0.13)$$

Отличия полученного выражения от точного в том, что введенная нами пространственная частота μ_x зависит не только от координаты ξ , но также и от координаты η . Последней зависимости в строгом определении

преобразования Фурье быть не должно. Аналогично и для частоты μ_y . Эта зависимость от «чужой» координаты и определяет частотную погрешность.

Преобразуем выражения (1.9) к виду

$$\begin{aligned}\mu_x &= \frac{\xi}{\lambda f} \left[\sqrt{1 + \frac{(\xi^2 + \eta^2)}{f^2}} \right]^{-1} \\ \mu_y &= \frac{\eta}{\lambda f} \left[\sqrt{1 + \frac{(\xi^2 + \eta^2)}{f^2}} \right]^{-1}.\end{aligned}\quad (0.14)$$

Разложим выражение в квадратных скобках в ряд

$$\begin{aligned}\mu_x &= \frac{\xi}{\lambda f} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\xi^2 + \eta^2}{f^2} \right) + \frac{3}{8} \left(\frac{\xi^2 + \eta^2}{f^2} \right)^2 - \dots \right] \\ \mu_y &= \frac{\eta}{\lambda f} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\xi^2 + \eta^2}{f^2} \right) + \frac{3}{8} \left(\frac{\xi^2 + \eta^2}{f^2} \right)^2 - \dots \right]\end{aligned}\quad (0.15)$$

Если ограничиться параксиальным приближением, т.е. принять $\frac{(\xi^2 + \eta^2)}{f^2} \ll 1$, то можно пренебречь всеми членами ряда (1.15), начиная со второго. Тогда получим линейное приближение

$$\begin{aligned}\mu_x &= \frac{\xi}{\lambda f} \\ \mu_y &= \frac{\eta}{\lambda f}.\end{aligned}\quad (0.16)$$

Подстановка (1.16) в (1.13) и ведет к точному выражению для преобразования Фурье

$$E\left(\frac{\xi}{\lambda f}, \frac{\eta}{\lambda f}\right) = \iint E(x, y) \exp\left[-j2\pi\left(\frac{\xi}{\lambda f}x + \frac{\eta}{\lambda f}y\right)\right] dx dy. \quad (0.17)$$

Таким образом, линейная зависимость между пространственными координатами ξ , η и пространственными частотами μ_x , μ_y имеет место только в параксиальной области. Вне параксиальной области масштаб оси частот с ростом частоты уменьшается.

Введем относительную частотную погрешность оптического преобразования Фурье при линейной аппроксимации оси частот следующим образом

$$\Delta_f = \frac{\xi/\lambda f}{\xi/\lambda\sqrt{f^2 + \xi^2 + \eta^2}} - 1 = \sqrt{1 + \frac{\xi^2 + \eta^2}{f^2}} - 1. \quad (0.18)$$

Определим рабочую апертуру в задней фокальной плоскости

$$\rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2},$$

в пределах которой проводятся измерения. Введем отношение

$$a = \frac{\rho}{f},$$

Тогда относительная частотная погрешность может быть переписана в виде

$$\Delta_f = \sqrt{1 + a^2} - 1. \quad (0.19)$$

В результате, зная допустимую относительную частотную погрешность, при заданном фокусном расстоянии можно определить радиус рабочей апертуры, в пределах которой заданная точность измерений будет гарантирована. Соответственно, можно определить и максимальную пространственную частоту, для которой погрешность еще не превышает заданную

$$\nu_{max} = \frac{\rho_{max}}{\lambda f} = \frac{a}{\lambda}. \quad (0.20)$$

Пользуясь формулами (1.19) и (1.20) нетрудно количественно оценить параметры оптической схемы, обеспечивающие проведение измерений с заданной погрешностью.

Амплитудная погрешность.

Амплитудная погрешность возникает в силу неточного учета длины оптического пути между точками x, y плоскости P_1 и точками ξ, η плоскости P_2 , а также коэффициента наклона для этих точек.

Вернемся к выражению (1.11)

$$E(\xi, \eta) = \frac{-j}{\lambda(f+d)} \exp jkR(\xi, \eta) \times$$

$$\times \iint E(x, y) \exp[-j2\pi(\mu_x x + \mu_y y)] \left\{ 1 - \frac{1}{1 + \frac{f(f+d)}{\xi(x-\xi) + \eta(y-\eta)}} \right\} dx dy$$

и сравним его с выражением для точного преобразования Фурье

$$E(v_x, v_y) = \iint E(x, y) \exp[-j2\pi(v_x x + v_y y)] dx dy.$$

Из сравнения этих выражений видно, что распределение комплексных амплитуд, описываемое выражением (1.11), отличается от точного преобразования Фурье вторым членом в фигурных скобках. Именно этот член и описывает влияние изменения оптического пути между точками плоскостей P_1 и P_2 и коэффициента наклона.

Определим относительную амплитудную погрешность через отношение второго члена в фигурных скобках к значению величины в фигурных скобках

$$\Delta_a = \frac{(\xi^2 + \eta^2 - x\xi - y\eta)}{f(f+d)}. \quad (0.21)$$

Введем в плоскостях P_1 и P_2 полярные координаты r, ψ и ρ, ϕ , соответственно. Тогда, в полярных координатах

$$\Delta_a = \frac{[\rho^2 - \rho r \cos(\phi - \psi)]}{f(f+d)}. \quad (0.22)$$

Очевидно, что амплитудная погрешность максимальна если $\cos(\phi - \psi) = -1$. Для этого крайнего случая получим выражение для максимальной амплитудной погрешности

$$\Delta_{aMax} = \frac{(\rho^2 + \rho r)}{f(f+d)}. \quad (0.23)$$

Отсюда с очевидностью следует, что амплитудная погрешность зависит от радиусов как апертуры во входной плоскости P_1 , так и плоскости Фурье P_2 . При этом амплитудная погрешность более чувствительна к ρ - радиусу апертуры в частотной плоскости.

Введем относительные апертуры как отношения $\frac{\rho}{f}$ и $\frac{r}{f}$. Тогда максимальная амплитудная погрешность

$$\Delta_{aMax} = \frac{\left[\left(\frac{\rho}{f} \right)^2 + \frac{\rho}{f} \frac{r}{f} \right]}{\left[1 + \frac{d}{f} \right]} \quad (0.24)$$

Отсюда можно получить выражение для максимального значения относительной апертуры в частотной плоскости при заданном значении апертуры во входной плоскости и допустимой величине амплитудной погрешности:

$$\frac{\rho_{Max}}{f} = \frac{1}{2} \frac{r_{Max}}{f} \left[\sqrt{1 + 4\Delta_{aMax} \frac{1 + \frac{d}{f}}{\left(\frac{r_{Max}}{f}\right)^2}} - 1 \right] \quad (0.25)$$

Для того, чтобы определить связь радиусов r и ρ с радиусом апертуры линзы R_L , рассмотрим Рис.1.2.

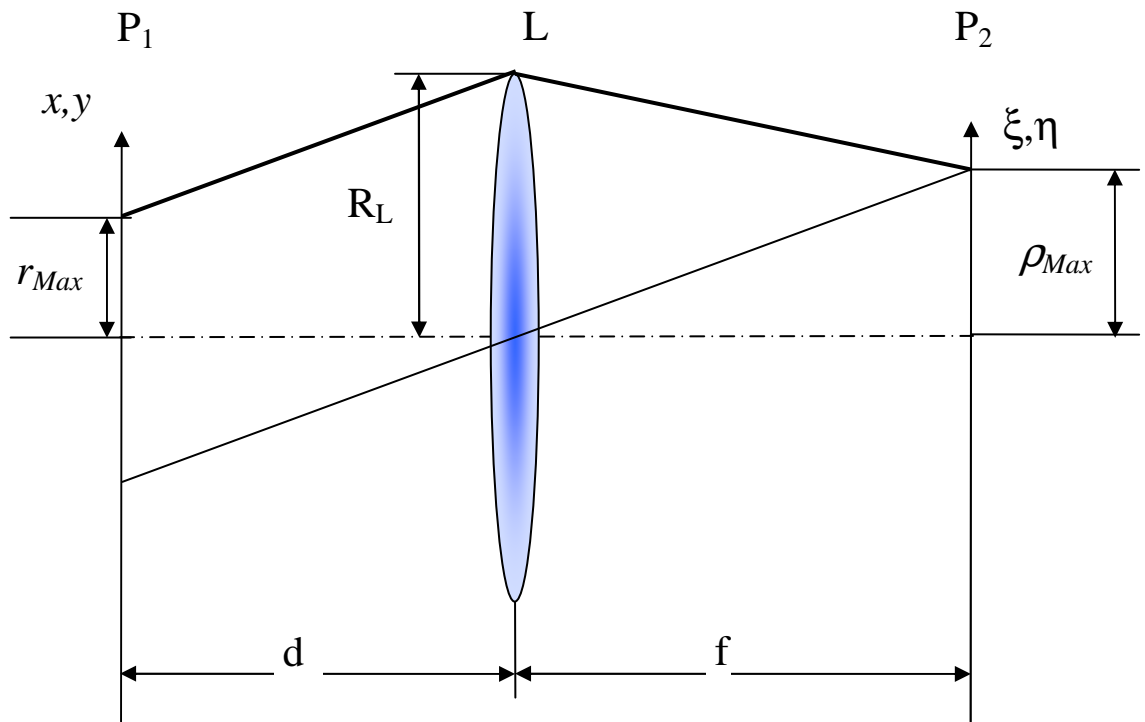


Рис.1.2. Схема, иллюстрирующая взаимную связь апертур во входной и выходной плоскостях с апертурой линзы при двумерном преобразовании Фурье.

Из простейшего геометрического построения, приведенного на Рис.1.2., очевидно следует соотношение

$$r_{Max} = R_L - d \frac{\rho_{Max}}{f} \quad (0.26)$$

Введем понятие относительного отверстия линзы $O = \frac{2R_L}{f}$, и перепишем (1.26) в виде

$$\frac{r_{Max}}{f} = \frac{R_L}{f} - \frac{d}{f} \frac{\rho_{Max}}{f} = \frac{O}{2} - \frac{d}{f} \frac{\rho_{Max}}{f} \quad (0.27)$$

И, аналогично, получим для апертуры в плоскости P_2

$$\frac{\rho_{Max}}{f} = \frac{\left[\frac{R_L}{f} - \frac{r_{Max}}{f} \right]}{\frac{d}{f}} = \frac{\left[\frac{O}{2} - \frac{r_{Max}}{f} \right]}{\frac{d}{f}} \quad (0.28)$$

Имея формулы (1.25), (1.27) и (1.28), можно рассчитать оптический анализатор Фурье, т.е. определить размеры апертур, обеспечивающие выполнение преобразования Фурье над изображением заданного размера с заданной погрешностью.

Фазовая погрешность.

Примем, что размеры апертур в плоскостях P_1 и P_2 схемы Рис.1.1. выбраны исходя из обеспечения требуемых частотной и амплитудной погрешностей. Тогда распределение комплексных амплитуд в задней фокальной плоскости линзы может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} E(\xi, \eta) &= \frac{-j}{\lambda(f+d)} \exp jkR(\xi, \eta) \iint E(x, y) \exp \left[-j2\pi(\mu_x x + \mu_y y) \right] dx dy = \\ &= \frac{-j \exp jkR(\xi, \eta)}{\lambda(f+d)} F(E(x, y)) \end{aligned} \quad (0.29)$$

где F – символ оператора преобразования Фурье.

Фазовая погрешность при выполнении преобразования Фурье обусловлена экспоненциальным членом $\exp jkR(\xi, \eta)$ перед интегралом в выражении (1.29).

Поскольку все приемники являются т.н. «квадратичными», т.е. регистрируют не комплексную амплитуду, а интенсивность, то при непосредственных измерениях в частотной плоскости этот член не регистрируется, поскольку обращается в единицу при умножении на комплексно сопряженный множитель

$$E(\xi, \eta) E^*(\xi, \eta) = \frac{-j \exp jkR(\xi, \eta)}{\lambda(f+d)} \left(\frac{-j \exp jkR(\xi, \eta)}{\lambda(f+d)} \right)^* \left(F(E(x, y)) \right)^2 = \left(F(E(x, y)) \right)^2.$$

Однако, при записи голограммы Фурье этот экспоненциальный множитель регистрируется на голограмме и, тем самым, в зависимости от схемы может оказывать влияние на результаты обработки и измерений. Рассмотрим схему записи голограммы Фурье с внеосевым опорным источником (Рис.1.3)

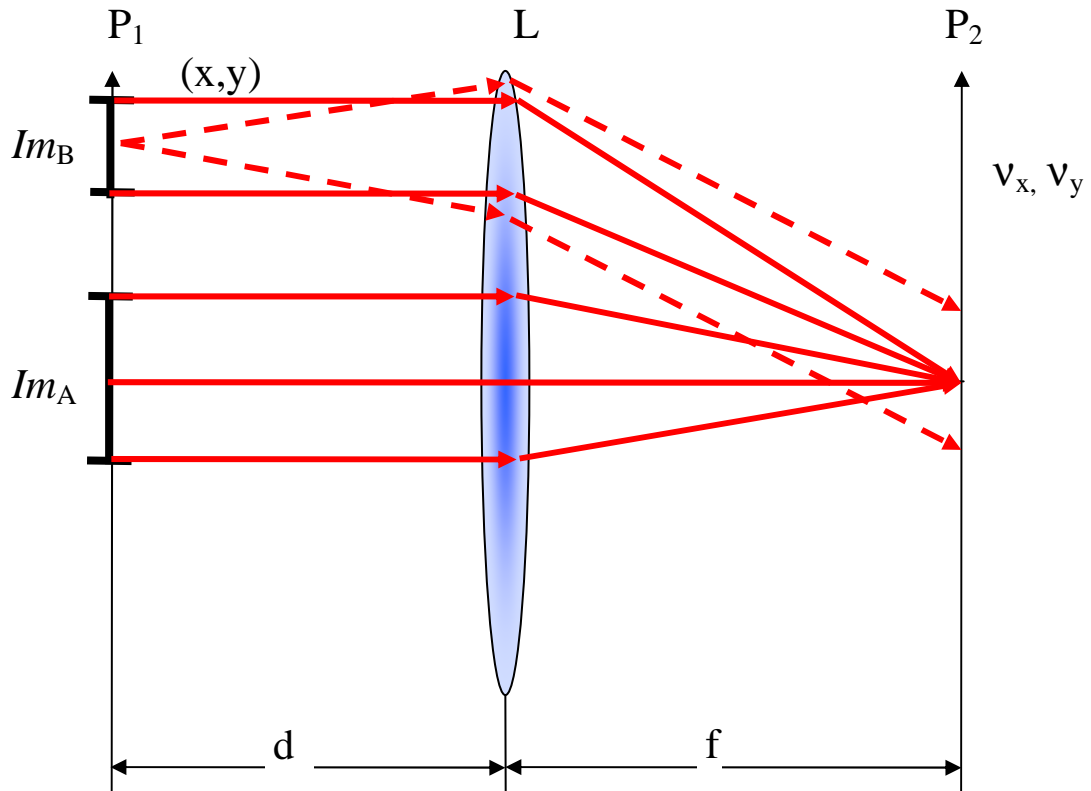


Рис.1.3. Схема записи голограммы Фурье.

При записи голограммы Фурье эталонного изображения Im_A с опорным изображением Im_B , на голограмме, в предположении линейной записи, будет записано распределение

$$\begin{aligned}
H(v_x, v_y) = & \left(\frac{-j \exp jkR(\xi_A, \eta_A)}{\lambda(f+d)} F(Im_A) + \frac{-j \exp jkR(\xi_B, \eta_B)}{\lambda(f+d)} F(Im_B) \right) \times \\
& \times \left(\frac{-j \exp jkR(\xi_A, \eta_A)}{\lambda(f+d)} F(Im_A) + \frac{-j \exp jkR(\xi_B, \eta_B)}{\lambda(f+d)} F(Im_B) \right)^* = \\
& \left(\frac{-j \exp jkR(\xi_A, \eta_A)}{\lambda(f+d)} F(Im_A) \frac{j \exp jkR(\xi_A, \eta_A)}{\lambda(f+d)} F(Im_A)^* \right) + \\
& + \left(\frac{-j \exp jkR(\xi_A, \eta_A)}{\lambda(f+d)} F(Im_A) \frac{j \exp jkR(\xi_B, \eta_B)}{\lambda(f+d)} F(Im_B)^* \right) + \\
& + \left(\frac{-j \exp jkR(\xi_B, \eta_B)}{\lambda(f+d)} F(Im_B) \frac{j \exp jkR(\xi_A, \eta_A)}{\lambda(f+d)} F(Im_A)^* \right) + \\
& + \left(\frac{-j \exp jkR(\xi_B, \eta_B)}{\lambda(f+d)} F(Im_B) \frac{j \exp jkR(\xi_B, \eta_B)}{\lambda(f+d)} F(Im_B)^* \right) = \\
& (F(Im_A) F(Im_A)^*) + \left(\frac{-j \exp jkR(\xi_A, \eta_A)}{\lambda(f+d)} F(Im_A) \frac{j \exp jkR(\xi_B, \eta_B)}{\lambda(f+d)} F(Im_B)^* \right) + \\
& + \left(\frac{-j \exp jkR(\xi_B, \eta_B)}{\lambda(f+d)} F(Im_B) \frac{j \exp jkR(\xi_A, \eta_A)}{\lambda(f+d)} F(Im_A)^* \right) + (F(Im_B) F(Im_B)^*) \quad (0.30)
\end{aligned}$$

Соответственно, при восстановлении обработанной голограммы объектным изображением Im_C , поле сразу за голограммой описывается выражением

$$\begin{aligned}
& \frac{-j \exp jkR(\xi_C, \eta_C)}{\lambda(f+d)} F(Im_C) H(v_x, v_y) = \\
& \frac{-j \exp jkR(\xi_C, \eta_C)}{\lambda(f+d)} F(Im_C) (F(Im_A) F(Im_A)^*) + \\
& + \frac{-j \exp jkR(\xi_C, \eta_C)}{\lambda(f+d)} F(Im_C) \left(\frac{-j \exp jkR(\xi_A, \eta_A)}{\lambda(f+d)} F(Im_A) \frac{j \exp jkR(\xi_B, \eta_B)}{\lambda(f+d)} F(Im_B)^* \right) + (0.31) \\
& + \frac{-j \exp jkR(\xi_C, \eta_C)}{\lambda(f+d)} F(Im_C) \left(\frac{-j \exp jkR(\xi_B, \eta_B)}{\lambda(f+d)} F(Im_B) \frac{j \exp jkR(\xi_A, \eta_A)}{\lambda(f+d)} F(Im_A)^* \right) + \\
& + \frac{-j \exp jkR(\xi_C, \eta_C)}{\lambda(f+d)} F(Im_C) (F(Im_B) F(Im_B)^*)
\end{aligned}$$

Если в качестве опорного источника Im_B используется дифракционно ограниченный точечный источник (т.е. голограмма записывается по схеме с внеосевым плоским опорным пучком, показанным пунктиром на Рис.1.3), то выражение (1.31) можно упростить

$$\begin{aligned}
& \frac{-j \exp jkR(\xi_c, \eta_c)}{\lambda(f + d_c)} F(Im_c) H(v_x, v_y) = \\
& \frac{-j \exp jkR(\xi_c, \eta_c)}{\lambda(f + d_c)} F(Im_c) \left(F(Im_A) F(Im_A)^* \right) + \\
& + \frac{-j \exp jkR(\xi_c, \eta_c)}{\lambda(f + d_c)} F(Im_c) \frac{-j \exp jkR(\xi_A, \eta_A)}{\lambda(f + d_A)} F(Im_A) + . \\
& + \frac{-j \exp jkR(\xi_c, \eta_c)}{\lambda(f + d_c)} F(Im_c) \frac{j \exp jkR(\xi_A, \eta_A)}{\lambda(f + d_A)} F(Im_A)^* + \\
& + \frac{-j \exp jkR(\xi_c, \eta_c)}{\lambda(f + d_c)} F(Im_c)
\end{aligned} \tag{0.32}$$

Здесь, для упрощения выкладок, мы опустили постоянные коэффициенты. Если объектное изображение помещено в то же положение, что и эталонное при записи голограммы, то возможно дальнейшее упрощение выражения

$$\begin{aligned}
& \frac{-j \exp jkR(\xi_c, \eta_c)}{\lambda(f + d)} F(Im_c) H(v_x, v_y) = \\
& \frac{-j \exp jkR(\xi_c, \eta_c)}{\lambda(f + d)} F(Im_c) \left(F(Im_A) F(Im_A)^* \right) + \\
& + \frac{-j \exp jk(R(\xi_c, \eta_c) + R(\xi_A, \eta_A))}{\lambda(f + d)} F(Im_c) F(Im_A) + . \\
& + \frac{-j \exp jk(R(\xi_c, \eta_c) - R(\xi_A, \eta_A))}{\lambda(f + d)} F(Im_c) F(Im_A)^* + \\
& + \frac{-j \exp jkR(\xi_c, \eta_c)}{\lambda(f + d)} F(Im_c)
\end{aligned} \tag{0.33}$$

Из (1.33) видно, что, строго говоря, фазовая погрешность несущественна при голографическом методе обработки информации только при работе в +1 порядке дифракции (третье слагаемое в (1.33)) $4f$ схемы голографии Фурье в случае, если объектное изображение находится в том же положении, что и эталонное при записи голограммы, т.е.

$$d_c = d_A .$$

Условие

$$(\xi_c, \eta_c) \leq (\xi_A, \eta_A)$$

выполняется автоматически, поскольку физический размер голограммы не превосходит (ξ_A, η_A) (с учетом ограничений, обусловленный ограниченностью динамического диапазона регистрирующей среды).

Обратим внимание, что при выводе (1.33) мы рассмотрели только запись голограммы. $4f$ схемы голографии Фурье предполагает также и второе

преобразование Фурье, выполняемое над дифрагировавшим на голограмме пучком. Это преобразование мы здесь еще не рассмотрели. Если схема используется как коррелятор или конволвер, то в задней фокальной плоскости второй Фурье-преобразующей линзы регистрируется интенсивность, т.е. возникающая при втором преобразовании фазовая погрешность несущественна. Если же голографическая схема входит в состав более сложной схемы, то эта погрешность, в зависимости от схемы, может оказаться существенной.

Оговоренные выше условия имеют силу для коррелятора Ван дер Люгта, поскольку функция взаимной корреляции формируется в +1 порядке дифракции. При работе в -1 порядке дифракции (второе слагаемое) в (1.33) фазовые погрешности складываются.

Оценим величину фазовой погрешности. Величина множителя $\frac{-j \exp jkR(\xi, \eta)}{\lambda(f+d)}$ зависит от величины $R(\xi, \eta)$, которая, в свою очередь, в соответствии с (1.7) зависит от (ξ, η) , т.е. от ρ - радиуса апертуры в частотной плоскости P_2 . Обычно полагают, что в пределах ρ_{Max} изменения ξ и η достаточно малы для того, чтобы экспоненциальный множитель $\exp jkR(\xi, \eta)$ в выражении (1.29) можно было считать постоянным. Вернемся к точному выражению для $R(\xi, \eta)$ (1.7) и преобразуем его к виду

$$\begin{aligned} R(\xi, \eta) &= \frac{f^2 + \xi^2 + \eta^2 + df}{\sqrt{f^2 + \xi^2 + \eta^2}} = \frac{f^2 + \rho^2 + df}{\sqrt{f^2 + \rho^2}} = \\ &= (f+d) - (f-d) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{f^2 + \frac{\rho^2}{f^2}}} \right) + 2f \left(\frac{\left(1 - \frac{\rho^2}{2f^2} \right)}{\sqrt{f^2 + \frac{\rho^2}{f^2}}} - 1 \right). \end{aligned} \quad (0.34)$$

Если разложить второе и третье слагаемые в степенной ряд, ограничившись первым приближением, то (1.34) после несложных преобразований примет вид:

$$R(\xi, \eta) = (f+d) + \frac{1}{2}(f-d) \frac{\rho^2}{f^2} + \frac{1}{2} f \left(\frac{\rho^2}{f^2} \right)^2. \quad (0.35)$$

Подставив (1.35) в выражение для экспоненциального множителя, определяющего фазовую погрешность, получим

$$\frac{-j \exp jkR(\xi, \eta)}{\lambda(f+d)} = \frac{-j}{\lambda(f+d)} \exp jk(f+d) \exp \left(\frac{1}{2} jk(f-d) \frac{\rho^2}{f^2} \right) \exp \left(\frac{1}{2} jkf \left(\frac{\rho^2}{f^2} \right)^2 \right). \quad (0.36)$$

Принятая при разложении (1.34) в степенной ряд аппроксимация только первыми членами допустима в определенных пределах. Например, если выполняется условие

$$\rho \leq 0.14f,$$

то погрешности, определенные (1.36) и (1.34) различаются не более, чем на 2%.

Из (1.36) наглядно видно, почему при реализации преобразования Фурье линзой транспарант с преобразуемым изображением обычно помещается в переднюю фокальную плоскость, т.е. выполняется условие

$$d = f \quad (0.37)$$

Действительно, в этом случае второй сомножитель в (1.36) становится равным единице и фазовая погрешность минимизируется

$$\frac{-j \exp jkR(\xi, \eta)}{\lambda(f+d)} = \frac{-j}{2\lambda f} \exp jk2f \exp \left(\frac{1}{2} jkf \left(\frac{\rho^2}{f^2} \right)^2 \right) \quad (0.38)$$

Влияние фазовой погрешности на результат обработки изображения оптической схемой.

Выше мы упомянули, что при измерениях в спектральной плоскости, выполняемых квадратичным приемником, фазовый член, определяющий фазовую погрешность, исчезает (поскольку квадратичный приемник измеряет не комплексную амплитуду, а интенсивность). Однако, в более сложных системах эта погрешность может вносить существенный вклад в результат обработки. Рассмотрим простейшую систему, состоящую из двух положительных линз, задняя и передняя фокальные плоскости которых совпадают (Рис.1.4.)

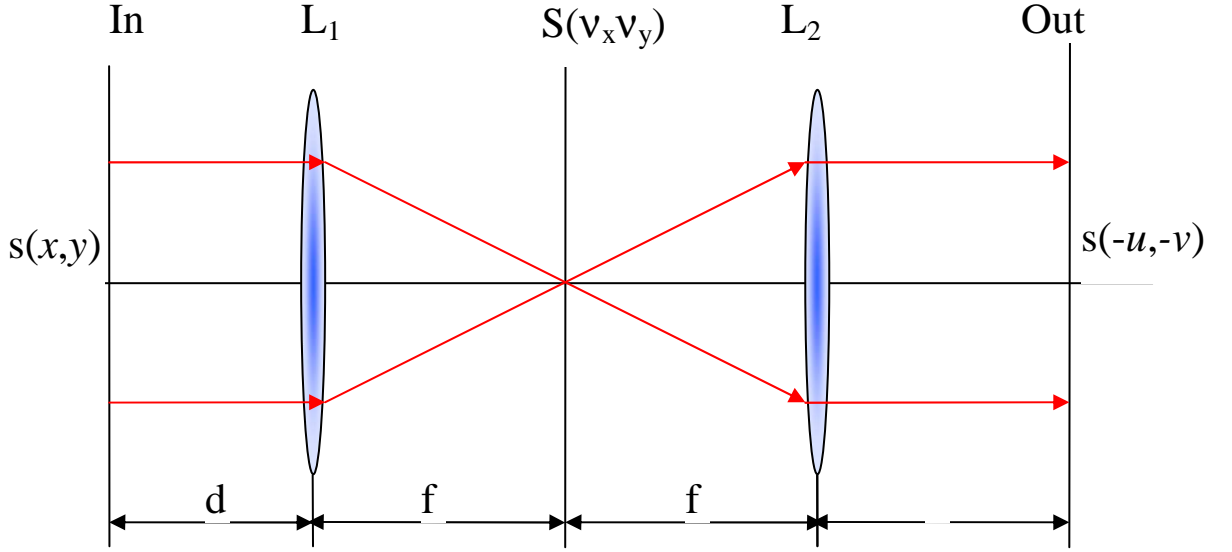


Рис.1.4. Схема двойного оптического преобразования Фурье.

Поскольку в системе выполняется последовательно два преобразования (1.29), то, в предположении, что входная плоскость совпадает с передней фокальной плоскостью первой линзы ($d=f$), в задней фокальной плоскости первой линзы L_1 распределение амплитуд $S(\xi, \eta)$ описывается выражением выходной плоскости Out распределение амплитуд описывается выражением

$$\begin{aligned}
 S(\xi, \eta) &= \frac{-j}{2\lambda f_1} \exp jk2f_1 \exp \left(\frac{1}{2} jkf_1 \left(\frac{\rho_1^2}{f_1^2} \right)^2 \right) \iint E(x, y) \exp \left[-j2\pi(v_x x + v_y y) \right] dx dy = \\
 &= \frac{-j}{2\lambda f_1} \exp jk2f_1 \exp \left(\frac{1}{2} jkf_1 \left(\frac{\rho_1^2}{f_1^2} \right)^2 \right) S(v_x, v_y)
 \end{aligned} \quad , (0.39)$$

где $S(v_x, v_y)$ – Фурье-образ распределения амплитуд во входной плоскости. Вторая линза L_2 выполняет второе преобразование над этим распределением

$$\begin{aligned}
 Out(u, v) &= \frac{-j}{2\lambda f_2} \exp jk2f_2 \exp \left(\frac{1}{2} jkf_2 \left(\frac{\rho_2^2}{f_2^2} \right)^2 \right) \iint S(\xi, \eta) \exp \left[-j2\pi(v_x u + v_y v) \right] dv_x dv_y = \\
 &= \frac{-j}{2\lambda f_2} \exp jk2f_2 \exp \left(\frac{1}{2} jkf_2 \left(\frac{\rho_2^2}{f_2^2} \right)^2 \right) \frac{-j}{2\lambda f_1} \exp jk2f_1 \times \\
 &\times \iint \exp \left(\frac{1}{2} jkf_1 \left(\frac{\rho_1^2}{f_1^2} \right)^2 \right) S(v_x, v_y) \exp \left[-j2\pi(v_x u + v_y v) \right] dv_x dv_y
 \end{aligned} \quad .$$

(0.40)

Для оценки влияния экспоненциального фазового множителя (1.36) на результат преобразования, выполняемого системой Рис.1.4., рассмотрим прохождение через неё гармонического сигнала, представленного в передней фокальной плоскости линзы L_1

$$s(x) = A_0 + B \cos 2\pi\nu_0 x. \quad (0.41)$$

Примем для упрощения выражений $d=f_1=f_2=f$ и обозначим множители, стоящие перед интегралом, C_1 и C_2 , соответственно. Тогда, в спектральной плоскости для гармонического сигнала (1.41) получим распределение

$$S(\nu_x, \nu_y) = C_1 \left[A_0 \delta(\nu_x) + \frac{B}{2} (\delta(\nu_x - \nu_0) + \delta(\nu_x + \nu_0)) \right], \quad (0.42)$$

где для упрощения выражений символом $\delta(\dots)$ мы обозначили распределение амплитуд в дифракционном максимуме. Отсюда, распределение комплексных амплитуд в выходной плоскости

$$Out(u, v) = C_3 \left[A_0 + B \exp \left(\frac{jkf (\lambda\nu_0)^4}{2} \right) \cos 2\pi\nu_0 u \right], \quad (0.43)$$

где C_3 определяется из (1.39), (1.40).

Для преобразования без фазовой погрешности распределение амплитуд в выходной плоскости должно описываться выражением

$$Out_{ideal}(u, v) = C_3 (A_0 + B \cos 2\pi\nu_0 u). \quad (0.44)$$

Из сравнения (1.43) и (1.44) видно, что фазовая погрешность оптического преобразования Фурье для рассматриваемой схемы Рис.1.4. выражается экспоненциальным множителем перед сигнальным членом $B \cos 2\pi\nu_0 u$.

Перейдем от амплитуд в выходной плоскости к интенсивности, тогда выражения (1.43) и (1.44) примут вид, соответственно

$$\langle Out(u, v) \rangle^2 = |C_3|^2 \left[A_0^2 + 2A_0 B \cos \left(\frac{kf (\lambda\nu_0)^4}{2} \right) \cos 2\pi\nu_0 u + B^2 \cos^2 2\pi\nu_0 u \right] \quad (0.45)$$

$$\langle Out_{ideal}(u, v) \rangle^2 = |C_3|^2 (A_0^2 + 2A_0 B \cos 2\pi\nu_0 u + B^2 \cos^2 2\pi\nu_0 u) \quad (0.46)$$

Из сравнения этих выражений видно, что интенсивность гармоники ν_0 (сигнала) ослаблена, это ослабление выражается коэффициентом

$$M = \cos\left(\frac{kf(\lambda\nu_0)^4}{2}\right). \quad (0.47)$$

Соответственно, для сложного изображения этот коэффициент является функцией частоты

$$M(\nu) = \cos\left(\frac{kf(\lambda\nu)^4}{2}\right). \quad (0.48)$$

Таким образом, в области низких пространственных частот влияние фазовой погрешности минимально, так как при малых ν , как следует из (1.48), $M(\nu) \approx 1$. С ростом частоты величина $M(\nu)$ уменьшается. Напомним, что пространственная частота связана с пространственной координатой в частотной плоскости соотношением

$$\nu_x = \frac{\xi}{\lambda f}.$$

Литература.

1. С.Б.Гуревич В.Б.Константинов, В.К.Соколов, Д.Ф.Черных, Передача и обработка информации голографическими методами, М.Сов.Радио. 1978 – 304с.

Тема 2. Преобразования, реализуемые в оптике, на основе преобразования Фурье.

В курсе «Оптические технологии искусственного интеллекта» мы ознакомились с интегральными преобразованиями типа свертки – функциями свертки двух функций и функцией корреляции двух функций. Эти интегральные преобразования реализуются оптическими методами с использованием двух последовательных преобразований Фурье. Поскольку Фурье-образ любой функции (кроме функции Гаусса) – комплексная функция, то для реализации этих преобразований необходима голографическая технологий – единственная технология, обеспечивающая запись и восстановление комплексных функций.

В этом разделе мы ознакомимся с рядом других преобразований, применяемых при обработке информации, и реализуемых оптическими методами.

2.1. Дифференцирование функций.

Операция дифференцирования может быть реализована в оптике двумя методами. Первый из них основан на следующем равенстве

$$F[E^{(n)}(x)] = (j\omega)^n F[E(x)], \quad (0.49)$$

где $E^{(n)}(x)$ - n -ая производная функции $E(x)$. Отсюда следует формула для оптической реализации n -ой производной от функции $E(x)$

$$\frac{d^n E(x)}{dx^n} = F^{-1}[(j\omega)^n F(E(x))] \quad (0.50)$$

Таким образом, для того, чтобы реализовать операцию дифференцирования, необходимо в спектральной плоскости ввести амплитудный фильтр, функция амплитудного пропускания которого описывается выражением

$$H(\omega) = \omega^n. \quad (0.51)$$

Напомним, что в силу нереализуемости в оптике обратного преобразования Фурье, вместо обратного используется повторное прямое преобразование Фурье с инверсией координат в выходной плоскости.

Такой способ оптического дифференцирования изображений применяется в задаче распознавания образов в том случае, если образ, подлежащий распознаванию (эталон) и образ-помеха имеют отчасти сходную форму. Классический пример, используемый для иллюстрации эффекта оптического дифференцирования – корреляционное распознавание печатного текста. Рассмотрим две буквы I и E. Эти буквы отчасти сходны между собой.

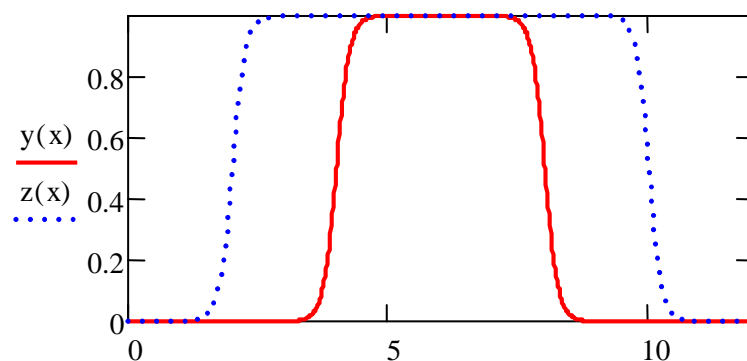


Рис.2.1. Пример одинаковых фигур, отличающихся только размером.

Аналогичная ситуация имеет место при распознавании фигур одинаковой формы, но разного размера. Пример приведен на Рис.2.1. – сечения двух фигур, например, прямоугольников, отличаются только размером.

Этот пример можно рассматривать как сечения букв I (сплошная линия) и E (пунктир) по оси x .

Если поставлена задача распознать букву I, то буква E будет помехой. Рис.2.2. приведены сечения по оси x функций автокорреляции буквы I и кросс-корреляции букв I и E, т.е. сигнала-помехи. Энергия кросс-корреляционного отклика (площадь под кривой) больше для помехи, соответственно, будет принято неправильное решение – буква E будет распознана как буква I.

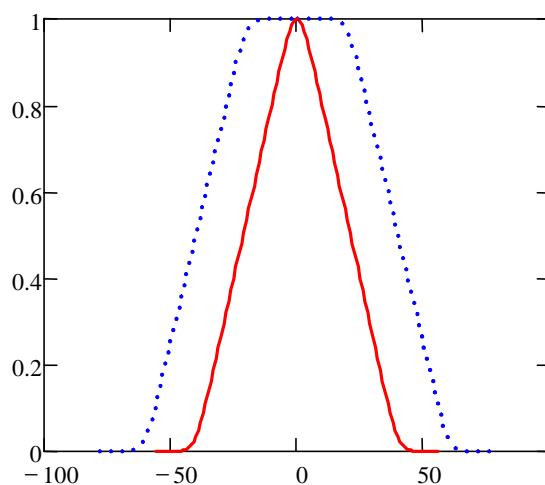


Рис.2.2. Функции автокорреляции (сплошная кривая) и кросс-корреляции (пунктир)

Введем операцию дифференцирования, тогда производные сечения по оси x будут иметь вид, показанный на рис. 2.3., а авто- и кросс-корреляция, на рис.2.4.

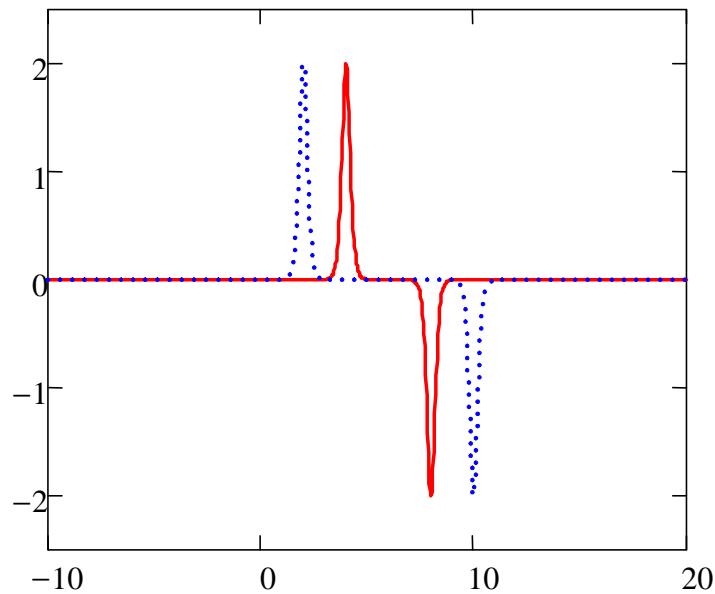


Рис.2.3. Производные функций, представленных на Рис.2.1.

Как видно из Рис.2.4., при работе не с самими изображениями, а с их производными распознавание произойдет правильно, так как глобальный максимум автокорреляционной функции по амплитуде в два раза превосходит боковые максимумы функции кросс-корреляции (пунктирная кривая). При измерениях квадратичным приемником отношение сигнал-помеха оставит уже 4:1.

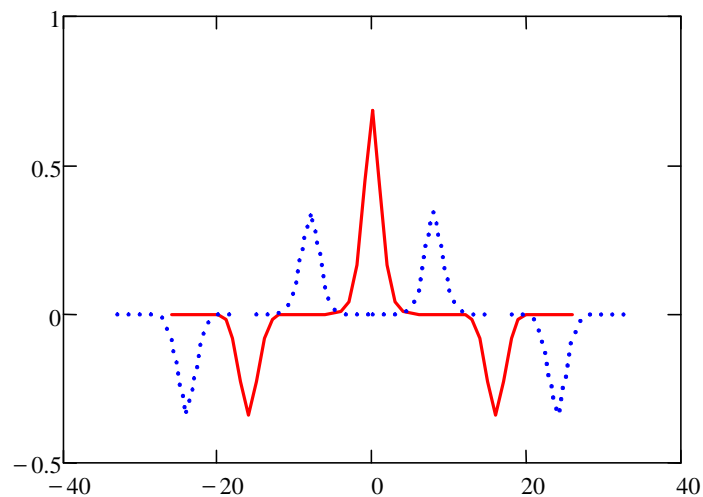


Рис.2.4. Функции автокорреляции (сплошная кривая) и кросс-корреляции дифференцированных изображений

Заметим, что дифференцирование изображений реализуется методом пространственной фильтрации в частотной плоскости.

Второй способ оптического дифференцирования функций основан на использовании фильтрующего свойства δ -функции и её производных, а именно:

$$\int_{-\infty}^{\infty} E(\xi) \delta^{(n)}(x - \xi) d\xi = (-1)^n E^{(n)}(x), \quad (0.52)$$

Где $\delta^{(n)}(x - \xi)$ - n -ая производная δ -функции. Отсюда получим окончательное выражение

$$\frac{d^n E(x)}{dx^n} = (-1)^n E(x) * \delta^{(n)}(x). \quad (0.53)$$

Нетрудно видеть, что полученные выражения применимы и к функциям двух переменных. В частности, частная производная порядка $n+m$ будет описываться выражением

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n} \frac{\partial^m}{\partial y^m} E(x, y) = \iint_{-\infty}^{\infty} E(x, y) (-1)^{n+m} \delta^{(n)}(x - \xi) \delta^{(m)}(y - \eta) d\xi d\eta. \quad (0.54)$$

Следовательно, для реализации оператора дифференцирования первого порядка по одной координате $\frac{\partial}{\partial x} E(x, y)$ необходима весовая функция $-\delta'(x) \delta(y)$, а по двум координатам $\frac{\partial}{\partial x \partial y} E(x, y)$ весовая функция $\delta'(x) \delta'(y)$.

2.2. Оператор Лапласа.

Из (2.5), следует, что для реализации оператора Лапласа

$$\nabla^2 E(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} E(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} E(x, y)$$

необходима весовая функция

$$\delta''(x) \delta(y) + \delta(x) \delta''(y). \quad (0.55)$$

Возможна также и реализация оператора Лапласа методом преобразования Фурье – из (2.2) следует, что для этого необходимо Фурье-образ функции $E(x)$ умножить на функцию

$$-(\omega_x^2 + \omega_y^2). \quad (0.56)$$

2.3. Интегрирование функций.

Интегрирование функции может рассматриваться как вычисление её Фурье-образа в точке $\nu = 0$.

Другой подход к интегрированию функций возможен через её свертку с функцией, тождественно равной единице

$$\int_{-\infty}^{\infty} E(x) dx = E(x) * 1(x). \quad (0.57)$$

2.4. Вычисление моментов.

Вычисление моментов функций

$$m_n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n E(x) dx \quad (0.58)$$

реализуется через операции преобразования Фурье и дифференцирование.

Если разложить экспоненциальное ядро в выражении для преобразования Фурье в степенной ряд, то

$$F(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} E(x) \left[1 - j\omega x + (j\omega x)^2 - (j\omega x)^3 + \dots \right] dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m_n}{n!} (-j\omega)^n, \quad (0.59)$$

откуда получим

$$m_n = (-j)^n \frac{dn}{d\omega^n} F(0). \quad (0.60)$$

Таким образом, n -кратное дифференцирование Фурье-образа анализируемой функции в точке $\nu = 0$ позволяет вычислить соответствующие моменты.

2.5. Преобразование Френеля.

Преобразование Френеля определяется следующим образом:

$$\Phi(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} E(x) \exp(-j(2\pi\nu + x)^2) dx. \quad (0.61)$$

Введем $\mu = 2\nu$, тогда

$$\begin{aligned} \Phi(\nu) &= \int_{-\infty}^{\infty} E(x) \exp(-j2\pi\mu x) \exp(-j2\pi\nu^2) \exp(-jx^2) dx = \\ &= \exp\left(-j\left(\frac{2\pi\mu}{2}\right)^2\right) \int_{-\infty}^{\infty} [E(x) \exp(-jx^2)] \exp(-j2\pi\mu x) dx \end{aligned} \quad (0.62)$$

Таким образом, для того, чтобы выполнить преобразование Френеля функции $E(x)$, её необходимо умножить на $\exp(-jx^2)$, выполнить преобразование Фурье и полученный Фурье-образ $F(\mu)$ умножить на $\exp\left(-j\left(\frac{2\pi\mu}{2}\right)^2\right)$.

Другой метод реализации преобразования Френеля основан на использовании теоремы Бореля о свертке (мы изучали её в курсе «Оптические технологии искусственного интеллекта») и табличном значении

$$F\left(\exp(-jx^2)\right) = j\sqrt{\pi} \exp\left(\frac{j\pi}{4}\right) \exp\left(\frac{j(2\pi\nu)^2}{4}\right). \quad (0.63)$$

Отсюда получим выражение для преобразования Френеля через свертку Фурье-образа с экспоненциальной функцией:

$$\Phi(\nu) = j\sqrt{\pi} \exp\left[j\left((2\pi\nu)^2 + \frac{\pi}{4}\right)\right] F(2\nu) * \exp(j\nu^2). \quad (0.64)$$

2.6. Преобразование Меллина.

Преобразование Меллина мы вкратце упоминали в курсе «Оптические технологии искусственного интеллекта», когда говорили о проблеме распознавания образов, инвариантном к изменению масштаба. Двумерное преобразование Меллина функции $E(x, y)$ определяется следующим образом:

$$M(ju, jv) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} E(x, y) x^{-ju-1} y^{-jv-1} dx dy \quad (0.65)$$

Нетрудно видеть, что преобразование Меллина функции $E(x, y)$ может быть представлено как преобразование Фурье функции $E(\exp(\xi), \exp(\eta))$, т.е.

$$M(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E(\exp(\xi), \exp(\eta)) \exp(-j2\pi(\xi u + \eta v)) d\xi d\eta. \quad (0.66)$$

Таким образом, для того, чтобы выполнить преобразование Меллина функции $E(x, y)$, необходимо выполнить логарифмическое преобразование её координат, а затем преобразование Фурье. Логарифмическое преобразование координат легко выполнить в тракте ввода компьютерными методами.

Преобразование Меллина представляет интерес в силу того, что оно, в отличие от преобразования Фурье, инвариантно к изменению масштаба. Действительно, если имеем две функции, одна из которых представляет собой масштабированную версию другой $E(x, y)$ и $E(ax, by)$, то из определения (2.16) следует, что

$$M(E(ax, by)) = a^{-ju - jv} M(E(x, y)). \quad (0.67)$$

2.7. Преобразование Радона.

Преобразование Радона используется в томографии для получения информации о строении трехмерного объекта по совокупности его проекций. Преобразование Радона ставит в соответствие функции $E(r, \varphi)$, заданной в полярных координатах, функцию $\mathfrak{R}_E(l, \Theta)$, при этом значение $\mathfrak{R}_E(l, \Theta)$ в точке (l, Θ) обозначается $[\mathfrak{R}_E](l, \Theta)$. Радоновский образ функции $E(r, \varphi)$ определяется следующим образом:

$$[\mathfrak{R}_E](l, \Theta) = \int_{-\infty}^{\infty} E\left[\sqrt{l^2 + z^2}, \Theta + \arctg\left(\frac{z}{l}\right)\right] dz. \quad (0.68)$$

При $l = 0$ радоновский образ имеет вид

$$[\mathfrak{R}_E](0, \Theta) = \int_{-\infty}^{\infty} E\left[z, \Theta + \frac{\pi}{2}\right] dz. \quad (0.69)$$

Радоновский образ представляет собой интеграл от функции $E(r, \varphi)$ вдоль некоторой прямой L , расположенной на расстоянии l от начала координат и образующей угол Θ с положительным направлением оси y .

Для того, чтобы установить связь между преобразованием Радона и преобразованием Фурье, используется теорема о проекциях, непосредственно следующая из определения этих преобразований. Введем двумерное преобразование Фурье в полярных координатах:

$$[F_{EP}](R, \Phi) = \int_0^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |r| E(r, \varphi) \exp[-2\pi j r R \cos(\Phi - \varphi)] dr d\varphi. \quad (0.70)$$

Введем одномерное преобразование Фурье функции двух переменных вдоль линии L , которое обозначим F_{EL} , тогда нетрудно видеть, что

$$F_P = F_L \mathfrak{R}. \quad (0.71)$$

Отсюда следует, что для того, чтобы выполнить преобразование Радона, достаточно выполнить двумерное и одномерное преобразования Фурье.

2.8. Вычитание изображений.

Как мы уже изучали ранее, при записи голограммы Фурье изображения $E_1(x)$ с плоской внеосевой опорной волной, формируемой точечным источником, находящимся в передней фокальной плоскости Фурье-

преобразующей линзы в точке x_0 , в предположении линейного оператора голографической регистрирующей среды, голограмма описывается выражением

$$\begin{aligned} H_1(\nu) &= [\exp(j2\pi\nu x_0) + F_1(\nu)] [\exp(j2\pi\nu x_0) + F_1(\nu)]^* = \\ &= 1 + F_1(\nu) F_1^*(\nu) + F_1(\nu) \exp(-j2\pi\nu x_0) + F_1^*(\nu) \exp(j2\pi\nu x_0), \end{aligned} \quad (0.72)$$

где астериск обозначает комплексное сопряжение, а $F_1(\nu)$ - Фурье-образ. Запишем вторую голограмму Фурье $H_2(\nu)$ с опорной волной, имеющей сдвиг фазы $i\pi$ по сравнению с опорной волной, использованной при записи первой голограммы

$$\begin{aligned} H_2(\nu) &= [\exp(j2\pi\nu x_0 + i\pi) + F_2(\nu)] [\exp(j2\pi\nu x_0 + i\pi) + F_2(\nu)]^* = \\ &= 1 + F_2(\nu) F_2^*(\nu) + F_2(\nu) \exp(-j2\pi\nu x_0 - i\pi) + F_2^*(\nu) \exp(j2\pi\nu x_0 + i\pi) = \\ &= 1 + F_2(\nu) F_2^*(\nu) - F_2(\nu) \exp(-j2\pi\nu x_0) - F_2^*(\nu) \exp(j2\pi\nu x_0) \end{aligned} \quad (0.73)$$

Сложим эти голограммы, используя, например, метод записи наложенных голограмм

$$\begin{aligned} H_1(\nu) + H_2(\nu) &= 2 + |F_1(\nu)|^2 + |F_2(\nu)|^2 + \\ &+ (F_1(\nu) - F_2(\nu)) \exp(-j2\pi\nu x_0) + (F_1^*(\nu) - F_2^*(\nu)) \exp(j2\pi\nu x_0). \end{aligned} \quad (0.74)$$

Осветив голограмму (2.25) плоской волной и выполнив преобразование Фурье дифрагировавших волн, получим

$$\begin{aligned} F(H_1(\nu) + H_2(\nu)) &= 2\delta(x) + F(F_1(\nu) F_1^*(\nu)) + F(F_2(\nu) F_2^*(\nu)) + \\ &+ (E_1(x) - E_2(x)) * \delta(x - x_0) + (E_1^*(x) - E_2^*(x)) * \delta(x + x_0), \end{aligned} \quad (0.75)$$

Где символ $*$ обозначает свертку. Первое слагаемое в полученном выражении представляет собой дифракционно-ограниченное изображение точечного источника, расположенное в точке $x=0$ (в предположении, что восстанавливающий голограмму пучок формируется точечным источником, расположенным на главной оптической оси). Второй и третий члены – автокорреляционные функции изображений $E_1(x)$ и $E_2(x)$, симметричные относительно главной оптической оси, а четвертый и пятый слагаемые – результаты вычитания функций $E_1(x)$ и $E_2(x)$, расположенные симметрично относительно главной оптической оси на расстояниях x_0 от неё.

Литература к Теме 2.

1. Г.И.Василенко, Л.М.Цибулькин, Голографические распознающие устройства, М.: Радио и связь, 1985.

Тема 3. Отношение сигнал/помеха при корреляционном сравнении изображений.

В предыдущих лекциях, а также в курсе «Оптические технологии искусственного интеллекта», говоря о применении корреляционного алгоритма в задаче распознавания образов и, в частности, о голографических корреляторах, мы упоминали такое понятие как отношение сигнал/помеха в корреляционной плоскости, но не определяли его строго и не исследовали факторы, влияющие на величину этого отношения. В данной теме мы рассмотрим это понятие более детально.

Говоря о корреляционном алгоритме распознавания образов в курсе «Оптические технологии искусственного интеллекта», мы выяснили, что решение о распознавании принимается на основании вычисления функции взаимной корреляции объектного (предъявляемого) и эталонного изображений. Если эти изображения идентичны, то функция из взаимной корреляции (ВКФ) является автокорреляционной функцией (АКФ) и, в общем случае, для сложных изображений имеет вид, представленный на Рис.3.1. сплошной кривой. Центральный пик на этом рисунке называется глобальным максимумом автокорреляционной функции (ГМ АКФ) и именно он служит сигналом распознавания. Для сравнения на рис.3.1. пунктиром приведена АКФ прямоугольного импульса (в оптике эта функция используется для описания функции зрачка или апертуры).

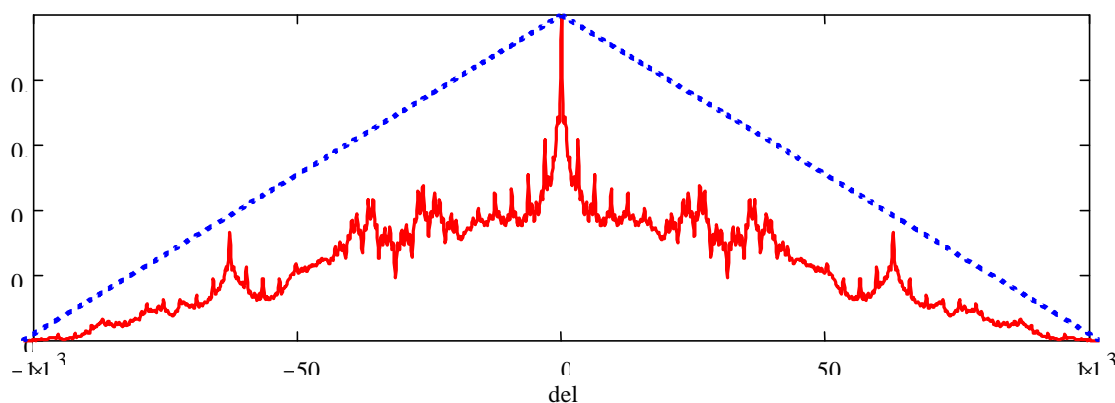


Рис.3.1. Автокорреляционные функции сложного сигнала (сплошная кривая) и прямоугольного импульса (штриховая линия).

Если ВКФ строится голографическим коррелятором (Рис.3.2.), то ГМ АКФ может рассматриваться как восстановленное голограммой изображение точечного опорного источника δ , использованного при записи голограммы Фурье эталонного изображения.

Из рисунка 3.1. видно, что кроме ГМ АКФ присутствуют также и другие пики, меньшей амплитуды – боковые максимумы АКФ. Если сравниваются не полностью идентичные изображения, а лишь отчасти похожие, то их

корреляционное распределение состоит, условно говоря, из двух – АКФ идентичных частей и ВКФ различных. ВКФ различных изображений иногда называют кросс-корреляционной функцией, которая, в отличие от АКФ, в общем случае не имеет ГМ.

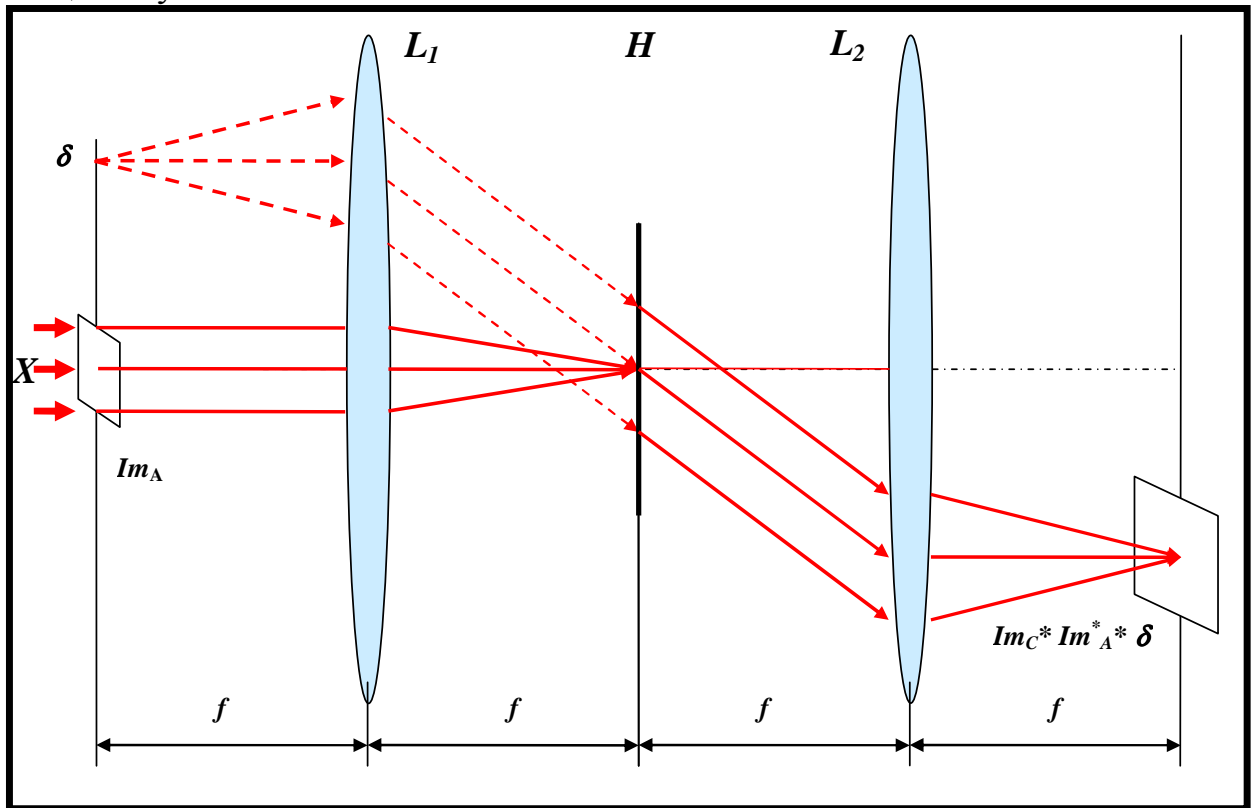


Рис.3.2. Схема голографического коррелятора Ван дер Люгта.

Если амплитуды боковых максимумов АКФ и/или ВКФ сравнимы с амплитудой ГМ АКФ, или превосходят ее, то эти боковые максимумы являются помехой. Для примера, на Рис.3.3. приведены АКФ (сплошная кривая) и ВКФ (пунктир) двух различных функций. Видно, что в случае ВКФ ГМ отсутствует. Чем больше отличие объектного изображения от эталонного, тем больше амплитуды боковых максимумов и ниже амплитуда ГМ АКФ. Поэтому необходимо оценить отношение этих амплитуд.

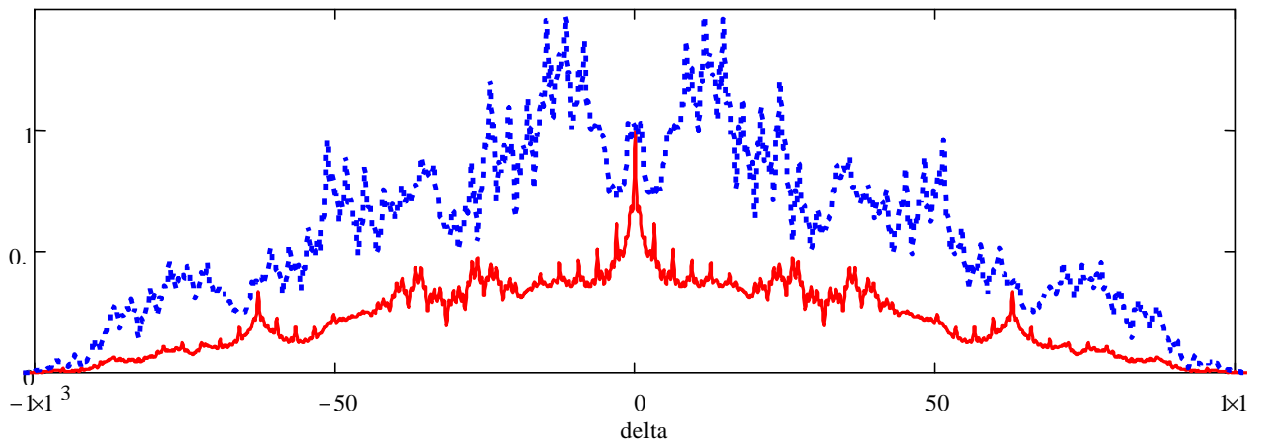


Рис.3.3. АКФ (сплошная линия) и ВКФ (пунктир)

Важное замечание. Иногда в литературе боковые максимумы АКФ и ВКФ трактуются как шум и, соответственно, используется термин отношение сигнал/шум. Такая трактовка некорректна, так как боковые максимумы АКФ и ВКФ несут в себе информацию и сравниваемых изображениях (функциях). В курсе ОТИИ, в теме «Линейный предсказатель случайных процессов» мы изучили, что именно боковые максимумы АКФ и ВКФ используются для реализации модели линейного предсказателя. В то же время. Эти боковые максимумы являются помехой в рамках задачи детектирования ГМ АКФ.

Пусть распределение амплитуд во входной плоскости коррелятора (изображение) $E(x, y)$ описывается моделью двумерного изотропного случайного поля с функцией корреляции (авто-корреляции)

$$R(\Delta_x, \Delta_y) = \sigma^2 \rho(r), \quad (0.76)$$

где σ^2 - дисперсия и $\rho(r)$ - коэффициент корреляции, r - радиус корреляции. Будем считать поле $E(x, y)$ статистически однородным так, чтобы можно было осуществить нормировку первого и второго моментов. Введем функцию апертуры (кадрового окна) $c(x, y)$, вырезающую из поля $E(x, y)$ обрабатываемую коррелятором часть $c(x, y)E(x, y)$. Голограмма записана с эталонного фрагмента поля $c(x, y)E_R(x, y)$.

Опознавание осуществляется на основании вычисления функции взаимной корреляции

$$K(\Delta_x, \Delta_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} c(x, y) E_R(x, y) E(x + \Delta_x, y + \Delta_y) dx dy, \quad (0.77)$$

при этом, поскольку измерения проводятся квадратичным приемником, нас интересует средняя величина отношения сигнал/помеха по энергии

$$V_0 = \frac{\langle K(0,0) \rangle^2}{\mu^2}, \quad (0.78)$$

где $\langle K(0,0) \rangle^2$ - среднее значение сигнальной функции, в качестве которой выступает ГМ АКФ, а μ^2 - средний квадрат помехи. Под помехой мы будем понимать взаимную корреляцию (или кросс-корреляцию) опознаваемого и всех остальных участков поля.

Математическое ожидание функции взаимной корреляции (3.2) по множеству реализаций случайного поля определяется выражением

$$\begin{aligned} \langle K(\Delta_x, \Delta_y) \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} c(x, y) \langle E_R(x, y) E(x + \Delta_x, y + \Delta_y) \rangle dx dy = \\ &= R(\Delta_x, \Delta_y) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} c(x, y) dx dy = S_R R(\Delta_x, \Delta_y) \end{aligned} \quad (0.79)$$

где S_R - площадь опознаваемого изображения в предположении, что функция апертуры равномерна, т.е. $c(x, y) = \text{Const}$ в пределах кадрового окна и $c(x, y) = 0$ вне его. Из (3.4) ясно видно, что форма сигнальной функции на выходе коррелятора повторяет авто-корреляционную функцию поля $R(\Delta_x, \Delta_y)$, а её максимальное значение в среднем описывается выражением

$$\langle K(0,0) \rangle = R(0,0) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} c(x, y) dx dy = \sigma^2 S_R = W, \quad (0.80)$$

Здесь W - энергия опознаваемого изображения.

Средний по ансамблю квадрат помехи может быть определен следующим образом:

$$\begin{aligned} \mu^2 &= \left\langle \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} c(x_1, y_1) c(x_2, y_2) E_R(x_1, y_1) E_R(x_2, y_2) \overline{E_R(x_1 + \Delta_x, y_1 + \Delta_y)} \overline{E_R(x_2 + \Delta_x, y_2 + \Delta_y)} dx_1 dy_1 dx_2 dy_2 \right\rangle = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} c(x_1, y_1) c(x_2, y_2) R^2(x_2 - x_1, y_2 - y_1) dx_1 dy_1 dx_2 dy_2 = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R^2(\Delta_x, \Delta_y) R_c(\Delta_x, \Delta_y) d\Delta_x d\Delta_y \end{aligned} \quad (0.81)$$

где $\overline{E_R}(x, y)$ - часть поля, играющая роль помехи, т.е. часть поля, не записанная на голограмме Фурье, а $R_c(\Delta_x, \Delta_y)$ - функция автокорреляции кадрового окна. Нетрудно видеть, что если радиус корреляции поля r много меньше размера опознаваемого изображения, то функция автокорреляции

кадрового окна $R_c(\Delta_x, \Delta_y)$ мало меняется по сравнению с функцией автокорреляции поля $R_R(\Delta_x, \Delta_y)$. Это положение иллюстрирует Рис.3.1. – приведенная пунктиром АКФ окна $R_c(\Delta_x, \Delta_y)$ имеет треугольную форму, в то время, как АКФ поля $R_R(\Delta_x, \Delta_y)$ меняется быстро. Тогда, выражение (3.6) можно упростить и представить в виде

$$\begin{aligned} \mu^2 &\approx R_c(0,0) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R_R(\Delta_x, \Delta_y) d\Delta_x d\Delta_y = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} c^2(x, y) dx dy \int_0^{\infty} r R^2(r) dr = \\ &= 2\pi S_R \sigma^4 \int_0^{\infty} r \rho^2(r) dr = 2\pi k S_R \sigma^4 r^2 = 2kW^2 \frac{S_k}{S_R} \end{aligned} \quad (0.82)$$

где S_R - площадь опознаваемого изображения (эталона), $S_k = \pi r^2$ - площадь корреляции, а k - коэффициент, зависящий от функции корреляции поля.

Из (3.7) ясно видно, что среднее квадратичное значение помехи прямо пропорционально энергии опознаваемого изображения и обратно пропорционально отношению размера изображения к радиусу корреляции поля.

Используя (3.5) и (3.7), получим оценку отношения сигнал/помеха

$$V_0 \approx \frac{1}{2k} \frac{S_R}{S_k}. \quad (0.83)$$

Таким образом, отношение сигнал/помеха при корреляционном сравнении изображений прямо пропорционально числу зон корреляции поля в площади опознаваемого изображения (эталона). Отсюда следует практический вывод, о котором мы «на пальцах» говорили в курсе ОТИИ – для повышения величины отношения сигнал/помеха есть два пути – увеличение размера эталона и уменьшение радиуса корреляции поля. Последнее может быть достигнуто посредством введения дополнительной фильтрации в частотной плоскости, ослабляющей низкочастотные компоненты в спектре изображения.

Рассмотрим более подробно ряд практически важных случаев.

1. Строчный коррелятор.

Под строчным коррелятором мы будем понимать коррелятор, производящий вычисление ВКФ только по одной координате. В этом случае функция кадрового окна описывается функцией

$$c(x) = \text{Rect}\left(\frac{x}{2L}\right), \quad (0.84)$$

где L – длина опознаваемой строки. Функция автокорреляции кадрового окна имеет вид, представленный на Рис.3.1. пунктиром и описывается выражением

$$R_c(\Delta_x) = 2L\Lambda\left(\frac{\Delta_x}{2L}\right), \quad (0.85)$$

где Λ - треугольная функция.

Максимальное значение сигнальной функции (ГМ АКФ)

$$\langle K(0) \rangle = 2L\sigma^2 = W. \quad (0.86)$$

Средний квадрат помехи

$$\mu^2 = \int_{-\infty}^{\infty} R^2(\Delta_x) R_c(\Delta_x) d\Delta_x = 4L \int_0^{\infty} R^2(\Delta_x) \left(1 - \frac{\Delta_x}{2L}\right) d\Delta_x. \quad (0.87)$$

При экспоненциальной корреляционной функции поля, т.е.

$$R(\Delta_x) = \sigma^2 \exp\left(-\frac{\Delta_x}{r}\right). \quad (0.88)$$

Выражение для среднего квадрата помехи примет вид

$$\mu^2 = 2L\sigma^4 r \left(1 - \frac{r}{4L}\right) = \frac{W^2 r}{2L} \left(1 - \frac{r}{4L}\right), \quad (0.89)$$

А отношение сигнал/помеха

$$V_0 = 2 \frac{L}{r} \left(1 - \frac{r}{4L}\right)^{-1}. \quad (0.90)$$

Таким образом, при достаточно большой величине отношения $\frac{L}{r}$, отношение сигнал/помеха будет пропорционально числу радиусов корреляции поля в длине эталона.

2. Площадной коррелятор, прямоугольная апертура размером $2L_x \times 2L_y$.

Прямоугольное кадровое окно используется чаще всего. Оно может быть описано функцией

$$c(x, y) = \text{Rect}\left(\frac{x}{2L_x}\right) \text{Rect}\left(\frac{y}{2L_y}\right). \quad (0.91)$$

Максимальное значение сигнальной функции

$$\langle K(0,0) \rangle = 4L_x L_y \sigma^2 = W, \quad (0.92)$$

А средний квадрат помехи

$$\mu^2 = 16L_x L_y \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R^2(\Delta_x, \Delta_y) \left(1 - \frac{\Delta_x}{2L_x}\right) \left(1 - \frac{\Delta_y}{2L_y}\right) d\Delta_x d\Delta_y. \quad (0.93)$$

При экспоненциальной функции автокорреляции

$$R(\Delta_x, \Delta_y) = \sigma^2 \exp\left(-\frac{\sqrt{\Delta_x^2 + \Delta_y^2}}{r}\right)$$

Выражение для среднего квадрата помехи примет вид (мы воспользуемся табличными значениями, приведенными в [2])

$$\begin{aligned} \mu^2 &= 16L_x L_y \sigma^4 \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{\Delta_x}{2L_x}\right) \left[\int_{\Delta_x}^{\infty} \frac{y}{\sqrt{y^2 - \Delta_x^2}} \exp\left(-\frac{2y}{r}\right) dy - \int_{\frac{2\Delta_x}{r}}^{\infty} y \exp(-y) dy \right] d\Delta_x = \\ &= 16L_x L_y \sigma^4 \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{\Delta_x}{2L_x}\right) \left[\Delta_x K_1\left(\frac{2\Delta_x}{r}\right) - \frac{r^2}{8L_x} \exp\left(-\frac{2\Delta_x}{r}\right) - \frac{r\Delta_x}{4L_x} \exp\left(-\frac{2\Delta_x}{r}\right) \right] d\Delta_x = \\ &= 16L_x L_y \sigma^4 \left[\frac{r}{4} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{r^3}{8L_y} \Gamma(2) \Gamma(1) - \frac{r^2}{8L_x} + \frac{3r^4}{64L_x L_y} \right] = \\ &= 2\pi L_x L_y \sigma^4 r^2 \left[1 - \frac{r}{\pi L_x} - \frac{r}{\pi L_y} + \frac{3r^2}{8L_x L_y} \right] = W^2 \frac{S_K}{S_R} \left[1 - \frac{r}{\pi L_x} - \frac{r}{\pi L_y} + \frac{3r^2}{8L_x L_y} \right] \end{aligned} \quad (0.94)$$

где $K_1(x)$ - цилиндрическая функция мнимого аргумента, а $\Gamma(x)$ - гамма-функция. В результате, величина отношения сигнал/помеха будет описываться выражением

$$V_0 = 2 \frac{S_R}{S_K} \left[1 - \frac{r}{\pi L_x} - \frac{r}{\pi L_y} + \frac{3r^2}{8L_x L_y} \right]^{-1}. \quad (0.95)$$

Здесь мы снова видим, что величина отношения сигнал/помеха пропорциональна числу зон корреляции, укладывающихся в эталонном изображении, т.е. величине отношения $\frac{S_R}{S_c}$ или, что эквивалентно (с учетом формы кадрового окна), отношению размера изображения к радиусу корреляции $\frac{L}{r}$. Аналогичные результаты были получены и для других форм кадрового окна (круглого) и других функций автокорреляции поля – величины отношения сигнал/помеха во всех случаях пропорциональны числу зон корреляции в эталонном изображении, различия лишь в коэффициентах. Для иллюстрации, на Рис.3.4. приведены в логарифмических координатах зависимости величин отношения сигнал/помеха от отношения размера изображения к радиусу корреляции для строчного (1) и площадного (2) корреляторов. Пунктиром показаны прямо-пропорциональные зависимости, к которым стремятся величины отношения при увеличении числа радиусов корреляции в размере изображения.

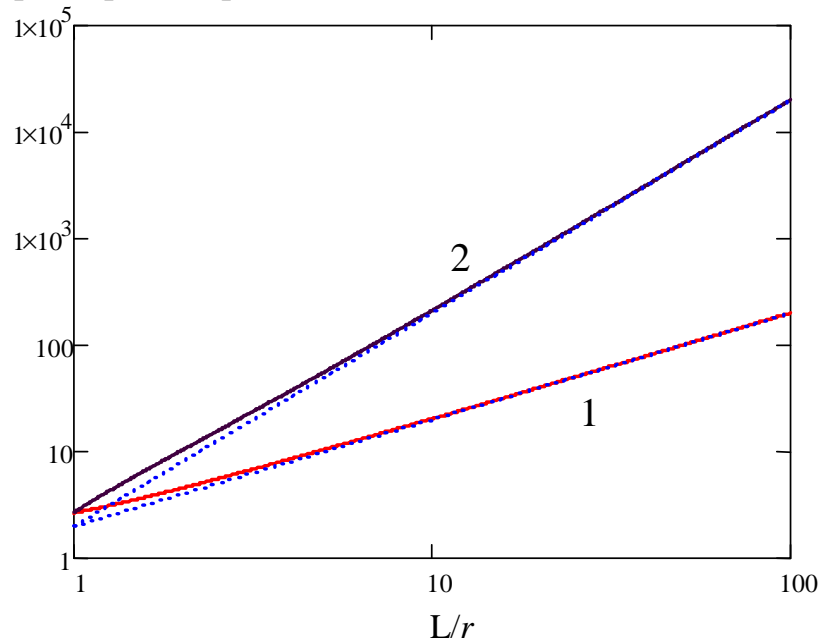


Рис.3.4. Зависимости величин отношения сигнал/помеха от отношения размера изображения к радиусу корреляции для строчного (1) и площадного (2) корреляторов.

Отсюда следует важный практический вывод – для увеличения отношения сигнал/помеха при корреляционном сравнении изображений можно использовать два способа:

1. Увеличить размер обрабатываемых изображений;
2. Уменьшить радиус корреляции эталонного изображения.

Поскольку АКФ связана со спектром Винера обрабатываемого изображения преобразованием Фурье, то изменение радиуса корреляции возможно методом пространственной фильтрации в спектральной плоскости – ослаблением, вплоть до полного подавления низких пространственных частот в спектре. При этом, как следует из формулы (3.20), по мере

ослабления низких частот величина отношения сигнал/помеха в корреляционной плоскости должна возрастать. На этом основано применение так называемых инверсных голографических фильтров, т.е. голограмм, передаточная функция которых, в отличие от голографического согласованного фильтра, описывается не $H(\nu) = S^*(\nu)$, где $S(\nu)$ - спектр эталона, а выражением $H(\nu) = \frac{1}{S(\nu)}$.

Казалось бы, логика, основанная на зависимости (3.20), может быть продолжена до бесконечности – чем меньше радиус корреляции, там выше отношение сигнал/помеха. Однако, рост отношения сигнал/помеха происходит только до определенного предела, а затем происходит его резкое снижение. Для объяснения этого феномена вспомним, что информация отличается от шума наличием внутренней связности, т.е. внутренней коррелированностью. В отличие от информации, белый (или серый) шум дельта-коррелирован, т.е. составляющие этого процесса никак не связаны друг с другом. Соответственно, по мере уменьшения радиуса корреляции, ГМ АКФ все более и более приближается к δ -функции, что означает разрушение внутренней связности процесса (изображения) и превращение информации в шум.

В связи с тем, что радиус корреляции может быть изменен посредством пространственной фильтрации в спектральной плоскости, вспомним, что в схеме голографии Фурье голограмма – это зарегистрированная картина интерференции плоского опорного пучка с Фурье-образом (спектром) эталонного изображения.

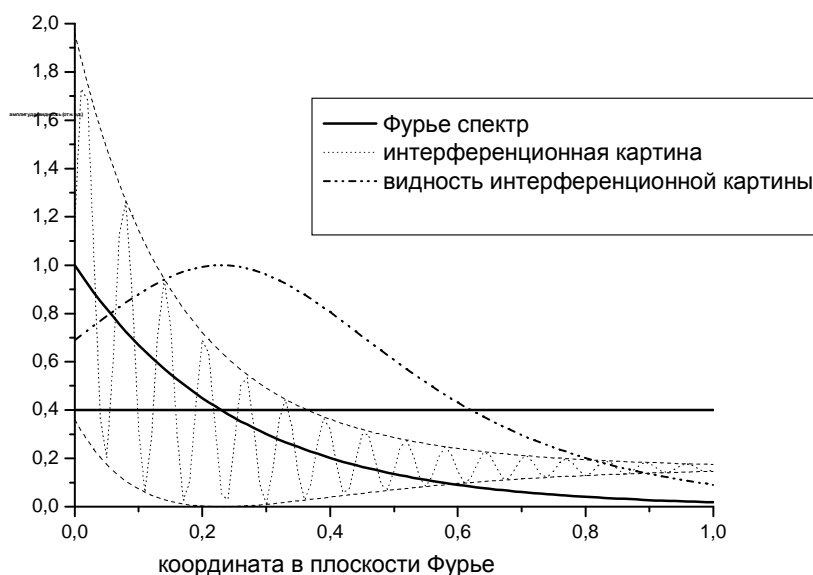


Рис.4.1.Интерференция сигнального и опорного пучков в плоскости Фурье.

Литература к теме 3.

1. Е.И.Шубников, Отношение сигнал/помеха при корреляционном сравнении изображений. Оптика и спектроскопия, 1987, т.62., вып.2., стр.450 – 456.

Тема 4. Вейвлет-анализ.

Методы обработки информации, рассмотренные в предыдущих разделах, основаны на преобразовании Фурье. Преобразование Фурье дает мощный математический аппарат, позволяющий эффективно решить ряд практически важных задач. И, самое главное, преобразование Фурье относится к категории физически обоснованных математических моделей, так как оно физически реализуется различными устройствами. В частности, в оптике, как мы видели, преобразование Фурье реализуется положительной линзой.

Однако, суть преобразования Фурье заключается в представлении любой квадратично интегрируемой функции с конечной энергией (нормой) в виде бесконечной суммы гармонических составляющих. Под гармоникой, напомним, понимается бесконечная синусоида. Спектральный анализ дает информацию о частоте, но не дает информацию о локализации частоты в пространстве (или во времени). Поэтому Фурье-анализ хорош для анализа стационарных процессов.

При Фурье-анализе существенно нестационарного в локальной области процесса, т.е. процесса с какой-либо локальной особенностью, затруднено получение информации о локализации изучаемой особенности. Действительно, гармоники - бесконечные функции. В точке локализации особенности их сумма должна дать эту особенность, а в стороне от неё гармоники при сложении должны взаимно уничтожить друг друга. Рассмотрим «рафинированный» случай особенности – дельта функцию. Ей спектр постоянен, следовательно, для того, чтобы представить дельта-функцию в спектральной области, необходимы все компоненты спектра – от нулевой частоты до бесконечности. Потеря каких-либо спектральных компонент сразу ведет к изменению восстановленной функции. В частности, потеря высокочастотных компонент спектра ведет к преобразованию дельта-функции, не имеющей по определению ширины, в функцию с некоторой шириной. В оптике этот процесс хорошо известен под названием дифракционного ограничения разрешения.

Процессов с локальными особенностями в реальности встречается достаточно много – это и геофизическая информация, и процессы обтекания препятствий воздушными и жидкостными потоками, процессы горения, распространения и взаимодействия ультракоротких импульсов, сжатия изображений и многие другие. Причем именно процессы с локальными особенностями представляют в последнее время наибольший интерес с точки зрения развития высоких технологий.

В качестве примера, на Рис.4.1. приведены два процесса – гармоническое колебание и то же колебание, но со сбоем по фазе в точке 400. Это и есть особенность процесса. На Рис.4.2. приведены действительные части Фурье-спектров этих процессов – из их сравнения видно, что второй процесс не является «чистым» гармоническим колебанием, но локализовать особенность по действительной части спектра Фурье невозможно.

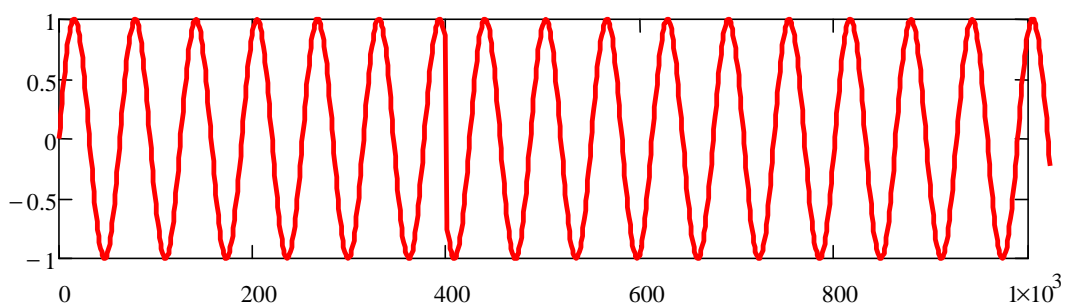


Рис.4.1. Пример процесса с особенностью – «сбоем фазы» в точке 400.

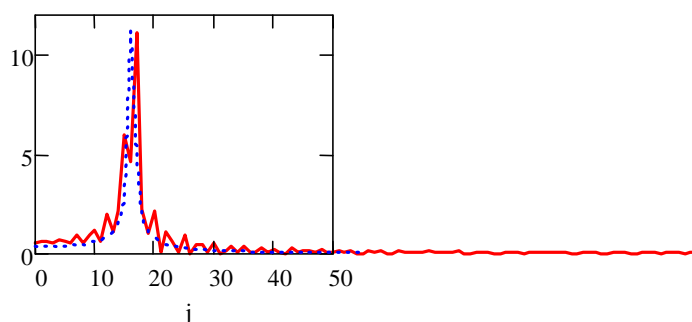


Рис.4.2. Действительные части процессов с локальной особенностью (сплошная линия) и гармонического колебания (пунктир).

Проблема анализа процессов с локальными особенностями частично снимается применением так называемого «оконного преобразования Фурье», но только частично. Наиболее мощный инструмент дает вейвлет-анализ, обеспечивающий получение одновременно как частотной, так и пространственной информации об исследуемом объекте.

На Рис.4.3. приведен пример разложения по WAVE-вейвлету только для одного масштаба – особенность процесса сразу локализована.

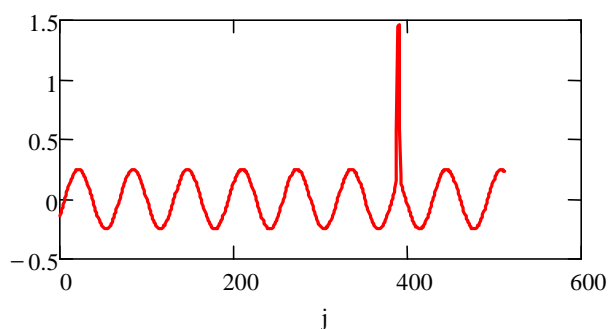


Рис.4.3. Разложение процесса с особенностью по WAVE-вейвлету.

Термин «вейвлет» был введен в научный оборот в середине 80-х годов Гроссманом и Морле в связи с анализом акустических и сейсмических

сигналов. В русскоязычной литературе после нескольких попыток использовать тот или иной русский аналог или адекватный перевод (маленькая волна, волновой пакет, всплеск) стало общепринятым использование термина «вейвлет». Основная идея вейвлет-анализа заключается в том, чтобы для поиска локальной особенности использовать разложение по функциям, похожим на искомую особенность, т.е. также хорошо локализованным. Такой подход предполагает представление функции одной координаты в виде функции двух координат – пространственной и масштабной.

Рассмотрение вейвлет-анализа проведем, опираясь на уже изученное нами преобразование Фурье.

Пусть $L^2(0, 2\pi)$ - пространство квадратично интегрируемых функций с конечной энергией (т.е. L_2 нормой)

$$L_2 = \|E\|_2 = \int_0^{2\pi} |E(x)|^2 dx < \infty, x \in (0, 2\pi). \quad (0.96)$$

Таким образом, мы определили $E(x)$ как кусочно-непрерывную функцию на $(0, 2\pi)$. Функция $E(x)$ может быть периодически расширена и определена на всей оси $R(-\infty, \infty)$ таким образом, что

$$E(x) = E(x - 2\pi), x \in R. \quad (0.97)$$

Здесь координата x может быть как временной, так и пространственной, равно как, $E(x)$ может быть функцией не одной, а двух переменных. Таким образом, мы определили функцию (4.2) как 2π периодическую функцию. Как мы уже знаем из курса математики, любая квадратично интегрируемая 2π периодическая функция может быть представлена в виде ряда Фурье

$$E(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp(jnx) \quad (0.98)$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} E(x) \exp(-jnx) dx$$

Как следует из (4.3), ортонормированный базис пространства $L^2(0, 2\pi)$ образуется масштабированием единственной функции $\exp(jx)$, т.е. базис образуют функции

$$\exp(jnx), n = \dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots \quad (0.99)$$

Теперь введем пространство $L^2(R)$ функций $E(x)$, определенных на всей действительной оси $R(-\infty, \infty)$, и обладающих конечной энергией (нормой)

$$\int_{-\infty}^{\infty} |E(x)|^2 dx < \infty. \quad (0.100)$$

Рассмотрим функциональные пространства $L^2(0, 2\pi)$ и $L^2(R)$. Из (4.5) следует, что локальное среднее значение каждой функции, принадлежащей $L^2(R)$, должно стремиться к нулю на бесконечности. Этому требованию синусоида не удовлетворяет. Следовательно, семейство функций вида (4.4), т.е. синусоид, не может быть базисом пространства $L^2(R)$.

Введем некоторую функцию $\phi(x)$, удовлетворяющую (4.5). Более того, введем требование, чтобы функция $\phi(x)$ была хорошо локализованной, т.е. быстро стремилась к нулю. Для того, чтобы эта локализованная функция могла использоваться в качестве функции, порождающей базис разложения, необходим механизм, позволяющий покрыть этими функциями всю ось $R(-\infty, \infty)$. Простейший вариант покрытия – сдвиг базисной функции вдоль оси. Точнее, система сдвигов (или переносов) функции $\phi(x)$ вдоль оси $R(-\infty, \infty)$. Для простоты можно принять, что сдвиги будут целыми, тогда получим набор функций $\phi(x - \Delta)$, где $\Delta = \dots -1, 0, 1, \dots$. Таким образом, смещая функцию $\phi(x - \Delta)$ вдоль оси, т.е. придавая Δ различные значения, мы можем решить задачу определения пространственной локализации некоторой особенности исследуемого процесса, похожей на функцию $\phi(x)$. Обратим внимание на то, что искомая особенность процесса и функция $\phi(x)$ предполагаются похожими. Действительно, если мы знаем что именно мы ищем, т.е. предполагаем форму особенности процесса, то проводим поиск, сравнивая исследуемую реализацию процесса с той формой (сигналом), которую мы ищем. Соответственно, и в качестве функции, образующей базис разложения, целесообразно выбрать функцию, похожую на искомую особенность.

Далее, нам необходим механизм не только пространственного, но также и частотного анализа – искомые особенности процесса могут различаться масштабом. Для этого введем в дополнение к сдвигу также и масштабирование аргумента функции, которое, опять-таки для простоты, представим в виде целых степеней двойки, т.е. $\phi(2^i x - \Delta)$, где i и Δ - целые числа. В результате, имея единственную функцию $\phi(x)$ и применяя к ней дискретные масштабные преобразования $\frac{1}{2^i}$ и сдвиги $\frac{\Delta}{2^i}$, мы можем покрыть семейством полученных функций $\{\phi_{i\Delta}\}$ $\phi_{i\Delta}(x) = 2^{i/2} \phi(2^i x - \Delta)$ как всю частотную, так и всю пространственную оси.

Обратим внимание, что если $E(x)$ функция одной переменной, то её представление в виде семейства функций $\{\phi_{i\Delta}\}$ будет определено уже на плоскости, образуемой осями i (масштаб) и Δ (сдвиг или пространственная

локализация). Т.е., как мы и указали во введении к теме, речь идет о преобразовании функции одной переменной в функцию двух переменных.

Из определения L_2 нормы, т.е.

$$\begin{aligned} L_2 &= \|\phi\|_2 = \langle \phi, \phi \rangle^{1/2}, \\ \langle \phi, \phi \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) \phi^*(x) dx \end{aligned} \quad (0.101)$$

Следует, что

$$\|\phi(2^i x - \Delta)\|_2 = 2^{-i/2} \|\phi(x)\|_2. \quad (0.102)$$

Иными словами, если функция $\phi(x) \in L^2(R)$ имеет единичную норму, то и все функции семейства $\{\phi_{i\Delta}\}$ также нормированы на единицу.

Если семейство $\{\phi_{i\Delta}\}$, определенное соотношением $\phi_{i\Delta}(x) = 2^{-i/2} \phi(2^i x - \Delta)$, где i и Δ - целые числа, удовлетворяет условию

$$\langle \phi_{i\Delta}, \phi_{k\epsilon} \rangle = \delta_{i\Delta}, \delta_{k\epsilon}, \quad (0.103)$$

и каждая функция $\phi(x) \in L^2(R)$ может быть представлена в виде равномерно сходящегося в $L^2(R)$ ряда, т.е. представляет собой ортонормированный базис пространства $L^2(R)$, то функция $\phi(x) \in L^2(R)$ ортогональна.

Функций, удовлетворяющих вышеприведенным условиям, и подпадающих под определение вейвлета как «маленькой волны», может быть много. Задача исследователя – выбрать функцию, наилучшим образом соответствующую исследуемому процессу, явлению. Таким образом, вейвлет-анализ дает, по сравнению с анализом Фурье, существенно большую гибкость в выборе инструмента исследования или представления.

. Понятие вейвлета позволяет выбрать, либо придумать конкретный вид функции $\phi(x) \in L^2(R)$, наиболее подходящий для решения данной задачи.

Построим базис пространства $L^2(R)$ посредством непрерывных переносов и масштабирования вейвлета $\phi(x) \in L^2(R)$ с произвольными значениями коэффициента масштабирования i и параметра сдвига Δ :

$$\phi_{i\Delta}(x) = |i|^{-1/2} \phi\left(\frac{x - \Delta}{i}\right), \quad i, \Delta \in R, \quad \phi \in L^2(R). \quad (0.104)$$

Используя базис (4.9), введем, по аналогии с преобразованием Фурье, интегральное вейвлет преобразование:

$$\begin{aligned}
W_{\phi}(E(x)) &= W_{\phi}(i, \Delta) = |i|^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} E(x) \phi^*\left(\frac{x-\Delta}{i}\right) dx = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} E(x) \phi_{i, \Delta}^*(x) dx
\end{aligned} \tag{0.105}$$

Таким образом, мы представили функцию $E(x)$ в виде суммы вейвлетов $\phi_{i, \Delta}(x)$ разного масштаба i и сдвига Δ .

Определение вейвлета.

Введем определение R-функции. Функция $\phi(x) \in L^2(R)$ называется R-функцией, если базис $\{\phi_{i, \Delta}\}$, определенный выражением (4.9), является базисом Рисса в том смысле, что существуют две константы A и B ,

$$0 < A \leq B < \infty,$$

для которых соотношение

$$A \|\{c_{i, \Delta}\}\|_2^2 \leq \left\| \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{\Delta=-\infty}^{\infty} c_{i, \Delta} \phi_{i, \Delta} \right\|_2^2 \leq B \|\{c_{i, \Delta}\}\|_2^2 \tag{0.106}$$

выполняется при любой ограниченной и дважды квадратично суммируемой последовательности $\{c_{i, \Delta}\}$:

$$\|\{c_{i, \Delta}\}\|_2^2 = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{\Delta=-\infty}^{\infty} |c_{i, \Delta}|^2 < \infty, \tag{0.107}$$

где $\{c_{i, \Delta}\}$ - коэффициенты разложения функции $E(x)$ в ряд по вейвлетам (4.10)

$$c_{i, \Delta} = W_{\phi}\left(\frac{1}{2^i}, \frac{\Delta}{2^i}\right) \tag{0.108}$$

Тогда вейвлет можно определить как любую локализованную R-функцию $\phi(x) \in L^2(R)$ если для неё существует функция $\phi^*(x) \in L^2(R)$, которую будем называть парой или двойником, такая, что выполняется

$$\begin{aligned}
\phi_{i, \Delta}(x) &= 2^{i/2} \phi(2^i x - \Delta) \\
\phi^{i, \Delta}(x) &= \phi_{i, \Delta}^*(x) = 2^{i/2} \phi^*(2^i x - \Delta), \quad i, \Delta \in I
\end{aligned} \tag{0.109}$$

Перечислим некоторые признаки вейвлета:

1. Локализация. В отличие от преобразования Фурье, вейвлет хорошо локализован не только в частотном пространстве, но и во временном (или пространственном).
2. Нулевое среднее:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) dx = 0. \quad (0.110)$$

3. Ограниченность:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\phi(x)|^2 dx < \infty. \quad (0.111)$$

Свойства локализации и ограниченности могут быть совместно выражены следующим образом:

$$|\phi(x)| < (1 + |x|^n)^{-1}. \quad (0.112)$$

4. Автоподобность базиса или свойство самоподобия – поскольку все вейвлеты базиса получаются из порождающего их вейвлета посредством масштабирования и сдвига, то и являются его масштабированными и сдвинутыми копиями.

Простейший пример вейвлета – вейвлет Хаара, определяемый следующим образом:

$$\phi^H(x) = \begin{cases} 1, & \text{if } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ -1, & \text{if } \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 0, & \text{if } x < 0, x \geq 1 \end{cases} \quad (0.113)$$

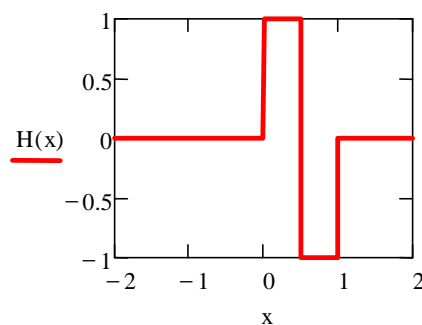
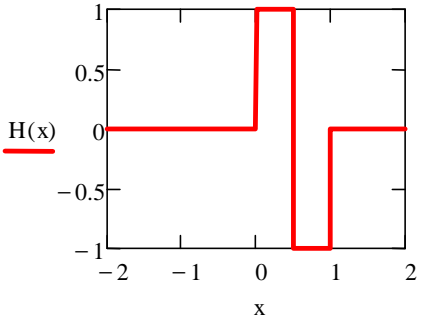
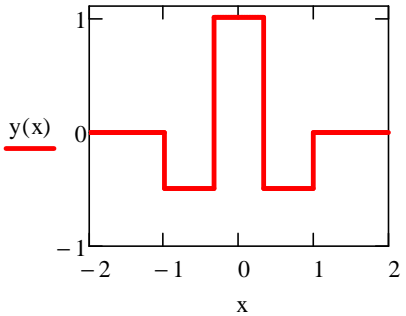
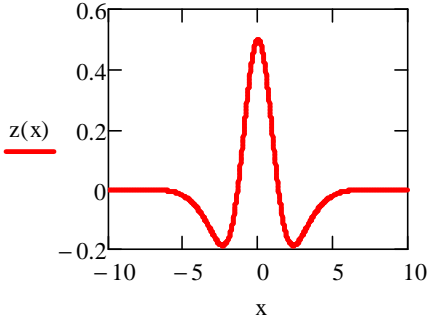
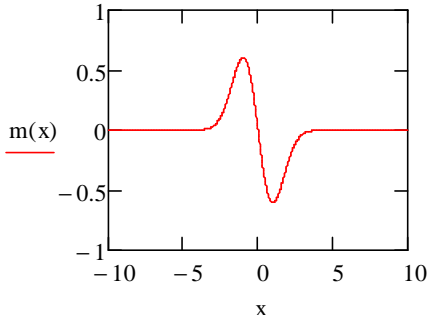


Рис.4.4. Вейвлет Хаара

Некоторые, наиболее часто встречающиеся примеры вейвлетов, приведены в Табл.4.1. Понятие вейвлета позволяет выбрать, либо придумать

самому конкретный вид функции $\phi(x) \in L^2(R)$, наиболее подходящий для решения данной задачи.

Таблица.1. Примеры вейвлетов.

Название вейвлета	Формула	Графическое изображение
Вейвлет Хаара (Haar)	$\phi^H(x) = \begin{cases} 1, & \text{if } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ -1, & \text{if } \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 0, & \text{if } x < 0, x \geq 1 \end{cases}$	
Французская шляпа (French hat)	$y(x) := \begin{cases} 1 & \text{if } x \leq \frac{1}{3} \\ \frac{-1}{2} & \text{if } \frac{1}{3} < x \leq 1 \\ 0 & \text{if } x > 1 \end{cases}$	
DOG-вейвлет (Difference of Gaussians)	$z(x) := \exp\left[-\frac{(x)^2}{2}\right] - 0.5 \exp\left[-\frac{(x)^2}{8}\right]$	
WAVE-вейвлет	$m(x) := \frac{d}{dx} \exp\left(\frac{-x^2}{2}\right)$	

Нетрудно видеть, что вейвлет анализ представляет собой вычислительно затратную процедуру. Поэтому представляет интерес возможность реализации вейвлет-анализа оптическими методами. Подход к оптической реализации вейвлет-анализа основан на том, что выражение (4.10) представляет собой свертку анализируемой функции с некоторым ядром, определяемым выбранным вейвлетом. Следовательно, для выполнения вейвлет-анализа может быть применена схема оптического конволвера или коррелятора, т.е. схема 4-f голографии Фурье. Поскольку в (4.10) используется комплексное сопряжение, то естественно использовать схему, основанную на схеме голографического коррелятора.

Схема оптического устройства, реализующего вейвлет-преобразование, приведена на Рис.4.5. Здесь 1 – лазер, 2 – оптическая система, формирующая параллельный пучок света (коллиматор), 3 – входная плоскость, в которую помещается транспарант с анализируемым сигналом, представленным как зависимость пропускания от координаты x . Цилиндрическая линза L_1 выполняет одномерное преобразование Фурье этого сигнала. На маске 4 записаны Фурье-образы базиса вейвлет-преобразования. Поскольку Фурье-образ любой функции (кроме функции Гаусса) – комплексная функция, то маска 4 изготавливается по голографической технологии, подобно тому, как записывается голографический согласованный фильтр в схеме коррелятора Ван дер Люгта. Таким образом, в плоскости 4 выполняется умножение Фурье-образа анализируемого сигнала на Фурье-образ базисного вейвлета. Поскольку необходимо обеспечить перебор различных масштабов, то в плоскости 4 по вертикальной оси пространственно разнесены несколько Фурье-образов базисного вейвлета, каждый из которых отличается своим масштабом.

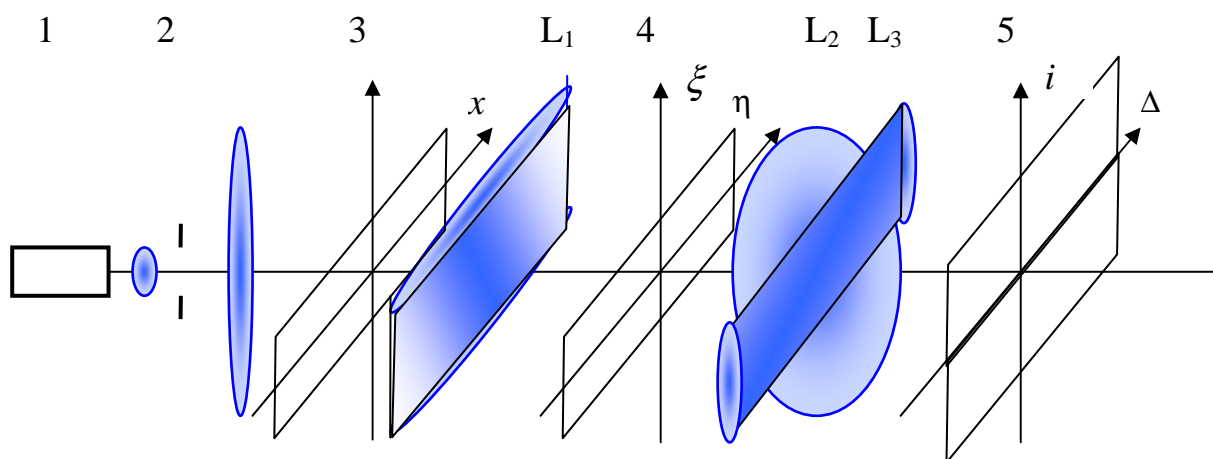


Рис.4.5. Схема оптического вейвлет-анализатора

Система из сферической линзы L_2 и цилиндрической L_3 выполняет преобразование Фурье по одной координате и проекцию изображения по

другой – в плоскости 5 формируется картина (двумерная!) разложения анализируемого сигнала по заданному базису.

Литература к теме 4.

1. Н.М.Астафьева. Вейвлет-анализ: основы теории и применения. Успехи физических наук, т.166, №11, с.1145-1170 (1996)
2. И.М.Дремин, О.В.Иванов, В.А.Нечитайло, Вейвлеты и их использование. Успехи физических наук, т.171, №5, с.467-500 (2001)
3. А.П.Петухов, Введение в теорию базисов всплесков, СПб ГТУ, 1999.
4. А.Н.Яковлев. Введение в вейвлет-преобразования. Новосибирский ГТУ, 2003.
5. В.Ю.Петрунькин, Е.Т.Аксенов, Г.А.Стариков, Оптический вейвлет-процессор для обработки сложных сигналов. Письма в ЖТФ, 2001, т.27, вып.22, с.24-29.