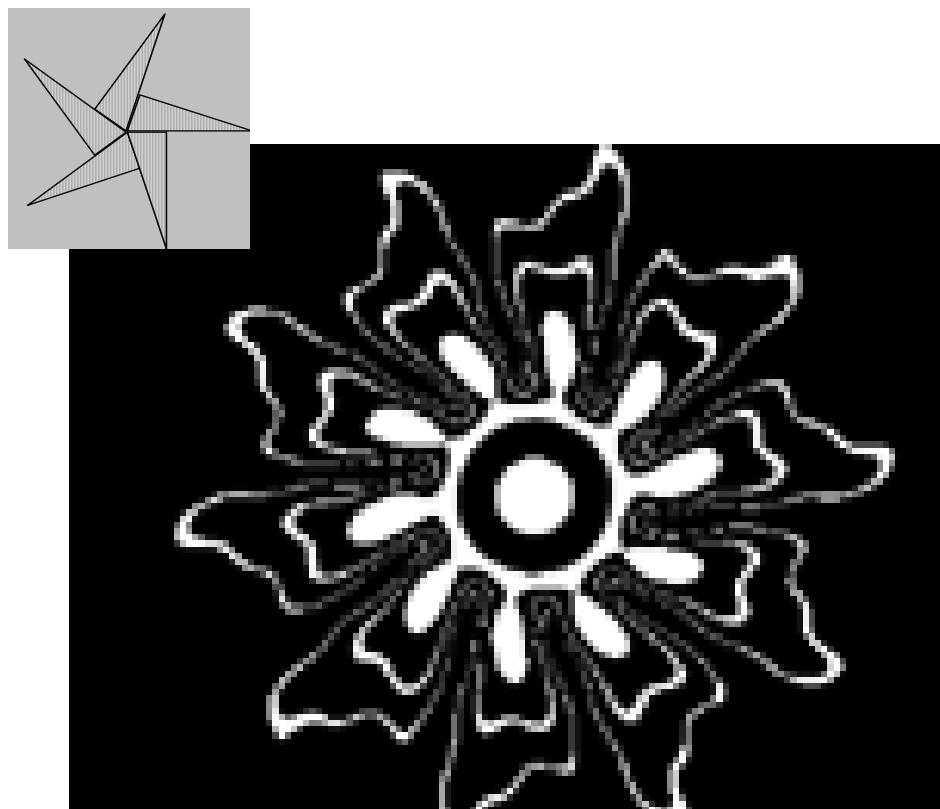


В.Г. МАГУРИН  
В.А. ТАРЛЫКОВ

# КОГЕРЕНТНАЯ ОПТИКА



Санкт-Петербург  
2006

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное агентство по образованию  
Санкт-Петербургский государственный университет информационных  
технологий, механики и оптики

В.Г. Магурин, В.А. Тарлыков

## КОГЕРЕНТНАЯ ОПТИКА

Учебно-методическое пособие  
по курсу «Когерентная и нелинейная оптика»



Санкт-Петербург  
2006

УДК 535.41

Магурин В.Г., Тарлыков В.А. Когерентная оптика. Учебное пособие по курсу «Когерентная и нелинейная оптика». - СПб: СПбГУ ИТМО, 2006. -122 с.

Издание содержит основные сведения, дающие представление об оптическом сигнале и его преобразовании в оптической системе; рассмотрены свойства преобразования Фурье, подробно проиллюстрированные на модельных объектах; кратко рассмотрены обобщенные функции, функции корреляции и свертки, пространственная фильтрация; рассмотрено соотношение между квантовой и волновой природой света, дано понятие информационной емкости оптического сигнала и разрешающей силы оптической системы в классическом представлении; специфика лазерного излучения: пространственная и времененная когерентность, механизм формирования и свойства спеклов.

Издание предназначено для студентов, обучающихся по специальности 200201 «Лазерная техника и лазерные технологии.

Рекомендовано УМО по образованию в области приборостроения и оптотехники в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальности 200201 - Лазерная техника и лазерные технологии.

Протокол № 37 от 20 апреля 2006 заседания Президиума Совета УМО.

© Санкт-Петербургский государственный университет  
информационных технологий, механики и оптики, 2006

© В.Г. Магурин,  
В.А. Тарлыков, 2006

## **Предисловие**

Данное пособие предназначено для студентов ВУЗов, обучающихся по специальности 200202 «Лазерная техника и лазерные технологии» и может быть также использовано при подготовке специалистов, требующих знания в области лазерной физики, техники и технологии.

В настоящее время оптика стала одним из главных источников научно-технического прогресса в приборостроении. Это связано, прежде всего, с широким использованием вынужденного излучения, источником которого служит лазер. Использование лазера способствовало превращению оптических приборов в средство активного воздействия на окружающий мир и передачи энергии на расстояние. И в первую очередь это связано с когерентными свойствами их излучения: высокой направленность и монохроматичностью.

Лазерный луч как технологический инструмент не имеет себе равных по степени гибкости, быстродействии и износостойчивости. Возможности высокой концентрации лазерного излучения в пространстве и во времени открыли новые перспективы для размерной и локальной поверхностной обработки материалов, для бесконтактной диагностики процессов и управления ими, для прецизионных измерений, для регистрации, обработки и передачи информации, для биомедицины и биотехнологий.

## **1. Оптический сигнал и оптическая система**

Современные оптические приборы во многих случаях предопределяют прогресс в развитии больших и важных направлений науки, техники и производства. На современном этапе развития оптические приборы представляют весьма широкие возможности для познания окружающего мира, приема, передачи и обработки информации.

Восприятие, передача и преобразование информации по-прежнему занимают ведущее место в оптическом приборостроении.

Любая информация содержит след событий, состоящих в изменении состояния объектов или процессов. Событие порождает сообщение, которое представляет его описание. Именно в сообщении и содержится информация. Для передачи сообщения используется сигнал – физический процесс, несущий в себе информацию о состоянии системы и пригодный для передачи на расстояние.

Сигнал может быть детерминированным и случайным. Он может представлять собой простое гармоническое колебание, быть периодическим или непериодическим процессом.

### **1.1 Оптические системы, операторы, функционалы. Типы оптических систем**

К описанию многих оптических явлений, связанных с переносом информации оптическими волнами, применимы методы теории систем и преобразований, в общем, виде применимые для любых систем, преобразующих сигналы и к любым видам сигналов. Однако, как и в каждой науке в оптике имеется своя специфика их применения. Мерой информационной емкости в оптике является число битов, которое можно извлечь из формируемого системой изображения. Сигналы в оптике описываются функциями пространственных координат. Обработка сигналов при этом осуществляется системами с двумерным входом и выходом.

Термин «система» очень часто используется в научной литературе. Он имеет много значений и в зависимости от контекста наполняется различным содержанием. В классической оптике под оптической системой чаще всего понимают «совокупность оптических деталей (линз, призм, зеркал, плоскопараллельных пластин и т.д.), предназначенную для определенного формирования пучков световых лучей». В общем, можно сформулировать так: система – это «черный ящик», преобразующий множество входных сигналов в соответствующее ему множество выходных сигналов. Если преобразование однозначно, систему называют детерминированной.

Чаще всего мы под системой будем понимать устройство, преобразующее по какому-либо закону входные сигналы  $f$  в выходные  $g$ .

Системы, используемые для преобразования сигналов, имеют самые разнообразные физические характеристики и могут классифицироваться по различным признакам.

Важнейшим классификационным признаком является линейность или нелинейность системы.

Линейными называются системы, для которых выполняется принцип суперпозиции: реакция на сумму сигналов равна сумме реакций на эти сигналы, поданные на вход по отдельности. Системы, для которых принцип суперпозиции не выполняется, называются нелинейными.

Следующим критерием классификации систем является постоянство или непостоянство их характеристик во времени. Если произвольная задержка подаваемого на вход сигнала приводит лишь к такой же задержке выходного сигнала, не меняя его формы, система называется стационарной, или системой с постоянными параметрами. В противном случае система называется нестационарной, параметрической или системой с переменными параметрами.

Два указанных способа классификации делят системы на четыре класса. В данном курсе мы будем рассматривать только линейные стационарные системы.

## 1.2 Оптический сигнал и его преобразование

В оптике под сигналами обычно понимают распределения амплитуды и фазы светового поля в плоскостях, перпендикулярных к направлению распространения волны, либо распределения интенсивности поля в этих плоскостях, описываемые двумерными функциями координат.

Независимо от физической природы сигналы в их математическом представлении образуют множества, для элементов которых определены операции сложения и умножения на число, удовлетворяющие требованиям аддитивности, коммутативности и ассоциативности. Такие множества являются линейными (векторными) пространствами над полем комплексных чисел, и на них могут быть заданы линейные операторы. Оператором называют правило, по которому осуществляется отображение одного множества элементов  $S_1$  в другое  $S_2$ . Мы будем иметь дело с линейными операторами.

Все виды сигналов можно разделить на две группы: детерминированные и случайные.

Детерминированные, это такие сигналы параметры и мгновенные значения которых могут быть представлены с вероятностью, равной единице, в любой последующий момент времени, если стали известны параметры и мгновенные значения их в один из предшествующих моментов времени. Детерминированные сигналы можно подразделить на периодические и непериодические.

Периодическим называется такой сигнал, который может быть представлен в виде  $s(t) = s(t + nT)$ , где период  $T$  – конечный временной интервал, а  $n$  – любое целое число. Простейшим представителем периодических детерминированных сигналов является гармоническое колебание:

$$s(t) = A \cos\left(\frac{2\pi}{T}t - \varphi\right) = A \cos(\omega t - \varphi), \quad -\infty < t < \infty,$$

где  $A$  – амплитуда,  $T$  – период,  $\omega$  - частота,  $\varphi$  - фаза колебания. Строго гармоническое колебание называется монохроматическим. На практике колебание всегда имеет конечную ширину спектра.

Непериодическим детерминированным сигналом называется такой, который, который не может быть представлен в виде  $s(t) = s(t + nT)$ . Непериодический сигнал, как правило, ограничен во времени.

Случайными называются сигналы, параметры и мгновенные значения которых могут быть представлены в последующие моменты времени с вероятностью, меньшей единицы, если оказались известными их параметры и мгновенные значения в один из предшествующих моментов времени. Сигналы, несущие информацию, являются случайными. Детерминированные сигналы информации не переносят. Аналогичным образом обстоит дело и с пространственными сигналами, в которых аргументами являются пространственные координаты.

В когерентной оптике под сигналом понимают распределение амплитуды и фазы световой волны в различных плоскостях оптической системы, перпендикулярных к ее оси. Для описания этого распределения вводят понятие аналитического сигнала – непрерывной комплексной функции трех вещественных переменных: пространственных координат  $x, y$  и времени  $t$ . Вещественная часть этой функции совпадает с реальным физическим сигналом, а мнимая часть представляет преобразование Гильберта по переменной  $t$  от ее вещественной части.

Соотношение между физическим и аналитическим сигналами такое же, как между функциями  $\cos(\omega t + \varphi)$  и  $\exp(i\omega t + \varphi)$ : при переходе от вещественной функции к комплексной опускают члены с отрицательными частотами и удваивают коэффициенты при членах с положительными частотами. В случае монохроматического сигнала

$$f(x, y, t) = A(x, y) \cos[\omega t + \varphi(x, y)]$$

аналитический сигнал записывается в виде:

$$\varpi(x, y, t) = F(x, y) \exp(-i\omega t),$$

где

$$F(x, y) = A(x, y) \exp[i\varphi(x, y)].$$

Множитель  $\exp(-i\omega t)$  обычно опускают, рассматривая в качестве сигнала стоящую перед этим множителем комплексную функцию координат  $F(x, y)$ , называемую комплексной амплитудой, или фазором.

## 2. Преобразование Фурье

### 2.1. Определение преобразования Фурье

Анализ Фурье и теория линейных систем образуют фундамент, на котором построены теория формирования изображения, оптической обработки информации и голограмии.

По определению преобразованием Фурье функции  $f(x)$  (действительной или комплексной) называется интегральная операция

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp[-j2\pi(ux)] dx.$$

Преобразование такого вида представляет собой функцию независимой переменной  $u$ , называемой частотой. Обратное преобразование Фурье функции  $F(u)$  записывается следующим образом

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(u) \exp[j2\pi(ux)] du.$$

Необходимым условием существования преобразования Фурье является абсолютная интегрируемость функций  $f(x)$  и  $F(u)$ , т.е. чтобы значения интегралов

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx \quad \text{и} \quad \int_{-\infty}^{\infty} |F(u)| du$$

были конечными. Функции, используемые в оптике, определены лишь на ограниченном интервале и для них это требование соблюдается всегда (переменные  $x$  и  $u$  называются сопряженными). Различия между прямым фурье-образом и обратным фурье-образом заключаются в различных знаках, содержащихся в экспонентах выражений, а также в наличии множителя  $1/2\pi$  в формуле обратного преобразования.

В литературе встречаются и другие определения преобразования Фурье, отличающиеся от приведенного здесь как знаком в экспоненте, так и численными коэффициентами, стоящими перед интегралом.

Аналогичным образом определяется и двумерное Фурье-преобразование. Прямое

$$F(u, v) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp[-j2\pi(ux + vy)] dx dy \quad (1.1)$$

и обратное

$$f(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} F(u, v) \exp[j2\pi(ux + vy)] du dv.$$

Введем в выражении (1.1) обозначения  $u = x/\lambda z$ ;  $v = y/\lambda z$ .

Величины  $u$  и  $v$  обычно называются частотами. Тогда выражение (1.1) примет вид

$$u_p = \frac{j}{\lambda z} e^{-jkz} F(u, v),$$

где

$$F(u, v) = \int_{\sigma} f(\xi, \eta) \exp[-j2\pi(u\xi + v\eta)] d\xi d\eta.$$

Отсюда видно, что выражение (1.1) с точностью до множителя представляет собой фурье-образ распределения поля на поверхности  $\sigma$  как функцию пространственных частот  $u$  и  $v$ . Аналогичным образом можно преобразовать и выражение для сферической системы координат, введя обозначения

$$u = \frac{1}{\lambda} \sin \theta \cos \varphi, \quad v = \frac{1}{\lambda} \sin \theta \sin \varphi.$$

Большое распространение имеет и частный случай двумерного преобразования Фурье для функций, обладающих осевой симметрией, называемый преобразованием Фурье-Бесселя или преобразованием Ганкеля нулевого порядка. Если функция обладает осевой симметрией ее можно записать как функцию только радиуса  $r$ . Соответственно, фурье-образ становится функцией  $\rho$ , не зависящей явно от угла  $\varphi$ .

$$F(\rho) = 2\pi \int_0^\infty r f(r) J_0(2\pi r \rho) dr,$$

где  $J_0(2\pi r \rho)$  - функция Бесселя первого рода нулевого порядка.

Учитывая, что

$$\exp[-j2\pi(ux + vy)] = \cos[2\pi(ux + vy)] - j \sin[2\pi(ux + vy)],$$

прямое преобразование Фурье можно записать в виде суммы косинус - и синус - преобразований:

$$\begin{aligned} F(u, v) &= \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp[-j2\pi(ux + vy)] dx dy = \\ &= \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \cos[2\pi(ux + vy)] dx dy - j \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \sin[2\pi(ux + vy)] dx dy. \end{aligned}$$

В общем случае функция  $F(u, v)$  комплексная, и мы можем записать

$$F(u, v) = \operatorname{Re}[F(u, v)] - j \operatorname{Im}[F(u, v)].$$

Спектр амплитуд и фаз записывается соответственно в виде

$$\begin{aligned} |F(u, v)| &= \sqrt{\{\operatorname{Re}[F(u, v)]\}^2 + \{\operatorname{Im}[F(u, v)]\}^2}; \\ \varphi(u, v) &= \operatorname{arctg} \left\{ \frac{\operatorname{Im}[F(u, v)]}{\operatorname{Re}[F(u, v)]} \right\}. \end{aligned}$$

Действительная часть фурье-образа всегда четная функция, мнимая часть фурье-образа - всегда нечетная функция. Комплексность спектра означает сдвиг отдельных его составляющих по фазе.

## 2.2 Представление поля в дальней зоне через интеграл Фурье

В когерентной оптике преобразование Фурье имеет реальную физическую интерпретацию. Оно описывает дифракцию Фраунгофера при прохождении когерентного пучка через оптическую систему с достаточно малой угловой апертурой. Действительно, любая дифракционная оптическая система с помощью когерентных волн кроме изображения объекта, определяемого законами геометрической оптики ставит ему в соответствие двумерный фурье-образ на плоскости, определяемый законами дифракции.

Дифракция Фраунгофера, наблюдается в следующих случаях, изображенных на рис.

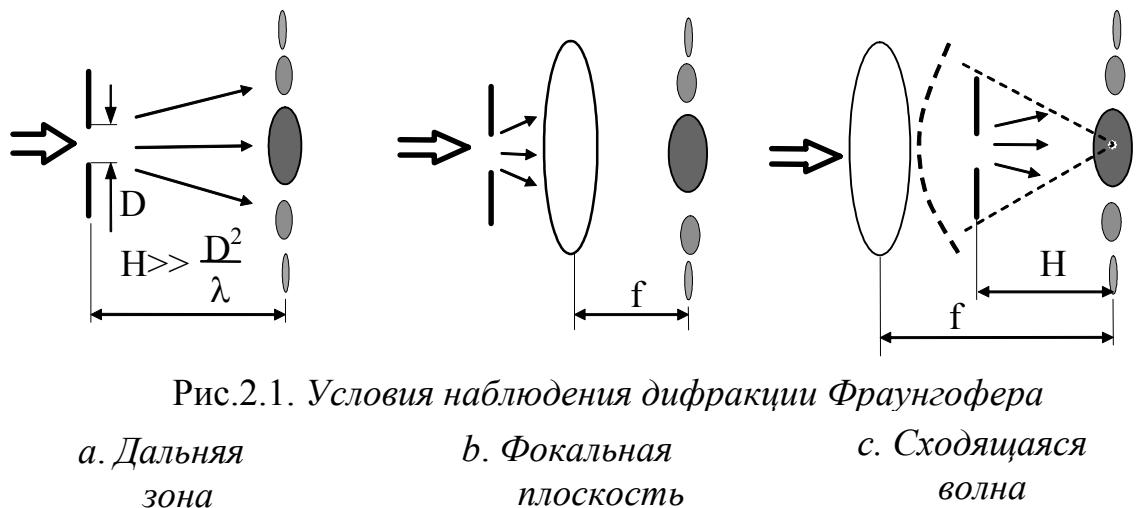


Рис.2.1. Условия наблюдения дифракции Фраунгофера

a. Дальняя  
зона

b. Фокальная  
плоскость

c. Сходящаяся  
волна

## 2.1.

Таким образом, дифракция Фраунгофера наблюдается, если выполняется условие дальней зоны:  $H \gg D^2/\lambda$ ; в фокальной плоскости оптической системы; в плоскости схождения волны.

Одно из основных преимуществ использования дифракции Фраунгофера - инвариантность к положению объекта дифракции относительно плоскости регистрации. В данном случае это означает, что независимо от положения объекта в пучке лазера вид дифракционного распределения интенсивности в плоскости регистрации не изменяется.

## 2.3. Основные свойства преобразования Фурье

Знание основных свойств преобразования Фурье позволяет значительно упростить анализ основных закономерностей пространственного спектра.

Чтобы показать, что функция  $f(x)$  и  $F(u)$  связаны интегральным преобразованием будем писать  $f(x) \Leftrightarrow F(u)$ .

**1. Свойства линейности.** Пусть  $F_1(u)$  и  $F_2(u)$  фурье-образы функций  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  соответственно, а  $a_1$  и  $a_2$  - произвольные комплексные числа. В этом случае фурье-образ функции  $f(x) = a_1f_1(x) + a_2f_2(x)$  равен

$$F(u) = a_1F_1(u) + a_2F_2(u).$$

Таким образом, спектр пространственных частот сложного объекта любой произвольной формы можно получить как сумму спектров простых геометрических фигур, пространственные спектры которых известны, что значительно упрощает вычислительные процедуры.

**2. Изменение масштаба.** Пусть  $a$  действительное число, тогда

$$f(ax) \Leftrightarrow \frac{1}{|a|} F\left(\frac{u}{a}\right)$$

Если  $a > 0$ , то

$$f(ax) \Leftrightarrow \frac{1}{a} F\left(\frac{u}{a}\right),$$

если  $a < 0$ ,

$$f(ax) \Leftrightarrow -\frac{1}{a} F\left(\frac{u}{a}\right).$$

Это свойство является очень важным для дифракции. Оно позволяет связать изменение размера изделия с изменением периода пространственного спектра. Показывает их обратно пропорциональную зависимость.

**3. Свойства сдвига.** Если функцию  $f(x)$  сдвинуть на величину  $a$ , то мы получим

$$f(x-a) \Leftrightarrow \exp(-ju_0a)F(u).$$

Из этого выражения следует, что смещение на величину  $a$  приводит лишь к дополнительному вращению фазы на величину  $ua$ , а модуль фурье-образа остается неизменным.

Из этого свойства следует одно из основных достоинств приборов и устройств, основанных на дифракции - инвариантность к смещениям исследуемого объекта. (*По определению: система, создающая изображение, является пространственно инвариантной, если изображение точечного источника меняет только положение, но не свою функциональную форму по мере того, как этот источник пробегает поле предмета*)

Существует и обратное свойство

$$f(x)\exp(\pm ju_0x) \Leftrightarrow F(u \pm u_0)$$

$$\begin{aligned} f(x)\cos u_0x &\Leftrightarrow \frac{1}{2}[F(u-u_0)+F(u+u_0)] \\ f(x)\sin u_0x &\Leftrightarrow \frac{1}{2i}[F(u-u_0)-F(u+u_0)], \end{aligned}$$

т.е. умножение исходной функции на  $\exp(\pm ju_0x)$  приводит к сдвигу фурье-образа.

**4. Свойство интерференции.** Если имеются две одинаковые функции смещенные друг относительно друга на величину  $2a$ , то

$$\begin{aligned} f(x+a) + f(x-a) &\Leftrightarrow F(u)(e^{ju_0a} + e^{-ju_0a}) = 2F(u)\cos ua. \\ F(u)\cos ua &= 0 \quad \text{для} \quad ua = (n + 1/2)\pi. \end{aligned}$$

Следовательно, расстояние между последовательными нулевыми значениями функции равно  $\pi/a$ . Измеряя это расстояние можно определить постоянную  $a$ .

**5. Свойства симметрии.** Это свойство определяет четность преобразования Фурье и его удобно представить в виде таблицы 1.

Таблица 1

Функция $f(x)$	Функция $F(u)$	Функция $[F(u)]^2$
----------------	----------------	--------------------

<b>Вещественная и четная</b>	<b>Вещественная и четная</b>	<b>Вещественная и четная</b>
Вещественная и нечетная	<b>Мнимая и нечетная</b>	<b>Вещественная и четная</b>
<b>Мнимая и четная</b>	<b>Мнимая и четная</b>	<b>Вещественная и четная</b>
<b>Мнимая и нечетная</b>	<b>Вещественная и нечетная</b>	<b>Вещественная и четная</b>
Комплексная и четная	<b>Комплексная и четная</b>	Вещественная и четная
Комплексная и нечетная	Комплексная и нечетная	Вещественная и четная

**6. Свойство спектров, взаимно дополнительных экранов.** Рассмотрим свойство преобразования Фурье, присущее функциям, попарно дополняющим друг друга, т.е. таким у которых прозрачные части одного в точности совпадают с непрозрачными частями другого.

Для таких функций  $f(x) + f_{\text{доп}}(x) = 1$ .

Пропускание объекта  $f_{\text{доп}}(x) = 1 - f(x)$ .

Его Фурье-спектр  $F_{\text{доп}}(u) = \delta(u) - F(u)$ .

Таким образом, спектры, дополняющих друг друга бинарных объектов отличаются аддитивным членом, сконцентрированным на оптической оси (в начале координат).

## 2.4. Двумерные функции

Основные свойства двумерного преобразования Фурье можно получить из определения (см.1.1.).

$$f(x - x_0, y - y_0) \Leftrightarrow F(u, v) \exp[-j(ux_0 + vy_0)].$$

$$f(ax, by) \Leftrightarrow \frac{1}{|ab|} F\left(\frac{u}{a}, \frac{v}{b}\right).$$

В общем виде

$$f(a_1x + b_1y, a_2x + b_2y) \Leftrightarrow \frac{1}{|a_1b_2 - a_2b_1|} F(A_1u + A_2v, B_1u + B_2v),$$

где

$$\begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}^{-1}$$

Это можно показать, если в преобразование Фурье

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(a_1x + b_1y, a_2x + b_2y) \exp[-j(ux + vy)] dx dy$$

ввести новые переменные, определяемые как

$$a_1x + b_1y = \xi, \quad a_2x + b_2y = \eta.$$

Пусть

$$f_1(x) \Leftrightarrow F_1(u), \quad f_2(y) \Leftrightarrow F_2(v).$$

Тогда из определения двумерного преобразования Фурье (см.1.1) имеем

$$f_1(x)f_2(y) \Leftrightarrow F_1(u)F_2(v).$$

Если ввести полярные координаты

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad u = \omega \cos \varphi, \quad v = \omega \sin \varphi$$

и, таким образом, можно получить новую пару преобразований

$$f_0(ar, \theta + \theta_0) \Leftrightarrow \frac{1}{a^2} F_0\left(\frac{\omega}{a}, \varphi + \theta_0\right),$$

т.е. поворот функции  $f(x,y)$  на угол  $\theta_0$  ведет к повороту преобразований Фурье  $F(u,v)$  на тот же угол.

Особый интерес представляет преобразование Фурье функций с разделяющимися переменными. Т.е. это такие функции, которые можно записать в виде произведения двух функций, каждая из которых зависит только от одной независимой переменной.

$$f(x, y) = f(x)f(y),$$

а в полярных координатах

$$f(r, \varphi) = f(r)f(\varphi).$$

Фурье преобразование функции с разделяющимися переменными можно представить в виде произведения одномерных Фурье-преобразований

$$\begin{aligned} f(x, y) = f(x)f(y) &\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)f(y) \exp[-j2\pi(ux + vy)] dx dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-j2\pi ux) dx \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \exp(-j2\pi vy) dy = F(u)F(v). \end{aligned}$$

Особо можно выделить и двумерное преобразование Фурье функций, обладающих осевой симметрией. Функция обладает круговой симметрией если

$$f(x, y) = f(r), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Функцию с круговой симметрией в цилиндрических координатах можно записать как функцию только радиуса

$$f(r, \varphi) = f(r).$$

Для этого случая преобразование Фурье имеет вид

$$F(u, v) = \int_0^\infty rf(r)dr \int_0^{2\pi} \exp[-j\omega r \cos(\theta - \varphi)] d\theta =$$

$$2\pi \int_0^\infty rf(r)J_0(\omega r)dr = F(\sqrt{u^2 + v^2}).$$

Фурье-преобразование функции, имеющей осевую симметрию, само обладает осевой симметрией и может быть найдено путем выполнения одномерного действия. Этот вид преобразования встречается очень часто, особенно в оптике, и имеет свое название – преобразование Фурье-Бесселя или преобразование Ханкеля нулевого порядка.

## **2.5 Наиболее часто встречающиеся в оптике специальные функции в связи с применением теории систем и преобразований**

Прямоугольная функция

$$\text{rect}(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq a/2, \\ 0, & |x| > a/2 \end{cases}$$

sinc – функция или ядро Фурье

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi x},$$

круговая функция

$$\text{circ}(r) = \begin{cases} 1, & r \leq r_0, \\ 0, & r > r_0 \end{cases}$$

Фурье-образом  $\text{rect}(x)$  является  $\text{sinc}(Xa)$ , а фурье-образом  $\text{circ}(r)$

$$\pi r_0^2 \text{somb}(2Rr_0) = r_0 J_1(2\pi Rr_0)/R,$$

где  $J_1(x)$  – функция Бесселя первого рода первого порядка. Функция

$$\text{somb}(x) = 2J_1(\pi x)/\pi x \equiv \Lambda(\pi x)$$

широко используется в оптике в связи с дифракцией света на круглом отверстии. Она получила специальное название – сомбреро, что соответствует характерному виду описываемой ее в пространстве поверхности.

## **2.6. Свойства симметрии дифракционной картины**

Свойство симметрии одно из фундаментальных свойств дифракционных спектров. Оно играет большую роль во всех задачах дифракции. Использование свойств симметрии позволяет сократить время обработки, упростить анализ ДК, определить ориентацию объекта дифракции.

При анализе симметрии фигуры обычно используются такие вспомогательные геометрические образы как плоскость, прямая и точка. Они называются элементами симметрии фигуры. Фигура называется симметричной, если она состоит из равных,

закономерно повторяющихся частей. В случае дифракции, основное утверждение состоит в том, что если электромагнитная волна падает нормально на отверстие в непрозрачном экране – то каждая картина дифракции Фраунгофера обладает центром симметрии независимо от того, существует или нет такая симметрия в исходном отверстии.

Двумерное преобразование Фурье, соответствующее дифракции Фраунгофера на плоских экранах, обнаруживает ряд довольно интересных свойств симметрии, на которые впервые указал R. Straubel. Распределение амплитуды поля при дифракции на отверстии  $S$  в плоском экране при нормальном падении излучения единичной интенсивности

$$g(u, \varphi) = \frac{\sqrt{I_0}}{D_S} \int \int_S \exp[-ikr \cos(\theta - \varphi)] d\theta d\varphi. \quad (1.2)$$

В соответствии со свойством комплексно-сопряженных чисел их мнимые части отличаются только знаком, следовательно,

$$g(u, \varphi) = g^*(u, \varphi \pm \pi).$$

Распределение интенсивности в дифракционной картине, наблюдаемое на практике, пропорционально квадрату амплитуды поля

$$I(u, \varphi) = g(u, \varphi) g^*(u, \varphi).$$

Для того чтобы ДК, описываемая этим выражением обладала центром симметрии, необходимо

$$I(u, \varphi) = I(u, \varphi \pm \pi).$$

Действительно, из уравнения (1.2), видно, что это условие всегда имеет место независимо от формы отверстия в экране. Таким образом, распределение интенсивности вдоль линии, проходящей через центр симметрии, будет одинаковым по обе стороны от центра и будет зависеть только от расстояния до центра симметрии. Кроме того, отсюда следует, что центр симметрии ДК имеет координаты  $(0,0)$ .

Наличие дополнительной симметрии в форме отверстия приводит к появлению соответствующей дополнительной симметрии и в картинах дифракции Фраунгофера. То есть симметрия отверстия оказывает влияние на симметрию дифракционной задачи (См. Таблица 2).

Кроме того, само отверстие  $S$  может иметь элементы симметрии: плоскость симметрии, центр симметрии или ось симметрии. Геометрическая фигура может обладать или одним элементом симметрии одновременно или иметь несколько элементов симметрии. В этом случае симметрия отверстия приводит к дополнительной симметрии картины дифракции. Причем, если отверстие  $S$  имеет ось симметрии порядка  $L_n$  и  $n$  четное, тогда

$$g(r, \theta) = g\left(r, \theta + \frac{2\pi}{n} K\right),$$

где  $K=0, 1, 2, \dots$

Если  $n$  - нечетное

$$g\left[r, \theta + \frac{2\pi}{n} \left(k + \frac{1}{2}\right)\right] = g^*(r, \theta)$$

и распределение интенсивности имеет ось симметрии порядка  $L_{2n}$ . Т.е. порядок оси симметрии удваивается.

R. Straubel также сформулировал важное правило относительно нулевых точек интенсивности в картинах Фраунгофера: если отверстие  $S$  имеет нечетно-кратную точку симметрии, дифракционная картина отображает только изолированные точки нулевой интенсивности. Они располагаются на пересечении двух систем линий

$$\operatorname{Re}[g(r, \theta)] = 0, \quad \operatorname{Im}[g(r, \theta)] = 0 \quad n - \text{нечетное}.$$

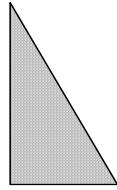
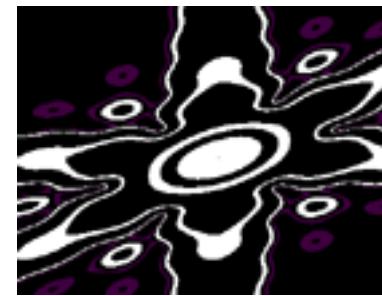
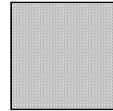
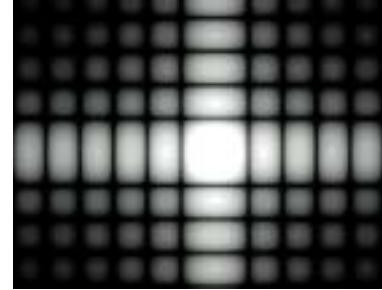
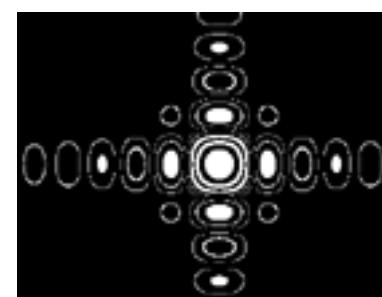
Если отверстие имеет четно-кратную точку симметрии, точки нулевой интенсивности располагаются только на замкнутых кривых и образуют систему линий

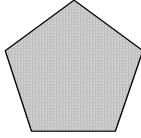
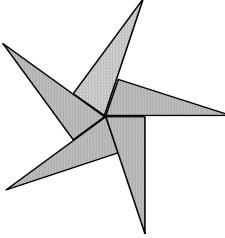
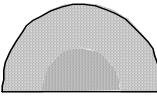
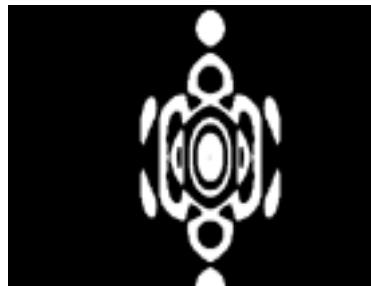
$$\operatorname{Re}[g(r, \theta)] = g(r, \theta) = 0 \quad n - \text{четное}.$$

Из свойств симметрии, приведенных выше для функции  $g(r, \theta)$ , следует, что достаточно рассчитать  $g(r, \theta)$  в определенной области углов и, используя эти свойства, найти величины во всей плоскости наблюдения.

Таблица № 2

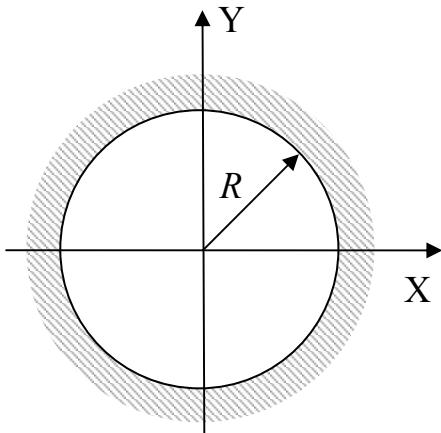
*Симметрия дифракционной картины*

Апертура		Дифракционная картина		
Форма	Симметрия	Фотография	Структура	Симметрия
	Ось симметрии $L_1$			Ось симметрии-2 <b>Центр симметрии</b> $L_2C$
	Ось симметрии-4 Плоскость симметрии-4 Центр симметрии $L_{4PC}$			Ось симметрии-4 Плоскость симметрии-4 <b>Центр симметрии</b> $L_{4PC}$

	<p>Ось симметрии-5 Плоскость симметрии-5 <math>L_5P</math></p>			<p>Ось симметрии-10 Плоскость симметрии-10 <b>Центр симметрии</b> <math>L_{10}10PC</math></p>
	<p>Ось симметрии-5 <math>L_5</math></p>			<p>Ось симметрии-10 <b>Центр симметрии</b> <math>L_{10}C</math></p>
	<p>Плоскость симметрии-1 <math>L_1P</math></p>			<p>Ось симметрии-2 Плоскость симметрии-2 <b>Центр симметрии</b> <math>L_22PC</math></p>

## 2.7. Фурье-образы наиболее часто встречающихся в оптике двумерных сигналов и их свойства

1. Форма сигнала – круг радиусом  $R$ , распределение амплитуды равномерное



Физический аналог – дифракция Фраунгофера плоской волны на круглом отверстии.

Фурье-образ такого сигнала (с точностью до постоянного множителя):

$$F(u, v) = \frac{J_1(R\rho)}{\rho} \cdot \exp(ju\Delta x_0 + jv\Delta y_0),$$

где  $\rho = \sqrt{u^2 + v^2}$ ,  $J_1$  – функция Бесселя первого рода первого порядка,  $\Delta x_0$  и  $\Delta y_0$  – смещение сигнала по осям X и Y соответственно.

$J_1$  является действительной и четной функцией, поэтому при отсутствии смещения ( $\Delta x_0 = \Delta y_0 = 0$ ) фурье-образ также действительный и четный. При наличии смещения в фурье-образе возникают дополнительные осцилляции, частота которых пропорциональна смещению. Действительная часть остается четной, мнимая часть является нечетной. Смещение является чисто фазовой добавкой, и модуль фурье-образа не изменяется, так что вид дифракционной картины, пропорциональный его квадрату, сохраняется (рис. 2.2).

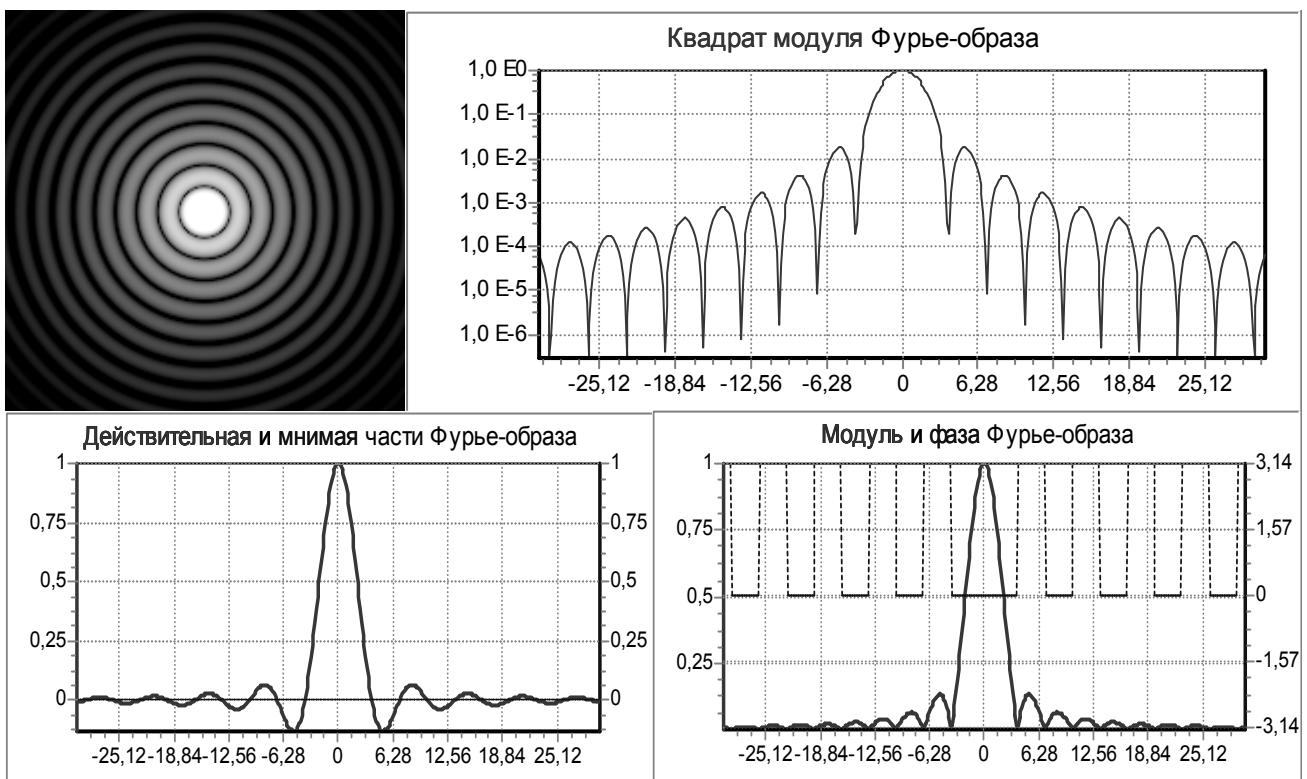
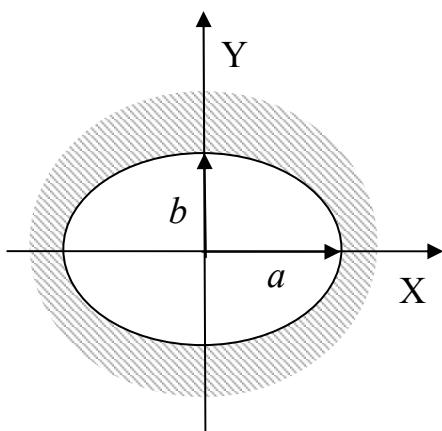


Рис. 2.2. Фурье-образ круглого сигнала ( $R=1$ )

## 2. Форма сигнала – эллипс с полуосами $a$ и $b$ , амплитуда постоянная



Физический аналог – дифракция Фраунгофера плоской волны на эллиптическом отверстии.

Фурье-образ такого сигнала (с точностью до постоянного множителя):

$$F(u, v) = \frac{J_1(R\rho)}{\rho} \cdot \exp(ju\Delta x_0 + jv\Delta y_0),$$

$$\text{где } R = \sqrt{a^2 + b^2}; \rho = R\sqrt{(u/a)^2 + (v/b)^2};$$

$J_1$  – функция Бесселя первого рода первого порядка;  $\Delta x_0$  и  $\Delta y_0$  – смещение сигнала по осям  $x$  и  $y$  соответственно.

При отсутствии смещения фурье-образ также действительный и четный. Эллиптичность приводит к “деформации” фурье-образа. Он разворачивается на  $90^\circ$  относительно ориентации исходного эллипса (рис. 2.3).

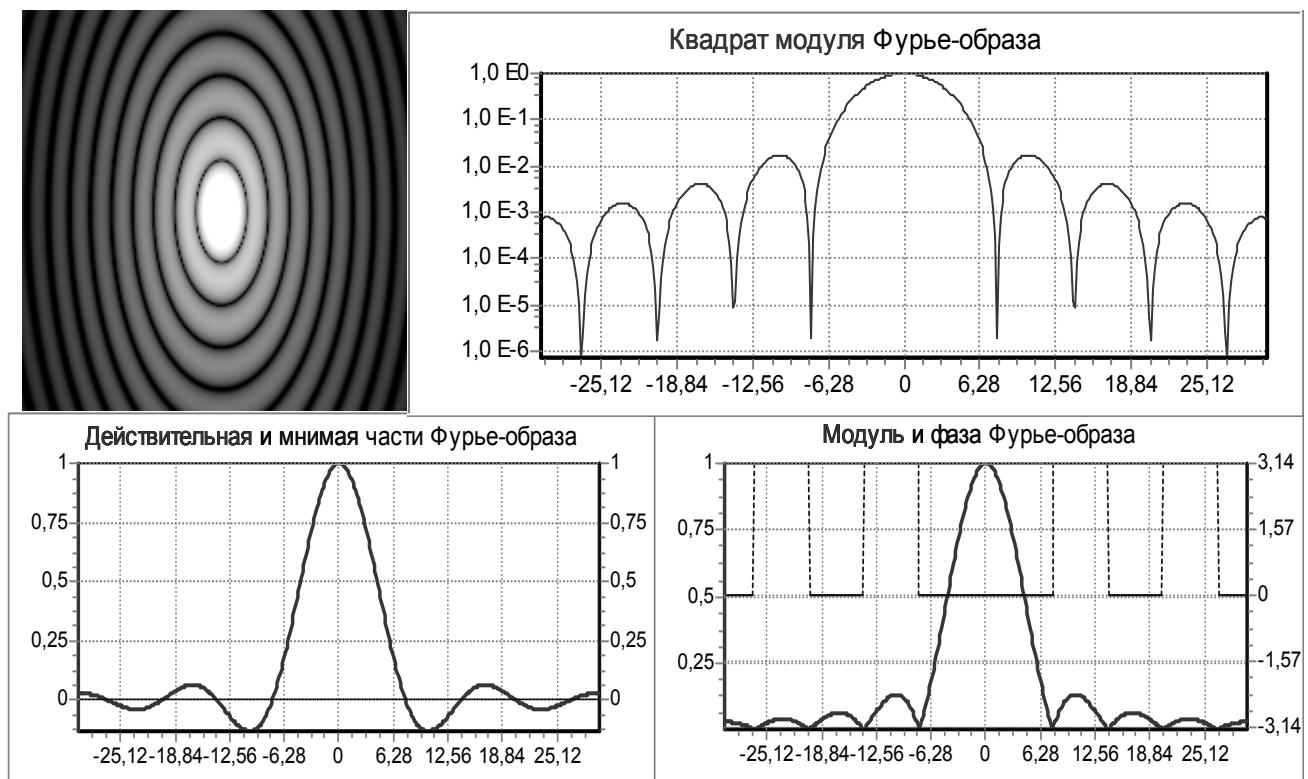
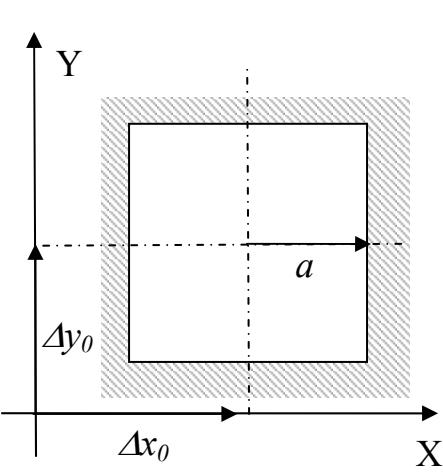


Рис. 2.3 . Фурье-образ эллиптического сигнала (угол сечения  $90^\circ$ )

### 3. Форма сигнала - квадрат, распределение амплитуды равномерное

Физический аналог - дифракция Фраунгофера плоской волны на квадратном отверстии.

Фурье-образ такого сигнала (с точностью до постоянного множителя):



$$F(u, v) = \frac{\sin(au)}{u} \cdot \frac{\sin(av)}{v} \cdot \exp(ju\Delta x_0 + jv\Delta y_0),$$

где  $\Delta x_0$  и  $\Delta y_0$  – смещение сигнала по осям  $x$  и  $y$  соответственно,  $a$  - половина длины стороны квадрата (или полуширина).

Функция  $\sin(x)/x$  является действительной и четной, поэтому при отсутствии смещения ( $\Delta x_0 = \Delta y_0 = 0$ ) фурье-образ также действительный и четный. При наличии смещения в фурье-образе возникают дополнительные осцилляции, частота которых пропорциональна смещению.

Действительная часть остается четной, мнимая часть является нечетной. Смещение является чисто фазовой добавкой, и модуль фурье-образа не изменяется, так что вид дифракционной картины, пропорциональный его квадрату, сохраняется (рис. 2.4)

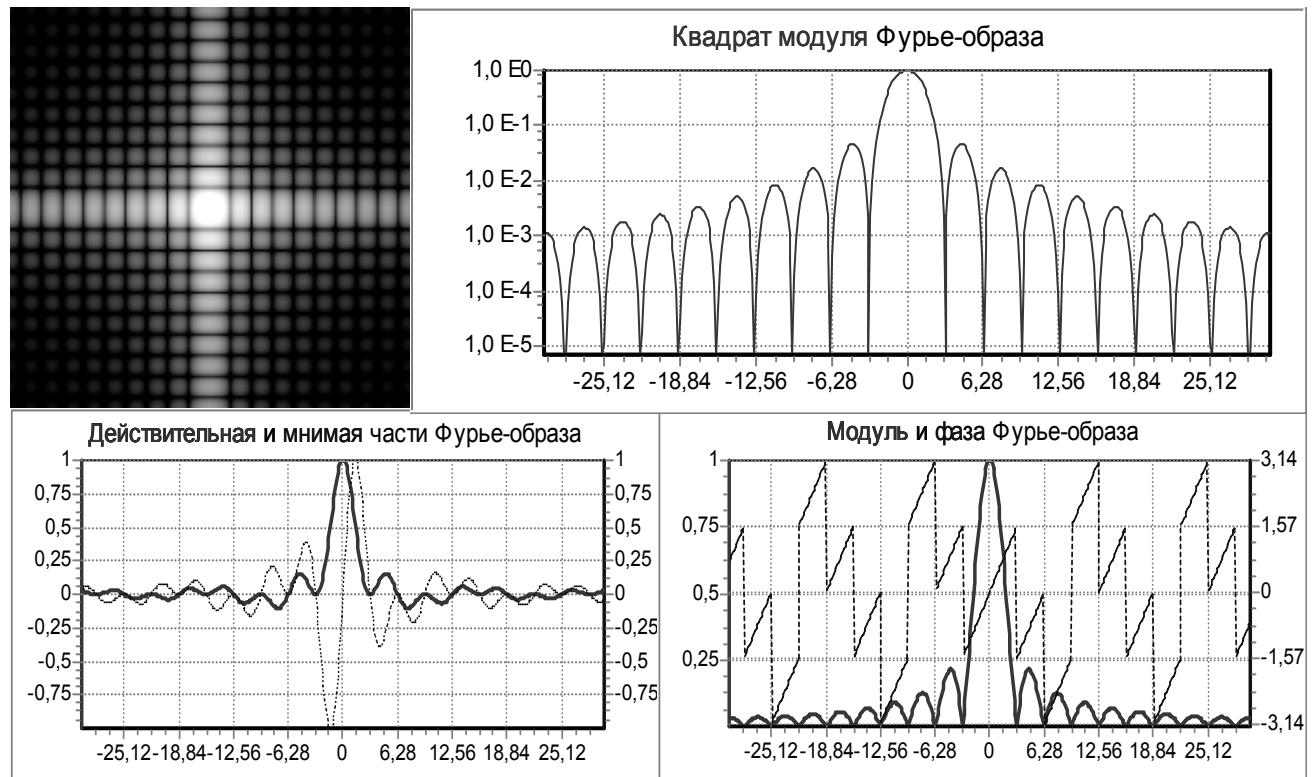
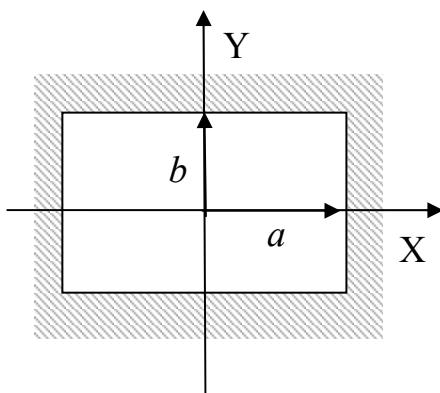


Рис. 2.4. Фурье-образ смещенного квадратного сигнала ( $a=1$ , угол сечения  $90^\circ$ )

#### 4. Форма сигнала – прямоугольник со сторонами $2a$ и $2b$

Физический аналог



- дифракция Фраунгофера плоской волны на прямоугольном отверстии.

Фурье-образ такого сигнала (с точностью до постоянного множителя):

$$F(u, v) = \frac{\sin(au)}{u} \cdot \frac{\sin(bv)}{v} \cdot \exp(ju\Delta x_0 + jv\Delta y_0)$$

Функция  $\sin(x)/x$  является действительной и четной, поэтому при отсутствии смещения фурье-образ также действительный и четный.

Неравенство сторон приводит к деформации фурье-образа - развороту на  $90^\circ$  относительно деформации исходного прямоугольника (рис. 2.5).

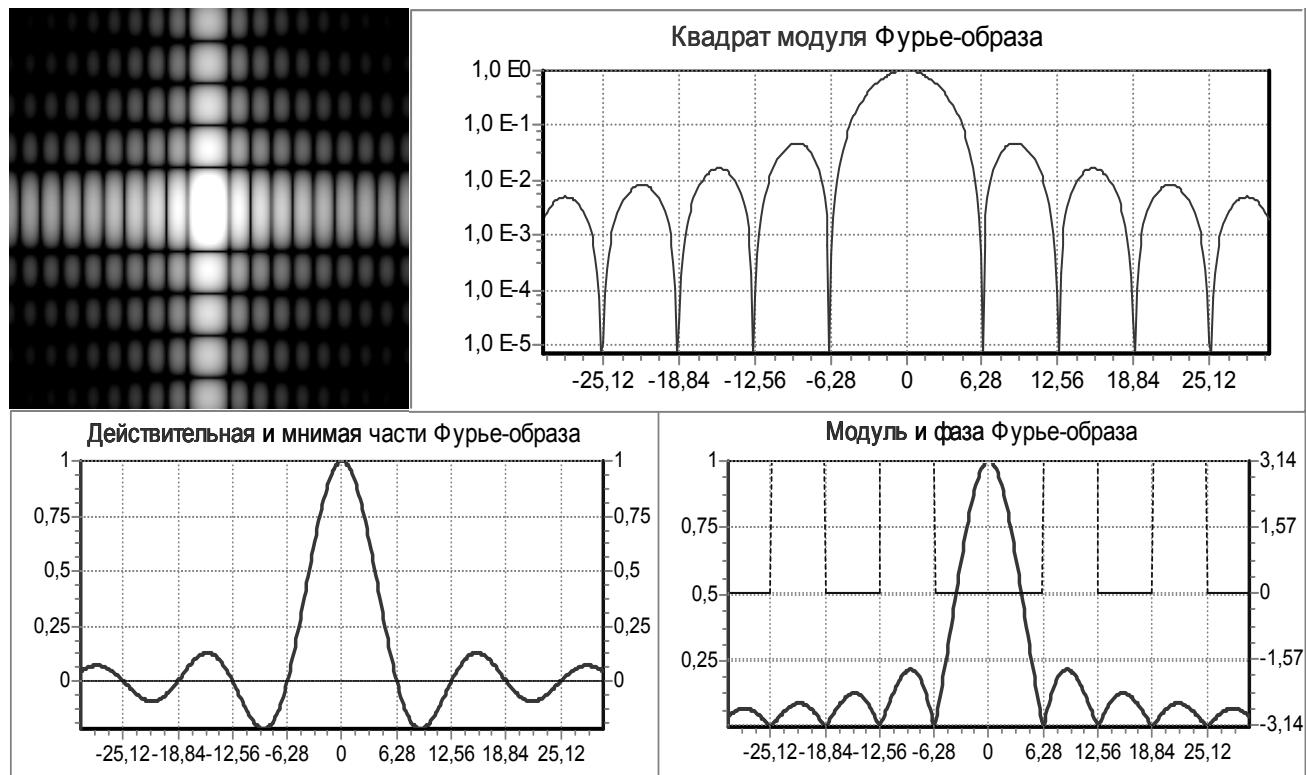
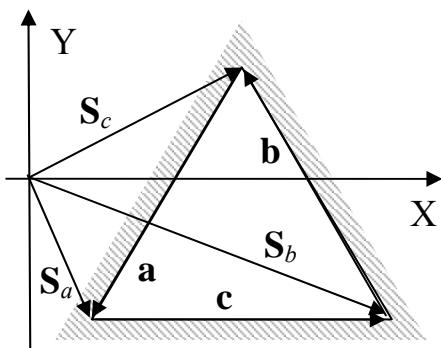


Рис. 2.5. Фурье-образ прямоугольного сигнала ( $90^\circ$  угол сечения)

## 5. Форма сигнала - треугольник, распределение амплитуды равномерное



Физический аналог - дифракция Фраунгофера плоской волны на треугольном отверстии.

Фурье-образ треугольного сигнала в общем виде удобно записать в векторной форме:

$$F(\mathbf{q}) = \frac{\exp(j\mathbf{q} \cdot \mathbf{s}_a)}{(\mathbf{q} \cdot \mathbf{a})(\mathbf{q} \cdot \mathbf{c})} + \frac{\exp(j\mathbf{q} \cdot \mathbf{s}_b)}{(\mathbf{q} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{q} \cdot \mathbf{c})} + \frac{\exp(j\mathbf{q} \cdot \mathbf{s}_c)}{(\mathbf{q} \cdot \mathbf{a})(\mathbf{q} \cdot \mathbf{b})},$$

где векторы  $\mathbf{q}=(u,v)$ ;  $\mathbf{s}_a$ ,  $\mathbf{s}_b$ ,  $\mathbf{s}_c$  - радиус-векторы вершин треугольника;  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  - векторы сторон треугольника:  $\mathbf{a} = \mathbf{s}_c - \mathbf{s}_a$ ,  $\mathbf{b} = \mathbf{s}_c - \mathbf{s}_b$ ,  $\mathbf{c} = \mathbf{s}_b - \mathbf{s}_a$ .

Фурье-образ треугольного сигнала всегда является комплексным, и его поведение является достаточно сложным. Понять его особенности помогает физическая аналогия - три слагаемых фурье-образа имеют вид плоских волн, распространяющихся в плоскости X,Y в направлении нормалей к сторонам треугольника, и, соответственно, полный фурье-образ является результатом интерференции трех таких волн. Сигнал обладает осью симметрии порядка  $n=3$ , и, в соответствии со свойством симметрии, квадрат Фурье-образа имеет ось симметрии порядка  $n=6$  (рис. 2.6).

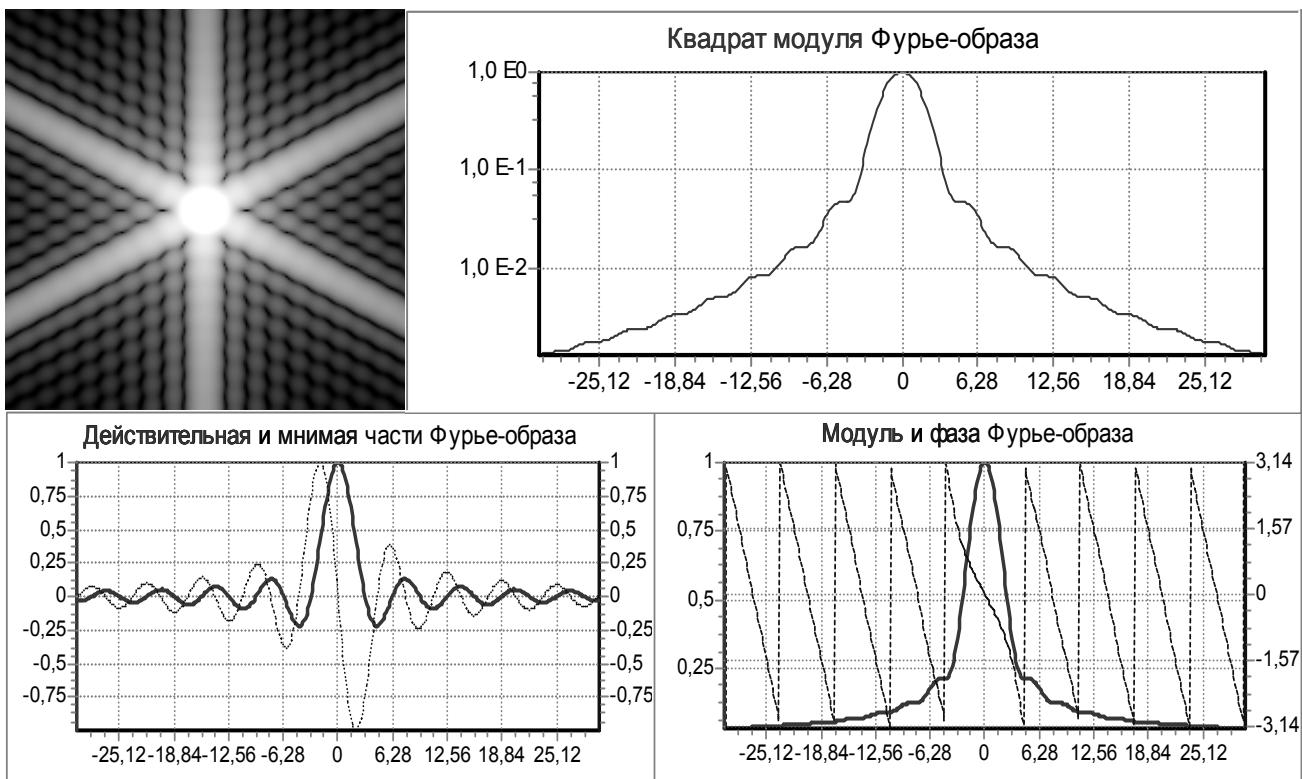
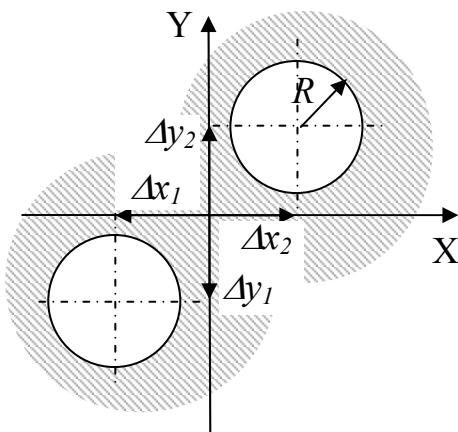


Рис. 2.6. Фурье-образ треугольного сигнала (угол сечения 90°)

В результате нарушения равенства сторон треугольника нарушается и симметрия фурье-образа, изменяется угол ориентации и яркость «лучей». Яркость лучей пропорциональна длине соответствующих им сторон треугольника.

## 6. Форма сигнала - два одинаковых круга, распределение амплитуды равномерное



Физический аналог - дифракция Фраунгофера плоской волны на паре круглых отверстий (опыт Юнга).

Фурье-образ такого сигнала (с точностью до постоянного множителя):

$$F(u, v) = \frac{J_1(R\rho)}{\rho} \cdot [\exp(ju\Delta x_1 + jv\Delta y_1) + \exp(ju\Delta x_2 + jv\Delta y_2)]$$

где  $\rho = \sqrt{u^2 + v^2}$ ,  $J_1$  – функция Бесселя первого рода первого порядка,  $x_1$ ,  $y_1$  и  $x_2$ ,  $y_2$  – координаты центров кругов.

Вид квадрата фурье-образа - кольца, соответствующие кругу радиуса  $R$ , промодулированные эквидистантными полосами, перпендикулярными линии, соединяющей центры кругов. Расстояние между полосами обратно пропорционально расстоянию между кругами (рис. 2.7).

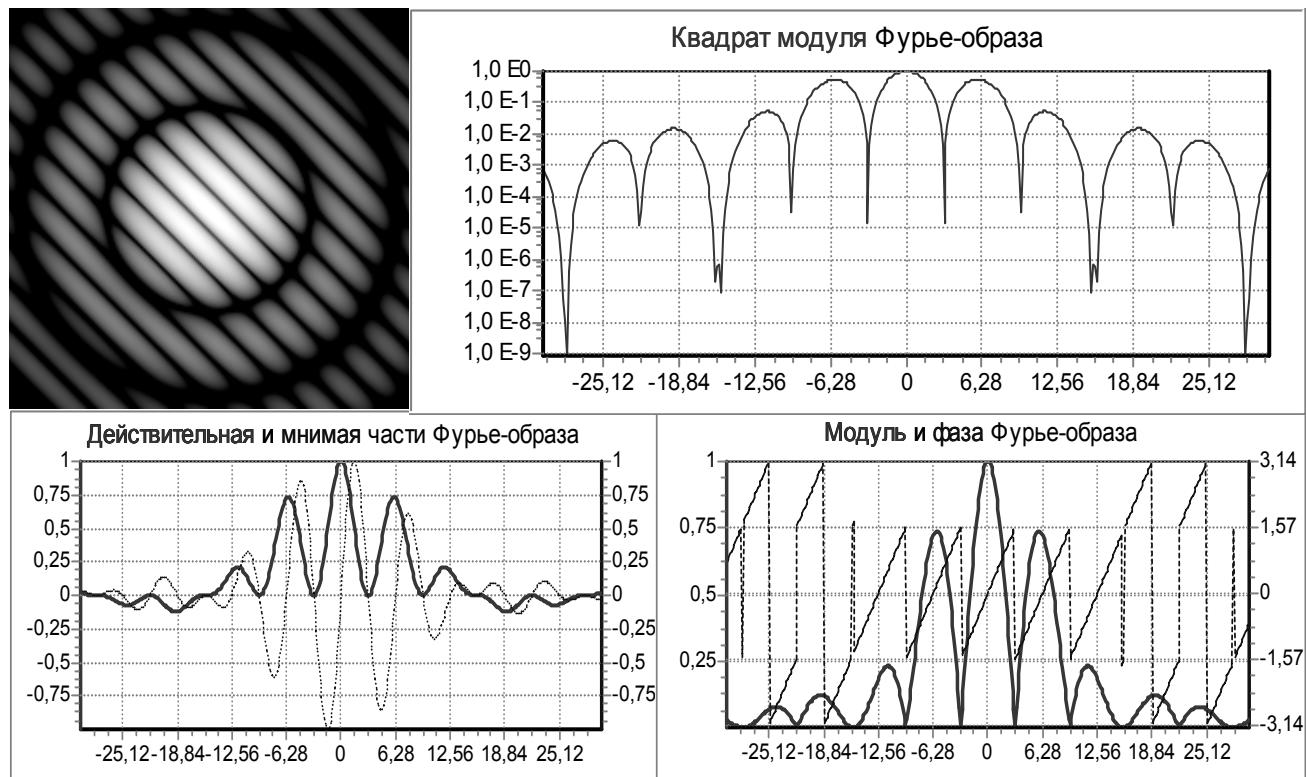
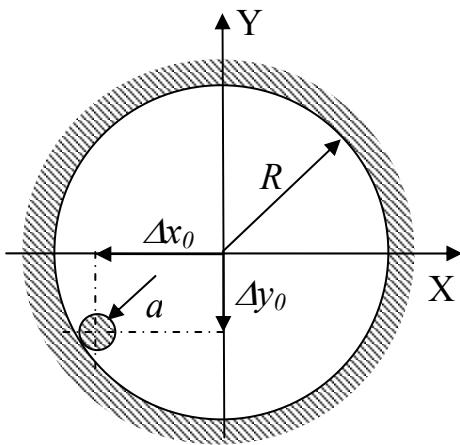


Рис. 2.7. Фурье-образ сигнала в виде пары одинаковых кругов (угол сечения 0°)

7. Форма сигнала - два круга большого и малого диаметров; амплитуды сигналов имеют разные знаки



Физический аналог - дифракция Фраунгофера на круглом отверстии в присутствии малого непрозрачного экрана.

Фурье-образ такого сигнала (с точностью до постоянного множителя):

$$F(u, v) = \frac{J_1(R\rho)}{\rho} - \frac{a}{R} \cdot \frac{J_1(a\rho)}{\rho} \cdot \exp(ju\Delta x_0 + jv\Delta y_0),$$

где  $\rho = \sqrt{u^2 + v^2}$ ,  $J_1$  – функция Бесселя первого рода первого порядка,  $R$  и  $a$  - радиусы большого и малого кругов,  $\Delta x_0$  и  $\Delta y_0$  – смещение малого круга по осям  $x$  и  $y$  соответственно.

Вид фурье-образа - кольца, соответствующие кругу радиуса  $R$ , промодулированные линиями второго порядка, соответствующими кругу радиуса  $a$ . Глубина данной модуляции определяется отношением радиусов кругов, а характер определяется смещением малого круга - эксцентриситет линий равен отношению смещения к радиусу большого круга, а наклон оси линий соответствует ориентации линии, соединяющей центры кругов.

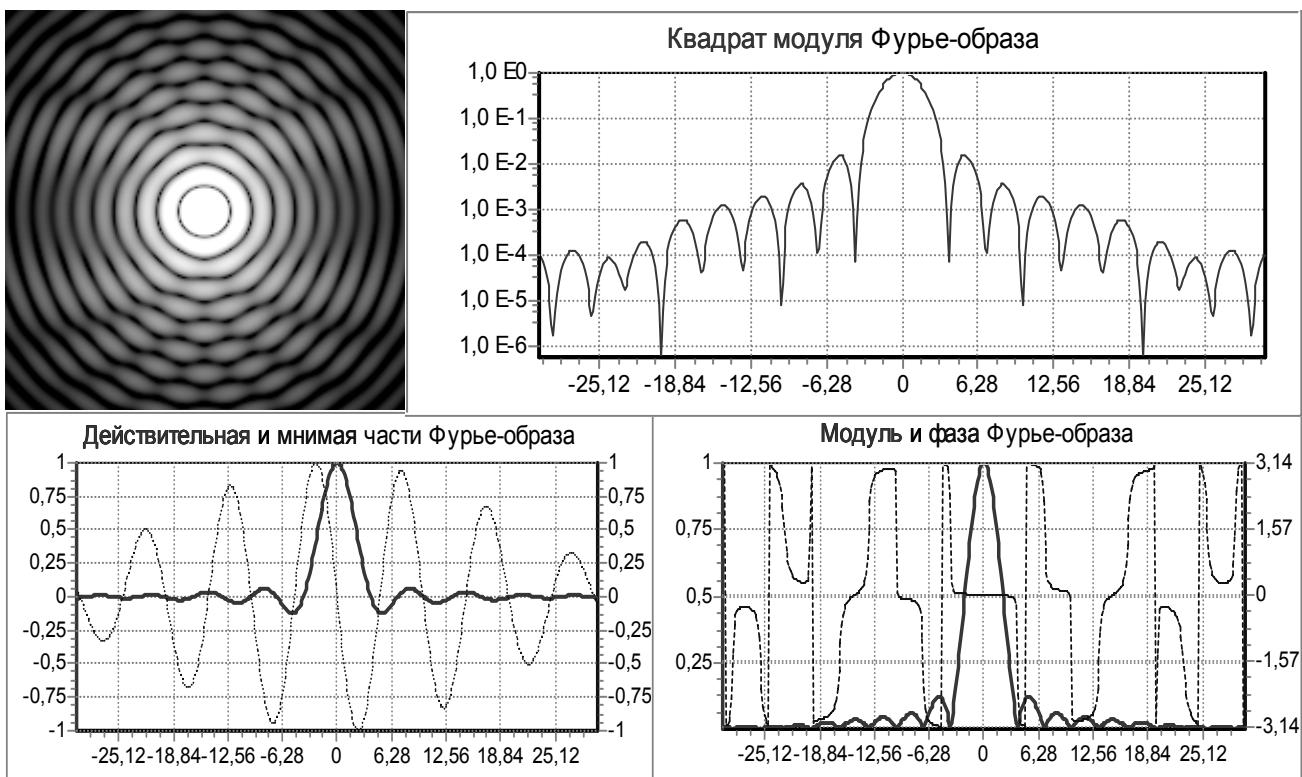
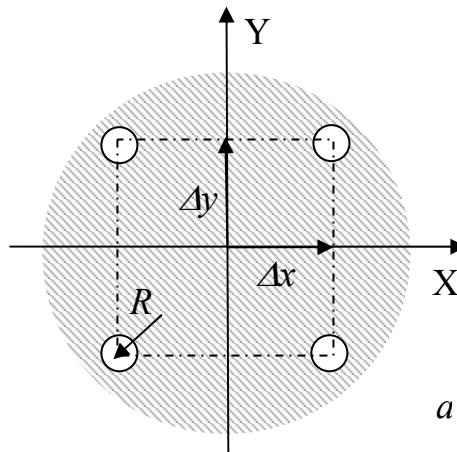


Рис. 2.8. Фурье-образ сигнала в виде пары кругов разного размера и знака (угол сечения 45°)

Таким образом, если малый круг находится в центре - эксцентриситет линий модуляции равен нулю - они являются окружностями,

накладывающимися на кольца большого круга. При ненулевом смещении линии модуляции превращаются в эллипсы, пересекающие кольца (эксцентриситет в пределах от 0 до 1). Когда центр малого круга достигает края большого, эксцентриситет равен 1 - линии становятся параболами. При дальнейшем смещении эксцентриситет  $> 1$  и линии – гиперболы (рис. 2.8).

## 8. Форма сигнала – набор N малых кругов (на примере N=4)



Физический аналог – дифракция на системе точечных отверстий или интерференция излучения системы точечных когерентных источников.

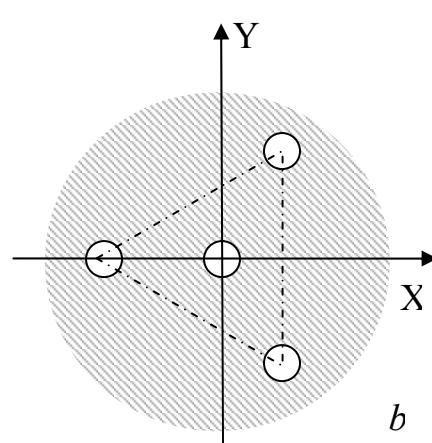
Фурье-образ такого сигнала (с точностью до постоянного множителя):

$$F(u, v) = \sum_{n=1}^N \frac{J_1(R\rho)}{\rho} \cdot \exp(ju\Delta x_n + jv\Delta y_n),$$

где  $\rho = \sqrt{u^2 + v^2}$ ;

$J_1$  – функция Бесселя первого рода первого порядка;

$\Delta x_n$  и  $\Delta y_n$  – смещение  $n$ -го круга по осям X и Y соответственно.



Данный пример демонстрирует свойства симметрии преобразования Фурье. В исходном состоянии круги расположены в углах квадрата. Такой сигнал имеет ось симметрии четвертого порядка и столько же плоскостей зеркального отражения – такая группа симметрии обозначается 4m. В соответствии со сказанным выше, такая же симметрия будет и у фурье-образа.

При произвольном смещении одного из кругов сигнал становится асимметричным, но у его образа будет группа симметрии равная 2. Если сместить два круга так, чтобы они образовали прямоугольник, у сигнала и образа вновь будет равная симметрия – 2m. Максимальная степень симметрии в данном примере (3m для сигнала и 6m для образа) наблюдается в том случае, когда три кружка расположены в вершинах правильного треугольника, а четвертый находится в его центре.

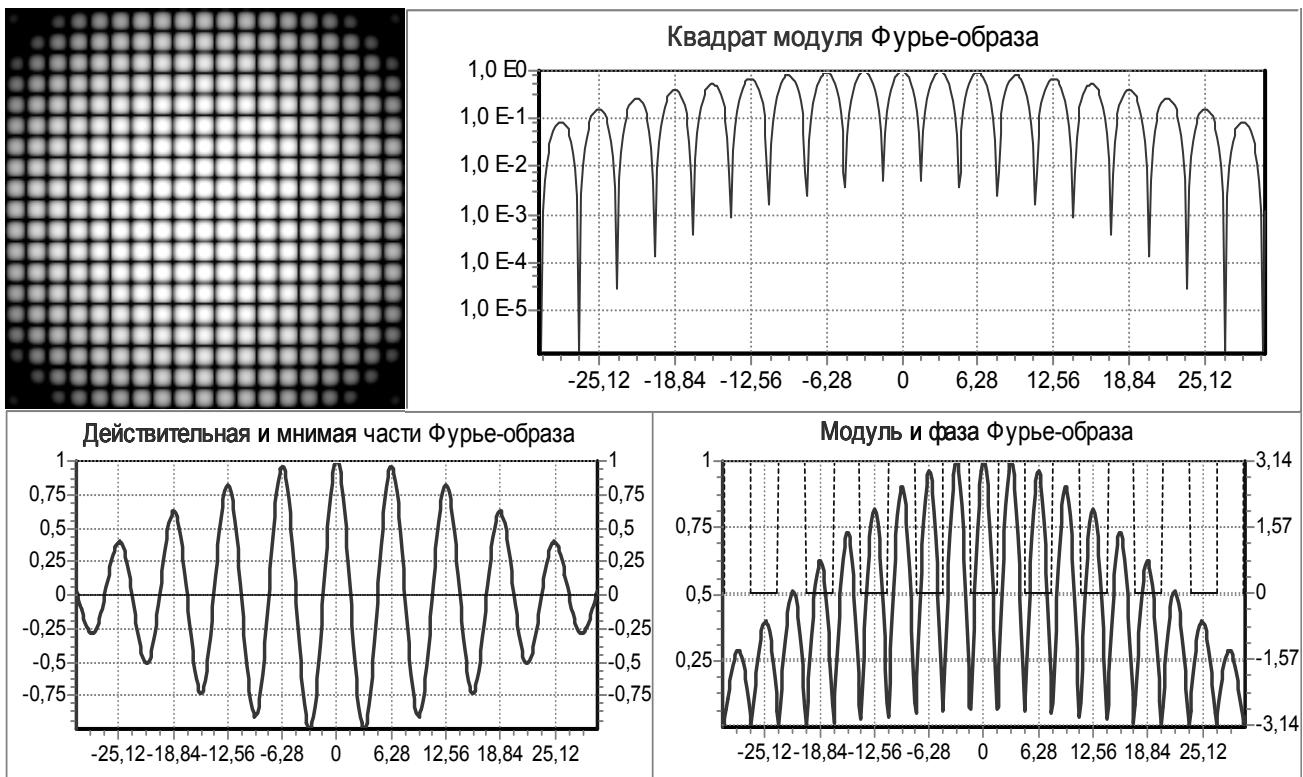


Рис. 2.9. Фурье-образ сигнала в виде четверки малых кругов, размещенных в вершинах квадрата (угол сечения  $90^\circ$ )

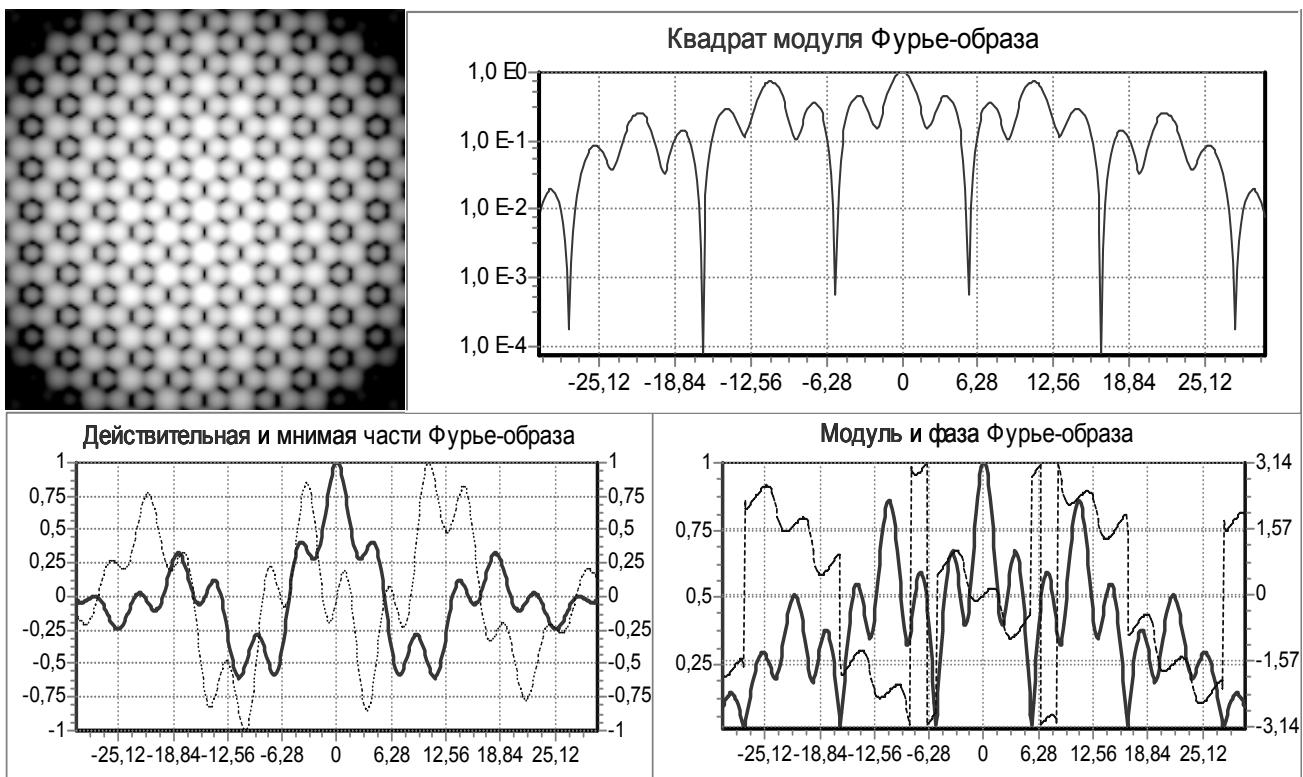


Рис. 2.10. Фурье-образ сигнала в виде четверки малых кругов, размещенных в вершинах и центре правильного треугольника (угол сечения  $60^\circ$ )

### 3. Обобщенные функции. Свертка. Функция корреляции. Пространственная фильтрация

#### 3.1 Понятие обобщенных функций. Свойства. Операции

Обобщенные функции были введены в связи с трудностями решения некоторых задач математической физики, квантовой механики, электромагнетизма и т. д., где помимо непрерывных функций, описывающих непрерывно распределенные величины (масса, источники тепла, механический импульс и др.), понадобилось использовать разрывные функции для сосредоточенных величин (точечная масса, точечный источник тепла, сосредоточенный импульс и др.).

Из разрывных функций важную роль сыграла единичная функция  $\theta(x)$ , определенная следующим образом (рис. 3.1):

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ 1 & \text{при } x \geq 0. \end{cases}$$

Эта функция была введена в 1898 г. английским инженером Хевисайдом для решения операционными методами некоторых дифференциальных уравнений теории электрических цепей.

В 1926 г. английский физик Дирак ввел в квантовой механике символ  $\delta$ , названный им дельта-функцией, которая явилась первой систематически применяемой обобщенной функцией. С физической точки зрения  $\delta$ -функция Дирака представляет собой плотность единичного заряда, помещенного в начале координат. Если этот заряд имеет величину  $m$ , то его плотность

$$\rho(x) = m \delta(x).$$

Отсюда следует, что дельта-функция  $\delta(x)$  обладает свойствами

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \neq 0, \\ \infty & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1. \quad (3.1)$$

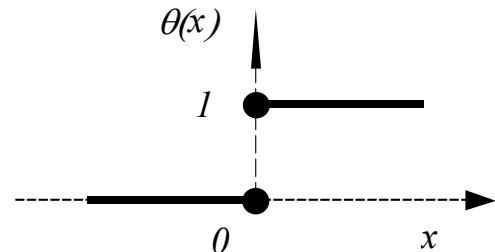


Рис. 3.1 Функция Хевисайда

Свойства этой функции хорошо интерпретируются при рассмотрении фундаментального соотношения

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x) dx = f(0), \quad (3.2)$$

справедливое для любой функции  $f(x)$ , непрерывной при  $x = 0$ .

Заметим, что, строго говоря,  $\delta(x)$  не представляет собой функцию, так как не существует функций, удовлетворяющих соотношениям (3.1 и 3.2). Но если интерпретировать последнее соотношение как функционал, т.е. как процесс придания функции  $f(x)$  значения  $f(0)$  то оно становится весьма интересным. Запись в виде интеграла используется просто как удобная форма описания свойств этого функционала (линейность сдвига, замена переменных и т.д.). Таким образом, функцию  $\delta(x)$  можно рассматривать как обычную функцию, удовлетворяющую всем формальным правилам интегрирования при условии, что все заключения относительно этой функции базируются на выражении (3.2), а не на каком-либо из ее отдельных свойств.

Дельта функцию можно рассматривать как предел

$$\delta(t) = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{\sin \alpha t}{\pi t},$$

получаемый в результате использования основного соотношения

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{\sin \alpha t}{\pi t} dt = f(0).$$

Следствием данного предела является тождество

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} dw = \delta(t).$$

Действительно,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} dw = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} e^{j\omega t} dw = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{\sin \alpha t}{\pi t}.$$

Получился, таким образом, некоторый формализм в применении  $\delta$ -функции, с помощью которого достаточно просто были исследованы некоторые разрывные явления. В частности, было замечено, что между единичной функцией  $\theta(x)$  и функцией  $\delta(x)$  существует связь

$$\delta(x) = \frac{d\theta(x)}{dx},$$

которая, очевидно, не имеет смысла в рамках классического анализа, но справедлива в смысле теории обобщенных функций.

Рассмотрим некоторые свойства  $\delta$ -функции.

Если  $f(x)$  не имеет разрывов в точке  $x$ , то

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \delta(\tau - t) dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(t + x) \delta(x) dx = f(t).$$

## **Гребенчатая функция**

Ряд, состоящий из бесконечного числа  $\delta$ -функций, сдвинутых относительно друг друга на равные расстояния

$$W_a(x) \equiv \frac{1}{|a|} comb(x/a) \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - na),$$

называется гребенчатой функцией. При  $a = 1$  имеем:

$$comb(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - n).$$

Гребенчатая функция, как это видно из соотношения симметрична относительно преобразования Фурье:

$$F\{comb(x)\} = comb(X).$$

Гребенчатая функция играет важную роль при описании процессов дискретизации сигналов. Процедуру дискретизации (взятие выборок) удобно рассматривать как умножение сигнала  $f(x)$  на заданную периодическую последовательность тактовых импульсов, задаваемую функцией  $W_a(x)$ .

## **3.2. Свертка**

Всякая физическая величина характеризуется совокупностью производимых ею функций. Такими эффектами могут быть отклики приборов на воздействие, оказываемое рассматриваемой функцией на входе. Поэтому описание физической величины распределением значений, приписываемых ее пробным функциям из основного пространства, представляется естественным, если эти функции можно отождествить с аппаратными функциями приборов. Это относится и к электромагнитному полю. Описание поля и его источников обобщенными функциями упрощает решение краевых задач оптики, связанных с дифракцией волн на поверхностных неоднородностях. Существуют две возможности использования функционалов в практических применениях теории систем – для описания самой системы и для описания действующего на систему объекта. В качестве последнего может выступать, например, электромагнитное поле. Обе эти возможности используются в физике и технике, а также в метрологии, в частности при установлении соответствия между понятием меры физических объектов, таких как процессы и поля, и общим математическим понятием меры как вполне аддитивной неотрицательной функции множеств.

В оптике свертка – это операция, которая производится измерительными приборами и в результате которой получается размытое (неясное) изображение изучаемого объекта. Изображение точки в любом оптическом приборе никогда не бывает точкой, а представляет собой пятно. Размеры этого пятна определяются качеством прибора. В оптическом приборе изображения двух различных точек будут разделены только при условии, что расстояние между

точками превышает некоторую минимальную величину, определяющую возможность разрешения.

Понятие свертки и разрешающей способности можно найти в любой области науки и техники. В радиоэлектронике при поступлении на вход амплитудного анализатора импульса бесконечно малой продолжительности на выходе анализатора наблюдается сигнал конечной ненулевой продолжительности (длительность выходного сигнала определяется шириной полосы пропускания прибора). Аналогичное явление происходит в оптике, когда изображение считывается каким либо фотоэлектрическим преобразователем. Считанное изображение всегда будет отличаться от исходного из-за конечного размера апертуры фотоэлектрического преобразователя. Т.е. происходит свертка распределения интенсивности в изображении с функцией, описывающей форму приемной апертуры фотоэлектрического преобразователя.

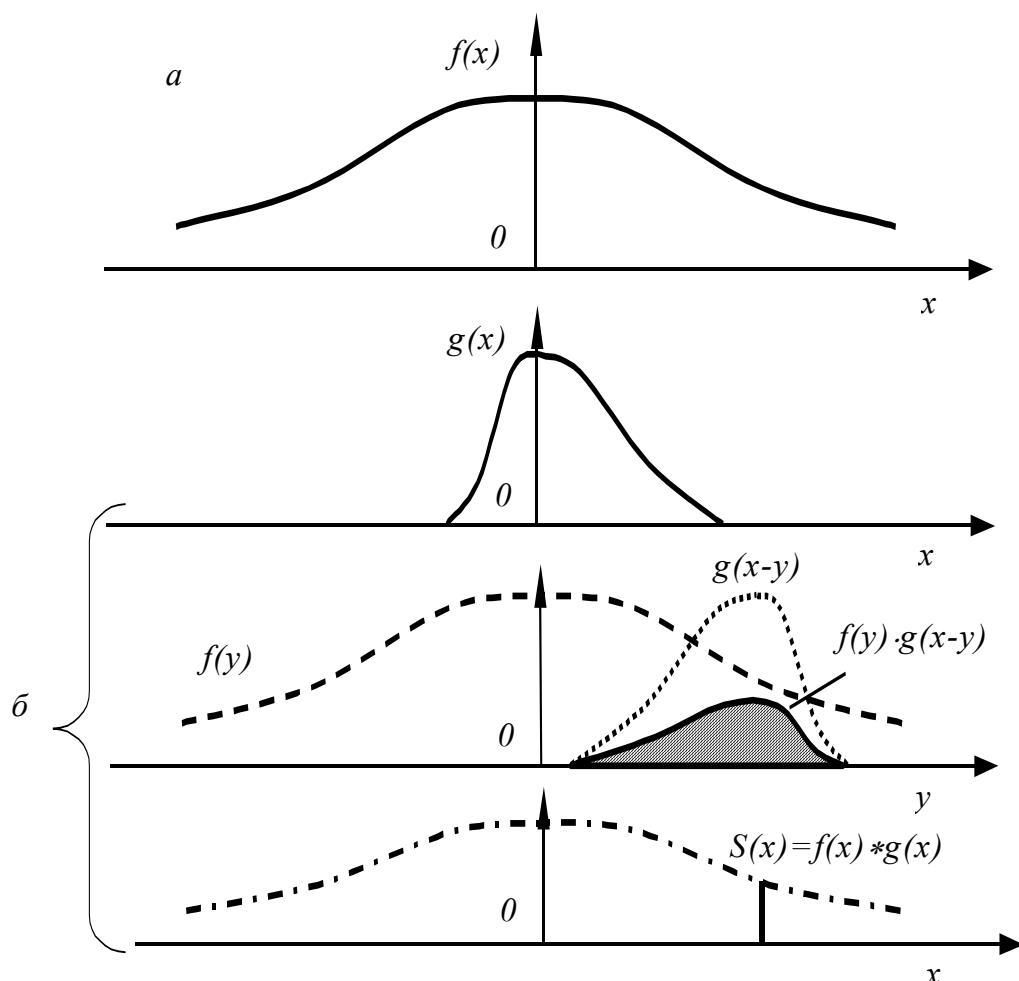


Рис.3.2 Физическая интерпретация свертки

Сигнал на выходе, соответствующий импульсу бесконечно малой продолжительности на входе, называется импульсным откликом. Поэтому любой входной сигнал изменяет свою форму на выходе. Зная импульсный отклик  $g(x)$  системы, предполагаемой линейной и стационарной во времени (в

этом случае применима теорема сложения сигналов), можно ли по входному сигналу  $f(x)$  рассчитать выходной сигнал  $S(x)$ ?

Решение этой задачи осуществляется с помощью свертки.

Рисунок 3.2 иллюстрирует фактическое содержание операции свертки. Входной сигнал  $f(x)$  показан на рис. 3.2. а, а импульсный отклик  $g(x)$  – на рис. 3.2. б. Для нахождения графика  $g(x-y)$ , как функции переменной  $y$ , необходимо зеркально отобразить график функции  $g(y)$  относительно оси ординат, сместить его параллельно оси абсцисс на величину  $x$ , произвести поточечное умножение  $f(y) \cdot g(x-y)$  и проинтегрировать произведение. Полученное значение интеграла равно значению свертки при аргументе  $y$ .

Импульсный отклик  $g(x)$  отличен от нуля только на ограниченном промежутке  $(\theta_1 \theta_2)$ . Уравнение свертки имеет вид:

$$S(x) = \int_{x-\theta_2}^{x-\theta_1} f(x)g(x-y)dy.$$

Для операции свертывания функций роль единичного элемента играет дельта-функция Дирака  $\delta(x)$ .

### 3.3 Корреляция

Корреляционный анализ наряду со спектральным играет большую роль в теории сигналов. В настоящее время корреляция является наиболее широко распространенным методом обработки различных сигналов и данных (оптических и других). При всех различных проявлениях корреляция, по существу, является методом оценки взаимных связей, имеющих форму подобий или совпадений. Таким образом, процесс корреляции сводится к сравнению (сопоставлению) двух картин или процессов.

Сопоставление картин, сигналов или процессов можно произвести используя понятие корреляционной функции. Корреляционная функция (англ. – correlation function) детерминированного сигнала с конечной энергией представляет собой интеграл (в бесконечных пределах) от произведения двух копий сигналов, сдвинутых друг относительно друга на время  $\tau$ :

$$B_s(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)s(t-\tau)dt.$$

Корреляционная функция показывает степень сходства между сигналом и его сдвинутой копией – чем больше значение корреляционной функции, тем это сходство сильнее. Поскольку здесь функция  $s(t)$  сравнивается сама с собой, ее называют *автокорреляционной функцией*.

Корреляционная функция обладает следующими свойствами:

1. Значение корреляционной функции при  $\tau = 0$  равно энергии сигнала, то есть интегралу от его квадрата:

$$B_s(0) = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt = E.$$

2. Корреляционная функция является четной функцией аргумента  $\tau$ :

$$B_s(\tau) = B_s(-\tau).$$

3. При  $\tau = 0$  корреляционная функция принимает максимальное значение:

$$B_s(\tau) \leq B_s(0).$$

4. С ростом абсолютного значения  $\tau$  корреляционная функция сигнала с конечной энергией затухает:

$$\lim_{|\tau| \rightarrow \infty} B_s(\tau) = 0.$$

Поясним физический смысл автокорреляционной функции на примере сигнала в виде одиночного прямоугольного импульса.

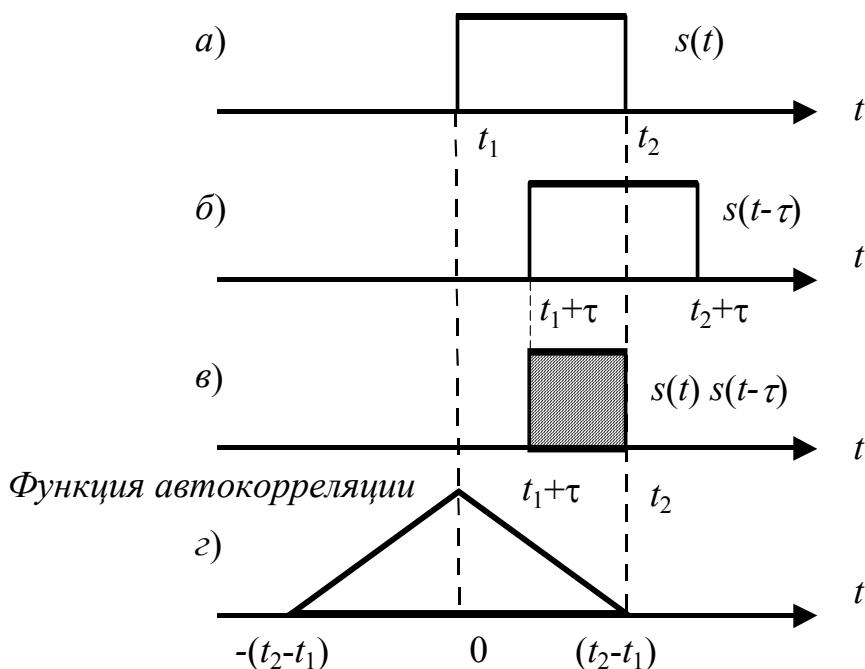


Рис. 3.3 Физическая интерпретация автокорреляционной функции

## **Периодический сигнал**

В случае периодического сигнала использовать приведенное выше определение корреляционной функции нельзя.

Корреляционную функцию периодического сигнала с периодом  $T$  вычисляют, усредняя произведение сдвинутых копий в пределах одного периода:

$$B_s(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t)s(t-\tau)dt.$$

Некоторые свойства, введенной таким способом корреляционной функции, изменяются.

1. Значение при  $\tau = 0$  равно не энергии, а средней мощности анализируемого сигнала:

$$B_s(0) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s^2(t)dt = P_{cp}.$$

2. Свойство четности функции сохраняется:  $B_s(\tau) = B_s(-\tau)$ .

3. При  $\tau = 0$  корреляционная функция периодического процесса также принимает максимальное значение:  $B_s(\tau) \leq B_s(0)$ .

4. Корреляционная функция периодического сигнала является периодической функцией с тем же периодом, что и сигнал:  $B_s(\tau + T) = B_s(\tau)$ .

5. Размерность корреляционной функции периодического сигнала – квадрат размерности сигнала.

Если сдвиг  $\tau$  кратен периоду функции, то получаем максимум «сходства» между сдвинутыми друг относительно друга функциями. Это свойство корреляционной функции случайного процесса позволяет выявлять периодичность функции, которую бывает затруднительно обнаружить при обычном исследовании.

## **Взаимная корреляционная функция**

Взаимно корреляционная функция показывает степень сходства для сдвинутых экземпляров двух разных сигналов. Эту функцию называют также *кросс-корреляционной функцией*. Общий вид формулы для нахождения взаимно корреляционной функции сохраняется, но под интегралом стоит произведение двух разных сигналов, один из которых задержан на время  $\tau$ .

$$B_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(\tau)s_2(t-\tau)dt.$$

Свойства взаимно корреляционной функции несколько отличаются от свойств корреляционной функции:

1.  $|B_{12}(\tau)| \leq \sqrt{E_1 E_2}$ , где  $E_1$  и  $E_2$  – энергии сигналов  $s_1(t)$  и  $s_2(t)$ .
2.  $B_{12}(-\tau) = B_{21}(\tau)$ , то есть изменение знака  $\tau$  равносильно взаимной перестановке сигналов.
3. Значение взаимно корреляционной функции при  $\tau = 0$  ничем не выделяется, так как максимум функции может быть расположен в любом месте оси  $\tau$ .

Иногда бывает удобно нормировать корреляционные функции. Нормировка достигается делением выражений на центральное значение корреляции, т.е. на значение для  $\tau = 0$  (нулевой сдвиг). Это дает для автокорреляционной функции

$$\gamma_{ss}(t) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} s(t)s^*(t-\tau) dt}{\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt}.$$

Аналогичное выражение получается для кросс-корреляционной функции

$$\gamma_{s_1s_2}(t) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} s_1(t)s_2(t-\tau) dt}{\int_{-\infty}^{\infty} s_1(t)s_2^*(t) dt},$$

где \* означает комплексное сопряжение, т.к. в общем случае функции  $s_1(t)$  и  $s_2(t)$  могут быть комплексными.

### **Теорема автокорреляции (теорема Винера-Хинчина)**

Эта теорема утверждает, что преобразование Фурье автокорреляции функции  $s(t)$  равно квадрату модуля ее преобразования Фурье.

В общем случае если преобразование комплексной функции есть  $F(\omega)$ , то согласно этой теореме преобразование  $|F(\omega)|^2$  является комплексной автокорреляцией от  $s(t)$ .

Используя  $T$  для обозначения преобразования Фурье, мы имеем

$$T \left[ |F(\omega)|^2 \right] = \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 \exp(2\pi i t) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) F^*(\omega) \exp(2\pi i t) d\omega = s(t) * s^*(-t).$$

Таким образом, если мы знаем автокорреляционную функцию, то ее фурье-преобразование даст нам интенсивность фурье-спектра.

### 3.4. Пространственная фильтрация

Оптическая обработка изображения в противоположность построению изображения связана с вмешательством в процесс. Это вмешательство может осуществляться разными способами. Ее практическое применение основано на способности оптических систем выполнять общие линейные преобразования поступающих на вход данных.

Первое сообщение об экспериментах по сознательному воздействию на спектр изображения было опубликовано Аббе в 1873 году, а затем Портером в 1906 г. Целью этих экспериментов была проверка созданной Аббе теории формирования изображений в микроскопе и исследование пределов ее применимости.

Объектом исследования в экспериментах служила сетка из тонкой проволоки, освещаемая когерентным светом.

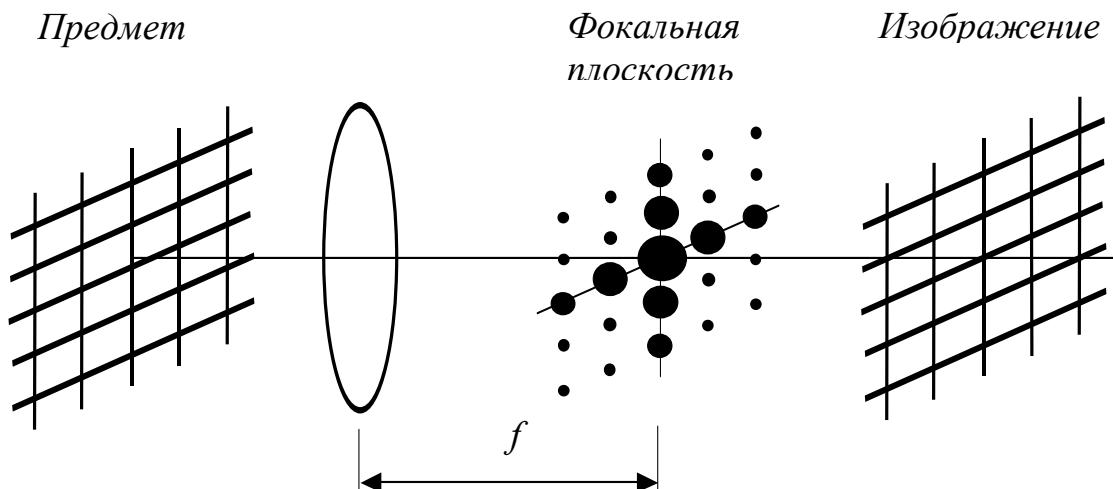


Рис. 3. 4 Схема эксперимента Аббе-Портера

В задней фокальной плоскости линзы получается фурье-спектр сетки, имеющей периодическую структуру. Различные фурье-компоненты, прошедшие через линзу, суммируясь, дают в плоскости изображения точную копию решетки. Помещая в фокальную плоскость различные препятствия (ирисовую диафрагму, щель, экран), можно непосредственно воздействовать на спектр изображения.

Фурье-спектр периодического предмета представляет собой набор отдельных спектральных компонент, ширина каждой из которых определяется характерным размером оправы, ограничивающей объект. Яркие пятна вдоль горизонтальной оси в фокальной плоскости соответствуют комплексным экспоненциальным компонентам, направленным горизонтально (рис. 3.5); яркие пятна вдоль вертикальной оси соответствуют вертикально направленным

комплексным экспоненциальным компонентам. Вне осевые пятна соответствуют компонентам, направленным под соответствующим углом в плоскости предмета.

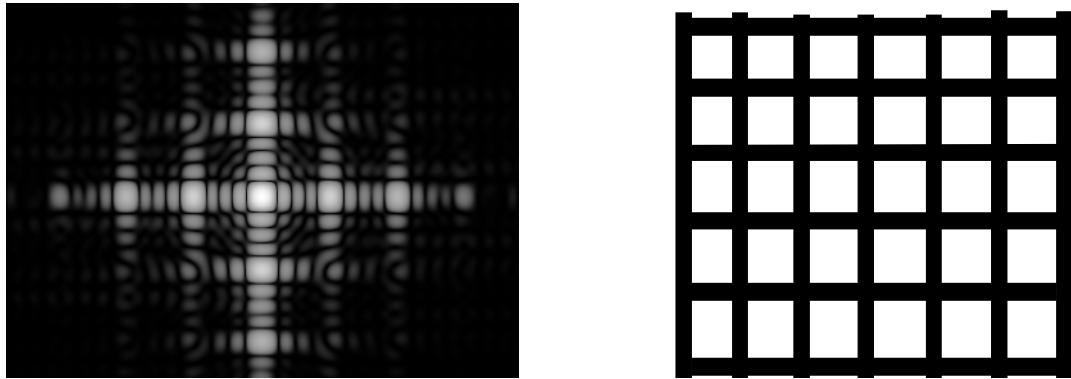


Рис. 3.5 Изображение входной сетки и ее спектра.  
а – спектр; б – изображение.

Если в фокальную плоскость поместить узкую щель так, чтобы через нее проходил только один ряд спектральных компонент, расположенных горизонтально (рис. 3.4), то изображение будет содержать только вертикальную структуру сетки (рис. 3.6).

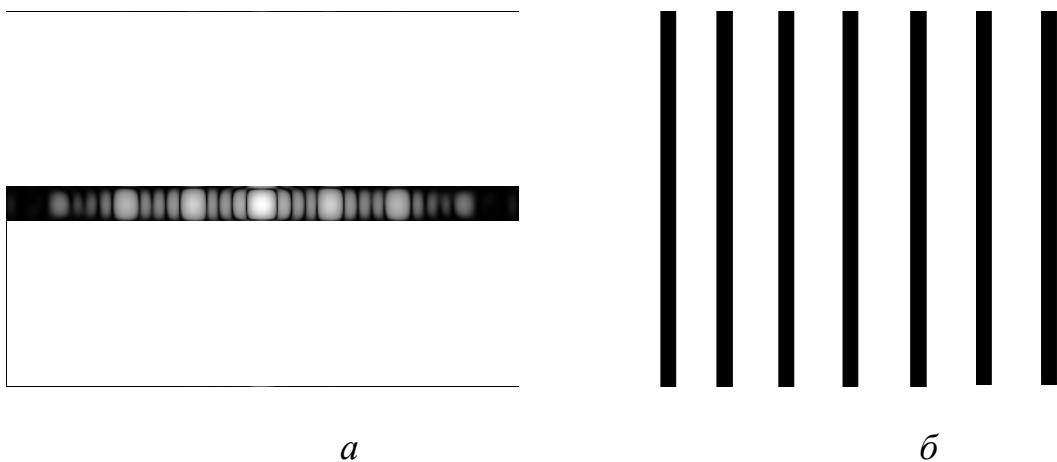


Рис. 3.6 Спектр сетки, отфильтрованный горизонтальной щелью (а) и соответствующее изображение (б).

Следовательно, именно горизонтально направленные комплексные экспоненциальные компоненты дают вклад в вертикальную структуру изображения. При этом горизонтальная структура изображения полностью пропадает.

Если развернуть щель на  $90^\circ$  так, чтобы через нее проходил лишь вертикальный ряд спектральных компонент (рис. 3.4), то получающееся изображение будет содержать только горизонтальную структуру (рис. 3.7).

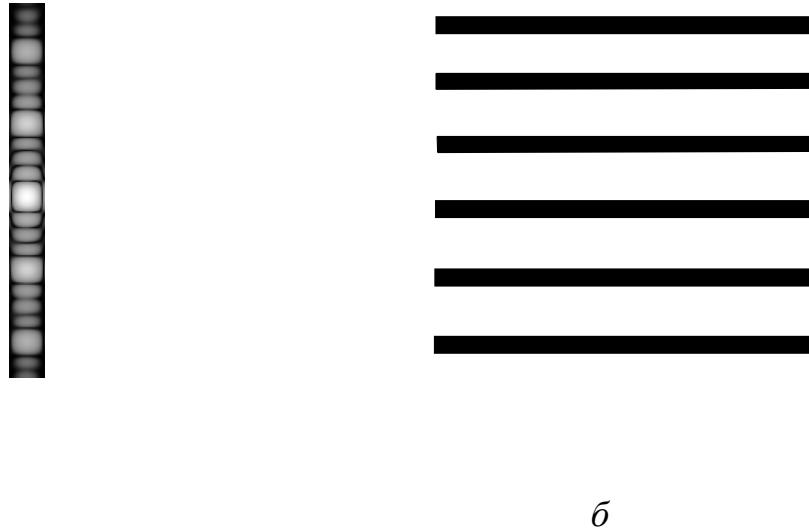


Рис. 3.7 Спектр сетки, отфильтрованный вертикальной щелью (а) и соответствующее изображение б.

При пространственной фильтрации фурье-спектра такой периодической структуры интересно наблюдать и еще ряд эффектов. Если на оси линзы в фокальной плоскости поместить маленький экран, закрывающий только центральный порядок, или компоненту «нулевой частоты», то мы получим изображение сетки с обращенным контрастом.

## **4. Квантовая природа электромагнитного излучения. Ограничение разрешающей способности оптической системы и информационной емкости оптических сигналов**

### **4.1 Квантовая природа электромагнитного излучения**

Долгое время человечеству была известна только одна форма электромагнитного излучения – видимый свет. Исторически первым научным представлением о свете являлась корпускулярная теория, получившая законченный вид в работах И. Ньютона (конец XVII в). В рамках корпускулярной теории свет рассматривался как поток малых материальных частиц – корпускул, движущихся в пустоте прямолинейно и равномерно со скоростью света, и замедляющихся в оптически плотных средах пропорционально их коэффициенту преломления. Подобное представление давало объяснение уже известным законам геометрической оптики и дисперсии, и тем самым позволило создать достаточно эффективную на первых порах теорию конструирования оптических приборов.

Но открытие явлений интерференции и дифракции, а также такого фундаментального свойства света, как поляризация, в начале XIX века заставило научное сообщество радикально пересмотреть представление о свете – была воскрешена гипотеза Х. Гюйгенса, современника И. Ньютона, согласно которой свет представляет собой распространяющиеся механические колебания – волны – некой сплошной упругой среды, заполняющей все мировое пространство – светового эфира. На базе волновой гипотезы Т. Юнг объяснил явление интерференции; О. Френель создал эффективную теорию дифракции и вывел соотношения для отражения и преломления света на границе раздела оптических сред; Гаусс, Аббе, Зейдель и другие завершили классическую теорию оптических приборов. Последующее открытие электродинамики Максвелла и отождествление света с электромагнитными волнами, как тогда казалось, окончательно утвердило представление о свете как сугубо волновом процессе.

Однако никак не удавалось объяснить ряд явлений – отсутствие «эфирного ветра» в интерференционных экспериментах, характер излучения абсолютно черного тела и законы фотоэффекта. Разрешить проблему удалось А. Эйнштейну и М. Планку – так появились теория относительности и гипотеза квантов. Согласно теории относительности, процесс распространения электромагнитного поля это не вовлечение в колебательный процесс стационарной упругой среды – эфира, но реальное распространение в пространстве материи особого рода. Фундаментальное свойство любой материи – масса, и при распространении поля перенос энергии и массы неразрывно связаны. Исследования же процессов излучения и поглощения показали, что энергия и масса поля передается и распространяется дискретными порциями – квантами, причем кванты излучения демонстрировали свойства неделимости и пространственной локализации, подобно малым материальным частицам. Эти частицы были названы фотонами, от греческого слова *фотος* – свет. Но, если

вновь принять корпускулярную теорию, как же тогда интерпретировать многочисленные явления, в которых очевидна волновая природа излучения?

В 1925 году Л. де Бройль выдвинул радикальную гипотезу о волновой природе не только излучения, но любой материи, согласно которой на уровне атомных масштабов необходимо отказаться от представления о микрочастицах, элементарной формой материи являются поля, которые, распространяясь в форме волновых пакетов, в определенных условиях эксперимента способны демонстрировать корпускулярные свойства. В начале гипотеза казалась весьма перспективной, с ее помощью удалось объяснить основные результаты проведенных в то же время новых опытов, в которых была обнаружена интерференция и дифракция электронов. Но более детальный анализ показал, что волновые пакеты де Бройля не обладают свойствами неделимости и локальности, неизменно присущими частицам в любых подобных экспериментах. Такое «стрданное», «необъяснимое» и «аналогичное» поведение микрочастиц привело научное сообщество в конце 20-х годов XX века к осознанию того, что выхода из тупика не существует в рамках системы представлений и образов классической физики. Была создана новая физика – квантовая.

Принципиальное отличие квантовой физики от физики классической – наличие двух уровней теоретического представления реальности – *формализма* и *интерпретации*. Формализм – это собственно математический аппарат теории и алгоритм его применения. Интерпретация же обеспечивает связь между математикой формализма и физическим миром. Эта связь делает возможной проверку формализма путем сопоставления его предсказаний с результатами экспериментов. Без какой-либо интерпретации символов формализма в терминах, которые могут быть соотнесены с экспериментально наблюдаемыми величинами, формализм остается абстрактной математикой без физического контекста.

В классической механике, применительно к задаче движения материальной частицы, современный формализм выглядит следующим образом. Сначала определяется *функция Гамильтона*  $H$ , которая является выражением для полной энергии частицы в зависимости от ее координат  $\vec{q} = (x, y, z) = (q_1, q_2, q_3)$  и импульса  $\vec{p} = (p_x, p_y, p_z) = (p_1, p_2, p_3)$ . Обычно функция Гамильтона представляет собой сумму кинетической и потенциальной энергии частицы. Например, в случае движения частицы под действием силы тяжести:

$$H(\vec{q}, \vec{p}) = \frac{\vec{p}^2}{2m} + mg(z - z_0), \text{ при движении частицы с зарядом } e \text{ в электрическом}$$

поле с потенциалом  $U$ :  $H(\vec{q}, \vec{p}) = \frac{\vec{p}^2}{2m} + e \cdot U(\vec{q})$ . Далее, записываются *уравнения движения*, являющиеся, по сути, формулировкой 2-го и 3-го законов Ньютона:

$$\frac{dq_k}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_k}; \quad \frac{dp_k}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_k} = m \frac{d^2 q_k}{dt^2}; \quad k = 1, 2, 3$$

и закон сохранения энергии:

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{k=1,2,3} \left( \frac{\partial H}{\partial q_k} \cdot \frac{dq_k}{dt} + \frac{\partial H}{\partial p_k} \cdot \frac{dp_k}{dt} \right) = 0.$$

Если дополнить эти дифференциальные уравнения начальными или граничными условиями, то полученные частные решения – векторные функции времени  $\vec{q}(t)$ , описывают геометрическое место точек центра масс исследуемой частицы, и называются ее *траекториями*. Дифференцируя траекторию по времени и умножая на массу, можно легко получить также и значения импульса частицы в любой момент времени, далее с помощью известных формул – мгновенные значения кинетической и потенциальной энергий частицы. Тем самым, в классической механике из факта наличия определенной траектории однозначно следует, что имеется и вся остальная информация о параметрах движения частицы. Кроме того, имеется возможность записывать функцию Гамильтона не только как зависимость от координат и импульса, но и как зависимость от любой другой пары переменных, лишь бы они удовлетворяли уравнениям движения. Такие пары переменных называются *канонически сопряженными*. Например, при исследовании вращательного (орбитального) движения удобнее пользоваться канонической парой *азимут и момент*.

Формализм квантовой механики существенно отличается от изложенного только что классического. В первую очередь, в нем отсутствуют *функции*, описывающие интуитивно-очевидные физические свойства и параметры частицы – координату, скорость, импульс, энергию и т.п. Вместо них вводятся *операторы*, действующие на особую комплексную *функцию состояния*, или *psi-функцию*, зависящую от координат и времени:  $\Psi(\vec{q}, t)$ . Операторы бывают типа умножения, например, *оператор координаты*  $\hat{x}\Psi = x \cdot \Psi$  и потенциальной энергии  $\hat{U}\Psi = U(\vec{q}) \cdot \Psi$ ; дифференциального типа, например, *оператор импульса*  $\hat{p}_x\Psi = -i\eta \frac{\partial\Psi}{\partial x}$ ; и смешанного типа – оператор полной энергии (*оператор Гамильтона, или Гамильтониан*):  $\hat{H}\Psi = -\frac{\eta^2}{2m} \Delta\Psi + U \cdot \Psi$ .

Основным уравнением, вместо уравнений движения, является *уравнение Шредингера*:

$$\hat{H}\Psi = -\frac{\eta^2}{2m} \Delta\Psi + U \cdot \Psi = i\eta \frac{\partial\Psi}{\partial t}$$

Неизвестной функцией здесь является функция состояния  $\Psi$ , логически занимающая место траектории в классической механике. Но, если в

классической механике сама траектория и получаемые из нее прочие величины уже являются интуитивно-понятными, базовыми физическими параметрами и характеристиками движения, то результат применения квантового формализма – функция состояния, нуждается в дополнительной интерпретации, связывающей ее с реальными наблюдаемыми физическими величинами.

Первоначально создатель данного формализма Э. Шредингер предполагал, что функции состояния описывают волны плотности материи, подобно волновым пакетам де Бройля, но такая интерпретация также оказалась несостоятельной по тем же причинам – нарушался принцип локальности частиц. В конце концов, трудом многих ученых адекватная интерпретация была создана, но ценой отказа от интуитивных концепций физики микромира и пересмотра всего философского представления человечества о материи и физической реальности.

Основных положений интерпретации квантовой механики существует три: *статистическая интерпретация функции состояния* (М. Борн, 1926); *принцип неопределенности* (В. Гейзенберг, 1927); *принцип дополнительности* (Н. Бор, 1928).

Согласно статистической интерпретации Борна, функция состояния (а точнее, квадрат ее модуля) описывает не распределение плотности массы частицы в пространстве, а *распределение плотности вероятности* нахождения частицы в данной точке пространства в данный момент времени. Тем самым снимается проблема нелокальности, свойственная ранним интерпретациям де Бройля и Шредингера. Соответственно, идея о волнах материи отвергается, и квантовая частица объявляется корпускулой, но принципиально отличной от классической корпускулы в ньютоновском смысле, а именно – *квантовая частица не имеет траектории*. Ее «движение» имеет вероятностный, статистический характер не из-за отсутствия начальной информации о параметрах, но является фундаментальным свойством, потому сам термин «движение» применительно к квантовой частице применяется условно и взят в кавычки, так как из-за отсутствия определенной траектории классическое определение данного термина теряет смысл. Соответственно, после решения уравнения Шредингера и нахождения функции состояния, вместо утверждения, что «частица в момент времени  $t$  находится в точке  $q$ », привычного в классической механике, утверждается, что «в момент  $t$  существует вероятность обнаружить частицу в объеме  $V$ , равная:

$$P(t) = \int_V \Psi^*(\vec{q}, t) \Psi(\vec{q}, t) d\vec{q}.$$

Соответственно, прочие наблюдаемые физические величины, относящиеся к частице, также имеют смысл статистически-усредненных. Так, чтобы вычислить среднее по объему для некой физической величины  $A$ , нужно рассчитать интеграл:

$$\langle A \rangle(t) = \int_V \Psi^*(\vec{q}, t) \hat{A} \Psi(\vec{q}, t) d\vec{q},$$

где  $\hat{A}$ - оператор, сопоставляемый данной величине в формализме квантовой механики.

Принцип неопределенности Гейзенberга устанавливает особую роль канонически-сопряженных величин. В классической механике, как уже было сказано выше, наличие точно определенной траектории частицы позволяет столь же точно определить все параметры ее движения и связанные с ними физические величины. В квантовой же механике утверждается, что для каждой канонически сопряженной пары величин погрешности их определения, как экспериментального, так и теоретического, не являются произвольными, а подчиняются соотношению:

$$\Delta a \cdot \Delta b \geq const.$$

Практически значимые варианты этого соотношения связывают координату и импульс частицы:  $\Delta q \cdot \Delta p \geq \eta/2$ ; полную энергию системы и время ее измерения:  $\Delta E \cdot \Delta t \geq \eta/2$ ; и, в квантовой оптике, число фотонов в системе  $n$  и фазу  $\Phi$  соответствующей им волны:  $\Delta n \cdot \Delta \Phi \geq 2\pi$ .

Принцип дополнительности Бора подводит общую базу под известные свойства квантовой частицы – отсутствие траектории, невозможность точного измерения канонически сопряженных величин и одновременную демонстрацию корпускулярных и волновых свойств. Все это является следствием того факта, что, во-первых, любой натурный эксперимент или его теоретическое моделирование предусматривает наличие макроскопических, «классических» объектов – измерительной аппаратуры и наблюдателя, которые так или иначе физически взаимодействуют с объектом наблюдения. В классической физике энергия этого взаимодействия считается пренебрежимо малой и не влияющей на результат эксперимента. В микромире же энергия процесса взаимодействия аппаратуры и объекта может многократно превышать энергию изучаемых процессов. Этим и объясняется принципиальная неопределенность и вероятностный характер квантовых процессов для макроскопических наблюдателей, поскольку измерительная процедура, нацеленная на определение какой-либо величины, вследствие взаимодействия с объектом наблюдения неминуемо изменит сам объект и «испортит» его прочие параметры, сделав невозможным их точное определение одновременно с основной величиной. Корпускулярно-волновой дуализм имеет ту же природу. Кvantовые объекты, которые по своей сути не являются ни корпускулами, ни волнами, будучи вовлечены в определенную экспериментальную схему, на макроскопическом уровне демонстрируют свойства макрообъектов - «корпускул» или «волн», в соотношении, определенными условиями эксперимента. Причем корпускулярные и волновые свойства находятся в отношении «дополнения» друг к другу (отсюда и название принципа), то есть,

чем в большей степени демонстрируются волновые свойства, тем меньше корпускулярные, и наоборот.

В квантовой электродинамике и оптике этот принцип применяется следующим образом. Поскольку число фотонов в системе  $n$  и фаза  $\Phi$  соответствующей им волны являются сопряженными величинами и связаны соотношением неопределенности  $\Delta n \cdot \Delta \Phi \geq 2\pi$ , то если в эксперименте или теоретическом анализе точно фиксируется число фотонов, фаза оказывается неопределенной и волновые представления об электромагнитном поле неприменимы. Обычно это актуально, когда само число фотонов относительно невелико. В большинстве же обычных задач оптики число  $n$  принимающих участие в наблюдаемом процессе фотонов огромно, и, соответственно, весьма велико и его среднее отклонение  $\Delta n$ . В этом случае фаза вполне определена, и поле можно рассматривать как волну.

## 4.2 Принцип неопределенности в теории оптического сигнала и теорема Котельникова

Наблюдаемые физические процессы в оптике часто отождествляются с аналитическими сигналами, что позволяет применять для их описания и анализа развитый математический аппарат теории сигналов. В рамках этой теории принцип неопределенности приобретает смысл закономерности, связывающей локализации сигнала в координатном и частотном пространствах.

Пусть  $s_1(t)$  и  $s_2(t)$  - зависящие от времени комплексные сигналы. Для них справедливо неравенство Шварца:

$$|(s_1, s_2)|^2 \leq (s_1, s_1)(s_2, s_2)$$

С учетом определения скалярного произведения сигналов неравенство Шварца можно записать:

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} (s_1^* \cdot s_2 + s_2^* \cdot s_1) dt \right|^2 \leq 4 \int_{-\infty}^{\infty} |s_1|^2 dt \int_{-\infty}^{\infty} |s_2|^2 dt$$

Пусть  $s_1(t) = t \cdot s(t)$  и  $s_2(t) = \frac{ds(t)}{dt}$ . В этом случае:

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} \left[ ts^* \frac{ds}{dt} + ts \frac{ds^*}{dt} \right] dt \right|^2 \leq 4 \int_{-\infty}^{\infty} |ts|^2 dt \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{ds}{dt} \right|^2 dt$$

Левая часть неравенства, в случае  $t \cdot |s(t)| \xrightarrow{|t| \rightarrow \infty} 0$ , что справедливо для реальных физических сигналов, равна квадрату энергии сигнала:

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} t \left[ s^* \frac{ds}{dt} + s \frac{ds^*}{dt} \right] dt \right|^2 = \left| \int_{-\infty}^{\infty} t \left[ \frac{d|s|^2}{dt} \right] dt \right|^2 = \left| \int_{-\infty}^{\infty} |s|^2 dt \right|^2 = E^2$$

Таким образом:  $E^2 \leq 4 \int_{-\infty}^{\infty} |ts|^2 dt \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{ds}{dt} \right|^2 dt$

Если  $s(\omega)$  - спектральная плотность сигнала  $s(t)$ , то  $\frac{ds}{dt} \xrightarrow{F} i\omega \cdot s(\omega)$  и  
 $\left| \frac{ds}{dt} \right| \xrightarrow{F} \omega^2 \cdot |s(\omega)|^2$ . Согласно равенству Парсеваля:

$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{ds}{dt} \right|^2 dt \xrightarrow{F} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |s(\omega)|^2 d\omega$ , и неравенство примет вид:

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^2 |s(t)|^2 dt \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |s(\omega)|^2 d\omega \geq \frac{\pi}{2} E^2$$

Протяженности сигнала во временном и частотном пространствах, по определению:

$$(\Delta t)^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} t^2 |s(t)|^2 dt}{\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt} = \frac{1}{E} \int_{-\infty}^{\infty} t^2 |s(t)|^2 dt \quad (\Delta\omega)^2 = \frac{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |s(\omega)|^2 d\omega}{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |s(\omega)|^2 d\omega} = \frac{1}{2\pi E} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |s(\omega)|^2 d\omega$$

Подставляя в неравенство и извлекая квадратный корень, получим соотношение неопределенности для сигнала в окончательном виде:

$$\Delta t \cdot \Delta\omega \geq \frac{1}{2} \quad (4.1)$$

Если речь идет об оптическом сигнале, то умножением неравенства (4.1) на постоянную Планка  $\eta$  получается классическое соотношение неопределенности Гейзенберга для энергии и времени  $\Delta E \cdot \Delta t \geq \eta/2$ , так как  $\Delta E = \eta \Delta\omega$ .

Если же одновременно умножить и поделить (3.1) на фазовую скорость света  $v = c/n$ , то получится:  $v \Delta t \cdot \frac{\Delta\omega}{v} \geq \frac{1}{2}$ . Так как  $v \Delta t = \Delta x$  и  $\frac{\Delta\omega}{v} = \Delta k$ , то получается другая классическая форма соотношения неопределенности для координаты и импульса фотона:

$$\Delta x \cdot \Delta k \geq \frac{1}{2} \text{ или } \Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{\eta}{2}.$$

В случае пространственного двумерного оптического сигнала  $s(x, y)$ , спектр которого  $s(u, v)$  и энергия  $E = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |s(x, y)|^2 dx dy$ , аналогично с помощью

неравенства Шварца выводятся соотношения:  $\Delta x \cdot \Delta u \geq \frac{1}{2}$  и  $\Delta y \cdot \Delta v \geq \frac{1}{2}$ .

Перемножая их, получаем общее соотношение:  $\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta u \cdot \Delta v \geq \frac{1}{4}$ . Если же сигнал зависит также и от времени:  $s(x, y; t)$ , то его спектр зависит от частоты:  $s(u, v; \omega)$ , и соответственно, полное соотношение неопределенности:

$$\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta u \cdot \Delta v \cdot \Delta t \cdot \Delta \omega \geq \frac{1}{8}.$$

При необходимости учета состояния поляризации сигнала, которая имеет две ортогональные составляющие, левая часть соотношения умножается на 2:

$$\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta u \cdot \Delta v \cdot \Delta t \cdot \Delta \omega \geq \frac{1}{4}.$$

Особую важность данные соотношения приобретают в связи с задачей о передаче и преобразовании информации, носителем которой выступает сигнал с ограниченным спектром. Центральное место в теории подобных сигналов занимает следующая теорема (в формулировке Котельникова): сигнал  $s(t)$ , спектр которого  $s(\omega)$  ограничен частотами  $\pm\Omega$ , может быть восстановлен полностью и без искажений по известным дискретным отсчетам данного сигнала  $s(t_n)$ , взятым во временных точках  $t_n = \frac{n\pi}{\Omega}$ , расположенных через

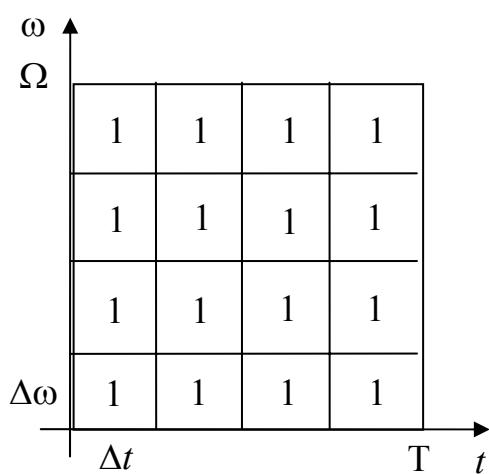
равные интервалы времени  $\Delta t = \frac{\pi}{\Omega}$ , то есть, может быть представлен в виде ряда:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sqrt{\Delta t} \cdot s(t_n) \cdot \frac{\sin[\Omega(t - t_n)]}{\Omega(t - t_n)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{\pi}{\Omega}} \cdot s\left(\frac{n\pi}{\Omega}\right) \cdot \frac{\sin(\Omega t - n\pi)}{\Omega t - n\pi}$$

На практике частота  $1/\Delta t$  обычно называется *частотой дискретизации* сигнала, а круговая частота  $v_{\max} = \Omega/2\pi$  - *несущей частотой*. Таким образом, частота дискретизации оказывается равна  $2v_{\max}$ , т.е. удвоенной несущей частоте.

Если отождествить протяженности сигнала во временном и частотном пространстве, входящие в соотношение неопределенности (3.1), с интервалом и частотой дискретизации, входящими в формулировку теоремы Котельникова, то можно сформулировать принципиально важное понятие *информационной емкости* спектрально-ограниченного сигнала.

Спектрально-ограниченный сигнал можно представить графически в виде *области существования* – прямоугольника на плоскости  $\omega t$ , ограниченного предельной частотой  $\Omega$  и временем  $T$  (возможен вариант  $T \rightarrow \infty$  или  $\Omega \rightarrow \infty$ )



**Рис. 4.1** Область существования сигнала с ограниченным спектром

(рис. 4.1). Данный прямоугольник разбивается на элементарные ячейки, площадь которых  $\Delta t \Delta \omega$ , в соответствии с соотношением неопределенности, не может быть меньше  $1/2$ . В соответствии с теоремой Котельникова и из соображения удобства, принято разбивать область существования сигнала на ячейки единичной площади:  $\Delta t \Delta \omega = 1$  (*ячейки Габора*). По определению, информационная емкость, или число информационных степеней свободы сигнала  $N$  равно числу элементарных ячеек в его области существования плюс единица:

$$N = n_{\omega} n_t + 1 = \frac{\Omega}{\Delta \omega} \cdot \frac{T}{\Delta t} + 1 = \Omega T + 1$$

Для пространственного оптического сигнала – область существования представляет собой шестимерный параллелепипед, но принцип разбиения на элементарные ячейки и подсчета информационной емкости такой же, как и для чисто временного сигнала: площадь ячейки равна  $\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z \cdot \Delta \xi \cdot \Delta \eta \cdot \Delta t \cdot \Delta \omega = 1$ , и число степеней свободы:

$$N = n_x n_y n_z n_{\xi} n_{\eta} n_{\omega} n_t + 1, \text{ или, с учетом поляризации, } N = 2 \cdot n_x n_{\xi} n_y n_{\eta} n_{\omega} n_t + 1.$$

Таким образом, соотношение неопределенности, утверждающее, что частота и интервал дискретизации сигнала не могут быть одновременно сколь угодно малыми, накладывает физическое ограничение на информационную емкость сигнала.

### 4.3 Разрешающая сила оптической системы в классическом рассмотрении

В классической оптике, минимальный размер изображения точечного источника для идеальной оптической системы впервые был теоретически определен Эйри в 1834 году с помощью волнового представления о свете в рамках теории Гюйгенса-Френеля.

Физически минимальный размер изображения определяется процессом дифракции на входной апертуре (входном зрачке) оптической системы. В простейшем случае, когда источник является бесконечно удаленным и монохроматическим, а оптическая система представляет собой единственную идеальную тонкую положительную линзу (рис. 4.2), то в ее фокальной

плоскости будет наблюдаться распределение интенсивности излучения, диктуемое дифракционными формулами Фраунгофера, вид которых определяется формой ограничивающей апертуры:

$$I(\sin \theta) = I_0 \cdot \left[ \frac{\sin(ka \sin \theta)}{ka \sin \theta} \right]^2 \text{ - для щели; } I(\sin \theta) = I_0 \cdot \left[ \frac{2J_1(ka \sin \theta)}{ka \sin \theta} \right]^2 \text{ - для круга.}$$

Здесь  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  - волновое число,  $a$  - полуширина или радиус апертуры, угол  $\theta$  - угол дифракции. В последней формуле, называемой *формулой Эйри*,  $J_1$  – функция Бесселя первого рода первого порядка.

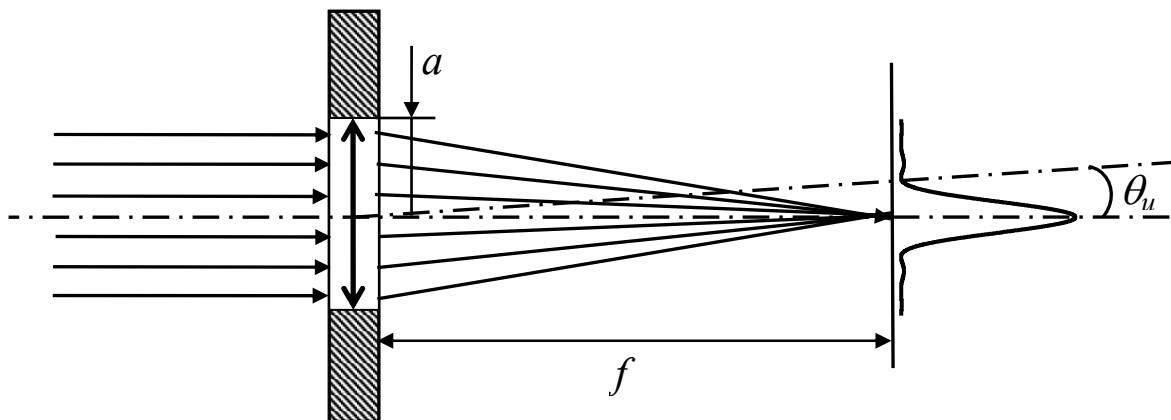


Рис. 4.2 Схема элементарной оптической системы (объектива)

Оба распределения интенсивности имеют схожий вид в сечении (рис. 4.3).

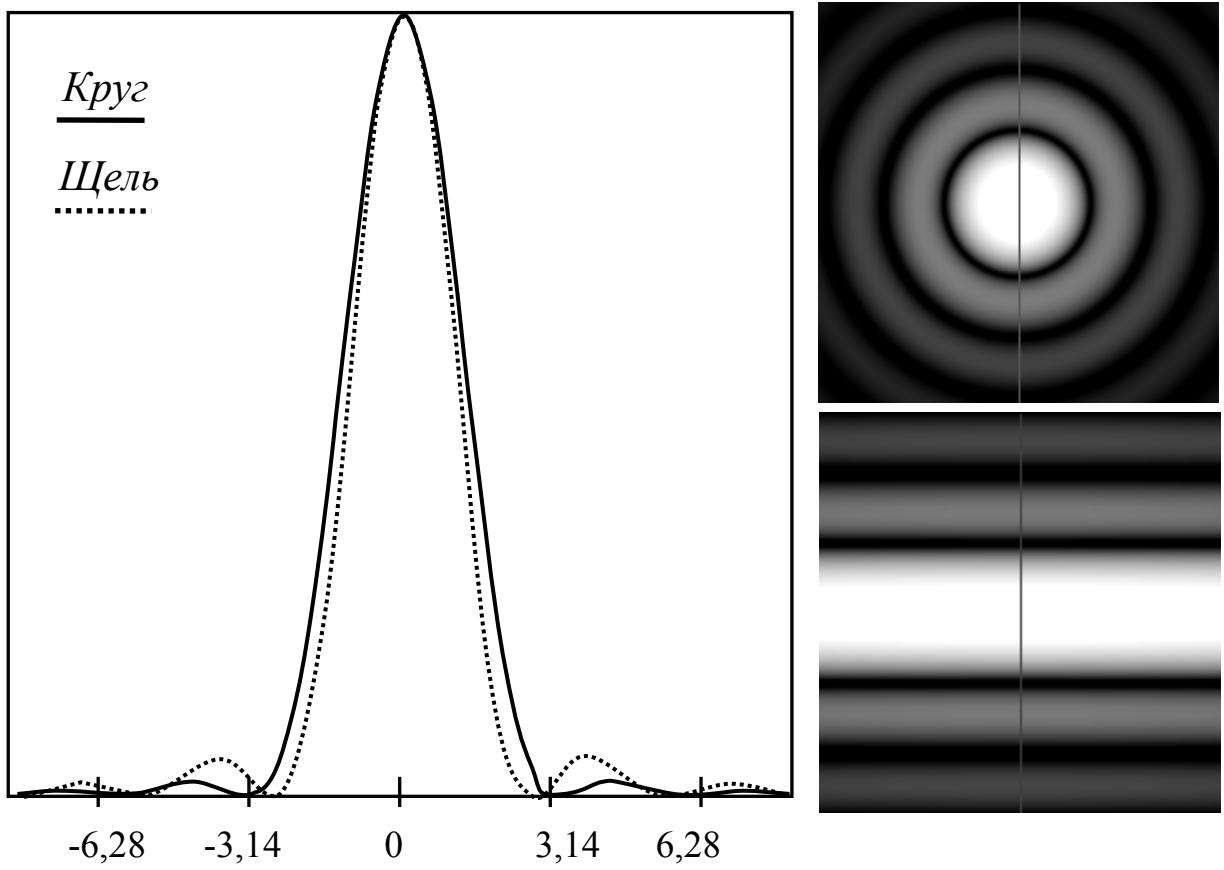


Рис. 4.3 Дифракционные распределения интенсивности для апертур в виде круга и щели

С изображением источника в классической оптике исторически принято отождествлять центральную часть данных распределений, т.е. нулевой дифракционный порядок – центральный кружок в случае круглой апертуры или центральную полосу для щели. Для оценки углового размера изображения  $\theta_u$  используются формулы, получаемые из формул Фраунгофера:

$$\theta_u \approx \frac{\lambda}{d} \text{ для щели; } \theta_u \approx 1.22 \frac{\lambda}{d} \text{ для круга,} \quad (4.2)$$

здесь  $d$  - ширина щели или диаметр апертуры, соответственно  $d = 2a$ . При малых углах дифракции  $\theta_u \approx \sin(\theta_u)$  и можно применять соответствующие оценочные формулы для линейных размеров изображения в фокальной плоскости:

$$L_u \approx f \frac{\lambda}{d} \text{ и } L_u \approx 1.22 f \frac{\lambda}{d}, \quad (4.3)$$

где  $f$  - фокусное расстояние линзы (объектива).

В случае наличия двух близкорасположенных точечных источников, излучение которых полностью не когерентно (например, двойная звезда), распределение интенсивности в фокальной плоскости изображающей системы будет являться простой суммой распределений интенсивности от каждого из источников (рис. 4.4).

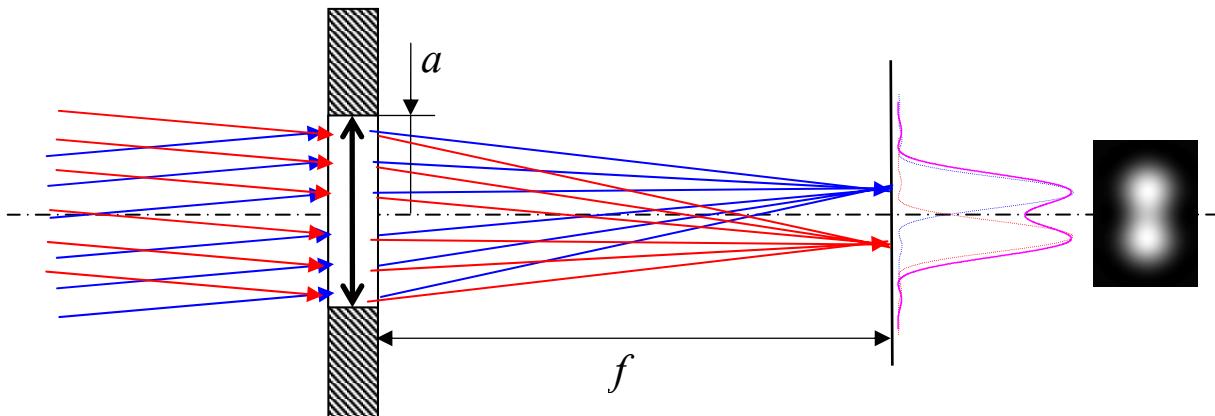


Рис. 4.4. Схема элементарной оптической системы (объектива) при наличии двух источников излучения

Принято считать, что оптическая система *разрешает* изображения источников, если величина интенсивности центрального минимума суммарного распределения не превышает уровня 0.85 от меньшего из соседних максимумов.

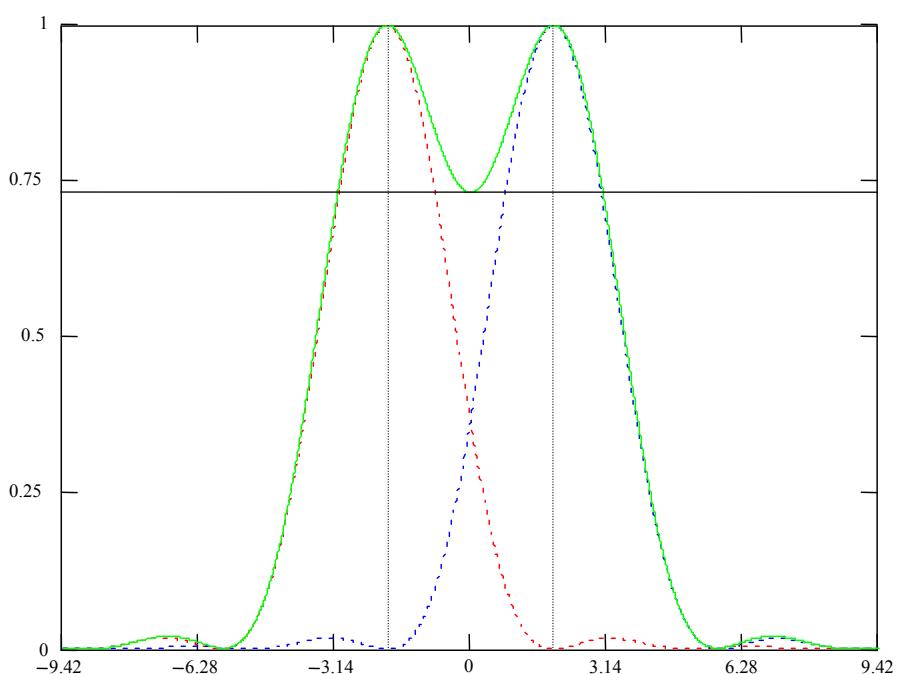


Рис. 4.5 Дифракционное распределение интенсивности в фокусе элементарной оптической системы (объектива) при наличии двух близкорасположенных некогерентных источников

Угловое расстояние между равными по яркости источниками, при котором достигается данное соотношение между соответствующими им дифракционными максимумами и минимумом суммарного распределения, является характеристикой оптической системы и называется ее *разрешающей способностью*. Также используется и более строгий критерий – изображения источников считаются разрешенными, если максимум одного распределения совпадает с первым минимумом другого (именно такая ситуация изображена на рис. 4.5), отношение интенсивности между минимумом и максимумами составляет в этом случае 0.74. Данный критерий удобен тем, что согласно нему, расстояние между максимумами оказывается равным размеру самих максимумов, так что для оценки разрешающей способности и минимального размера изображения можно пользоваться одними и теми же формулами (4.2) и (4.3).

В случае же когерентного (лазерная оптика) и частично-когерентного (микроскопия) излучения определение и критерии разрешающей способности будут существенно отличаться, в силу того, что дифракционное распределение от нескольких источников будет определяться уже не простым сложением независимых друг от друга действительных интенсивностей распределений от отдельных источников, но сложением комплексных амплитуд с учетом корреляционных отношений между ними.

#### **4.4 Квантовомеханическая модель дифракции плоской монохроматической волны на щели**

Рассмотрим схему эксперимента, аналогичную изображенной на рис. 4.2 в случае щели, но в отсутствии линзы.

С точки зрения квантовой механики, излучение удаленного точечного источника - плоская монохроматическая волна, представляет собой ансамбль фотонов, движущихся в направлении  $\theta_0$ , импульс которых определен и равен:

$$\mathbf{p} = (p, \theta_0), \quad p = mc = \frac{\eta\omega}{c} = \eta \frac{2\pi}{\lambda} = \eta k.$$

При этом физическая величина, канонически сопряженная с импульсом - координата - для каждого из фотонов полностью не определена и может иметь любое значение от плюс до минус бесконечности.

Поместим на пути фотонов экран, в котором имеется щель шириной  $2\Delta x$ . Часть фотонов будет задержана экраном, а часть пройдет сквозь щель. Этот процесс фактически можно интерпретировать как измерение координат той части фотонов, что прошла сквозь щель, так как факт прохождения фотонов означает, что они имели координаты в пределах  $x_0 \pm \Delta x$ , где  $x_0$  - положение середины щели. Любое измерение изменяет состояние системы, следовательно, наличие информации относительно координат фотонов приводит к возникновению неопределенности их импульсов. Соотношение неопределенности в случае щели достаточно записать только для x-компоненты импульса:

$$\Delta x \cdot \Delta p_x = \Delta x \cdot p \cdot \Delta \sin \theta \approx \eta / 2, \quad (4.4)$$

где  $\Delta \sin \theta$  - неопределенность синуса угла отклонения движения фотона от первоначального направления  $\theta_0$ , т.е., фактически неопределенность синуса угла дифракции. Выражение (3.4) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} \Delta x \cdot \Delta \sin \theta \cdot p &= \Delta x \cdot \Delta \sin \theta \cdot \eta k \approx \eta / 2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \Delta x &\approx \frac{\pi}{k \cdot \Delta \sin \theta}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Классическое выражение для распределения интенсивности дифракционного поля щели, как было сказано в предыдущем параграфе, описывается формулой Фраунгофера ( $\theta_0=0$ ):

$$I(\sin \theta) = I_0 \cdot \left[ \frac{\sin(k\Delta x \sin \theta)}{k\Delta x \sin \theta} \right]^2.$$

Из (3) следует, что синусы направлений на первые минимумы равны:

$$\sin \theta_{\min 1} = \pm \frac{\pi}{k\Delta x}. \quad (4.6)$$

Сравнивая выражения (4.5) и (4.6), можно сделать вывод, что диапазон квантовомеханической неопределенности угла дифракции отождествляется с нулевым дифракционным порядком, заключенным между первыми минимумами распределения интенсивности, на который приходится около 80% энергии дифрагированного излучения.

К данному выводу можно прийти и другим путем, воспользовавшись свойством функции состояния, согласно которому она может быть выражена через любую из двух канонически сопряженных переменных – или через координату, или через импульс, причем между двумя представлениями существует взаимно-однозначное соответствие. В рассматриваемой задаче априори известен вид функции состояния в координатном представлении:

$$\Psi(x) = \begin{cases} 1/\sqrt{2\Delta x}, & |x - x_0| \leq \Delta x \\ 0, & |x - x_0| > \Delta x \end{cases}$$

то есть, фотоны, прошедшие через щель, распределены по ее ширине по равновероятностному закону.

Для перехода к импульсному представлению, необходимо разложить функцию в координатном представлении в спектр по собственным функциям оператора импульса, являющимися решениями уравнения  $-i\eta \frac{\partial \psi_p(x)}{\partial x} = p_x \cdot \psi_p(x)$ . Эти функции с учетом нормировки имеют вид:

$\Psi_p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\eta}} \exp\left(\frac{ip_x x}{\eta}\right)$ , а собственные числа  $p_x$  образуют непрерывный спектр:  $-\infty \leq p_x \leq +\infty$ .

Таким образом, искомое разложение:

$$\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\eta}} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(p_x) \exp\left(\frac{ip_x x}{\eta}\right) dp_x$$

- фактически представляет собой интеграл Фурье, и, окончательно, импульсное представление функции состояния:

$$\Psi(p_x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\eta}} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x) \exp\left(-\frac{ip_x x}{\eta}\right) dx$$

В данной задаче, подставляя в явном виде  $\Psi(x)$  и  $p_x = \eta k \sin \theta$ :

$$|\Psi|^2(\eta k \sin \theta) = \left| \frac{1}{\sqrt{4\pi\eta\Delta x}} \int_{-\Delta x}^{\Delta x} \exp(-ikx \sin \theta) dx \right|^2 = \frac{1}{\pi\eta\Delta x} \left[ \frac{\sin(k\Delta x \sin \theta)}{k \sin \theta} \right]^2$$

- получаем для плотности вероятности распределения фотонов по углу дифракции классическую формулу Фраунгофера.

Таким образом, при большом количестве фотонов, они, в силу статистики, сформируют характерное дифракционное распределение интенсивности, выступая, согласно принципу дополнительности, подобно обычному классическому волновому процессу.

При наличии нескольких некогерентных источников испускаемые ими ансамбли фотонов считаются независимыми и могут рассматриваться отдельно, также независимыми оказываются и плотности вероятности их распределений, аналогично дифракционным распределениям интенсивности для некогерентных источников в классической оптике. Когерентное и частично-когерентное излучение в квантовой оптике должно описываться с помощью единых ансамблей, соответственно постановки задач и их анализ существенно усложняются.

## 5. Корреляционные функции и когерентность излучения

### 5.1. Общетеоретические положения

**Когерентность излучения.** Понятие когерентности в оптике вводится для характеристики согласованности (корреляции) световых колебаний в различных точках пространства и в различные моменты времени. Определим степень когерентности посредством корреляционной функции светового поля. Рассмотрим поляризованное поле, вектор напряженности электрического поля  $E$  которого колеблется в определенном направлении. Если вектор напряженности оптического поля содержит компоненту, случайным образом изменяющуюся по пространственным координатам  $\mathbf{r}$  и по времени  $t$ , то можно построить следующую корреляционную функцию

$$B(\mathbf{r}_1, t_1, \mathbf{r}_2, t_2) = \langle E(\mathbf{r}_1, t_1) E^*(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle,$$

где угловые скобки означают усреднение по всему пространству и по всему интервалу времени наблюдения. Для стационарных полей, статистические характеристики которых во времени не меняются,

$$B(\mathbf{r}_1, t_1, \mathbf{r}_2, t_2) = B(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_2 - t_1).$$

Принято выделять также статистически однородные поля, для которых корреляционная функция зависит лишь от разности  $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$

$$B(\mathbf{r}_1, t_1, \mathbf{r}_2, t_2) = B(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, t_1, t_2).$$

Однородное случайное поле называется изотропным, если корреляционная функция зависит лишь от абсолютного значения расстояния между двумя точками  $s = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$ . Для стационарных во времени и однородных в пространстве случайных полей

$$B(\mathbf{r}_1, t_1, \mathbf{r}_2, t_2) = B(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, t_2 - t_1) \equiv B(s, \tau),$$

где  $\tau = t_2 - t_1$ . Корреляционная функция  $B(s, \tau)$  принимает максимальное значение при  $s = \tau = 0$ .

Введем применительно к световому пучку нормированную корреляционную функцию

$$\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_2, t_1) = \frac{B(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t_2, t_1)}{\sqrt{I(\mathbf{r}_1, t_1)I(\mathbf{r}_2, t_2)}},$$

где  $I(\mathbf{r}_1, t_1)$  и  $I(\mathbf{r}_2, t_2)$  - интенсивности излучения в указанных пространственных точках и в указанные моменты времени. В случае стационарности поля светового пучка

$$\gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau = t_2 - t_1) = \frac{B(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \tau)}{\sqrt{I(\mathbf{r}_1, t_1)I(\mathbf{r}_2, t_2)}}.$$

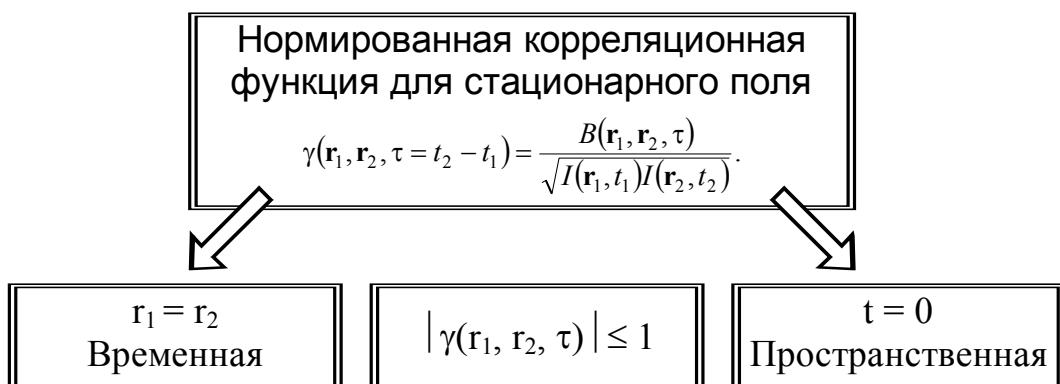
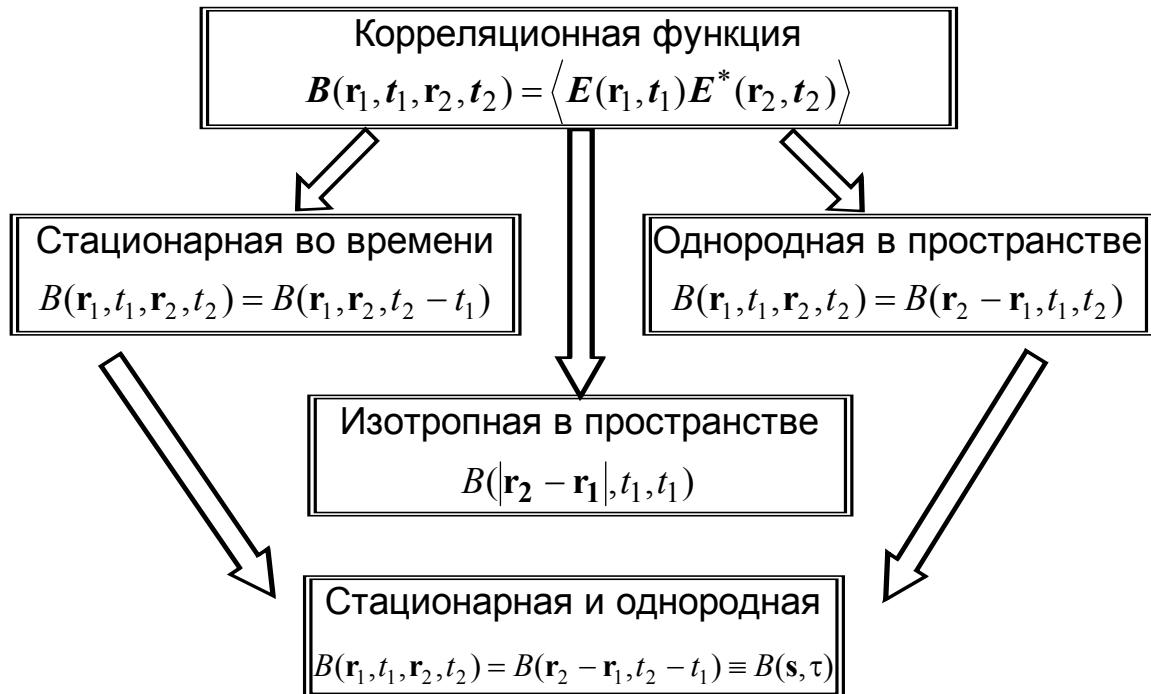


Рис. 5.1. Корреляционная функция. Свойства

Построенную таким образом величину  $\gamma$  называют комплексной степенью когерентности, так как корреляционные функции в общем случае комплексны. Абсолютную величину  $\gamma$  называют модулем степени когерентности или просто степенью когерентности. Степень когерентности всегда удовлетворяет неравенству

$$|\gamma(r_1, r_2, \tau)| \leq 1.$$

$|\gamma|$  при  $\tau = 0$  дает значение степени пространственной когерентности, а при  $r_2 = r_1$  - значение степени временной когерентности. Значение  $s = s_k$  и  $\tau = \tau_k$ , при которых степень пространственной и временной когерентности уменьшаются в заданное число раз называются соответственно размером зоны когерентности и временем когерентности.

## 5.2. Распространение взаимной когерентности. Распространение световых волн, функция взаимной когерентности

Пусть  $u(P,t)$  - скалярная амплитуда одной компоненты поляризации электрического или магнитного поля, связанная с монохроматическим оптическим сигналом (излучением). В соответствии с принятым в скалярной теории подходом, рассмотрим каждую компоненту независимо. Здесь  $P$  - пространственная координата точки, а параметр  $t$  - момент времени. Аналитический сигнал, связанный с  $u(P,t)$ , имеет вид  $u(P,t) = U(P,v) \exp(-j2\pi vt)$ , где  $v$  - частота волны, а  $U(P,v)$  - амплитуда фазора.

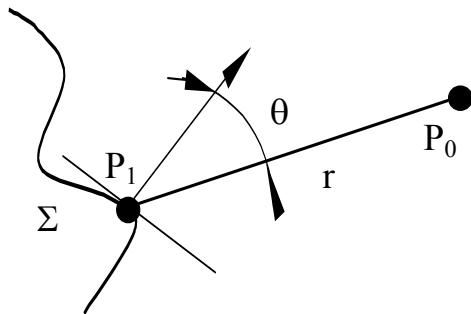


Рис.5.2. Схема распространения излучения

Пусть волна падает слева на неограниченную поверхность. Необходимо найти амплитуду фазора поля в точке  $P_0$  справа от поверхности  $\Sigma$  через характеристики поля на поверхности  $\Sigma$ .

В соответствии с принципом Гюйгенса-Френеля справедливо следующее решение

$$U(P_0, v) = \frac{1}{j\lambda} \iint_{\Sigma} U(P_1, v) \frac{\exp\left[j2\pi\left(\frac{r}{\lambda}\right)\right]}{r} \chi(\theta) ds,$$

где  $\lambda = c/v$  - длина волны излучения ( $c$  - скорость света);

$r$  - расстояние от точки  $P_1$  до точки  $P_0$ ;  $\theta$  - угол между прямой линией, соединяющей  $P_0$  и  $P_1$ , и нормалью к поверхности  $\Sigma$ ;

$\chi(\theta)$  – коэффициент наклона,  $\chi(0) = 1$  и  $0 \leq \chi(\theta) \leq 1$ .

Как правило, рассмотрение большинства задач ведется в приближении малых углов наклона и поэтому в дальнейшем, мы будем считать этот множитель равным единице.

Принцип Гюйгенса - Френеля можно интерпретировать таким образом. Каждая точка на поверхности  $\Sigma$  действует как новый вторичный источник сферических волн. Напряженность поля вторичного источника в точке  $P_1$  пропорциональна  $(j\lambda)^{-1} U(P_1, v)$ , и этот источник излучает с амплитудным коэффициентом направленности  $\chi(\theta)$ .

**Функция взаимной когерентности.** При распространении волны в пространстве ее структура изменяется. Изменяется соответственно и функция взаимной когерентности. Следовательно, можно говорить о распространении функции взаимной когерентности.

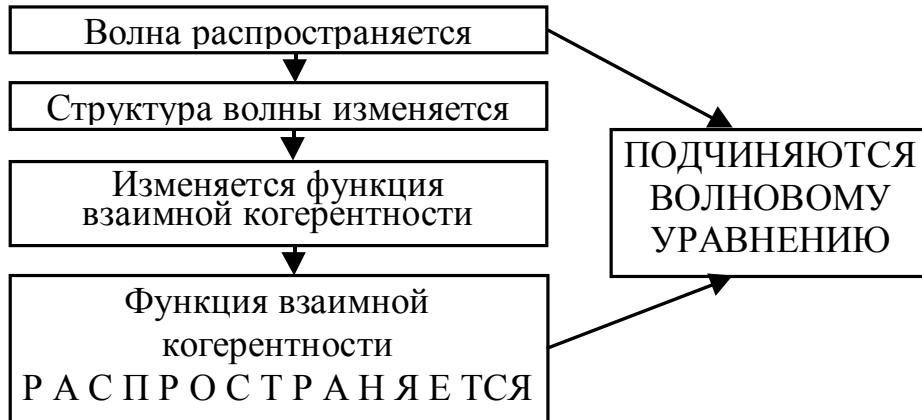


Рис.5.3. Распространение функции взаимной когерентности

Причина эта объясняется тем фактом, что световые волны подчиняются волновому уравнению.

**Решение, основанное на принципе Гюйгенса – Френеля.** Рассмотрим распространение световой волны с произвольными свойствами когерентности. Данна функция взаимной когерентности  $\Gamma(P_1, P_2; \tau)$  на поверхности  $\Sigma_1$  и надо найти функцию взаимной когерентности  $\Gamma(Q_1, Q_2; \tau)$  на поверхности  $\Sigma_2$ . То есть наша цель предсказать результаты интерференционного опыта Юнга на отверстиях  $Q_1$  и  $Q_2$  если известны результаты интерференционных опытов на всевозможных отверстиях  $P_1$  и  $P_2$ .

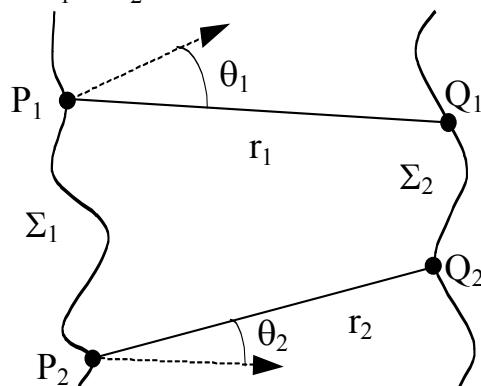


Рис.5.4. Процесс распространения функции взаимной когерентности

По определению функция взаимной когерентности на поверхности  $\Sigma_2$

$$\Gamma(Q_1, Q_2; \tau) = \langle u(Q_1, t + \tau) u^*(Q_2, t) \rangle.$$

Используя выражение для распространения узкополосного сигнала

$$u(Q_o, t) \approx \iint_{\Sigma} \frac{1}{j\lambda r} u(Q_1, t - \frac{r}{c}) dS, \quad r \gg \lambda$$

запишем выражение для узкополосного сигнала для нашего случая для двух точек  $Q_1$  и  $Q_2$  поверхности  $\Sigma$

$$\begin{aligned} u(Q_1, t + \tau) &\approx \iint_{\Sigma_1} \frac{1}{j\lambda r_1} u(P_1, t + \tau - \frac{r_1}{c}) dS_1 \\ u^*(Q_2, t) &\approx \iint_{\Sigma_1} \frac{(-1)}{j\lambda r_2} u^*(P_2, t - \frac{r_2}{c}) dS_2, \end{aligned}$$

Подставив выражение для полей в функцию взаимной когерентности и изменяя порядок выполнения интегрирования и усреднения, получим

$$\Gamma(Q_1, Q_2; \tau) = \iint_{\Sigma_1} \iint_{\Sigma_1} \frac{\langle u(P_1, t + \tau - \frac{r_1}{c}) u^*(P_2, t - \frac{r_2}{c}) \rangle}{\lambda^2 r_1 r_2} dS_1 dS_2.$$

Среднее по времени в подынтегральном выражении может быть выражено через функцию взаимной когерентности на поверхности  $\Sigma_1$ , что приводит к основному закону распространения взаимной когерентности

$$\Gamma(Q_1, Q_2; \tau) = \iint_{\Sigma_1} \iint_{\Sigma_1} \Gamma(P_1, P_2; \tau + \frac{r_2 - r_1}{c}) \frac{1}{\lambda r_1} \frac{1}{\lambda r_2} dS_1 dS_2.$$

В соответствии с условием квазимонохроматичности ( $\Delta\omega/\omega \ll 1$ ) оптическая разность хода должна быть намного меньше длины когерентности излучения. Опираясь на это условие, найдем закон распространения излучения для взаимной интенсивности, заметив, что взаимная интенсивность

$$J(Q_1, Q_2) = \Gamma(Q_1, Q_2; 0); \quad \tau=0,$$

а также

$$\Gamma(P_1, P_2; \frac{r_2 - r_1}{c}) = J(P_1, P_2) \exp \left[ -j \frac{2\pi}{\lambda} (r_2 - r_1) \right].$$

Подставив это в выражение для распространения взаимной когерентности, при  $\tau=0$  получим

$$J(Q_1, Q_2) = \iint_{\Sigma_1} \iint_{\Sigma_1} J(P_1, P_2) \exp \left[ -j \frac{2\pi}{\lambda} (r_2 - r_1) \right] \frac{1}{\lambda r_1} \frac{1}{\lambda r_2} dS_1 dS_2.$$

Это основное выражение, определяющее закон распространения взаимной интенсивности.

Распределение интенсивности на поверхности  $\Sigma_2$  можно найти, устремив  $Q_1$  к  $Q_2$  (т.е. точки  $Q_1$  и  $Q_2$  должны совпасть) в последней формуле и заменив

$$r_1 \rightarrow r_1', r_2 \rightarrow r_2', \quad Q_1 \rightarrow Q_1', \quad Q_2 \rightarrow Q_2'.$$

### 5.3. Предельные формы функции взаимной когерентности

**Когерентное поле.** Волновое поле называется полностью когерентным, если для всякой пары точек  $(P_1, P_2)$  существует задержка  $\tau_{12}$  (функция точек  $(P_1, P_2)$ ) такая, что  $|\gamma_{12}(\tau_{12})| = 1$ .

Кроме того, можно показать, что волновое поле называется полностью когерентным при том и только при том условии, что для всякой пары точек  $P_1$  и  $P_2$  существует временная задержка  $\tau_{12}$ , такая, что комплексные огибающие двух сигналов с относительной задержкой  $\tau_{12}$  различаются только не зависящим от времени постоянным комплексным множителем  $A(P_2, t) = k_{12} A(P_1, t + \tau_{12})$ ;  $k_{12}$  - комплексная постоянная, которая, вообще говоря, зависит от точек  $P_1$  и  $P_2$ .

Если поле можно считать квазимохроматическим, то это условие должно выполняться для всех пар точек, возможных в эксперименте. Это означает, что для всех точек  $(P_1, P_2)$  требуется одно и то же время задержки  $\tau_{12}$ , чтобы исключить эффекты временной когерентности. Если отверстие  $P_1$  приблизить к  $P_2$ , то единственная задержка  $\tau_{12}$ , которая соответствует максимуму  $|\Gamma_{12}(\tau)|$ , должна быть тождественно равна нулю. В этом случае комплексные огибающие в точках  $P_1$  и  $P_2$  связаны соотношением  $A(P_2, t) = k_{12}A(P_1, t)$ .

Таким образом, комплексные огибающие во всех точках изменяются согласованно, различаясь только не зависящими от времени амплитудами и фазовыми множителями.

**Некогерентное поле.** Понятию полностью когерентного поля противоположно понятие некогерентного. Поэтому было бы естественным считать поле некогерентным, если выполняется условие  $|\Gamma_{12}(\tau)| = 0$  для всех  $P_1 \neq P_2$  и при всех  $\tau$ . Но это определение не имеет реального смысла.

Подставив  $\Gamma[P_1, P_2; \tau + (r_2 - r_1)/c]$  в выражение для распространения взаимной когерентности и проинтегрировав сначала по поверхности  $\Sigma_1$ , получим, что подынтегральное выражение во втором интеграле будет равно нулю всюду, кроме точек  $P_1 = P_2$ . Таким образом, второе интегрирование дает нуль, и мы получаем  $\Gamma(Q_1, Q_2; \tau) = 0$ .

Если положить  $\tau = 0$  и  $Q_1 = Q_2$ , то из последнего равенства следует

$$I(Q_1) = I(Q_2) = 0.$$

*Следовательно, если волновое поле на поверхности  $\Sigma_1$  некогерентно, то оно не достигает поверхности  $\Sigma_2$ ! Т.е. поверхность не излучает.*

### 5.4. Теорема Ван Циттерта – Цернике. Значение теоремы и следствия из нее

Эта теорема является одной из наиболее важных теорем современной оптики. Она описывает преобразование поперечной корреляционной функции светового пучка в процессе распространения. В соответствии с этой теоремой

оказывается, что поперечный радиус корреляции частично когерентного волнового пучка в процессе распространения за счет дифракции увеличивается.

Будем считать, что свет является квазимохроматическим. Мы знаем, что взаимная интенсивность распространяется в соответствии с законом

$$J(Q_1, Q_2) = \iint_{\Sigma_1 \Sigma_2} J(P_1, P_2) \exp \left[ -j \frac{2\pi}{\lambda} (r_2 - r_1) \right] \frac{1}{\lambda r_1} \frac{1}{\lambda r_2} dS_1 dS_2,$$

который справедлив для различной степени когерентности, характеризуемой взаимной интенсивностью  $J(P_1, P_2)$ .

Для некогерентного источника с точностью до константы

$$J(P_1, P_2) = I(P_1) \delta(|P_1 - P_2|).$$

Взаимная интенсивность получается, используя "избирательные" свойства  $\delta$ -функции.

$$J(Q_1, Q_2) = \frac{1}{\lambda^2} \iint_{\Sigma} I(P_1) \exp \left[ -j \frac{2\pi}{\lambda} (r_2 - r_1) \right] \frac{1}{r_1} \frac{1}{r_2} dS.$$

Чтобы упростить это выражение, примем некоторые предположения и приближения.

1. Размеры источника и области наблюдения намного меньше расстояния  $z$ , от источника до плоскости наблюдения, тогда

$$\frac{1}{r_1} \times \frac{1}{r_2} \approx \frac{1}{z^2}.$$

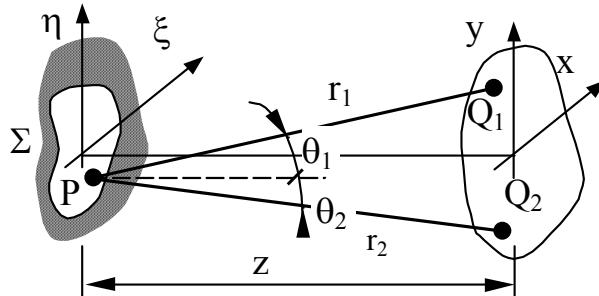


Рис.5.5. К выводу теоремы Ван Циттерта-Цернике

Тогда выражение для взаимной интенсивности в наблюдаемой области

$$J(Q_1, Q_2) = \frac{1}{(\lambda z)^2} \iint_{\Sigma} I(P_1) \exp \left[ -j \frac{2\pi}{\lambda} (r_2 - r_1) \right] dS.$$

Далее, предполагая, что плоскости источника излучения и наблюдения параллельны и учитывая параксиальное приближение

$$r_1 = \sqrt{z^2 + (x_2 - \xi)^2 + (y_2 - \eta)^2} \approx z + \frac{(x_2 - \xi)^2 + (y_2 - \eta)^2}{2z},$$

$$r_2 = \sqrt{z^2 + (x_1 - \xi)^2 + (y_1 - \eta)^2} \approx z + \frac{(x_1 - \xi)^2 + (y_1 - \eta)^2}{2z}.$$

Вводя обозначения  $\Delta x = x_2 - x_1$ ,  $\Delta y = y_2 - y_1$ , и, принимая во внимание, что  $I(\xi, \eta) = 0$  для области вне источника  $\Sigma$ , окончательно получим

$$J(x_1, y_1; x_2, y_2) = \frac{e^{-j\Psi}}{(\lambda z)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} I(\xi, \eta) \exp\left[j \frac{2\pi}{\lambda z} (\Delta x \xi + \Delta y \eta)\right] d\xi d\eta,$$

где фазовый множитель

$$\Psi = \frac{\pi}{\lambda z} \left[ (x_2^2 + y_2^2) - (x_1^2 + y_1^2) \right] = \frac{\pi}{\lambda z} (\rho_2^2 - \rho_1^2);$$

$\rho_1$  и  $\rho_2$  - расстояния от точек  $(x_1, y_1)$  и  $(x_2, y_2)$  до оптической оси.

В нормированном виде теорема принимает вид

$$\gamma(x_1, y_1; x_2, y_2) = \frac{e^{-j\Psi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} I(\xi, \eta) \exp\left[j \frac{2\pi}{\lambda z} (\Delta x \xi + \Delta y \eta)\right] d\xi d\eta}{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} I(\xi, \eta) d\xi d\eta}.$$

Если выполняется равенство  $I(x_1, y_1) \approx I(x_2, y_2)$ , то

$|\gamma(x_1, y_1; x_2, y_2)|$  - есть видность.

**Значение теоремы и следствия из нее.** Теорема Ван Циттерта-Цернике, может быть сформулирована следующим образом: с точностью до множителя  $\exp(-j\Psi)$  и масштабных постоянных взаимную интенсивность  $J(x_1, y_1; x_2, y_2)$  можно найти, выполнив двумерное преобразование Фурье распределения интенсивности  $I(\xi, \eta)$  по поверхности источника.

Следует также обратить внимание, что  $|\gamma|$  зависит только от разности координат  $(\Delta x, \Delta y)$ .

Поскольку  $\Psi = \frac{\pi}{\lambda z} (\rho_2^2 - \rho_1^2)$  множитель  $\exp(-j\Psi)$  может быть опущен в

случаях:

1.  $z \gg 2(\rho_2^2 - \rho_1^2)/\lambda$  то  $\psi < \pi/2$  и  $\exp(-j\psi) \approx 1$ .

2. Если точки  $Q_1$  и  $Q_2$  находятся на одинаковом расстоянии от оптической оси то фаза  $\psi = 0$ .

3. Если отверстия лежат не на плоскости, а на сфере радиусом  $z$  с центром на источнике.

**ПРИМЕР: Круглое отверстие.** Пусть источник представляет собой круг с радиусом  $a$ . В соответствии с теоремой Ван Циттерта-Цернике функция комплексной когерентности описывается функцией Эйри. Эта зависимость показана на рис. 5.6.

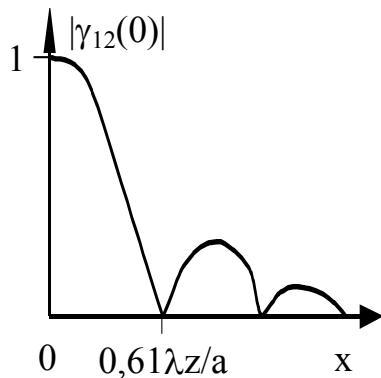


Рис.5.6. Функция комплексной когерентности для круглого источника

Первый нуль модуля  $|\gamma_{12}|$  имеет место при  $0.61\lambda z/a$ . Следовательно, колебания в точках  $(x_1, y_1)$  и  $(x_2, y_2)$  полностью некогерентны при удалении их друг от друга на расстояние  $d$ , равное  $0.61\lambda z/a$ . Если считать допустимой степень частичной когерентности между точками равной 0.88, то необходимо, чтобы расстояние  $d$  между ними удовлетворяло условию

$$d \leq \frac{0.32\lambda}{2\alpha},$$

$\alpha$  - угол, под которым виден радиус источника.

*Расстояние между точками, для которых  $|\gamma_{12}| = 0.88$  называется интервалом пространственной когерентности.*

## 5.5. Дифракция частично когерентного излучения на отверстии

Рассмотрим случай сравнительно часто встречающийся на практике - падающее излучение является частично когерентным. Предположим, что частично когерентная квазимохроматическая волна падает на непрозрачный экран с отверстием. Отверстие можно описать амплитудной функцией пропускания вида

$$t_A(\xi, \eta) = \begin{cases} 1, & (\xi, \eta) \text{ на поверхности } \Sigma \\ 0 & \text{в остальной области} \end{cases},$$

которая, в общем случае, является комплексной.

Необходимо найти распределение интенсивности в плоскости экрана, расположенного на расстоянии  $z$  параллельно плоскости отверстия.

Учитывая общее соотношение между взаимной интенсивностью падающей волны и прошедшей

$$J_t(\xi_1, \eta_1; \xi_2, \eta_2) = t_A(\xi_1, \eta_1) t_A^*(\xi_2, \eta_2) J_i(\xi_1, \eta_1; \xi_2, \eta_2),$$

где  $J_i, J_t$  – соответственно взаимная интенсивность падающей и прошедшей волн, рассмотрим распределение интенсивности в области наблюдения, считая, что размер отверстия и области наблюдения намного меньше расстояния от плоскости отверстия до плоскости наблюдения.

$$I(x, y) \approx \frac{1}{(\lambda z)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} J_t(\xi_1, \eta_1; \xi_2, \eta_2) \exp \left[ -j \frac{2\pi}{\lambda} (\mathbf{r}_1' - \mathbf{r}_2') \right] d\xi_1 d\eta_1 d\xi_2 d\eta_2.$$

Заменим амплитудную функцию пропускания  $t_A$  отверстия функцией "зрачка"  $P(\xi, \eta)$ , которую для общности мы считаем комплексной и получим следующее выражение

$$\begin{aligned} I(x, y) \approx & \frac{1}{(\lambda z)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} P(\xi_1, \eta_1) P^*(\xi_2, \eta_2) J_i(\xi_1, \eta_1; \xi_2, \eta_2) \times \\ & \times \exp \left[ -j \frac{2\pi}{\lambda} (\mathbf{r}_1' - \mathbf{r}_2') \right] d\xi_1 d\eta_1 d\xi_2 d\eta_2 \end{aligned}$$

Упростим данное выражение, сделав предположение, что функция взаимной интенсивности может быть представлена в форме

$$J_i(\xi_1, \eta_1; \xi_2, \eta_2) = I_0 \gamma_i(\Delta\xi, \Delta\eta),$$

где  $\gamma_i$  – комплексный коэффициент когерентности. Данное приближение справедливо, например, в схеме, где свет некогерентного источника достигает отверстия, проходя через конденсорную систему.

В параксиальном приближении можно воспользоваться следующим выражением

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_2' - \mathbf{r}_1' & \approx \frac{1}{2z} \left[ (\xi_2^2 + \eta_2^2) - (\xi_1^2 + \eta_1^2) - 2(x\Delta\xi + y\Delta\eta) \right] = \\ & = \frac{1}{z} \left[ \bar{\xi}\Delta\xi + \bar{\eta}\Delta\eta - x\Delta\xi - y\Delta\eta \right]. \end{aligned}$$

Здесь использованы обозначения

$$\Delta\xi = \xi_2 - \xi_1, \quad \bar{\xi} = \frac{\xi_1 + \xi_2}{2}, \quad \Delta\eta = \eta_2 - \eta_1, \quad \bar{\eta} = \frac{\eta_1 + \eta_2}{2}.$$

Запишем выражение для интенсивности

$$I(x, y) = \frac{I_0}{(\lambda z)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int P\left(\bar{\xi} - \frac{\Delta\xi}{2}, \bar{\eta} - \frac{\Delta\eta}{2}\right) P^*\left(\bar{\xi} + \frac{\Delta\xi}{2}, \bar{\eta} + \frac{\Delta\eta}{2}\right) \times \\ \times \gamma_i(\Delta\xi, \Delta\eta) \exp\left\{-j \frac{2\pi}{\lambda z} (\bar{\xi}\Delta\xi + \bar{\eta}\Delta\eta)\right\} \times \exp\left\{j \frac{2\pi}{\lambda z} (x\Delta\xi + y\Delta\eta)\right\} d\bar{\xi} d\bar{\eta} d\Delta\xi d\Delta\eta$$

Предположим опять, что  $z$  не меньше геометрического среднего из расстояний до области дальнего поля при соответствующих размерах отверстия и площади когерентности:

$$z > 4 \frac{\xi\Delta\xi}{\lambda}, \quad z > 4 \frac{\bar{\eta}\Delta\eta}{\lambda}.$$

Это позволяет нам опустить первый экспоненциальный множитель, что приводит к следующему выражению

$$I(x, y) \approx \frac{I_0}{(\lambda z)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int R(\Delta\xi, \Delta\eta) \gamma_i(\Delta\xi, \Delta\eta) \exp\left[j \frac{2\pi}{\lambda z} (x\Delta\xi + y\Delta\eta)\right] d\Delta\xi d\Delta\eta,$$

где  $R$  - автокорреляционная функция комплексной функции зрачка  $P$ , которая по определению равна:

$$R(\Delta\xi, \Delta\eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int P\left(\bar{\xi} - \frac{\Delta\xi}{2}, \bar{\eta} - \frac{\Delta\eta}{2}\right) P^*\left(\bar{\xi} + \frac{\Delta\xi}{2}, \bar{\eta} + \frac{\Delta\eta}{2}\right) d\bar{\xi} d\bar{\eta}.$$

Таким образом, *распределение интенсивности  $I(x, y)$  в дифракционной картине можно найти, выполнив двумерное преобразование Фурье произведения функций  $R$  и  $\gamma_i$ .*

Рассмотрим теперь более подробно условия, наложенные на удаление области наблюдения в зависимости от области рассмотрения в плоскости объекта дифракции  $z > 4 \frac{\xi\Delta\xi}{\lambda}, \quad z > 4 \frac{\bar{\eta}\Delta\eta}{\lambda}$ .

Во-первых, можно показать, что необходимость наложения данного условия отпадает, если в контакте с плоскостью отверстия находится собирающая линза с фокусным расстоянием  $f = z$ . Если линза отсутствует, то этим условиям удовлетворить гораздо труднее, поскольку здесь не сделано предположение, что площадь когерентности намного меньше площади источника.

Во вторых, если  $D$  - максимальный линейный размер отверстия, а  $d_c$  - максимальный линейный размер области когерентности на апертуре, то требуемые условия будут выполняться, когда

$$z > \begin{cases} \frac{2D^2}{\lambda} & \text{при } d_c > D, \\ \frac{2Dd_c}{\lambda} & \text{при } d_c < D \end{cases}.$$

Условие  $z > 2D^2/\lambda$  идентично условию дифракции Фраунгофера. Это условие накладывается, если падающее на отверстие излучение приближается к полностью когерентному.

Физический смысл данной теоремы лучше всего уяснить, рассматривая предельные случаи.

1. Пусть отверстие освещается плоской волной, падающей нормально (такое освещение является полностью когерентным). Следовательно, комплексный коэффициент когерентности  $\gamma_i$  равен 1 и мы получаем

$$I(x, y) \approx \frac{I_0}{(\lambda z)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} R(\Delta\xi, \Delta\eta) \exp\left[j \frac{2\pi}{\lambda z} (x\Delta\xi + y\Delta\eta)\right] d\Delta\xi d\Delta\eta.$$

Результат, получаемый на основании данной теоремы, должен полностью соответствовать результату, получаемому в соответствии дифракционной формулой Фраунгофера для интенсивности

$$I(x, y) = \frac{I_0}{(\lambda z)^2} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} P(\xi, \eta) \exp\left[j \frac{2\pi}{\lambda z} (\xi x + \eta y)\right] d\xi d\eta \right|^2.$$

2. Пусть падающее излучение имеет площадь когерентности много меньшую чем размер отверстия. В этом случае автокорреляционная функция  $R$  в пределах всей апертуры (в пределах всей области значений  $(\Delta\xi, \Delta\eta)$ , для которых  $\gamma_i \neq 0$ ) имеет примерно постоянное значение равное площади отверстия.

$$I(x, y) \approx \frac{I_0}{(\lambda z)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma_i(\Delta\xi, \Delta\eta) \exp\left[j \frac{2\pi}{\lambda z} (x\Delta\xi + y\Delta\eta)\right] d\Delta\xi d\Delta\eta.$$

Следовательно, во втором случае, форма наблюдаемой дифракционной картины распределения интенсивности определяется, в основном, комплексным коэффициентом когерентности  $\gamma_i$  и практически не зависит от формы отверстия при условии, что  $D \gg d_c$ . В промежуточных случаях распределение интенсивности  $I(x, y)$  определяется сверткой Фурье-образов величин  $R$  и  $\gamma_i$ .

В этом случае происходит "сглаживание" дифракционной картины по мере постепенного уменьшения площади когерентности.

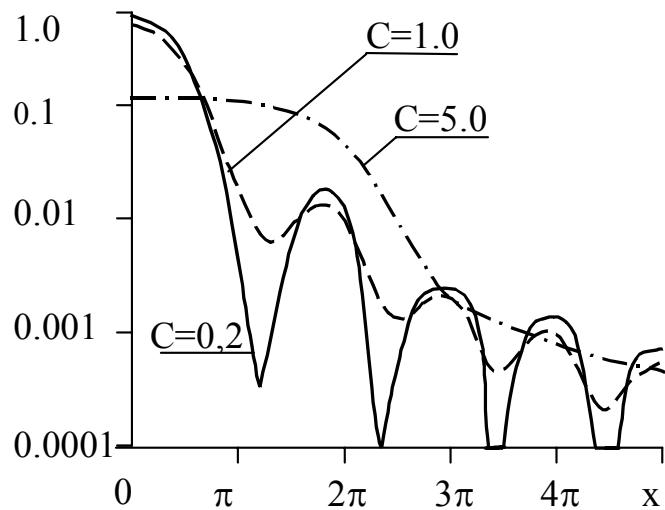


Рис.5.7. Картина дифракции на круглом отверстии. Параметр  $C$  – отношение площади круглого отверстия к площади когерентности

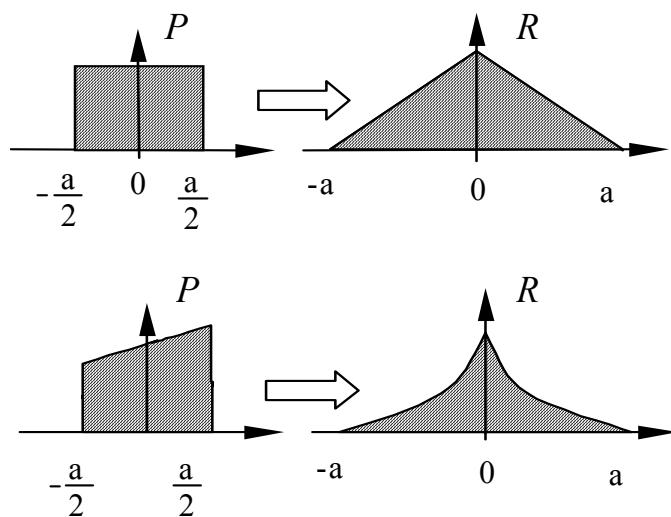


Рис.5.8. Примеры распределения амплитуды поля для одномерного случая и вид автокорреляционной функции зрачка.

Как следует из приведенного выше рисунка, автокорреляционная функция зрачка существенно зависит от вида распределения поля.

## 5.6. Пространственная когерентность излучения. Многомодовый режим излучения лазера. Радиус корреляции лазерного излучения

Поперечная структура реальных лазерных пучков имеет случайный характер, что обусловлено целым рядом естественных причин: спонтанные шумы, статистика многих поперечных мод.

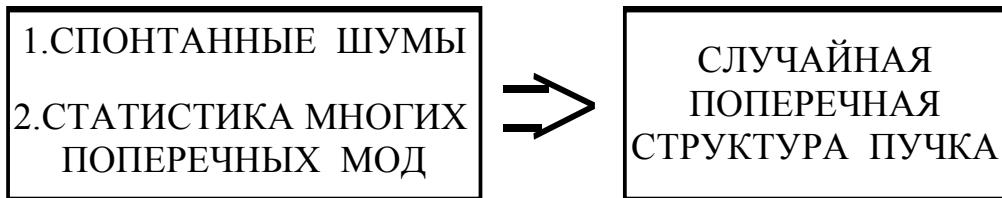


Рис.5.9. Причины случайного характера поперечной структуры реальных лазерных пучков

Чем же определяются характерные масштабы поперечных корреляций лазерного излучения?

Предположим, что возбуждаемые в лазере моды с различными поперечными индексами  $m$  и  $n$  вырождены по частоте, тогда многомодовое излучение можно записать следующим образом

$$E(\mathbf{r}, z, t) = \sum_{m,n} A_{m,n}(\mathbf{r}, z) \exp[i(\omega_0 t - kz + \phi_{m,n})],$$

где  $A_{m,n}$  и  $\phi_{m,n}$  - не зависящие от времени комплексные амплитуды и фазы мод,  $z$  - координата вдоль направления распространения пучка, отсчитываемая от области перетяжки.

Распределение амплитуд  $A_{m,n}$  зависит от типа оптического резонатора и формы зеркал. Наиболее простой вид распределения амплитуды  $A_{m,n}$  имеют для плоскопараллельного резонатора (случай прямоугольных зеркал)

$$A_{m,n}(\mathbf{r}) = A_{m,n}(x, y) = h_{m,n} f_m(x) f_n(y)$$

$$\text{где } f_m(x) = \begin{cases} \cos \beta mx, & m = 1, 3 \\ \sin \beta mx, & m = 2, 4 \end{cases},$$

где  $\beta$ , комплексный параметр, зависящий от базы резонатора и апертуры зеркал.

Аналогичный вид имеет функция  $f_n(y)$ .

Для пространственной поперечной корреляционной функции на выходе резонатора по определению имеем:

$$B_{\perp}(\mathbf{s}) = \langle E(\mathbf{r}, z, t) E^*(\mathbf{r} + \mathbf{s}, z, t) \rangle.$$

В случае статистически независимых фаз  $\phi_{m,n}$  поперечных мод

$$B_\perp(\mathbf{s}) = \sum_{m,n} \left\langle A_{m,n}(\mathbf{r}, z) A^*_{m,n}(\mathbf{r} + \mathbf{s}, z) \right\rangle.$$

Рассчитаем корреляционную функцию вблизи центра пучка ( $\mathbf{r} = 0$ ), смещение  $\mathbf{s}$  зададим вдоль оси  $x$  и будем считать, что возбуждаются поперечные моды с индексами от  $m = 1$  до  $m = N_\perp$ .

Пусть  $N_\perp$  нечетно и коэффициенты  $h_{m,n}$  - одинаковы, тогда для пространственной поперечной корреляционной функции получим

$$B_\perp(\mathbf{s}) = 2 \sum_{q=1}^{(N_\perp+1)/2} \cos \beta^*(2q-1)\mathbf{s} = \sin[(N_\perp + 1)\beta s] \operatorname{cosec}(\beta^* s).$$

При большом числе поперечных мод  $N \gg 1$ , модуль степени пространственной когерентности равен

$$|\gamma(\mathbf{s})| = \frac{|\sin(N_\perp \beta^* s)|}{N_\perp |\sin(\beta^* s)|}.$$

Модуль степени пространственной когерентности является квазипериодической функцией. В реальных случаях база резонатора много больше характерного размера зеркал ( $L \gg a$ ), а число Френеля  $(ka^2/2\pi L) \geq 1$ . С учетом этого условия, радиус корреляции  $r_k \approx a/N_\perp$ .

Таким образом, для многомодовых лазерных пучков, возбуждаемых в плоскопараллельном резонаторе с прямоугольными зеркалами радиус корреляции обратно пропорционален числу возбуждаемых поперечных мод  $N_\perp$ .

Но это соотношение можно использовать лишь для грубых оценок. Отличия от эксперимента могут быть связаны с неоднородностями активной среды, неравномерностью распределения интенсивностей по модам.

Приближенный расчет радиуса корреляции лазерного поля со статистически независимыми модами можно выполнить и другим способом - оценивая средний размер неоднородности по возбуждаемым модам, который в соответствии с выражением для распределения амплитуды моды по половинному уровню можно оценить как  $r_m \approx 2a/m$ .

Для плоского резонатора получим  $r_k \approx 2a \ln N_\perp / N_\perp$ .

Таким образом, данное выражение, которое получается исходя из поперечной неоднородности лазерного пучка, дает практически такую же зависимость, что и предыдущее.

При наличии неоднородностей внутри резонатора даже для плоскопараллельного резонатора более адекватной оказывается модель сферического резонатора.

Аналогичным способом, исходя из масштаба радиальных неоднородностей можно найти радиус корреляции для сферического резонатора  $r_k \approx \sqrt{3}w(z)/\sqrt{N_{\perp}}$ .

Последнее выражение существенно отличается от выражения, полученного для плоского резонатора, т.к. в последнем случае с увеличением номера радиального индекса поперечной моды  $n$  размер поперечных осцилляций становится обратно пропорциональным  $\sqrt{n}$ , где  $n$  радиальный индекс полинома Лагерра, определяющий число радиальных осцилляций в моде сферического резонатора.

Радиус поперечной корреляции	
РЕЗОНАТОР	
Плоский	Сферический
$r_k \approx \frac{2a \ln N_{\perp}}{N_{\perp}}$	$r_k \approx \frac{\sqrt{3}w(z)}{\sqrt{N_{\perp}}}$

Рис.5.10. Зависимость радиуса поперечной корреляции от формы резонатора

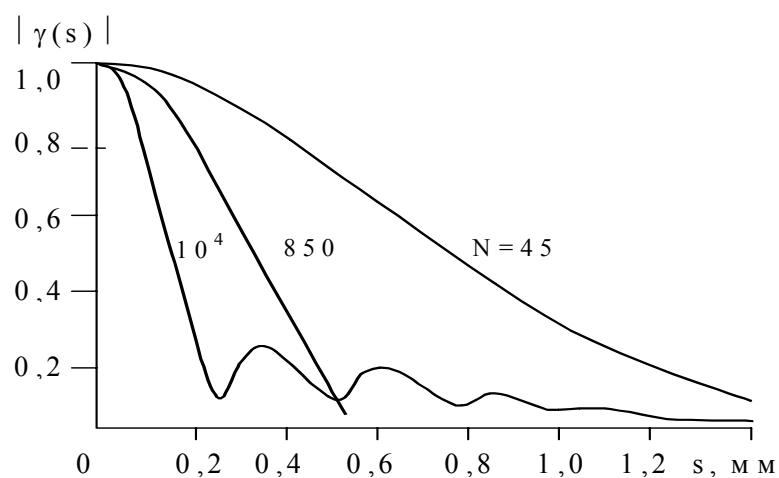


Рис.5.11. Вид экспериментальной поперечной корреляционной функции излучения твердотельного многомодового лазера.  $N$  – число мод

Зависимость радиуса корреляции от числа поперечных мод хорошо подтверждается экспериментально.

Радиус корреляции лазерного пучка, как и ширина пучка, является функцией продольной координаты  $z$ . Измерения показали, что для многомодового режима при удалении от выходного зеркала отношение диаметра пучка к радиусу корреляции сохраняется постоянным:  $D(z)/r_k = const.$ , что следует из характера изменения масштаба неоднородностей поля при распространении лазерного пучка. Оно пропорционально  $\pi r/m$ .

Поведение пространственной корреляционной функции излучения многомодового лазера, с изменением числа генерируемых поперечных мод, хорошо согласуется с представлениями, основанными на описании поперечного распределения лазерного поля, как результата наложения статистически независимых поперечных мод. Для точного расчета формы поперечных корреляционных функций необходимо располагать информацией об амплитудах мод, возбуждаемых в лазере.

Следует отметить, что при большом числе поперечных мод, корреляционная функция поля близка по виду к корреляционной функции однородного и коррелированного шума, профильтрованного через круглую диафрагму.

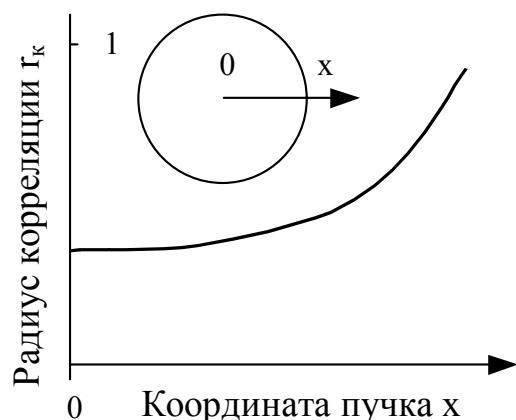


Рис.5.12. Значение радиуса корреляции в различных точках поперечного сечения многомодового лазерного пучка.

Измерение функции когерентности при разных смещениях относительно центра пучка, показывает, что при многомодовом режиме работы минимальный радиус корреляции оказывается в центре лазерного пучка. При смещении к периферии пучка радиус корреляции растет (рис. 5.12). Этот факт объясняется неравномерной однородностью пучка по поперечному сечению. Наглядно это можно увидеть, если нарисовать суперпозицию мод в лазерном пучке. В центре пучка присутствуют все моды - максимальная неоднородность; к периферии визуально степень неоднородности уменьшается.

## 5.7. Предельная пространственная когерентность излучения одномодового лазера

Присутствующее в лазере спонтанное излучение приводит к естественным флуктуациям амплитуды и фазы лазерного поля. Однако спонтанное излучение некоррелировано не только во времени, но и в пространстве. Поэтому оно неизбежно вызывает естественные пространственные флуктуации амплитуды и фазы лазерных пучков.

В надпороговом режиме работы лазера естественные флуктуации лазерных пучков в пространстве и во времени являются слабыми.

В отличие от частотного спектра, угловой спектр, связанный с естественными пространственными флуктуациями лазерных параметров, не удается измерить непосредственно, поскольку он "маскируется" более сильной - дифракционной.

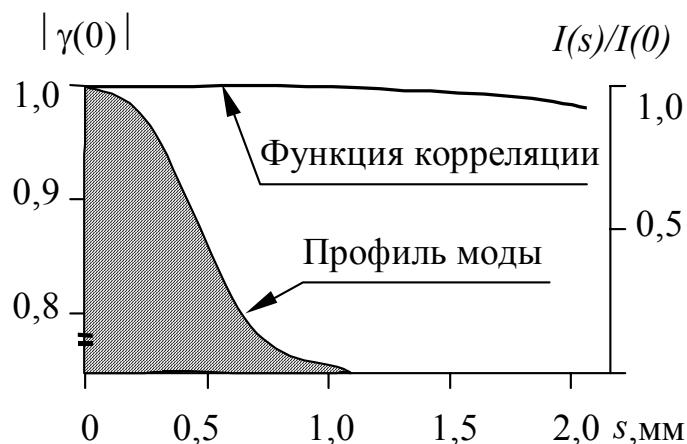


Рис.5.13. Поперечная корреляционная функция моды нулевого порядка

При измерении поперечных корреляционных функций одномодовых лазерных пучков обнаруживается слабое отличие пространственной когерентности от полной. Эти различия вызываются спонтанным излучением.

При увеличении мощности излучения Не-Не лазера степень пространственной когерентности растет.

Для точек, в которых интенсивность составляет  $1 \times 10^{-1}$  и  $1 \times 10^{-3}$  максимальной величины экспериментально полученные значения  $|\gamma(s)|$  равны  $0,9991 \pm 1 \times 10^{-4}$  и  $0,998 \pm 1 \times 10^{-3}$ .

Для интерпретации полученных данных рассмотрим следующую модель. Представим поле излучения одномодового лазера выше порога генерации в виде

$$E(\mathbf{r}, t, z) = \rho(\mathbf{r})[1 + m(\mathbf{r})] \exp i\{\omega_0 t - k_0 z + \phi(\mathbf{r})\},$$

где амплитуда  $\rho(\mathbf{r})$  определяет регулярный профиль пучка,

$m(\mathbf{r})$  – случайный коэффициент амплитудной модуляции,

$\varphi(\mathbf{r})$  – флюктуирующая фаза, причем  $\bar{m} = \bar{\varphi} = 0$ .

В соответствии с этим нормированная поперечная корреляционная функция равна

$$\gamma(s) = \frac{\langle E(\mathbf{r}, t, z) E^*(\mathbf{r} + \mathbf{s}, t, z) \rangle}{\sqrt{\langle |E(\mathbf{r}, t, z)|^2 \rangle \langle |E(\mathbf{r} + \mathbf{s}, t, z)|^2 \rangle}} = \frac{1 + \overline{m^2} \gamma_m(\mathbf{s})}{1 + \overline{m^2}} \langle e^{-i\Delta\varphi(\mathbf{s})} \rangle.$$

Здесь  $\Delta\varphi(\mathbf{s}) = \varphi(\mathbf{r} + \mathbf{s}) - \varphi(\mathbf{r})$  и  $\gamma_m(\mathbf{s}) = \langle m(\mathbf{r}) m(\mathbf{r} + \mathbf{s}) \rangle / \langle m^2 \rangle$ .

Далее предположим, что

$$\langle \exp[-i\Delta\varphi(s)] \rangle = \exp\{-D_\perp s\},$$

где  $D_\perp$  – коэффициент поперечной диффузии фазы. Для смещений  $s$  таких, что  $\gamma_m(s) \approx 0$  и  $D_\perp s < 1$ , с учетом  $\langle m^2 \rangle \ll 1$  выражение для нормированной поперечной корреляционной функции, определяемой случайной амплитудной модуляцией, преобразуется к виду

$$\gamma_m(s) \approx 1 - \langle m^2 \rangle - D_\perp s.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{d}{ds} [1 - \gamma(s)] \approx D_\perp.$$

Обработка экспериментальных данных для нормированной поперечной корреляционной функции низшей моды гелий-неонового лазера, в соответствии с рассмотренной моделью, дает: случайный коэффициент амплитудной модуляции

$$\langle m^2 \rangle \approx 3 \cdot 10^{-5}, \quad D_\perp \approx 8 \cdot 10^{-3} \text{ см}^{-1}.$$

С поперечным коэффициентом диффузии фазы  $D_\perp$  можно связать естественную угловую расходимость  $\Delta\theta_e$ :

$$\Delta\theta_e \approx D_\perp / k_0 \approx 10^{-7}.$$

Это значение существенно меньше дифракционной расходимости лазерных пучков  $\Delta\theta_d \approx \lambda / a \approx 10^{-3} - 10^{-4}$  ( $a$  – радиус пучка).

## 5.8. Временная когерентность излучения лазера

**Ширина линии излучения одномодового лазера, работающего выше порога.** Неизбежные в лазерах нестабильности параметров представляют собой по существу случайные процессы. Спектры этих процессов отличны от нуля лишь в узкой области близи нулевой частоты; эффективная ширина спектра

флуктуаций параметров лазера не превышает обычно  $10^2 - 10^3$  Гц. Воздействие флуктуаций параметров на оптический генератор проявляется, поэтому обычно в виде медленной, квазистатистической случайной модуляции амплитуды и частоты (фазы).

Колебания реального генератора, близкие к гармоническим, представляют собой случайный процесс вида

$$x(t) = \rho(t) \cos[\omega_0 t + \phi(t)].$$

Статистические характеристики  $\rho(t)$  и  $\phi(t)$  в рассматриваемом случае, разумеется, существенно отличаются от таковых для узкополосного гауссовского шума. Амплитуда флуктуирует вблизи среднего значения  $\bar{\rho}$ , определяемого динамическими свойствами системы; флуктуации амплитуды и фазы в общем случае коррелированы.

По известным статистическим характеристикам  $\rho(t)$  и  $\phi(t)$  можно определить и форму спектральной линии. Если относительные флуктуации амплитуды невелики, форма и ширина спектральной линии в основном определяются квазистатистическими флуктуациями частоты. Хорошим приближением в этом случае оказывается модель медленных и сильных гауссовских флуктуаций частоты. Тогда спектр автоколебаний имеет вид

$$G(\omega) = \frac{\rho^2}{\sqrt{2\pi} \sigma_\omega} \exp\left[-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{2\sigma_\omega^2}\right],$$

где  $\sigma_\omega^2$  - дисперсия частоты,  $\sigma_\omega^2 \sim \int_0^\infty G_n(\omega) d\omega$ .

Ширину спектральной линии

$$\sigma_\omega = \Delta\omega_T$$

называют *технической шириной*, подчеркивая этим, что причиной уширения линии в рассматриваемом случае оказываются факторы технического порядка, вклад которых зависит от конструкции лазера, стабилизации параметров и т. п. Величина  $\Delta\omega_T$  различна для различных типов лазеров. Переход к высокостабильным системам, например таким, как лазеры, стабилизированные по сверхузким оптическим резонансам в атомах и молекулах, позволяет получить ширину спектральной линии  $\sim 0,5$  Гц.

Чем определяются предельные возможности сужения линии? Оказывается, что наряду с “техническими” флуктуациями имеются обстоятельства и более принципиального характера. Даже в гипотетической автоколебательной системе, каковой можно считать и лазер, с абсолютно стабильными параметрами генерирование идеальных монохроматических колебаний невозможно. Причиной этого является принципиально неустранимые собственные шумы генератора, таковыми для лазера являются спонтанные переходы. Этот источник флуктуаций в лазере следует рассматривать, очевидно, как случайную внешнюю силу, в спектре которой имеются и

компоненты на частоте автоколебаний. Как ведет себя автоколебательная система, находящаяся под воздействием случайной силы? Оказывается, что и в этом случае дело сводится к случайным амплитудной и фазовой модуляциям. Автоколебания описываются случайным процессом вида  $x(t) = \rho(t)\cos[\omega_0 t + \phi(t)]$ . Статистические же характеристики возникающих под действием собственных шумов *естественных флюктуаций* амплитуды и фазы, разумеется, отличаются от технических; по иному выглядит и спектр колебаний.

Для естественных флюктуаций частоты форма спектральной линии становится лоренцевской.

Естественная ширина спектральной линии  $\Delta\omega_e$  обычно много уже технической,  $\Delta\omega_e \ll \Delta\omega_T$ , однако для высокостабильных генераторов оптического диапазона, эффекты обусловленные естественными флюктуациями, становятся существенными.

Получение предельной стабильности частоты лазера возможно, рассматривая колебания для обычного автогенератора, одним из примеров которого является лазер.

В оптическом резонаторе происходят процессы связанные как с увеличением энергии, так и с потерями. Поэтому величина добротности может быть определена следующим образом:

$$Q = \frac{2\pi\nu \times \text{запасенная энергия}}{\text{суммарные потери энергии когерентного излучения в}}$$

Пусть  $P_{ког}^{(i)}$  - скорость, с которой когерентная энергия вкладывается в моду, а  $P_{ког}^{(0)}$  - скорость потерь энергии когерентного излучения при прохождении через зеркала. Тогда

$$Q = \frac{2\pi\nu \times \text{запасенная энергия}}{P_{ког}^{(0)} - P_{ког}^{(i)}}$$

В стационарных условиях полная скорость поступления энергии в моду складывается из когерентного (вынужденного) излучения и спонтанного

$$P_{ког}^{(i)} + P_{неког}^{(i)} = P^{(0)} \approx P_{ког}^{(0)}$$

и приведенное выше соотношение превращается в

$$Q = \frac{2\pi\nu \times \text{запасенная энергия}}{P_{неког}^{(i)}}$$

Чтобы вычислить  $P_{неког}^{(i)}$ , заметим, что отношение скоростей для вынужденного и спонтанного излучения в данной моде равно числу фотонов,

присутствующих в ней. Это число можно связать с интенсивностью  $I$  поля в моде внутри резонатора, или с выходной мощностью  $P^{(0)}$ :  
 $N_P = Iad / chv = P^{(0)}d / \alpha_{omp}chv$ , где  $a$  - площадь поперечного сечения моды,  $d$  - длина резонатора, а  $\alpha_{\text{отр}}$  - коэффициент, учитывающий потери на зеркалах. Скорость вынужденного испускания в моде равна

$$B_{mn}N_m g(v, v_{mn})Ihvad / c,$$

так, что  $P_{\text{неког}}^{(i)}$  получается делением

$$P_{\text{неког}}^{(i)} = B_{mn}N_m g(v, v_{mn})(hv)^2.$$

Энергия, запасенная в моде, есть  $N_Phv$  и, следовательно, добротность для моды равна

$$Q = \frac{v}{\delta v} = \frac{2\pi v P^{(0)} d}{B_{mn} N_m g(v, v_{mn})(hv)^2 \alpha_{omp} c},$$

где  $\delta v$  - ширина линии на выходе лазера.

На пороге генерации получим

$$B_{mn}g(v, v_{mn})hvN_m = \frac{\alpha_{omp} c}{d} \left[ 1 - \frac{g_m N_n}{g_n N_m} \right]_{nop}^{-1}.$$

И с учетом величины добротности, запасенной в моде, а также с учетом выражения для  $\Delta v_{pe3} = ca/2\pi d$ , находим

$$\delta v = \frac{2\pi(\Delta v_{pe3})^2 hv}{P^{(0)}} \left[ 1 - \frac{g_m N_n}{g_n N_m} \right]_{nop}^{-1}.$$

В обычных условиях, когда  $N_m \gg N_n$ , последнее выражение упрощается.

Теоретическая ширина линии

$$\delta v = \frac{8\pi hv}{P^{(0)}} (\Delta v_{pe3})^2.$$

По мере возрастания мощности излучения, выходящего из резонатора линия генерации в моде становится все уже.

Применив данное выражение для Не-Не лазера с выходной мощностью 1 мВт, получим  $\delta v \sim 5 \cdot 10^{-4}$  Гц, если пропускание зеркал составляет 1% на длине волны 0,6328 мкм, а длина резонатора 1 м.

Для полупроводникового лазера на  $\text{Pb}_{0,88}\text{Sn}_{0,12}\text{T}$ , излучающего на длине волны 10,6 мкм, при мощности излучения  $P \approx 200$  мкВт и  $\Delta v_{pe3} \approx 10^8$  Гц ширина линии  $\Delta \omega_e \approx 10$  кГц.

Обеспечение на практике таких режимов не представляется возможным, что следует из произведения  $\Delta\nu\Delta t = 1$  ( $\Delta t$  - время установления устойчивого режима). Действительно, так как частоты генерации определяются длиной резонатора, ширина линии будет равна теоретической величине, если выдержать длину резонатора с относительной погрешностью

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{\Delta\nu}{\nu} \approx \frac{5 \cdot 10^{-4}}{5 \cdot 10^{14}} = 1 \cdot 10^{-18}$$

в течение времени  $\Delta t = \frac{1}{\Delta\nu} \approx 10^2$  с.

Ясно, что из-за механических нестабильностей, теплового дрейфа и других причин такую стабильность длины резонатора выдержать практически невозможно.

На практике ширина линии составляет в лучшем случае несколько герц, так как преобладают другие факторы, вызывающие значительное возрастание спектральной ширины. В газовых лазерах практически достижимая предельная ширина определяется, по-видимому, тепловыми флюктуациями материала, из которого сделаны держатели зеркал лазера, а также неоднородностью показателя преломления усиливающей среды. В противоположность этому в твердотельных лазерах с модулированной добротностью ширина линии определяется длительностью импульса лазера (через соотношение неопределенностей).

Время спонтанного излучения, или время релаксации, типичного атомного уровня по порядку величины равно  $10^{-8}$  с, а соответствующая спектральная ширина порядка  $10^8$  Гц. В лазерах возбужденные атомы вынужденно излучают в фазе, так, что в рубиновых лазерах длительность эффективных волновых цугов оказывается порядка  $10^{-6}$  с, а в газовых лазерах – порядка  $10^{-3}$  с. Соответствующая спектральная ширина равна  $10^6$  и  $10^3$  Гц.

Длительность волнового цуга  $\Delta t$  и эффективная спектральная ширина  $\Delta\nu$  при гауссовой форме линии связаны соотношением

$$4\pi\Delta t\Delta\nu \sim 1.$$

Понятие времени когерентности связано с тем, что при интервалах времени, меньших  $\Delta t$ , источник является монохроматическим, и с тем, что в точке пространства существует линейная зависимость или корреляция амплитуд и фаз волнового цуга, соответствующих двум разным моментам времени. При интервалах времени, больших  $\Delta t$ , мы имеем два различных волновых цуга и корреляция отсутствует. Время  $\Delta t$  называется временем когерентности.

Положим  $\lambda = c\Delta t$ . Отсюда получим  $\lambda = \frac{c}{\Delta\nu}$ . Длина  $\lambda$  называется длиной когерентности.

## 6. Оптика спеклов.

### 6.1. Понятие спекл, объективная и субъективная спекл-картины. Основные свойства спекл-картины, условия формирования

При освещении высоко когерентным пучком большой области оптически очень шероховатой поверхности формируется, так называемая, нормально развитая спекл-картина. Спекл (англ. speckle [spekl] пятнышко, крапинка). Её статистические свойства не зависят от детальных характеристик микрорельефа поверхности. Такая особенность спекл-картин, обусловленных лазерным излучением, была обнаружена вслед за изобретением лазеров.

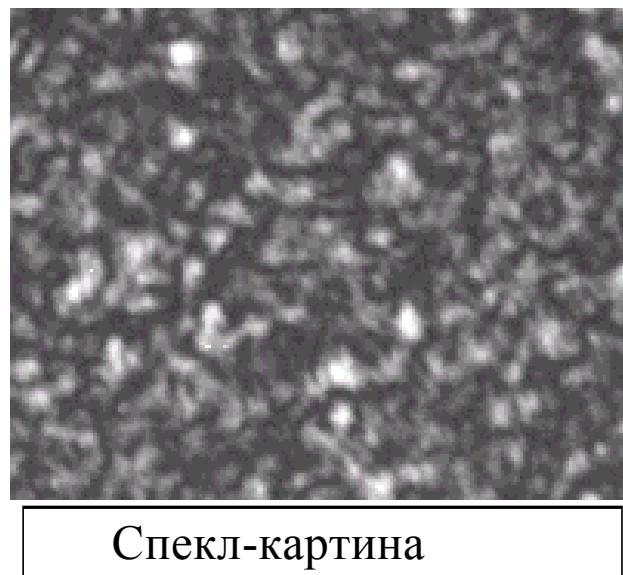


Рис. 6.1. Спекл-картина, получаемая при освещении лазером сильно шероховатой поверхности

Оказалось, что изображение отражающего (пропускающего) объекта, освещенного когерентным излучением, представляет сложную гранулярную структуру, не имеющую явной связи с микроскопическими свойствами освещаемого объекта. Большинство отражающих (пропускающих) поверхностей экстремально шероховаты по сравнению с длиной волны источника излучения.



Рис. 6.2. Модель рассеяния на шероховатой поверхности

Можно считать, что основной вклад в рассеяние вносят малые участки поверхности с центрами в зеркально отражающих точках. С увеличением крутизны шероховатостей и величины освещаемой области число точек излучения возрастает.

Волна, отраженная от такой поверхности состоит из "вкладов" от большого числа малых участков поверхности, которые можно считать независимыми рассеивающими областями.

Распространение этого отраженного (прошедшего) излучения до области наблюдения приводит к тому, что в заданной точке наблюдения складываются рассеянные компоненты каждая со своей задержкой. Интерференция этих дефазированных, но когерентных волн, приводит к гранулярной спекл-картине.

Иными словами, **спеклы - это интерференционная картина нерегулярных волновых фронтов, образующаяся при падении когерентного излучения на сильно шероховатую поверхность.**

### 6.1.1.Объективные и субъективные спеклы

Различают объективные и субъективные спеклы. Объективная спекловая картина формируется во всем пространстве перед освещаемой поверхностью. Субъективная спекловая картина возникает при отображении рассеивающей поверхности на экран с помощью оптической системы. Объективную спекловую картину можно зарегистрировать если в плоскости наблюдения расположить фотопленку и засветить ее спекловой картиной. Но если сфотографировать эту же картину с помощью фотоаппарата, то на фотопленке получим субъективную картину т.к. ее параметры будут уже зависеть от объектива фотоаппарата.

Рассмотрим механизм образования спеклов на примере изображения точечного источника.

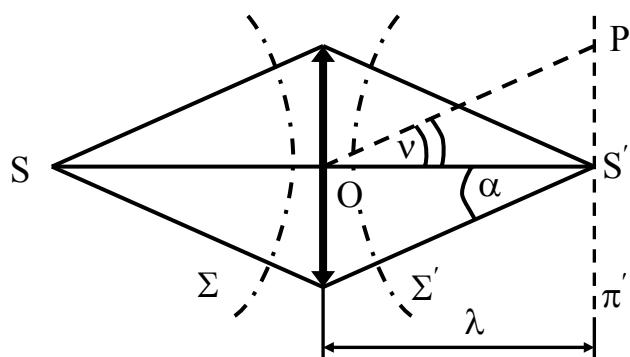


Рис.6.3. Изображение точечного источника света

Сферическая волна, распространяющаяся от точечного источника, преобразуется в сходящуюся сферическую волну с центром  $S'$  - геометрическое изображение точечного источника  $S$ .

Структура пятна, вид дифракционной картины, зависят от формы отверстия, образуемого оправой объектива. Пусть отверстие круглое, а его диаметр  $2a$ ,

тогда в плоскости изображения  $\pi$  амплитуда дается Фурье-преобразованием круговой функции. Амплитуда в точке  $P$  дается функцией Эйри

$$f(v) = \frac{2J_1(u)}{u}, \quad u = ka\theta; \quad k = \frac{2\pi}{\lambda},$$

угловой радиус первого кольца  $\theta = \frac{1.22\lambda}{2a}$ .

Сместим плоскость наблюдения из  $\pi'$  в плоскость  $\pi''$ , отстоящую на расстояние  $\delta\lambda$ ,  $\delta\lambda \ll OS'$ .

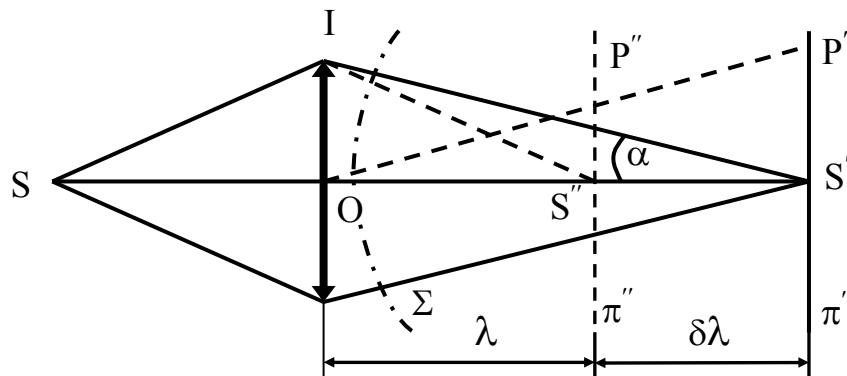


Рис.6.4. Изображение точечного источника света при дефокусировке

Волны, дифрагированные различными точками волновой поверхности  $\Sigma$ , приходят в  $\Sigma'$  в фазе, а в точку  $\Sigma''$  с разными фазами. Максимальная разность хода  $\Delta$  в точке  $\Sigma''$   $\Delta = I\Sigma'' - O\Sigma''$ . Можно показать, что

$$\Delta = \delta\lambda \frac{\alpha^2}{2}$$

Этой разностью хода и объясняется снижение качества изображения. Если требуется, чтобы дифракционная картина в точке  $\Sigma''$  практически не отличалась от дифракционной картины в точке  $\Sigma'$ , то величина  $\Delta$  должна быть значительно меньше  $\lambda$ .

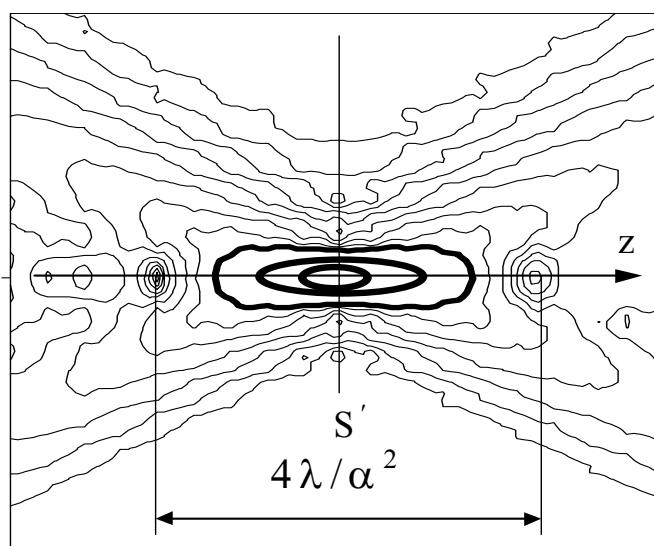


Рис. 6.5. Линии равной интенсивности в окрестности изображения точечного источника.

На рисунке 6.5 приведено распределение интенсивности дифрагированного излучения в окрестности изображения  $S''$  (показаны линии изофот). Распределение интенсивности вдоль оптической оси (ось z) описывается функцией

$$f(u) = \left[ \frac{\sin(u/4)}{u/4} \right]^2, u = \frac{2\pi}{\lambda} \alpha^2 z$$

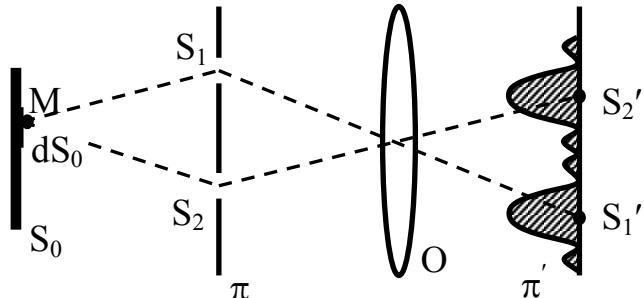
Первый нуль интенсивности на оси получается при  $z = \pm 2\lambda / \alpha^2$  от фокуса. Если считать допустимой потерю интенсивности в 20%, то допуск на положение фокальной плоскости  $\Delta z$  равен приблизительно  $\pm \lambda / 2\alpha^2$ .

Параметры фокального объема	
длина	$\frac{4\lambda}{\alpha^2}$

Наибольшая плотность энергии локализована в объеме, напоминающем по форме сигару. Отсюда следует, что чем больше угол  $\alpha$ , тем меньше резкость изображения.

**Изображение двух монохроматических точечных источников света**

Пусть  $S_1$  и  $S_2$  очень маленькие отверстия в непрозрачном экране. Экран освещается монохроматическим, некогерентным, однородным источником. Тогда можно считать, что эти отверстия практически представляют два одинаковых точечных источника (рис. 6.6).



## Сложение сигналов $S_1'$ и $S_2'$

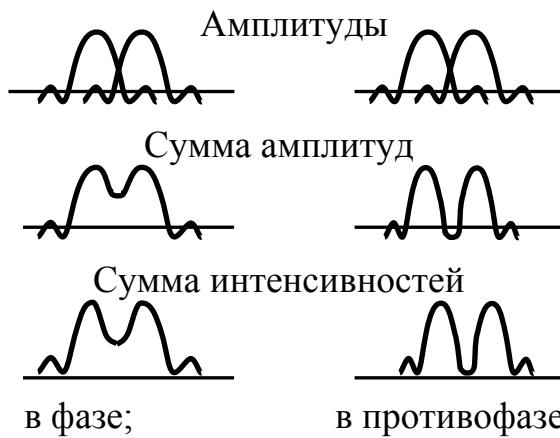


Рис.6.6. Распределения интенсивности и амплитуды поля в зависимости от соотношения фаз волн

**Первый случай:** на экран с отверстием падает свет лишь от элемента  $dS_0$  с центром в точке M.

Волны дифрагировавшие на отверстиях  $S_1$  и  $S_2$  имеют разность хода  $D=MS_1 - MS_2$  и соответственно этому разность фаз  $\varphi = 2\pi D/\lambda$ .

Точечные отверстия, освещаемые элементом источника  $dS_0$  можно рассматривать как когерентные. Это следует из теоремы Ван Циттерта-Цернике. При стремлении размера источника к нулю, интервал корреляции стремится к бесконечности.

Чтобы найти вид суммарной дифракционной картины в плоскости  $\pi$  нужно сложить амплитуды световых колебаний, учитывая их разность фаз. Рассмотрим два случая взаимного расположения источника и отверстий с учетом того, что волны приходят в плоскость  $\pi$  в фазе и в противофазе.

Таким образом, видим, что результат существенным образом зависит от соотношения фаз суммируемых волн.

**Второй случай:** два отверстия  $S_1$  и  $S_2$  освещаются одновременно двумя элементами поверхности источника  $S_0$  для которых сдвиг по фазе пусть также составляет 0 и  $\pi$ .

В этом случае для получения результирующего распределения можно сложить интенсивности, поскольку разные элементы поверхности источника не являются когерентными между собой.

**Третий случай:** на экран с отверстиями падает излучение от всей поверхности источника  $S_0$ .

Если разбить поверхность  $S$  на множество элементов  $dS$  и повторить рассуждения, то распределение интенсивности в плоскости  $\pi'$  будет иметь такой же вид, как и при суммировании интенсивностей для двух дифракционных изображений отверстий  $S_1$  и  $S_2$ .

## **Выходы:**

### **1. Когерентные источники**

Распределение амплитуды в плоскости  $\pi'$  дается сверткой функции амплитуды дифракционной картины, создаваемой объективом O, с двумя дельта-функциями, соответствующими двум геометрическим изображениям  $S'_1$  и  $S'_2$ .

### **2. Некогерентные источники**

Распределение интенсивности в плоскости  $\pi'$  представляет собой свертку функции интенсивности дифракционной картины, создаваемой объективом O, с теми же дельта-функциями.

## Изображение большого числа монохроматических точечных источников, расположенных хаотически

В экране  $\pi$  имеется много одинаковых отверстий, расположенных хаотически (рис. 6.7).

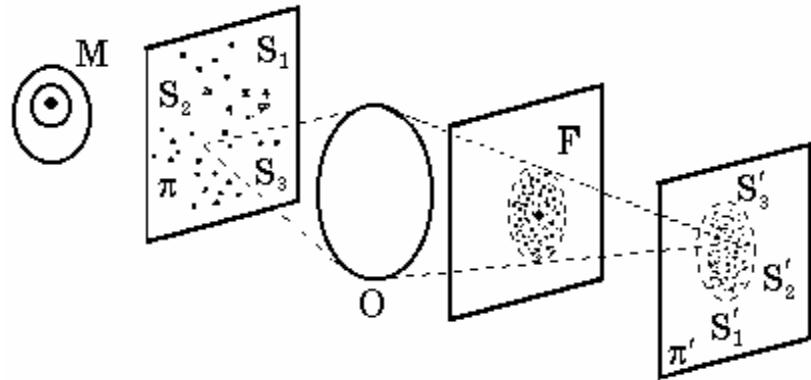


Рис.6.7. Изображение большого числа хаотически расположенных источников

**Первый случай:** отверстия  $S_1, S_2, S_3$  и т.д. расположены хаотически и освещаются только одним элементом  $dS_0$  с центром в точке  $M$ . Они играют роль когерентных источников излучения. Каждому из них в плоскости изображения соответствует дифракционная картина. Для нахождения суммарной амплитуды поля в плоскости изображения  $\pi'$  их надо просуммировать с учетом фазы.

**В результате суперпозиции возникает очень сложная система отдельных пятен, размер наименьших из которых примерно равен диаметру дифракционного пятна, формируемого объективом  $O$  при его освещении точечным источником излучения** (рис. 6.8).

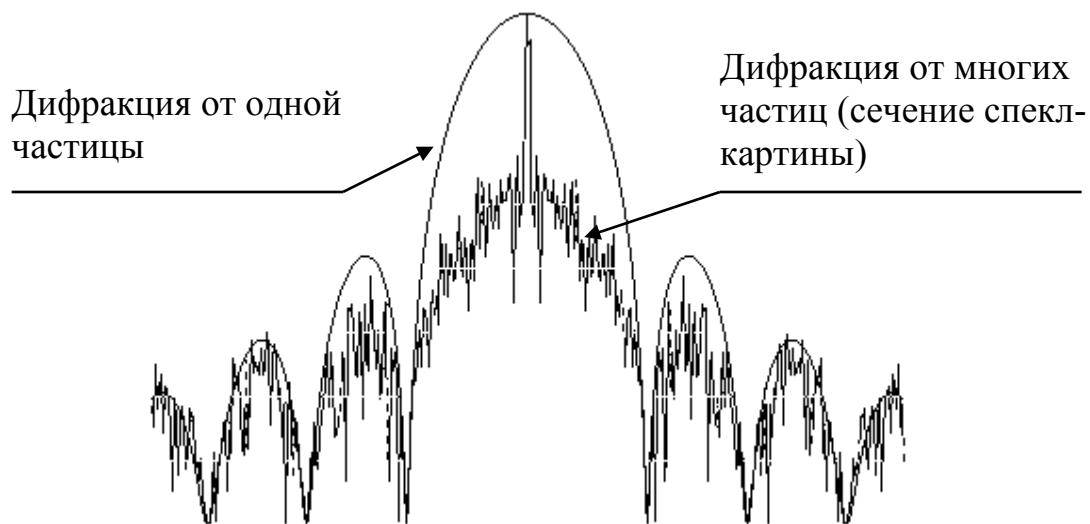


Рис. 6.8. Сечение дифракционной картины при дифракции на одной и на множестве одинаковых частиц.

Это и есть **спекл-структура**.

Используя понятие дельта-функции, говорят, что *спеклы представляют собой результат свертки амплитуды дифракционной картины, формируемой объективом O, со всеми дельта-функциями, соответствующими геометрическим изображениям  $S'_1, S'_2, S'_3$  и т.д. источников  $S_1, S_2, S_3$  и т.д.*

Механизм, объясняющий формирование спекл, размер наименьшего из которых примерно равен диаметру дифракционного пятна, формируемого объективом, можно пояснить, рассматривая дифракцию на отверстии и на двух частицах, расположенных по краям отверстия. При дифракции на отверстии размер центрального дифракционного пятна, где сосредоточена практически вся дифрагированная энергия, по порядку равен  $\varepsilon \sim \lambda/\alpha$ .

Ширина полос Юнга, образующаяся, при дифракции на двух разнесенных частицах определяется расстоянием между частицами, а при их расположении на расстоянии равном размеру отверстия (экрана) они дают практически такой же размер (период) интерференционной полосы.

Предполагается, что размер частиц много меньше размера отверстия.

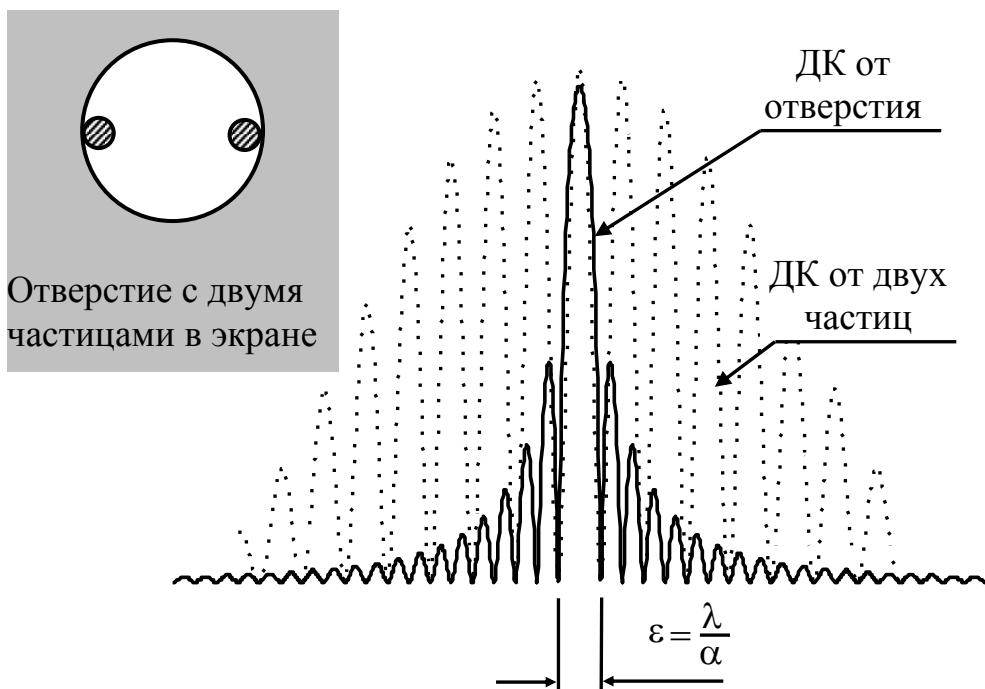


Рис.6.9. Сечения дифракционной картины соответствующие дифракции на отверстии и на двух малых частицах, расположенных по краям отверстия

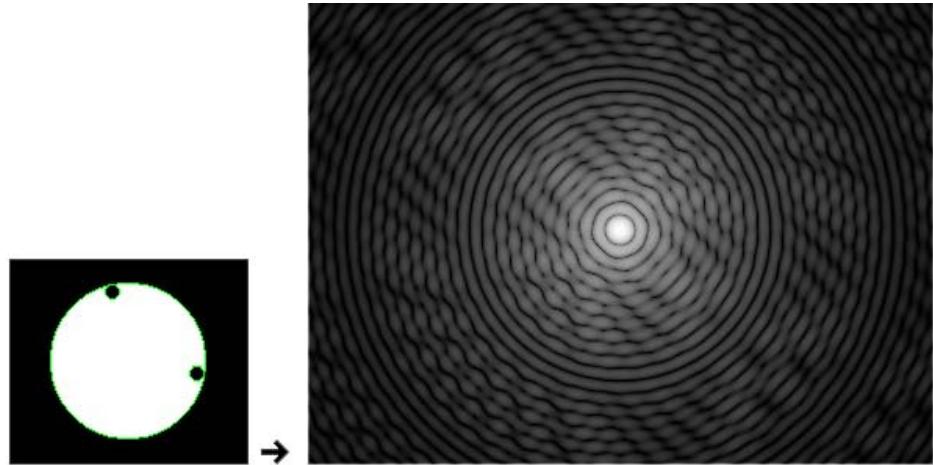


Рис. 6.10. Вид дифракционной картины при дифракции на апертуре и на двух маленьких частицах, расположенных по краям апертуры.

**Второй случай:** Если увеличить размеры участка  $dS_0$ , освещдающего отверстия  $S_1, S_2, S_3$  и т.д., то источники  $S_1, S_2, S_3$  и т.д. станут частично когерентными, и контраст спеклов уменьшится.

А если отверстия  $S_1, S_2, S_3$  и т.д. осветить протяженным источником  $S_0$  то контраст спеклов уменьшаться и в конечном итоге при значительном увеличении размеров источника он будет стремиться к нулю. Это в частности следует из теоремы Ван Циттерта-Цернике - при увеличении размеров источника интервал корреляции уменьшается.

Если источники некогерентны, то берется такая же **свертка интенсивности дифракционной картины**

#### Спектр большого числа когерентных точечных источников

Точечный источник, расположенный на бесконечности освещает экран  $\pi$ , в котором имеется множество малых отверстий  $S_1, S_2, S_3$  и т.д.

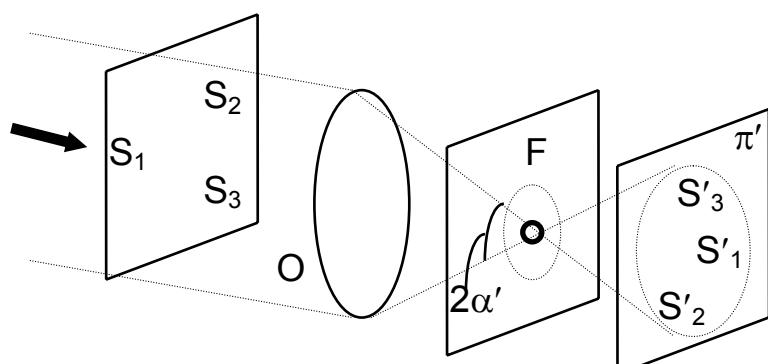


Рис.6.11. Спектр и изображение большого числа хаотически расположенных источников

Отверстия  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  и т.д. выступают в роли когерентных источников. Нас интересует дифракционная картина в фокальной плоскости F объектива О. Она представляет собой фурье-образ системы точечных источников.

**Основным отличием структур поля в фокальной плоскости и в плоскости изображения является наличие очень яркого центрального пятна в фокальной плоскости.**

Его появление обязано синфазному сложению волн, испускаемых всеми источниками  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  ..., в фокусе объектива.

В произвольной точке фокальной плоскости, фазы волн, посылаемых источниками  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  и т.д., принимают любые значения в интервале от 0 до  $2\pi$ . Вследствие таких флюктуаций фаз волн, интерферирующих в фокальной плоскости, возникает пятнистая структура.

Спеклы, наблюдаемые в фокальной плоскости и в плоскости изображения, отличаются по происхождению друг от друга.

В фокальной плоскости размер наименьшего из них по порядку такой же величины как и диаметр дифракционной картины, обусловленный дифракцией на объективе О и наблюдаемый в фокальной плоскости.

В плоскости  $\pi'$  размер дифракционных пятен определяется угловым диаметром  $2\alpha$  объектива О. В фокальной плоскости размер дифракционных пятен определяется угловым диаметром  $2\alpha'$ . Поскольку  $\alpha' > \alpha$ , спекл-структура в плоскости F будет более тонкой, чем в плоскости  $\pi'$ .

На практике наиболее часто встречается случай когда источники  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  ... имеют конечные размеры. Если их форма приблизительно одинакова, и они расположены хаотически и произвольно ориентированы, то распределение интенсивности в плоскости в фокальной плоскости будет промодулировано дифракционной картиной, создаваемой каждым из этих отверстий в отдельности. В центре дифракционной картины имеется пик интенсивности, угловой размер которого определяется дифракцией на объективе О при его освещении точечным источником. Если число источников равно  $N$ , то интенсивность в центре пропорциональна  $N^2$ .

Практическим примером получения такой дифракционной картины является дифракция на мазке крови. Характерный размер эритроцита 7-8 мкм, а размер освещдающего пучка лазера около 1000 мкм, так что в освещенной зоне оказывается несколько сотен клеток.

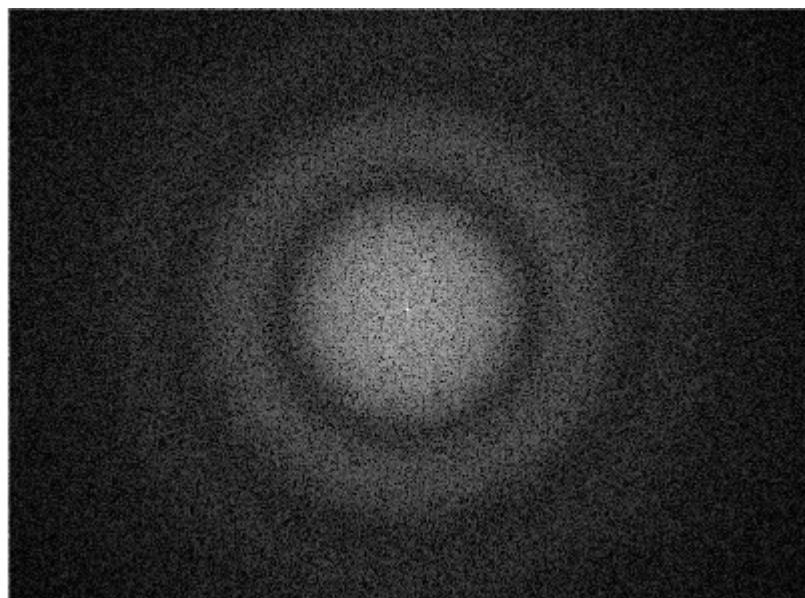


Рис. 6.12. Фотография дифракционной картины на мазке крови (центральный спекл экранирован).

**Спектр большого числа когерентных точечных источников, образующих идентичные, одинаково ориентированные и хаотически расположенные пары**

Пусть в экране  $\pi$  имеются совершенно одинаковые малые отверстия, объединенные в пары. Расстояние между двумя отверстиями одной пары одинаково для всех пар и равно  $\xi_0$ . Прямые, соединяющие отверстия одной пары параллельны одному и тому же выделенному направлению и, следовательно, параллельны друг другу. Пары отверстий расположены в плоскости  $\pi$  хаотически.

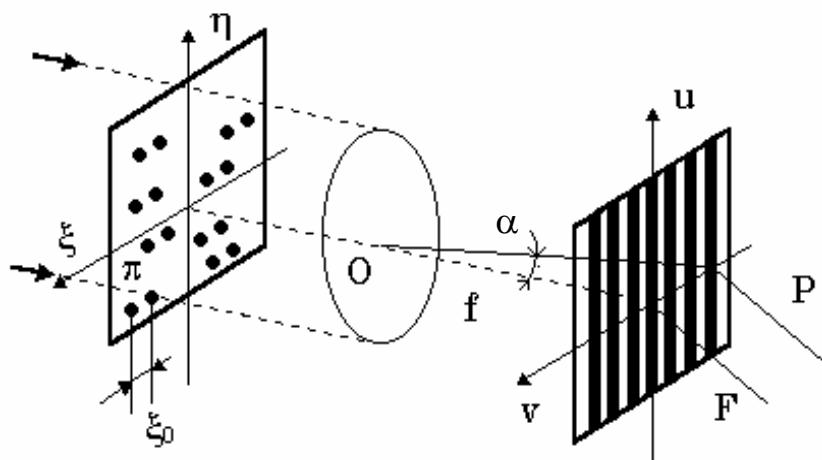


Рис.6.13. Спектр экрана, содержащего хаотически расположенные пары отверстий

Получить такой экран можно простым смещением в заданном направлении исходных отверстий на расстояние  $\xi_0$ . Спектр полного набора отверстий имеет

такой же вид, как и спектр одной пары отверстий, но интенсивность его в  $N$  раз больше, где  $N$  - число пар отверстий. Спектр двух малых отверстий представляет собой полосы Юнга, ориентированные перпендикулярно линии, соединяющей центры отверстий. Угловое расстояние между линиями

$$\alpha = \frac{\lambda}{\xi_0}.$$

Представим точечные источники функцией  $D(\eta, \xi)$ . Экран, содержащий полный набор отверстий, можно представить сверткой

$$D(\eta, \xi) \otimes [\delta(\eta, \xi) + \delta(\eta, \xi - \xi_0)].$$

Спектр, соответствующий набору отверстий в экране  $\pi$ , вычисляется как фурье-образ свертки. Функция  $D(\eta, \xi)$  описывает диффузор, а ее фурье-образ  $\tilde{D}(u, v)$ - спекл-структуру, возникающую в фокальной плоскости. Фурье-образ суммы двух дельта-функций равен  $1 + \exp(j2\pi v \xi_0 / \lambda)$ . Без учета центральной области вокруг точки  $F$ , фурье-образ распределения амплитуд в плоскости экрана  $\pi$  будет равен

$$\tilde{D}(u, v)[1 + \exp(j2\pi v \xi_0 / \lambda)].$$

С точностью до постоянного множителя для интенсивности получим

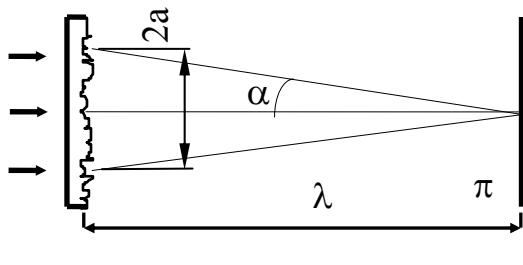
$$I = |\tilde{D}(u, v)|^2 \cos^2 \frac{\pi v \xi_0}{\lambda}.$$

Из этого выражения видно, что диффузный фон модулирован полосами Юнга, расстояние между которыми равно  $\alpha = \lambda / \xi_0$ .

### **Свойства спеклов в изображении объекта, освещаемого лазером**

Если диффузный объект  $G$  освещают лазером, т.е. практически точечным источником, излучающим монохроматическое излучение, то излучение, рассеиваемое всеми точками поверхности объекта, когерентно и, следовательно, интерферирует. На изображении возникает множество интенсивных пятен, расположенных совершенно хаотически.

#### **1. Размер спекла**

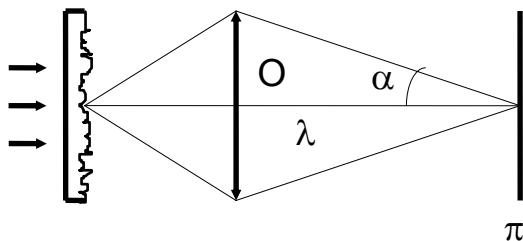


- Объективная спекл картина

Рис. 6.14. Размер объективного спектра

**Диаметр ε наименьших из спеклов приблизительно равен диаметру дифракционной картины от области, освещаемой лазером на поверхности матовой пластины.**

Если диаметр области, освещаемой лазером  $2a$ , расстояние от объектива до плоскости наблюдения  $\lambda$ , то  $\alpha = a/\lambda$  и  $\xi \approx \lambda/\tilde{\alpha}$



- Субъективная спекл картина

Рис. 6.15. Размер субъективного спектра

**Диаметр  $\varepsilon$  наименьших из спеклов приблизительно равен диаметру дифракционной картины от объектива, формирующего изображение.**

Если диаметр объектива  $2a$ , расстояние от объектива до плоскости наблюдения  $\lambda$ , то  $\alpha = a/\lambda$  и  $\xi \approx \lambda/\tilde{\alpha}$

- Смещение

Если объект  $G$  освещается параллельным пучком, падающим на него под некоторым углом, то при его смещении в собственной плоскости разность фаз волн, исходящих из его разных точек, не изменяется. Поэтому спекл-структура в плоскости  $\pi'$  тоже останется без изменений, она лишь будет следовать за перемещением объекта.

- Поворот

Если же объект  $G$  повернуть в его собственной плоскости, то относительные фазы и спекл-структура изменятся (во всех случаях, кроме случая нормального падения пучка на объект  $G$ ). То же самое происходит и тогда, когда мы имеем дело с диффузно отражающим объектом.

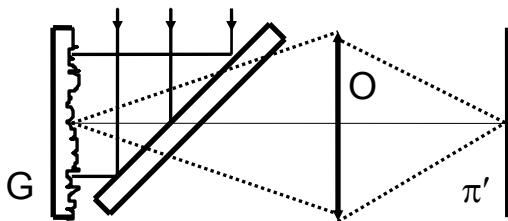


Рис. 6.16. Схема с перпендикулярным падением лучей

- Влияние диафрагмы

Если в некоторой плоскости перед объективом поместить диафрагму и перемещать ее в этой плоскости, то спекл-структура в плоскости  $\pi'$  будет изменяться. Смещение диафрагмы эквивалентно введению некоторого фазового множителя, неодинакового для разных точек объекта, на которых происходит дифракция излучения.

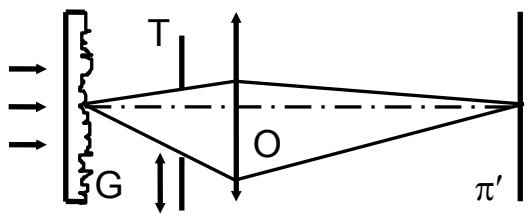


Рис. 6.17. Влияние смещения диафрагмы

При изменении положения диафрагмы изменяются разности фаз в плоскости  $\pi$  между дифракционными картинами, соответствующими разным точкам объекта  $G$ , а это и приводит к изменению спекл-структуры.

- Влияние формы диафрагмы

Форма диафрагмы определяет форму спеклов, как следует из механизма их образования. На рис. 6.18 для примера показаны спеклы, получающиеся в случае щелевой диафрагмы - все они вытянуты в направлении, перпендикулярном ориентации щели.

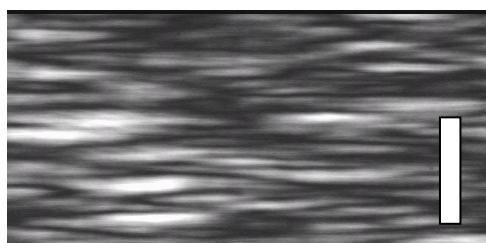


Рис. 30 Влияние формы щелевой диафрагмы (в правом углу рисунка приведена форма диафрагмы)

- Изменение спекл-структуры при смещении плоскости наблюдения

Сместим плоскость наблюдения  $\pi$  в направлении перпендикуляра к ней. Дифракционные картины, являющиеся изображениями разных точек матового стекла, изменятся. Если смещение  $\delta\lambda$  мало, то между спекл-структурами в плоскостях  $\pi'$  и  $\pi''$  будет некая корреляция.

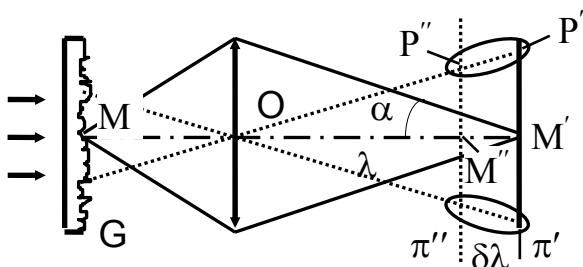


Рис. 6.19. Влияние смещения плоскости наблюдения

Как известно, изображением каждой точки объекта является дифракционная картина, имеющая в трехмерном пространстве форму "сигары". Такие "сигары" ориентированы так, как показано на рисунке и в пространстве расположены хаотически. Если смещение мало по сравнению с половиной длины "сигары", то будет существовать корреляция между спекл-структурами в плоскостях  $\pi'$  и  $\pi''$ . Для этого случая можно ввести коэффициент подобия

$$\frac{M''P''}{M'P'} = \frac{\lambda - \delta\lambda}{\lambda} = 1 - \frac{\delta\lambda}{\lambda}.$$

Из этой формулы и условия подобия изображений точечного источника при дефокусировке следует, что для увеличения коэффициента подобия при заданном  $\delta\lambda$  нужно уменьшить угловую апертуру  $2\alpha$  объектива О. К такому же выводу придем, если рассматривать смещение не плоскости  $\pi'$ , а самого диффузного объекта G.

Аналогичный результат будет получен и при смещении объектива вдоль оси при неизменном положении плоскости  $\pi'$  и объекта G.

### Спеклы Френеля и Фраунгофера

По аналогии с дифракцией Френеля и дифракцией Фраунгофера можно говорить о спеклах Френеля и Фраунгофера. Рассмотрим дифракцию на круглом отверстии в зоне Френеля на оси системы.

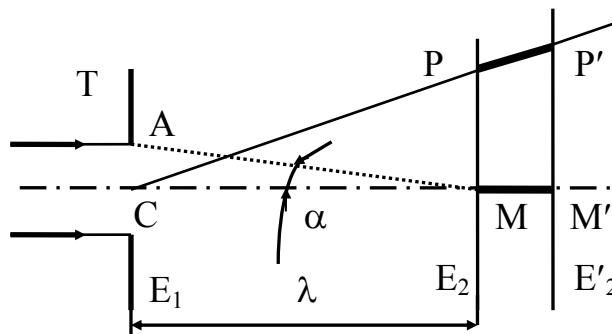


Рис. 6.20. Схема дифракционной задачи Френеля

Интенсивность в точке М представляет собой результат интерференции волн, испускаемых всеми точками отверстия Т. Разность хода в точке М для волн, исходящих из центра С и из крайней точки А отверстия Т, дается выражением

$$\Delta = AM - CM = \frac{a^2}{2\lambda},$$

где  $a$  - радиус отверстия, а  $\lambda$  - расстояние  $E_1E_2$ . Разность хода в точке М для волн, испускаемых двумя произвольными точками отверстия Т, меняется в интервале от 0 до  $\Delta$ , так как  $\Delta$  - максимальная разность хода волн для данного отверстия. Сместим плоскость наблюдения на расстояние  $\delta\lambda$ . Если величина смещения достаточно мала, то вид интерференционной картины в точке  $M'$ , останется практически таким же, как и в точке М. Смещению на величину  $\delta\lambda$  соответствует изменение разности хода на  $a^2\delta\lambda/2\lambda^2$ . Чтобы вид интерференционной картины оставался неизменным вдоль отрезка ММ', изменение разности хода должно быть значительно меньше длины волны света  $\lambda$ . Поскольку  $\alpha = a/\lambda$ , получаем условие

$$\delta\lambda \ll \frac{2\lambda}{\alpha^2}$$

Аналогичные выводы получаются и для рассмотрения явления не на оси системы. Можно утверждать, что дифракционные картины Френеля в плоскостях  $E'_2$  и  $E_2$  подобны. Если экран  $E_2$  сместить на расстояние, превышающее  $2\lambda/\alpha^2$ , то дифракционная картина Френеля изменится. Чем больше расстояние  $E_1 E_2$  (меньше угол  $\alpha$ ), тем медленнее изменяется дифракционная картина при смещении плоскости.

Начиная с некоторого достаточно большого расстояния между экранами  $E_1$  и  $E_2$ , экран  $E_2$  можно отодвигать сколь угодно далеко. Пока допустимое смещение  $\delta\lambda$  конечно, мы имеем дело с дифракцией Френеля. При дальнейшем удалении экрана  $E_2$  мы постепенно перейдем в область дифракции Фраунгофера. В этой области  $\delta\lambda$  может принимать практически любые значения.

Теперь рассмотрим случай, когда в плоскости отверстия находится экран с очень большим числом хаотически расположенных маленьких отверстий. Вследствие интерференции в плоскости  $E_2$  будет наблюдаться спекл-структура.

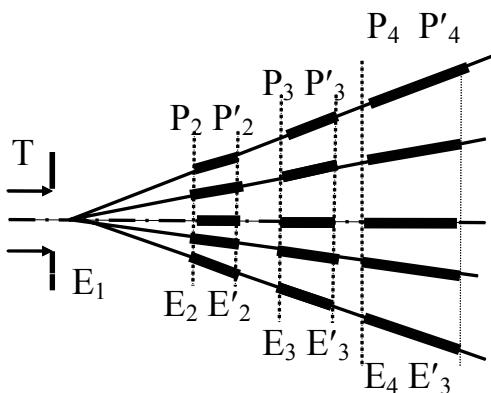


Рис. 6.21. Подобные спекл-структуры, наблюдавшиеся в параллельных плоскостях

Если экран  $E_2$  сместить на расстояние, соответствующее критерию малости смещения, то картина интерференции практически не изменится.

Можно изобразить целый ряд пар параллельных плоскостей, разделенных тем расстоянием, на которое можно смещать плоскость наблюдения без существенных изменений в структуре спеклов. В той области пространства, где расстояния  $E_2 E'_2$ ,  $E_3 E'_3$  и т.д. конечны, наблюдаются спеклы Френеля (рис. 6.21).

Если же все больше и больше удалять плоскость наблюдения, то мы перейдем в область спеклов Фраунгофера, где расстояние между плоскостями  $E_n$  и  $E'_n$  становится бесконечно большим.

Размер спеклов при удалении плоскости наблюдения будет увеличиваться, но характер распределения интенсивности будет сохраняться.

## 6.2. Нормально развитая спекл-картина, условия ее наблюдения, контраст спекл-картины, индивидуальный спекл

Если падающая волна монохроматическая и полностью поляризованная, суммарное поле в произвольной точке наблюдения можно рассматривать как сумму ряда комплексных факторов, каждый из которых порождается отдельным рассеивателем или отдельной областью непрерывно рассеивающей поверхности. Сумма множества случайно сфазированных комплексных вкладов может рассматриваться как "случайное блуждание в комплексной области" (рис. 6.22)

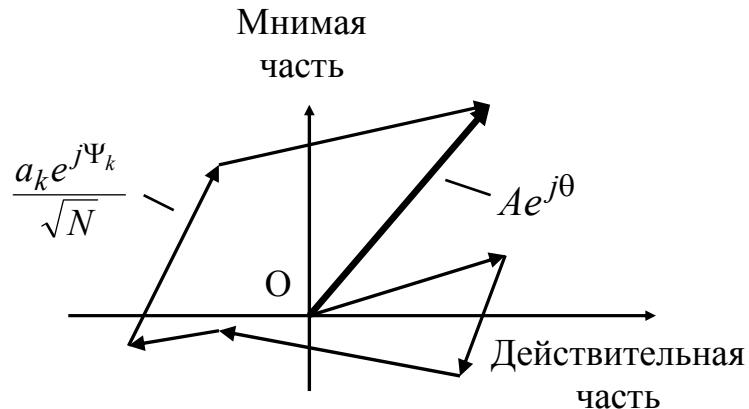


Рис.6.22. Сумма случайных фазоров

При таком подходе поле можно рассматривать как комплексный аналитический сигнал

$$U(x,y,z,t) = A(x,y,z) \exp(i2\pi v t),$$

где  $v$  - частота излучения;  $A(x,y,z)$  - комплексная амплитуда.

$$A(x,y,z) = |A(x,y,z)| \exp[iq(x,y,z)],$$

$\theta(x,y,z)$  - фаза суммарной волны.

Рассмотрим сумму очень большого числа  $N$  комплексных фазоров; при этом пусть  $k$ -й фазор имеет случайную величину  $a_k / \sqrt{N}$  и случайную фазу  $\Psi_k$ .

Комплексная амплитуда результирующего возмущения может быть представлена таким образом

$$A(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^N |a_k| \exp(i\Psi_k),$$

где  $|a_k|$  и  $\Psi_k$  - амплитуда и фаза вклада от  $k$ -той рассеивающей области,  $N$  - число таких вкладов.

Чтобы получить нормально развитую спекл-картину, необходимо чтобы выполнялись определенные условия.

**Во-первых**, случайное "блуждание" должно состоять из большого числа случайных членов.

**Во-вторых**, эти члены должны быть независимы друг от друга.

**В-третьих**, фазы, связанные с каждым комплексным вкладом, должны быть полностью случайны, т.е. равномерно распределены в главном интервале  $(-\pi, \pi)$ .

Из первых двух предположений, в соответствии с центральной предельной теоремой, реальные и мнимые части комплексной суммы многих независимых случайных вкладов должны быть гауссовыми случайными переменными при больших значениях  $N$ .

Центральная предельная теорема устанавливает характер распределения среднего  $\bar{X}$  в целом при неограниченном росте объема выборки, а также асимптотический вид математического ожидания каждого испытания и дисперсии среднего. Она формулируется следующим образом: *Пусть случайные величины имеют один и тот же закон распределения, среднее значение  $\mu$  и дисперсию  $\sigma^2$ . Если дисперсия  $\sigma^2$  конечна, то при увеличении объема выборки  $n$  ( $n \rightarrow \infty$ ) распределения выборочного среднего  $\bar{X}$  будет стремиться к нормальному распределению со средним  $\mu$  и дисперсией  $\sigma^2$ .*

Если третье предположение справедливо, то можно показать, что реальная и мнимая части должны иметь равную дисперсию и среднее значение, приводя к "круговой" гауссовой комплексной статистике. И, если статистика результирующего поля имеет гауссов характер, то для него справедливо распределение Рэлея для интенсивности

$$P(I) = \frac{1}{\langle I \rangle \exp\left(\frac{I}{\langle I \rangle}\right)},$$

где  $I$  - интенсивность рассеянного излучения,  $P(I)$  - плотность вероятности распределения интенсивности,  $\langle I \rangle$  - средняя или ожидаемая интенсивность. Фундаментальное свойство распределения Рэлея заключается в том, что стандартное отклонение точно равно среднему. Таким образом, контраст спекл-картины, определяемый как

$$C = \frac{\sigma_I}{\langle I \rangle}$$

всегда равен единице для поляризованного излучения. Из-за столь высокого контраста спекл-структура очень мешает наблюдателю, особенно при рассмотрении тонкой структуры изображения.

Распределение средней интенсивности  $\langle I \rangle$  в изображении освещаемого шероховатого объекта совпадает с интенсивностью, которая наблюдалась бы, если бы объект освещался пространственно некогерентным светом с той же самой спектральной плотностью мощности.

Таким образом, в рамках этой модели для анализа статистических свойств рассеянного поля не обязательно конкретизировать статистику неровностей поверхности.

Для описания пространственной структуры спекл-картины необходимо определить автокорреляционную функцию интенсивности и энергетический спектр. Автокорреляционная функция интенсивности по определению равна (Автокорреляционная функция записана относительно средней величины интенсивности)

$$C_I(\Delta x, \Delta y) = \langle I(x + \Delta x, y + \Delta y)I(x, y) \rangle - \langle I \rangle^2.$$

С физической точки зрения автокорреляционная функция есть мера структурного подобия двух функций  $I(x + \Delta x, y + \Delta y)$  и  $I(x, y)$ .

Благодаря свойствам комплексного гауссова процесса вычисление автокорреляционной функции интенсивности сводится к вычислению автокорреляционной функции поля:

$$C_I(\Delta x, \Delta y) = |C_A(\Delta x, \Delta y)|^2,$$

где  $- C_A(\Delta x, \Delta y) = \langle A(x + \Delta x, y + \Delta y)A^*(x, y) \rangle.$

Для автокорреляционной функции флуктуаций поля в зоне Фраунгофера в соответствии с теоремой Винера-Хинчина может быть записано выражение

$$C_A(\Delta x, \Delta y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\xi, \eta) \exp\left[-i \frac{2\pi}{\lambda D} (\Delta x \xi + \Delta y \eta)\right] d\xi d\eta,$$

где распределение интенсивности рассеянного излучения  $S(\xi, \eta)$  предполагается пропорциональным распределению интенсивности падающего излучения по рассеивающей области  $|E(\xi, \eta)|$ , т.е.

$$S(\xi, \eta) = k|E(\xi, \eta)|^2.$$

**Теорема Винера-Хинчина:** *Взаимный энергетический спектр двух случайных процессов равен фурье-образу функции крос-корреляции этих процессов.*

При выводе выражения, связывающего автокорреляционную функцию и спектральную плотность поля был использован дельта-коррелированный подход, т.е. предполагалось, что микроструктура рассеивающей поверхности настолько тонкая по сравнению с размерами освещдающего пучка, что автокорреляционная функция рассеянного поля в непосредственной близости от поверхности может быть аппроксимирована двумерной дельта-функцией Дирака:

$$C_I(\xi, \eta; \xi_1, \eta_1) \approx kE(\xi, \eta)E^*(\xi_1, \eta_1)\delta^2(\xi - \xi_1; \eta - \eta_1).$$

Это соответствует условиям формирования нормально развитой спекл-картины, которые требуют наличия достаточно большого числа рассеивателей в рассеивающей области.

Таким образом получаем, что автокорреляционная функция флюктуаций интенсивности в зоне Фраунгофера в случае нормально развитой спекл-картины имеет вид

$$C_I(x, y) = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\xi, \eta) \exp\left[-\frac{i2\pi}{\lambda D}(x\xi + y\eta)\right] d\xi d\eta \right|^2.$$

Спектр Винера флюктуаций интенсивности в плоскости Фраунгофера, описывает распределение пространственных частот и характеризует распределение интерференционных пятен по размерам. Он представляет из себя Фурье-преобразование автокорреляционной функции интенсивности поля:

$$\begin{aligned} W(u, v) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} C_I(x, y) \exp[-i2\pi(ux + vy)] dx dy = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\xi, \eta) S(\xi + \lambda Du, \eta + \lambda Dv) d\xi d\eta, \end{aligned}$$

т.е. спектр Винера флюктуаций интенсивности рассеянного излучения оказывается равен автокорреляционной функции распределения интенсивности по рассеивающей апертуре.

Необходимо также отметить, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} W(u, v) du dv = C_I(0, 0) = \sigma_I^2 = \langle I \rangle^2.$$

При наличии изображающей системы автокорреляционную функцию и спектр Винера в плоскости изображения можно получить если оптическую систему описать линейным фильтром с передаточной функцией  $K(u, v)$ . Передаточная функция связана с функцией зрачка

$$K(u, v) = H(\lambda D_2 u, \lambda D_2 v),$$

где  $D_2$  - расстояние от главной оптической плоскости до плоскости изображения

$$W(u, v) = k \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |H(\xi, \eta)|^2 |H(\xi + \lambda D_2 u, \eta + \lambda D_2 v)|^2 d\xi d\eta.$$

Таким образом, спектр Винера и автокорреляционная функция интенсивности для плоскости изображения (при наблюдении субъективной спекл-картины) имеют тот же самый смысл, что и для плоскости Фраунгофера при наблюдении объективной спекл-картины.

Функция автокорреляции интенсивности для объективной спекл-картины, возникающей при однородном освещении области поверхности с размерами  $D$  x  $D$  имеет вид

$$C_I(x,y) = \langle I \rangle^2 \left[ 1 + \operatorname{sinc}^2 \frac{Dx}{\lambda\lambda} \operatorname{sinc}^2 \frac{Dy}{\lambda\lambda} \right],$$

где  $\lambda$  - расстояние от рассеивающей поверхности до плоскости регистрации спекл-картины.

Если на некотором расстоянии от рассеивающей поверхности расположить плоский экран, на него спроектируется часть спекловой картины. Средний размер спеклов определится размером освещаемого участка поверхности и расстоянием от него до экрана.

Для равномерно освещенного участка поверхности диаметром  $D$  средний размер спеклов на экране, расположенном на расстоянии  $\lambda$  от рассеивающей поверхности составляет

$$\sigma_0 = 1.2 \frac{\lambda\lambda}{D},$$

что соответствует размеру пятна Эйри от апертуры диаметром  $D$ . При использовании апертуры квадратной формы средний размер спеклов будет примерно равен  $\lambda\lambda/D$ .

Для субъективной спекл-картины, формируемой оптической системой с диаметром выходного зрачка  $D$ , функция автокорреляции имеет аналогичный вид. Отличие может заключаться только в форме выходного зрачка при формировании субъективной спекл-картины и зоны освещения при регистрации объективной спекл-картины.

$$C_I(r) = \langle I \rangle^2 \left\{ 1 + 2 \left[ \frac{J_1(\pi Dr/\lambda\lambda)}{\pi Dr/\lambda\lambda} \right]^2 \right\},$$

где  $J_1$  - функция Бесселя, а  $r = \sqrt{(x^2 + y^2)}$ .

В случае наблюдения субъективной спекловой структуры она модулирует с высокой пространственной частотой изображение, которое было бы получено в данной системе с некогерентным светом. Средний диаметр спекла определяется формулой

$$\sigma_S \approx 1.2 \frac{\lambda d_2}{D} = 1.2(1+M)\lambda F,$$

где  $M = d_2/d_1$  увеличение изображения;  $F = f/D$  - апертурное отношение, т.е. величина, обратная светосиле системы.

Таким образом, можно сделать вывод, что субъективные спеклы эквивалентны объективным, генерируемым линзовым зрачком, рассматриваемым как рассеивающая поверхность.

В общем случае аналитические свойства спекл-картины зависят как от степени когерентности источника излучения, так и от характера микроструктуры рассеивающей поверхности. Если же пренебречь их

зависимостью от тонких деталей строения поверхности, то для полностью когерентного излучения нетрудно установить связь между функцией автокорреляции и комплексной степенью когерентности спекл-поля:

$$C_I(x, y) = \langle I \rangle^2 [1 + |\gamma(x, y)|^2].$$

Поскольку мерой когерентности является видность интерференционной структуры, из последнего выражения следует, что ширина функции автокорреляции совпадает с расстоянием между областями с максимальной и минимальной интенсивностями. Это расстояние и принимается за характерный размер элемента спекл-картины, который принято называть индивидуальным спеклом.

**Расстояние между областями с максимальной и минимальной интенсивностями принимается за характерный размер элемента спекл-картины, который принято называть индивидуальным спеклом.**

### 6.3. Интерференция в диффузном свете. Спекл-интерферометрия. Примеры практического применения. Способы устранения спекл-структуры

Плоскопараллельная пластинка L освещается пучком параллельных лучей. Поверхность АВ пластиинки - диффузно отражающая, а ее задняя поверхность - зеркальная.

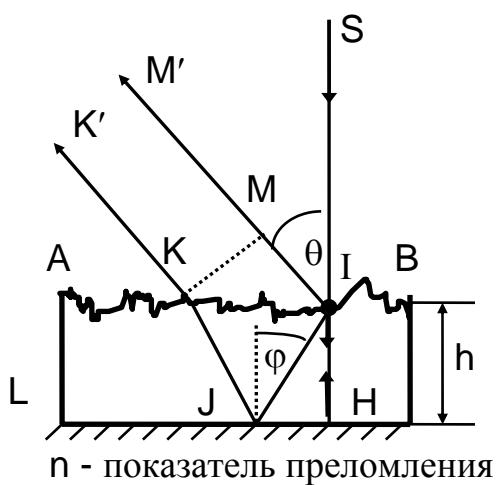


Рис.6.23. Интерференция на бесконечности лучей, рассеянных в точке I.

Рассмотрим ход лучей по двум разным оптическим путям (рис. 6.23).

1) Падающий луч SI нормально входит в толщу пластиинки в точке I, идет вдоль пути IНI и в той же точке I диффузно рассеивается во всех направлениях.

Рассмотрим, например, направление IM', составляющее угол  $\theta$  с нормалью к пластиинке.

2) Падающий луч SI в точке I диффузно рассеивается во всех направлениях. Рассмотрим, например, направление IJ, такое, что луч, распространяющийся вдоль него, испытывает в точке J зеркальное отражение и далее идет в направлении KK', параллельном MM'.

Диффузное рассеяние света, обусловленное частицами шероховатой поверхности, приводит к беспорядочному изменению фаз падающих лучей. Два

луча, диффузно рассеянных поверхностью АВ, могут интерферировать даже в случае, если они рассеиваются двумя разными точками поверхности. При переходе от одной пары лучей к другой разность фаз меняется беспорядочно и для всего светового пучка интерференционная картина будет отсутствовать. Но для лучей, диффузно рассеянных одной и той же точкой I поверхности АВ, способны интерферировать. Это справедливо для любой точки поверхности АВ и, следовательно, для всей совокупности лучей светового пучка.

Вычислим разность хода  $\Delta$  между двумя рассмотренными выше лучами SIHIM' и SIJKK'.

$$\Delta = 2n\overline{IH} + \overline{IM} - 2n\overline{IJ} = 2nh(1 - \cos\varphi)$$

n - показатель преломления пластиинки L. Если углы  $\theta$  и  $\varphi$  малы, то

$$\Delta \approx \frac{h\theta^2}{n}.$$

Лучи SIHIM' и SIJKK' на выходе из пластиинки L идут в параллельных направлениях и интерферируют на бесконечности.

Интерференционные полосы можно наблюдать в следующей оптической схеме (рис. 6.24).

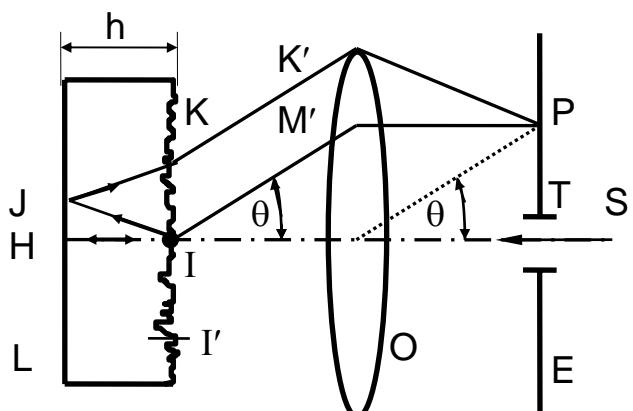


Рис. 6.24. *Образование колец в интерференционных плоскости экрана Е*

В фокальной плоскости линзы О помещен экран Е, в котором имеется малое отверстие Т, через которое проходит узкий пучок излучения. Падающий луч SI испытывает диффузное рассеяние в точке I либо до, либо после отражения на задней поверхности пластиинки L. Интерферировать будут лучи IHIM' и IJJKK', испытавшие диффузное рассеяние в одной и той же точке I поверхности АВ. Выйдя из пластиинки, эти два луча распространяются в параллельных направлениях KK' и IM' и интерферируют в точке Р фокальной плоскости линзы О. Их разность хода определяется выражениями, аналогичными предыдущему случаю. Интенсивность в точке Р, обусловленная интерференцией этих лучей, дается классической формулой Френеля. Полагая, что амплитуды одинаковы, получим для интенсивности

$$I = I_0 \cos^2 \frac{\pi\Delta}{\lambda}.$$

Для другой точки Г' поверхности АВ фаза интерферирующих волн будет иной, поскольку фазы волн, диффузно рассеиваемых разными точками поверхности АВ, изменяется беспорядочно. В силу симметрии, рассматриваемой схемы и диффузного характера рассеяния падающего излучения на окружности, соответствующей точке Р интенсивность излучения будет одинакова. Следовательно, интерференционная картина будет иметь круговую симметрию и представлять систему колец (рис. 6.25).

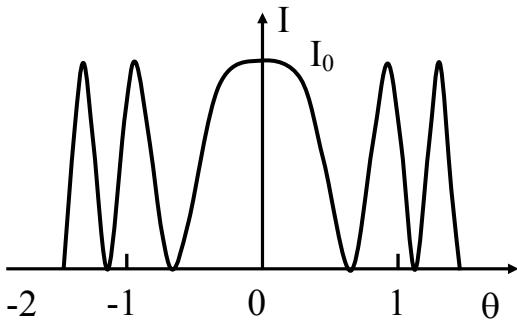


Рис. 6.25. Распределение интенсивности в интерференционных кольцах

В направлении  $\theta$ , т.е. в точке Р фокальной плоскости Е линзы О, будет наблюдаться светлое кольцо, если

$$\frac{\Delta}{\lambda} = \frac{h\theta^2}{n\lambda} = p,$$

где  $p$  - целое число. Угловой радиус первого светлого кольца будет ( $p=1$ )

$$\theta = \sqrt{\frac{n\lambda}{h}}.$$

В случае стеклянной пластинки толщиной 0,5 мм с показателем преломления  $n = 1,5$  первое светлое кольцо имеет угловой диаметр  $2\theta$ , в 8 раз превышающий угловой диаметр Солнца (при фокусном расстоянии 50 мм диаметр первого светлого кольца равен 4,35 мм;  $\lambda = 0,63$  мкм;  $\theta = 0,043$ ).

Существуют различия между этими кольцами и кольцами, наблюдаемыми в интерферометре Майкельсона, локализованными на бесконечности. Для колец, возникающих в диффузном свете, порядок интерференции в центре ( $\theta = 0$ ) всегда равен нулю независимо от толщины  $h$  пластинки, т.е. яркое светлое пятно будет совпадать с отверстием Т.

На следующем рисунке (Рис. 6.25) представлена кривая зависимости интенсивности  $I$  от угла  $\theta$ . Толщина диффузной пластинки  $h$  влияет только на диаметр колец. В интерферометре же Майкельсона интенсивность в центре зависит от "толщины" пластинки, и поэтому в белом свете кольца кажутся окрашенными и наблюдаются только при условии, что разность хода  $\Delta$  очень мала.

Кольца же, наблюдаемые в при диффузном рассеянии, всегда видимы и в белом свете, независимо от толщины  $h$ . В центре этих колец всегда располагается светлое пятно.

## Опыт Берча-Токарского

Наличие зашумляющей изображение спекловой структуры является недостатком многих систем когерентной оптики. Однако спеклы нашли и полезное применение. Это обработка оптических изображений, регистрация смещений и деформаций диффузных объектов, астрономические исследования, связанные с изучением двойных звезд и измерением видимого диаметра звезды по пространственному спектру, создаваемому ею в присутствии атмосферной турбулентности спекл-структуры, измерение шероховатости и т.п.

Многие из этих применений связаны с обнаруженной в опыте Берча и Токарского возможностью введения в оптику пространственной несущей частоты и связанной с ней техники фильтрации изображений.

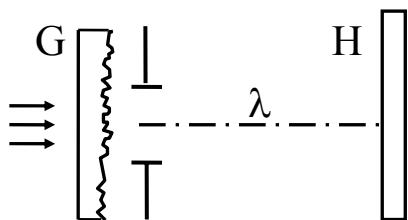


Рис. 6.26. Схема регистрации спекл-картины на фотопластинке  $H$

Матовое стекло  $G$  освещают лазером и регистрируют спекл-структуру на фотопластинке. Спекл-структура в плоскости  $H$  характеризуется функцией  $D(\xi, \eta)$ , описывающей распределение интенсивности света в этой плоскости. После проявления на кривой пропускания  $t$  фотопластинки имеется линейный участок  $AB$  (рис. 6.27). В случае использования матричного приемника также выбирается линейный участок.

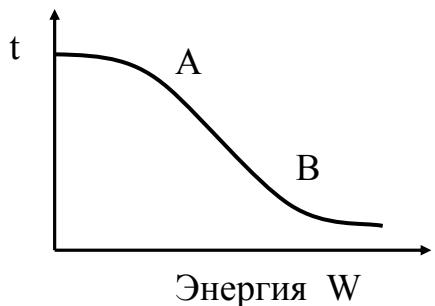


Рис. 6.27. Амплитудное пропускание негатива

Эту область и стараются использовать. В этой области амплитуда  $t$  и интенсивность  $D(\xi, \eta)$ , связаны линейным соотношением.

Будем считать, что интенсивность  $D(\xi, \eta)$ , такова, что амплитудное пропускание проявленного негатива не выходит из области линейности. Тогда амплитудное пропускание негатива можно записать

$$t = a - b D(\xi, \eta),$$

где  $a, b$  - константы, зависящие от свойств используемой фотоэмulsionии.

Сделаем теперь не одну, а две одинаковые по времени экспозиции, сместив в промежутке фотопластинку. Регистрируемая интенсивность будет

$$D(\xi, \eta) + D(\xi - \xi_0, \eta)$$

Так как смещение эквивалентно свертке с дельта-функцией. Регистрируемую интенсивность можно записать в виде

$$D(\xi, \eta) * [\delta(\xi, \eta) + \delta(\xi - \xi_0, \eta)]$$

Таким образом, если на фотопластинке высокого разрешения зарегистрировать два изображения одной и той же спекловой структуры (например от матового стекла) со сдвигом в пространстве на  $x$ , то получится негатив с амплитудным коэффициентом пропускания вида

$$t = a - bD(\xi, \eta) * [\delta(\xi, \eta) + \delta(\xi - \xi_0, \eta)]$$

где  $D(\xi, \eta)$  - распределение интенсивности в спекловой структуре;

Пространственный спектр зарегистрированной картины будет иметь вид

$$\bar{t}(u, v) = F[t(\xi, \eta)] = a\delta(u, v) - b\bar{D}(u, v)[1 + \exp(i2\pi u\xi_0 / \lambda)],$$

где  $\bar{D}(u, v)$  - Фурье -образ функции, а  $u, v$  - угловые координаты в фокальной плоскости.

При освещении негатива параллельным пучком лучей в фокальной плоскости линзы  $O$  можно получить изображение этого спектра. Член  $a\delta(u, v)$  соответствует (если пренебречь дифракцией) изображению точечного источника, расположенного на бесконечности. Это изображение локализовано в фокусе  $F$ . Второй член представляет собой (умноженный на константу  $b$ ) Фурье - образ  $\bar{D}(u, v)$  функции  $D(u, v)$ , модулированный функцией  $1 + \exp(i2\pi u\xi_0 / \lambda)$ . Диффузор  $D(u, v)$  имеет очень тонкую структуру, а поэтому его Фурье образ  $\bar{D}(u, v)$  сильно растягивается в фокальной плоскости линзы  $O$  (рис. 6.28).

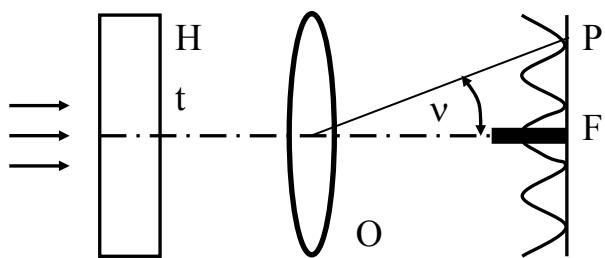


Рис. 6.28. Спектр двух идентичных смещенных относительно друг друга спекл-структур

Фурье-образ  $\bar{D}(u, v)$ , как и сама функция  $D(u, v)$  тоже описывает некую спекл - структуру. Если пренебречь изображением источника в фокусе  $F$ , то во всей остальной части фокальной плоскости интенсивность света с точностью до постоянного множителя будет равна.

$$I = |\bar{D}(u, v)|^2 |1 + \exp(i2\pi u\xi_0 / \lambda)|^2 = |\bar{D}(u, v)|^2 \cos(\pi u\xi_0 / \lambda).$$

Таким образом, диффузный фон  $|\bar{D}(u, v)|$  оказывается модулированным функцией  $\cos^2(\pi u\xi_0 / \lambda)$ , описывающей полосы Юнга. Угловое расстояние между двумя соседними полосами равно  $\lambda/\xi_0$ . Например, при смещении на 20 мкм угловое расстояние между двумя светлыми полосами составляет  $1^\circ 42'$ .

Спекл-структура на негативе Н состоит из мелких темных пятен, и, согласно теореме Бабине, ее спектр (всюду, кроме точки F) имеет тот же вид, что и спектр дополнительного непрозрачного экрана с малыми отверстиями на местах темных пятен. В рассмотренном выше мысленном опыте времена обеих экспозиций одинаковы и контраст полос Юнга максимальен: т.е. минимальная интенсивность темных полос равна нулю.

### Несколько экспозиций на одной фотопластинке

Сделаем ряд экспозиций с одинаковыми временами и одинаковыми смещениями фотопластинки (в одном и том же направлении) в промежутке между экспозициями. Если число экспозиций равно  $N + 1$ , то регистрируемая интенсивность будет равна свертке

$$D(\xi, \eta) * \sum_{n=0}^N \delta(\xi - \xi_0, \eta).$$

Если осветить негатив, то в произвольной точке  $(u, v)$  фокальной плоскости линзы О амплитуда будет определяться Фурье-образом. Если не учитывать изображения источника в фокусе F, то, с точностью до постоянного множителя для интенсивности, будем иметь выражение

$$I = |\bar{D}(u, v)|^2 \left\{ \frac{\sin[(N+1)2\pi u \xi_0 / \lambda]}{\sin(2\pi u \xi_0 / \lambda)} \right\}^2.$$

Спектр, наблюдаемый в фокальной плоскости линзы О, будет таким же, как и спектр дифракционной решетки с периодом  $\xi_0$  и числом штрихов  $N + 1$ . Между двумя главными максимумами располагается  $N-1$  вторичных максимумов.

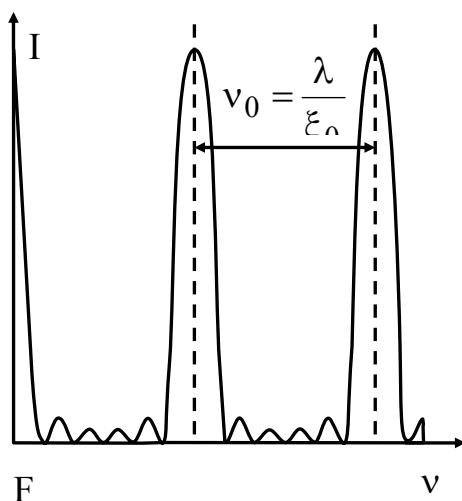


Рис. 6.29. Спектр для случая нескольких экспозиций со смещением

Если число экспозиций  $N + 1$  достаточно велико, то можно представить регистрируемую интенсивность в виде

$D(\xi, \eta) * comb\left(\frac{\xi}{\xi_0}\right)$ , где  $comb(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0)$  гребенчатая функция. Откуда

для спектра интенсивности в фокальной плоскости линзы О получим

$$I = |\overline{D}(u, v)|^2 comb\left(\frac{u}{u_0}\right), \quad u_0 = \frac{\lambda}{\xi_0}.$$

### Вычитание изображений

**Задача:** на двух диапозитивах А и В наряду с одинаковыми имеются и неодинаковые участки, и нужно получить разность (А - В). Диапозитивы А и В могут представлять собой, например, полученные в разное время две фотографии одного и того же участка земной поверхности, на котором произошли какие-то изменения в промежутке между съемками. Требуется выявить эти изменения.

С этой целью делают копии диапозитивов А и В на одной и той же фотопластинке Н высокого разрешения. При первой экспозиции перед Н помещают диапозитив А и освещают его спекл-структурой, создаваемой матовым стеклом G, затем А заменяют В, и прежде чем сделать вторую экспозицию, смещают Н на некоторое расстояние. При смещении Н на ней запечатываются две спекл-структуры смещенные на малое расстояние. На одинаковых участках диапозитивов А и В имеются пары идентичных пятен. При дифракции два идентичных пятна дают интерференционные полосы Юнга в фокальной плоскости объектива. Поместим в фокальную плоскость непрозрачный экран со щелью таким образом, чтобы щель совпала с темной полосой, тогда свет, дифрагированный двумя пятнами, не будет попадать на плоскость изображения, что справедливо и для всех пар одинаковых пятен. Это означает, что, все одинаковые участки диапозитивов А и В не будут видны на изображении Н'.

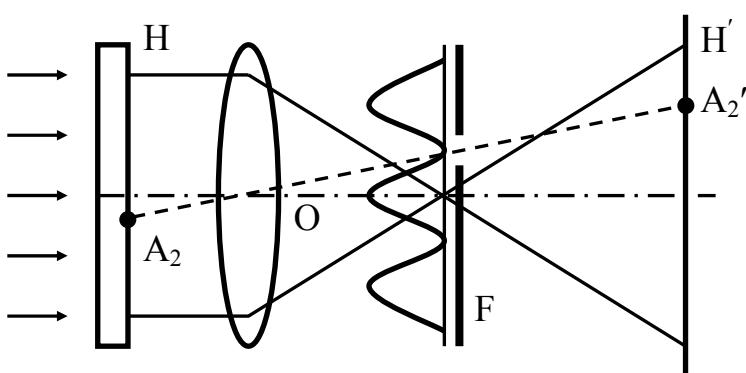


Рис. 6.30. Выявление в плоскости Н разницы двух изображений

В тех участках, где диапозитивы А и В не одинаковы, они дадут при дифракции на фотопластинке Н полосы неодинаковой интенсивности (интенсивность в минимумах не будет равна нулю). И, в результате, в плоскости Н' будут видны те участки изображений, на которых есть различия, т.е. видна "разность" изображений (А - В).

Регистрируя диапозитивы на фотопластинке по описанной схеме, получают негатив с пространственным спектром:

$$\bar{t}(u, v) = a\delta(u, v) - b\{2[\bar{A}(u, v)*\bar{D}(u, v)]\cos(\pi u/u_0) - [\bar{C}(u, v)*\bar{D}(u, v)]\exp(-i\pi u/u_0)\}, \text{ где } \bar{C}(u, v) = \bar{A}(u, v) - \bar{B}(u, v).$$

Спектр содержит три составляющие, из которых только одна несет полезную информацию. Две другие должны быть отфильтрованы в процессе восстановления. Это достигается помещением в фокальную плоскость линзы экрана со щелью, приходящейся на минимум интерференционных полос, описываемых множителем  $\cos(\pi u/u_0)$ . Экран пропускает только составляющую

$$[\bar{C}(u, v)*\bar{D}(u, v)]\exp(-i\pi u/u_0).$$

В плоскости изображения  $H'$  будет видна картина  $\bar{C}(u, v)$ , промодулированная спекл-структурой  $D$ . Такая структура спеклов мало сказывается на качестве изображения  $C$ , поэтому можно считать задачу решенной.

### Спекл-интерферометрия

Конкретная спекловая структура содержит информацию о микрорельефе и форме объекта. Проводя статистическую обработку пятнистой структуры, можно получить информацию и о параметрах перемещения объекта, в том числе о его смещениях, скорости движения, амплитуде и частоте его вибраций и т. д.

Преимущество методов исследования поверхности с помощью спекл-структуры заключается в возможности изучения объектов, недоступных для непосредственного наблюдения, с целью измерения параметров микрорельефа, формы и перемещений, сравниваемых с длиной волны  $\lambda$ , при сравнительной простоте технической реализации этих методов.

Исследование шероховатости поверхности. Обычно определяемые параметры микрорельефа поверхности - это дисперсия  $\sigma^2$  высот шероховатостей на поверхности объекта и радиус корреляции  $r_w$  этих высот. Из геометрических соображений следует, что случайные фазы волн, отраженных от различных участков поверхности однозначно связаны с высотами шероховатостей, причем дисперсию этих фаз  $\sigma_\varphi^2$  можно приближенно

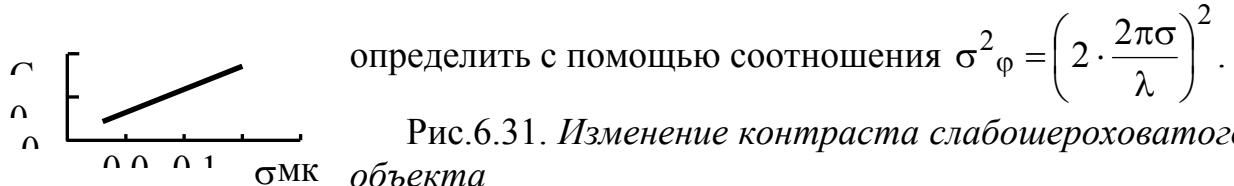


Рис.6.31. Изменение контраста слaboшероховатого объекта

Если высота шероховатостей много больше длины волны падающего излучения, то при большом числе вкладов  $N$  в соответствии с теорией контраст  $C = 1$ . В этом случае, в параметре  $C$  никакой информации о микрорельефе поверхности не содержится. Но контраст изображения слaboшероховатого объекта ( $\sigma_\varphi^2 \ll 1$ ) практически линейно зависит от высоты шероховатостей, что подтверждается и экспериментом.

Пусть  $\sigma_\varphi^2 \ll 1$ , тогда,  $C \approx 4\pi^2 \sigma^2 / \lambda^2 N$ .

Для того чтобы воспользоваться этой формулой, нужно знать число независимых вкладов  $N$ . Если для формирования когерентного изображения используется оптическая система, то число независимых вкладов  $N$  может интерпретироваться, как число областей корреляции высот шероховатостей, расположенных в одном элементе разрешения оптической системы. В этом случае, отличие круговой гауссовой статистики, соответствующей нормальному развитию спекл-структуре от некруговой, значительны уже при числе областей корреляции меньшем или равном 10.

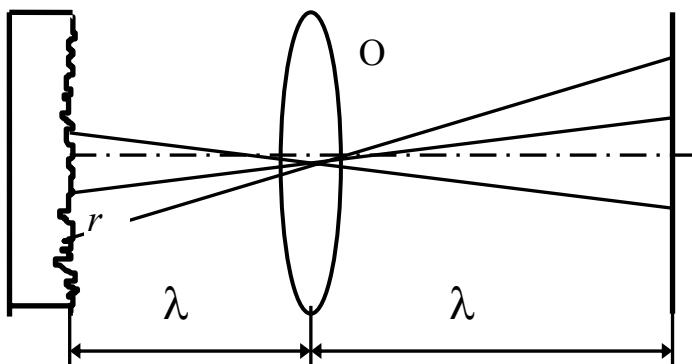


Рис. 6.32. К элементу разрешения оптической системы

Число областей корреляции высот шероховатостей, расположенных в одном элементе разрешения оптической системы  $p = (S_P \pi r_{uu}^2 / \lambda^2 \lambda_0^2)^{-1}$ , где  $S_P$  - площадь апертуры;  $r_{uu}$  - радиус корреляции шероховатостей на исследуемой поверхности;  $\lambda_0$  - расстояние от исследуемой поверхности до оптической системы.

Элемент разрешения оптической системы приблизительно равен  $r \approx \lambda_0/d_a$ , где  $d_a$  - диаметр апертуры оптической системы. Средний размер спекловой структуры -  $\lambda/d_a$ . Чем хуже разрешающая способность оптической системы, тем больший размер имеет элемент разрешения и, следовательно, тем большее число  $N = \lambda_0/d_a r_{uu}$  некоррелированных шероховатостей в нем содержится.

### **Измерение шероховатости поверхности по корреляции между двумя спекл-структурами, полученными при двух разных углах падения излучения.**

На исследуемую поверхность последовательно под разными углами направляют лазерное излучение и регистрируют на фотопластинке Н две спекл-структуры. В результате на фотопластинке получают две спекл-структуры сдвинутые одна относительно другой.

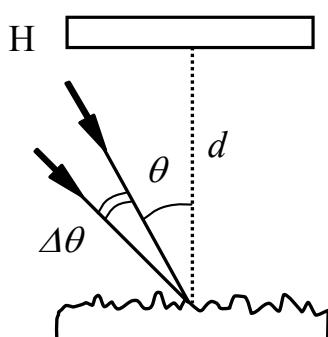


Рис.6.33. Регистрация на фотопластинке двух спекл-структур, получаемых при двух наклонах освещдающего пучка

Если изменение угла падения достаточно мало, то результатом оказывается простое смещение  $\xi_0$  спекл-структуры  $\xi_0 = d \cos \theta \Delta \theta$ . Если изменение угла  $\Delta \theta$  при заданном угле падения излучения  $\theta$  будет достаточно большим, то можно показать, что смещение картины спеклов будет сопровождаться изменением ее структуры, обусловленное шероховатостью поверхности.

После проявления негатив Н освещают параллельным пучком и в фокальной плоскости оптической системы наблюдают эквидистантные параллельные интерференционные полосы, угловое расстояние, между которыми равно  $\lambda / \xi_0$ ; контраст полос будет зависеть от шероховатости поверхности. Метод пригоден для измерения больших шероховатостей, однако для  $\sigma > 30$  мкм он не представляет практического интереса.

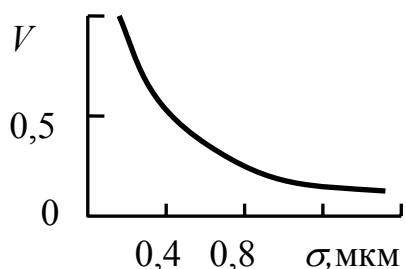


Рис. 6.34. Связь шероховатости и контраста спекл-структуры для источника белого света ( $\lambda = 0,5$  мкм,  $\lambda_c = 1,5$  мкм)

Представляет интерес измерение шероховатости с помощью источника, излучающего широкую полосу спектра. Если освещать шероховатую поверхность монохроматическим и пространственно-когерентным излучением, получаемая спекл-картина будет иметь максимальный контраст. Если же временную когерентность уменьшить, сохранив неизменной пространственную когерентность, то контраст спекл-структуры уменьшится. Этот эффект особенно заметен когда длина когерентности соизмерима с высотой рельефа поверхности. Экспериментальные исследования показывают, что соотношение между контрастом спекл-структуры и шероховатостью почти не зависит от способа получения шероховатой поверхности.

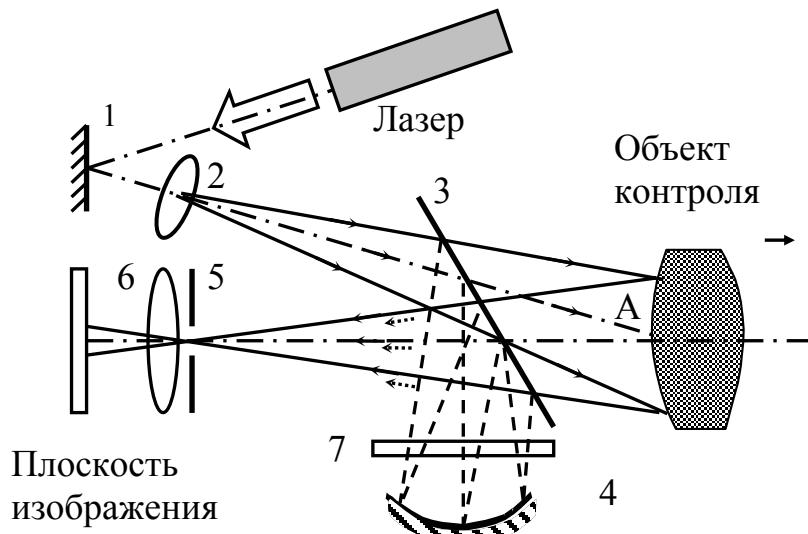
При использовании белого света (длина когерентности  $\lambda_c$  приблизительно равна 1,5 мкм) можно по контрасту спекл-структуры оценивать шероховатость  $\sigma$  в пределах от 0,2 до 3 мкм. Технически данный способ измерения можно реализовать, проецируя изображение исследуемой поверхности на малое отверстие, за которым помещен фотоприемник. Перемещая фотоприемник, измеряют профиль спекл-структуры. Диаметр отверстия должен быть, как минимум в несколько раз меньше характерного размера спекла.

## Корреляционная спекл-интерферометрия

Спекл-интерферометрия это метод измерения, основанный на когерентном сложении (интерференции) поля, имеющего спекл-структуру, с плоской опорной волной или другим полем, имеющим спекл-структуру. Одним из применений этого метода является определение собственных частот и форм колебаний элементов конструкции.

Рис. 6.35. Схема спекл-интерферометра. 1-поворотное зеркало; 2-микрообъектив; 3-светоделительная пластина; 4-сферическое зеркало; 5-регулируемая диафрагма; 6-объектив CCD; 7-поляризационный светофильтр.

В методе электронной корреляционной спекл-интерферометрии



формирование системы корреляционных полос осуществляется путем вычитания видеосигналов.

Входную плоскость телекамеры помещают в плоскости изображения интерферометра. Выходной сигнал телекамеры, полученный при исходном положении предмета, записывается в памяти. Затем предмет смещается, и сигнал, поступающий с телекамеры, вычитается из записанного в памяти сигнала. В результате те части полученных двух изображений, для которых спеклы остаются скоррелированными, дают нулевой сигнал, тогда как сигнал от некоррелирующих участков отличен от нуля.

Таким образом, мы наблюдаем картину корреляционных полос, отражающую вариации амплитуды колебаний по поверхности предмета. Система получающихся интерференционных полос соответствует смещениям либо в предметной плоскости, либо по нормали к ней. В системах с усреднением по времени удается наблюдать полосы только для нормальных к поверхности смещений.

Микрообъектив служит для освещения всей поверхности объекта или участка подлежащего контролю. Полупрозрачное зеркало совместно со

сферическим зеркалом используется для получения опорного пучка, который, проходя через диафрагму, создает в плоскости мишени телекамеры равномерную когерентную засветку. Место установки полупрозрачного зеркала выбирается из условия обеспечения равенства оптической длины пути опорного и объектного пучка. Радиус кривизны сферического зеркала выбирается таким образом, чтобы опорный пучок фокусировался в плоскости диафрагмы. Поляризационный фильтр предназначен для регулирования уровня интенсивности опорного пучка. Диафрагма, установленная перед объективом телекамеры, ограничивает входной зрачок объектива телекамеры, и определяет размер минимального спекла. Изменение фазы опорного пучка может осуществляться за счет смещения сферического зеркала. При смещении фазы опорного пучка на изображении наблюдается изменение спекл-картины.

При возбуждении колебаний исследуемого объекта на резонансной частоте спекл-картина размывается до однородной, продолжая наблюдаться только в области узловых линий (см. рис. 6.36).



Рис. 6.36. Характерная картина спекл-интерферограммы.

Для того чтобы зарегистрировать формы колебаний на каждой резонансной частоте, в памяти компьютера записывается спекл-изображение. Затем фаза опорного пучка смещается так, чтобы на спекл-изображении фаза изменилась на противоположную, и вновь записывается спекл-изображение. Два спекл-изображения вычитаются по модулю, и на экране монитора наблюдается результат вычитания, представляющий собой спекл-интерферограмму.

#### 6.4. Способы устранения спекл-структур

Существует два основных метода устранения спеклов и множество способов.

**Во-первых**, в некоторых случаях спеклы можно сделать меньше, чем детали объекта, представляющего интерес. Размеры спеклов являются дифракционно-ограниченными, так что, если детали объекта крупные, то спеклы становятся "ненаблюдаемыми".

**Во-вторых**, спеклы можно усреднить, используя интегрирование изображения во времени и одновременно осуществляя движение рассеивателей; используя для подсветки одновременно несколько разных длин волн, изменяя размер апертуры в плоскости регистрации и т.п.

Возможны и другие способы. Все эти способы снижают разрешение изображения ниже дифракционного предела; во всех случаях используется некогерентное сложение изображений. Чтобы свести к минимуму корреляцию спеклов, достаточно очень небольшого движения, так что, сохранив один из рассеивателей неподвижным и, при этом, вращая или перемещая второй, можно получить изображение, по существу свободное от спеклов за счет усреднения во времени.

### **Влияние усредняющего действия приемной апертуры на величину флюктуаций рассеянного когерентного излучения**

Если размер приемной апертуры больше, чем средний размер спекла, статистика измеренной интенсивности уже не подчиняется закону Рэлея. Хорошей аппроксимацией такой интегрированной интенсивности служит гамма-распределение. В этом случае контраст спекл-структуры уменьшается из-за усреднения спеклов, попадающих в область приемной апертуры. Важно в этом случае уметь оценивать уменьшение контраста из-за усреднения, выполняемого приемной апертурой. Измеренная интенсивность выражается через интенсивность спекл-картины как свертка с функцией  $B(x,y)$ , описывающей форму приемной апертуры.

$$I'(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} I(x_1, y_1) B(x - x_1, y - y_1) dx_1 dy_1$$

Спектр Винера измеренных флюктуаций интенсивности  $W'(u,v)$  связан со спектром флюктуаций спекл-картины  $W(u,v)$  следующим соотношением

$$W'(u,v) = W(u,v) |b(u,v)|^2,$$

где  $b(u,v)$  фурье-образ  $B(x,y)$ . Дисперсия флюктуаций измеренной интенсивности выражается как:

$$\sigma_b^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} W(u,v) |b(u,v)|^2 du dv$$

Возможность подавления спеклов в формирующей изображение системе с шероховатыми поверхностями связана с фундаментальным результатом теории вероятностей - сумма  $N$  одинаково распределенных вещественных

некоррелированных случайных величин имеет среднее значение в  $N$  раз, а стандартное отклонение в  $\sqrt{N}$  раз большее среднего значения и стандартного отклонения любого одного компонента.

Исходя из этого, на практике чаще используют упрощенный метод оценки дисперсии флуктуаций измеренной интенсивности рассеянного излучения, используя предположение, что изображение состоит из некоррелированных спеклов, или ячеек, характерного размера; считая, что в пределах апертуры содержится  $N$  таких ячеек. Тогда полная комплексная амплитуда  $U$  внутри

апертуры запишется в виде  $U = \sum_{m=1}^N U_m$ , где  $U_m$  - комплексная амплитуда от  $m$ -  
ой ячейки.

Так как по предположению  $U_m$  независимы, величину  $U$  можно считать результатом процесса случайных блужданий. Вычисление моментов распределения для этого случая показывает, что контраст спекл-картины оказывается равным  $1/\sqrt{N}$ , иначе говоря, **Контраст спекл-картины уменьшается обратно пропорционально квадратному корню из площади апертуры.**

Подобный метод применим лишь для полностью когерентного освещения.

Некоррелированные спекловые картины возникают в том случае, если излучение содержит компоненты, достаточно сильно различающиеся по частоте, поляризации или временной задержке.

Если при отражении излучения от шероховатой поверхности возникает деполяризация излучения, контраст спекл-картины уменьшается. При полной деполяризации контраст спекловой картины уменьшается в  $\sqrt{2}$  раз.

При освещении поверхности  $N$  взаимно некогерентными лазерами, контраст спекл-картины уменьшается в  $\sqrt{N}$  раз.

Более подробно вопросы изменения контраста изображения при различных условиях облучения рассмотрены в следующем разделе.

## 7. ТЕОРИЯ КОГЕРЕНТНЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

### 7.1. Статистические характеристики когерентных изображений. Контраст изображения

Рассмотрим свойства когерентного изображения для случая, когда объект подсвечивается когерентным излучением, и состоит из двух точечных объектов. Зададим расположение этих объектов с помощью радиус-векторов  $r_1=(x_1, y_1, z_1)$ ,  $r_2=(x_2, y_2, z_2)$ . И пусть изображение этого объекта строится тонкой линзой в плоскости, отстоящей от нее на расстоянии  $z_u$ .

Пусть  $z_1 \approx z_2 \approx r_u$ , причем

$$|z_1 - z_2| \ll \lambda r_u^2 / d d_\rho,$$

где  $d_\rho$  - минимальный линейный размер апертуры линзы,  $d$  – максимальный линейный размер объекта (расстояние от оси  $z$  до наиболее удаленной от нее точки объекта).

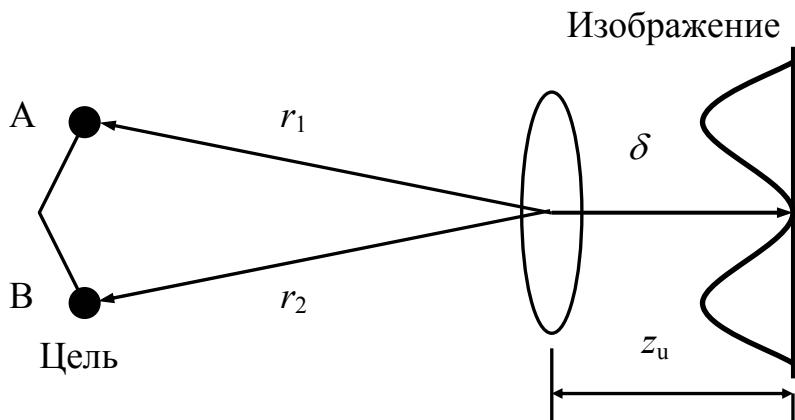


Рис. 7.1. Формирование изображения двухточечного объекта

Линза, формирующая изображение, имеет фокусное расстояние  $f$ :  $1/f = 1/r_u + 1/z_u$ . В этом случае поле в изображении представляется в виде суммы двух слагаемых:

$$E(\delta) = -\frac{E_u S_m S_\delta}{\lambda^2 r_u z_u} \left\{ k_1 \exp\left[i \frac{2\pi(r_1 + \delta)}{\lambda}\right] h\left(\frac{r_1}{r_u} + \frac{\delta}{z_u}\right) + k_2 \exp\left[i \frac{2\pi(r_2 + \delta)}{\lambda}\right] h\left(\frac{r_2}{r_u} + \frac{\delta}{z_u}\right) \right\},$$

где  $k_1, k_2$  – коэффициенты отражения от точечных объектов;

$\lambda$  - длина волны подсвечивающего излучения;

$r_u$  – среднее расстояние от объекта до линзы;

$z_u$  – расстояние от линзы до изображения;

$h(l) = \frac{1}{S_\rho} \int \exp\left(\frac{2\pi l \rho}{\lambda}\right) d\rho$  - импульсный отклик линзы,  $\rho$  - радиус-вектор апертуры линзы,  $E_u = E_0 S_u / \lambda |r_u - \rho|$  - поле в плоскости объекта от источника,  $E_0$  - амплитуда поля источника,  $S_u$  - площадь источника,  $\rho_u$  - радиус вектор источника,  $\delta$  - радиус вектор изображения,  $S_\rho$  - площадь апертуры линзы,  $S_T$  - сечение рассеяния точечного объекта. Интегрирование производится по апертуре линзы.

На рис. 49 приведены построенные при различных  $x_1, x_2$  реализации изображений для плоского случая.

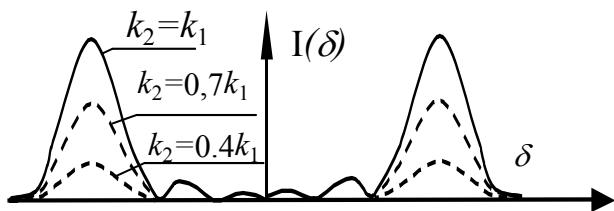


Рис. 7.2. Распределение интенсивности в когерентном изображении двухточечного объекта

Видно, что распределение интенсивности  $I(\delta) = |E(\delta)|^2$  существенно зависит как от  $k_1, k_2$ , так и от функции  $h(\lambda)$  и  $x_1, x_2$ . Естественно считать  $k_1 \approx k_2$ . Если выполняется условие  $x_1 - x_2 < \lambda r_u / d_\rho$ , то при  $k_1 \approx k_2$  отклики от обоих точечных объектов располагаются практически в одном месте.

Представим далее, что расположение точечных объектов случайно и величина  $z_1 - z_2$  имеет определенный (например, гауссовский или равномерный) закон распределения.

Введем обозначения

$$\varphi_1 = 2\pi(r_1 + \delta)/\lambda; \quad \varphi_2 = 2\pi(r_2 + \delta)/\lambda;$$

$$A_1 = -\frac{k_1 S_T S_\rho}{\lambda^2 r_u z_u} h\left(\frac{r_1}{r_u} + \frac{\delta}{z_u}\right); \quad A_2 = -\frac{k_2 S_T S_\rho}{\lambda^2 r_u z_u} h\left(\frac{r_2}{r_u} + \frac{\delta}{z_u}\right).$$

Тогда

$$I(\delta) = E_u^2 \left\{ A_1^2 + A_2^2 + A_1 A_2^* \exp[i(\varphi_1 - \varphi_2)] + A_1^* A_2 \exp[i(\varphi_2 - \varphi_1)] \right\}.$$

Пусть фаза  $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$  распределена по закону  $P(\varphi)$  с шириной  $\varphi_0$ , характеризующей разброс фазы  $\varphi$ . Обычно  $\varphi_0 \gg 2\pi$ ,  $P(\varphi) \rightarrow 0$  при  $\varphi \rightarrow \pm\infty$ . Исходя из этих условий, нетрудно показать, что

$$\langle \exp(i\varphi) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} P(\varphi) \exp(i\varphi) d\varphi \ll 1 \quad \text{при } \varphi \gg 2\pi,$$

где  $\langle \rangle$  - операция усреднения.

В частности, при гауссовском законе распределения

$$P(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\langle\varphi^2\rangle}} \exp\left(-\frac{\varphi^2}{2\langle\varphi^2\rangle}\right); \quad \langle \exp(i\varphi) \rangle = \left(-\frac{\langle\varphi^2\rangle}{2}\right) \ll 1 \quad npu \langle\varphi^2\rangle \gg 1$$

При равномерном законе распределения

$$P(\varphi) = \begin{cases} 1/2\varphi_p & \text{при } |\varphi| < \varphi_p, \\ 0 & \text{при } |\varphi| > \varphi_p, \end{cases}$$

где  $\varphi_p$  ширина распределения;

$$\langle \exp(i\varphi) \rangle = 2 \sin c \varphi_p \ll 1 \quad \text{при } \varphi_p \gg 2\pi.$$

Используя последнее соотношение с учетом независимости точек, получим для дисперсии  $\langle(\delta I)^2\rangle = \langle I^2\rangle - \langle I\rangle^2 = 2A_1^2 A_2^2$ , и для среднего значения интенсивности  $\langle I\rangle = A_1^2 + A_2^2$ . Отсюда относительная дисперсия равна

$$D = \frac{\langle(\delta I)^2\rangle}{\langle I\rangle^2} = \frac{2A_1^2 A_2^2}{(A_1^2 + A_2^2)} = 1 - \frac{A_1^4 + A_2^4}{(A_1^2 + A_2^2)^2} < 1.$$

Эта величина очень важна для характеристики изображения и часто называется контрастом. Чем меньше  $D$ , тем более равномерна яркость изображения, меньше отличаются его наиболее темные и светлые места. В данном случае максимальное значение контраста  $D = 0,5$  и достигается при  $A_1 = A_2$ .

Уже из анализа этого случая видно, что когерентные изображения объектов, состоящих из точек с достаточно большим случайным разбросом расстояний между ними, сильно флюктуируют, т.е. представляют собой сильно изрезанные по яркости структуры. И можно предположить, что при увеличении числа точек, составляющих подобные объекты, контраст будет увеличиваться.

Обобщим полученный результат на случай, когда объект состоит из  $n_0$  независимо расположенных точек. В этом случае  $E(\delta) = E_u \sum_{j=1}^{n_0} A_j \exp(i\varphi_j)$ .

Очевидно,  $\varphi_j$  независимы, т.е. их совместный многомерный закон распределения распадается на произведение одномерных распределений:

$$P(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n_0}) = \prod_{n_0} P(\varphi_j).$$

Тогда результирующее распределение интенсивности получим выполняя суммирование амплитуд рассеянного излучения

$$I = E_u^2 \left\{ \sum_{m=1}^{n_0} |A_m|^2 + \sum_{\substack{m,n=1 \\ m \neq n}}^{n_0} A_m A_n^* \exp[i(\phi_m - \phi_n)] \right\}.$$

Раскрывая это соотношение получим:

$$D = 1 - \sum_{m=1}^{n_0} |A_m|^4 \left/ \left( \sum_m |A_m|^2 \right)^2 \right. = 1 - \frac{1}{N}, \quad \text{где} \quad N = \left( \sum_{m=1}^{n_0} |A_m|^2 \right)^2 \left/ \sum_{m=1}^{n_0} |A_m|^4 \right..$$

Из последнего соотношения видно, что при  $n_0 \gg 1$ ,  $D \approx 1$ , т.е. контраст в когерентном изображении многоточечного объекта, состоящего из случайно и независимо расположенных точек, разброс по фазе которых существенно превышает длину волны подсвечивающего излучения, стремится к единице.

Для объекта, состоящего из большого числа точек, достаточно общие результаты могут быть получены следующим путем. По центральной предельной теореме теории вероятностей вещественная и мнимые части поля в изображении многоточечного объекта со случайным и независимым расположением точек должны приближенно описываться гауссовскими распределениями, так как они представлены в виде суммы большого числа независимых слагаемых. Непосредственным вычислением легко убедиться, что

$$\text{вещественная часть поля } E_R = \sum_{j=1}^{n_0} A_j \cos \phi_j \text{ и мнимая часть } E_I = \sum_{j=1}^{n_0} A_j \sin \phi_j$$

имеют одинаковые дисперсии  $\langle E_R^2 \rangle = \langle E_I^2 \rangle = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n_0} A_j^2$  и нулевую корреляцию  $\langle E_R E_I \rangle = 0$ . Следовательно, при большом  $n_0$  они будут представлять собой две одинаково распределенные и независимые гауссовские величины. Интенсивность изображения  $I = E_R^2 + E_I^2$  будет экспоненциально распределенной величиной. Для экспоненциального распределения  $\langle (\delta I)^2 \rangle = \langle I \rangle^2$ , т.е. контраст много точечного изображения  $D \approx 1$ .

Можно показать, что близость распределения к гауссовскому как раз следует из приблизительного равенства контраста  $D$  единице.

## 7.2. Учет дискретности спектра подсвечивающего излучения и направления подсвета

**Дискретность спектра подсвечивающего излучения.** В реальных условиях подсвечивающее объект излучение никогда не бывает чисто когерентным. Оно может состоять из дискретного или непрерывного набора волн (частот), что приводит к ухудшению временной когерентности излучения. Рассмотрим влияние излучения в виде набора дискретных волн на статистические характеристики изображения.

Изображения, получаемые при фотографировании в белом свете, не имеют пятнистой флуктуационной структуры. Поэтому, можно предположить, что с увеличением числа длин волн подсвечивающего излучения контраст в изображении будет уменьшаться.

Пусть объект состоит из двух случайно расположенных точек, и в подсвечивающем излучении присутствуют две длины волн. В этом случае результирующая амплитуда поля в изображении объекта при его при его облучении двумя длинами волн

$$E(\delta, t) = E(\omega_1, \delta) \exp(i\omega_1 t) + E(\omega_2, \delta) \exp(i\omega_2 t),$$

где  $E(\omega_j, \delta) \approx E_u [A_1 \exp(i\omega_j z_1/c) + A_2 \exp(i\omega_j z_2/c)]$ ;  $\omega_j = 2\pi c/\lambda_j$ ;  $j = 1, 2$ .

Следовательно, интенсивность изображения представляет собой меняющуюся со временем структуру с периодом изменения  $\tau = 1/(\omega_2 - \omega_1)$ .

Разность частот излучения  $\omega_2 - \omega_1$  для оптического диапазона волн обычно велика. Даже при отличии длин волн на  $10^{-5}$  % она составляет порядка 10 МГц. Характерное время регистрации оптических изображений  $10^{-7}$  с и выше. Следовательно, регистрироваться будет усредненная по времени интенсивность - плотность энергии излучения

$$Q(\delta) = \int_0^T |E(\delta, t)|^2 dt,$$

где  $T$  – время регистрации изображения.

В этом случае имеет смысл говорить о статистических характеристиках величины  $Q(\delta)$ .

Для объекта из двух точек после интегрирования по  $t$

$$Q(\delta) = I_1(\delta)T + I_2(\delta)T + 2 \operatorname{Re} E_1 E_2^* \sin[c(\omega_1 - \omega_2)T],$$

где  $I_1 = |E(\omega_1, \delta)|^2$ ;  $I_2 = |E(\omega_2, \delta)|^2$ .

При  $T \Delta \omega \gg 1$ ,  $Q(\delta) = (I_1 + I_2)T$ .

Тогда

$$D_1 = \frac{\langle Q^2 \rangle - \langle Q \rangle^2}{\langle Q \rangle^2} = \frac{\langle (\delta I_1)^2 \rangle + \langle (\delta I_2)^2 \rangle + 2[\langle I_1 I_2 \rangle - \langle I_1 \rangle \langle I_2 \rangle]}{\langle I_1 \rangle + \langle I_2 \rangle}.$$

Следуя результатам предыдущего параграфа, имеем:

$$\langle (\delta I_1)^2 \rangle = \langle (\delta I_2)^2 \rangle = 2A_1^2 A_2^2; \quad \langle I_1 \rangle = \langle I_2 \rangle = A_1^2 + A_2^2;$$

$$D_1 = 0,5(1 - 1/n_0) + B_{12}/2\langle I_1 \rangle^2,$$

где  $B_{12} = \langle I_1 I_2 \rangle - \langle I_1 \rangle \langle I_2 \rangle$  - частотная корреляционная функция.

Учитывая, что  $E(\omega_j, \delta) \approx E_u [A_1 \exp(i\omega_j z_1/c) + A_2 \exp(i\omega_j z_2/c)]$ , получаем

$$B_{12} = 4(A_1^2 + A_2^2)A_1 A_2 \left\langle \cos \frac{\omega(z_1 - z_2)}{c} \right\rangle + 4A_1^2 A_2^2 \left\langle \cos \frac{(\omega_1 - \omega_2)(z_1 - z_2)}{c} \right\rangle.$$

Предположим, что  $z_1 - z_2$  распределено по гауссовскому закону с

$$\sigma = \sqrt{\langle (z_1 - z_2)^2 \rangle} \gg \lambda_1, \lambda_2. \text{ Тогда после усреднения получим}$$

$$B_{12} = 4A_1^2 A_2^2 \exp[-\sigma^2 (\omega_1 - \omega_2)^2 / c^2].$$

Для случая, когда  $z_1 - z_2$  распределено по равномерному закону в интервале  $(-\eta_m/2, \eta_m/2)$   $B_{12} = 4A_1^2 A_2^2 \sin c[\eta_m(\omega_1 - \omega_2)/c]$ .

Если  $(\omega_1 - \omega_2)\sigma/c \gg 1$ ,  $(\omega_1 - \omega_2)\eta_m/c \gg 1$ , то  $D_1 = D/2$ . В противоположном случае  $D_1 \approx D$ . Это значит, что контраст при подсвете двухточечного объекта двумя достаточно разнесенными длинами волн падает в два раза. При слабом разнесении длин волн падение контраста отсутствует.

Например, при  $\sigma = 100\lambda$  разнесение по длинам волн, приводящее к двукратному падению контраста, составляет  $\Delta\lambda = \lambda^2/\sigma \approx 10^{-2}\lambda$ .

При  $\Delta\lambda \ll 10^{-2}\lambda$  падение контраста не происходит.

С физической точки зрения падение контраста в изображении при подсвете объекта сильно разнесенными длинами волн объясняется тем, что в плоскости изображения формируются два или несколько несовпадающих между собой изображения.

Двукратное падение контраста при  $(\omega_1 - \omega_2)\sigma/c \gg 1$  имеет место и при подсвете многоточечного объекта.

Рассмотрение случая, когда многоточечный объект подсвечивается несколькими длинами волн  $\lambda_m = 2\pi c/\omega_m$ ,  $m = 1, 2, \dots, m_0$  приводит к  $D_1 = D/m_0$  при  $(\omega_m - \omega_n)\sigma/c \gg 1$ . В противоположном случае  $D_1 = D$ , т. е. контраст такой же, как при подсвете многоточечного объекта одной длиной волны.

Таким образом, контраст в изображении многоточечного объекта со случайным расположением точек меняется от контраста  $D$ , получаемого на одной длине волны, до контраста  $D/m_0$ , имеющего место при условии, что все длины волн удовлетворяют неравенствам

$$\lambda_m - \lambda_n > \lambda_m \lambda_n / \sigma, \quad m, n = 1, 2, \dots, m_0,$$

где  $m_0$  – кратное падение контраста является следствием сложения  $m_0$  статистически независимых изображений, получаемых на различных длинах волн. Это приводит к  $m_0$  – кратному уменьшению относительной дисперсии суммы этих изображений.

При рассмотрении данного вопроса мы не учитывали корреляционных связей между точками, которые имеют место, если объект непрерывен, не

учитывалось также интенсивности каждой из спектральных составляющих и форма объекта.

В случае эквидистантного расположения длин волн облучения относительно  $\lambda$ , результату

$$D_1 = \frac{D}{m_0} = \frac{1}{m_0} \times \frac{\langle (\delta I_1)^2 \rangle}{\langle I_1 \rangle^2}$$

можно дать следующую интерпретацию. Пусть  $\Delta\lambda$  -

ширина спектра излучения. Тогда интервал между соседними длинами волн составляет величину  $\Delta\lambda/m_0$ . Условие статистической независимости изображений, получаемых на соседних длинах волн  $\Delta\lambda/m_0 \geq \lambda^2/\sigma$ .

Отсюда  $m_0 \leq \sigma/\lambda_c$ , где  $\lambda_c = \lambda^2/\Delta\lambda$  - параметр, описывающий длину когерентности излучения. Следовательно,  $D_1 = (\lambda_c/\sigma)D$ .

Физический смысл последнего выражения состоит в том, что контраст в изображении, получаемом на широком спектре длин волн, падает во столько раз по сравнению с контрастом изображения, получаемом на одной длине волны, во сколько раз длина когерентности излучения меньше дисперсии расстояния между точками объекта. Этот результат есть следствие того факта, что при  $\lambda_c < \sigma$  расстояния между точками объекта столь велики, что их можно мысленно разбить на участки вдоль оси  $z$ , причем эти участки (даже соседние) будут рассеивать излучение, не интерферирующее друг с другом. Число таких статистически независимых полей как раз и составляет  $m_0 = \lambda_c/\sigma$ .

Качественно подобная картина будет иметь место и при произвольном виде спектра. В этом случае  $\Delta\lambda$  - полуширина спектра,  $\lambda_c = \lambda^2/\Delta\lambda$ .

**Статистические характеристики изображения объекта при его движении и монохроматическом подсвете с разных направлений.**

Пусть многоточечный неподвижный объект подсвечивается одновременно с нескольких направлений; источники подсвета расположены в плоскости апертуры линзы, формирующей изображение; начальные фазы излучения источников случайны и независимы.

### Двухточечный объект.

$$E_s = E_{us} \left[ A_1(i\varphi_1) \exp\left(i \frac{2\pi x_1}{\lambda} \sin \theta_s\right) + A_2(i\varphi_2) \exp\left(i \frac{2\pi x_2}{\lambda} \sin \theta_s\right) \right] \exp(i\psi_s),$$

где  $E_{us}$  – амплитуда поля  $j$ -го источника на объекте,  $\theta_s$  – углы падения,  $s = 1, 2$ ;  $\sin \theta_s = \rho_{us} / |r_u - \rho_{us}|$ ,  $\rho_{us}$  – положение источников,  $\psi_s$  – начальные фазы источников. Очевидно,  $\langle E_1 E_2^* \rangle_i = 0$ , где  $\langle \rangle_i$  – усреднение по фазам источников. С учетом этого условия контраст в изображении равен

$$D_2 = \frac{\langle (\delta I)^2 \rangle}{\langle I \rangle^2} = \frac{\langle I^2 \rangle - \langle I \rangle^2}{2\langle I_1 \rangle^2} + \frac{B_{12}}{2\langle I_1 \rangle^2},$$

где  $I = I_1 + I_2$ ;  $B_{12} = \langle I_1 I_2 \rangle - \langle I_1 \rangle \langle I_2 \rangle$ ;  $I_j = |E_j|^2$ ,  $j = 1, 2$ .

После усреднения по фазам  $\varphi_1, \varphi_2$  получим при  $E_{u1} = E_{u2} = E_u$

$$B_{12} = 2E_u^4 A_1^2 A_2^2 \cos[(2\pi/\lambda)(x_1 - x_2)(\sin \theta_1 - \sin \theta_2)].$$

Отсюда

$$D_2 = (D/2) \{1 + \cos[(2\pi/\lambda)(x_1 - x_2)(\sin \theta_1 - \sin \theta_2)]\}.$$

При  $\theta_1 = \theta_2$  имеем  $D_2 = D$ ; при  $(2\pi/\lambda)(x_1 - x_2)(\sin \theta_1 - \sin \theta_2) = \pi/2 + 2\pi m_0$  получим  $D_2 = D/2$ .

При  $A_1 \neq A_2$   $\langle E_1 E_2^* \rangle$  не обращается в нуль. Таким образом,  $D_2$  является периодической функцией. Двукратное падение контраста объясняется периодической декорреляцией интенсивностей в изображении при изменении угла подсветки  $\theta_2$ .

### Многоточечный объект

Поле в изображении  $E(\delta) = \sum_{s=1}^{m_0} E_s(\delta)$ ?

$$\text{где } E_s(\delta) = E_{us} \sum_{j=1}^{n_0} A_j \exp(i\varphi_j) \exp\left[i \frac{2\pi r_j(\rho_{us} + \delta)}{\lambda r_u}\right] \exp(i\psi_s),$$

где  $\rho_{us}$  – радиус-вектор  $s$ -го источника;  $n_0$  – число точек объекта,  $\psi_s$  – фаза источника,  $m_0$  – число источников.

Тогда средняя интенсивность в изображении равняется

$$\langle I(\delta) \rangle = \left\langle \left| \sum_{s=1}^{m_0} E_s(\delta) \right|^2 \right\rangle = \sum_{s=1}^{m_0} \langle I_s \rangle, \quad I_s = |E_s(\delta)|^2,$$

где  $\langle \cdot \rangle$  – усреднение по источникам и по фазам  $\varphi_j$ , обусловленным случайным расположением точек.

В случае независимых точек объекта.

$$\langle I_s \rangle = |E_{us}|^2 \sum_{j=1}^{m_0} A_j^2, \quad \langle (\delta I)^2 \rangle = \sum_{s=1}^{m_0} \langle (\delta I_s)^2 \rangle + 2 \sum_{\substack{s,t=1 \\ s \neq t}}^{m_0} B_{st},$$

где  $\langle (\delta I_s)^2 \rangle = \langle I_s^2 \rangle - \langle I_s \rangle^2$ ;  $B_{st} = \langle I_s I_t \rangle - \langle I_s \rangle \langle I_t \rangle$ .

Вычислим величину  $B_{st}$ . Так как при конечном числе точек объекта  $E_s$  распределено не по гауссовому закону, то, вообще говоря,  $B_{st} \neq |\langle E_s E_t^* \rangle|^2$ , что уже было видно на примере двухточечного объекта.

В случае конечного числа объектов  $n_0$ , нетрудно показать, что с точностью до несущественных множителей при  $n_0 \rightarrow \infty$  получим

$$B_{st} = B_u \approx E_{us}^2 E_{ut}^2 \left| \int k^2(r) |h(r, \delta)|^2 \exp \left[ i \frac{2\pi r(\rho_{us} - \rho_{ut})}{\lambda r_u} \right] dr \right|^2,$$

где интегрирование проводится по поверхности объекта. Отсюда для линзы квадратной формы при хорошем разрешении можно получить выражение для корреляции

$$B_u \approx E_{us}^2 E_{ut}^2 k^4(\delta) \left[ 1 - (\rho_{us} - \rho_{ut})^2 / d_\rho^2 \right]^2 \quad \text{при } |\rho_{us} - \rho_{ut}| < d_\rho;$$

$$B_u \approx 0 \quad \text{при } |\rho_{us} - \rho_{ut}| > d_\rho.$$

Следовательно, при разнесении источников подсвета объекта на расстояние, большее размеров апертуры линзы  $d_\rho$ , наступает полная декорреляция между изображениями. С физической точки зрения это объясняется тем, что при изменении направления подсвета объекта поле также поворачивается относительно объекта, но в противоположном направлении.

При повороте поля на угол  $d_\rho/r_u$  происходит полная смена одной реализации поля на апертуре линзы на другую реализацию. Это приводит к эффекту декорреляции интенсивностей изображений, получаемых до и после поворота источника подсвета на угол  $d_\rho/r_u$ .

Следует отметить, что поворот поля по законам зеркального отражения имеет место лишь при  $n_0 \rightarrow \infty$ . В этом случае многоточечный объект трансформируется в объект со сплошной поверхностью, отражающей по законам, близким к геометрической оптике.

В случае объекта, состоящего из малого числа точек, функция корреляции интенсивностей  $B_{12}$  в изображении не стремится к нулю при изменении направления подсвета. Для двухточечного объекта она даже периодическая. Это связано с тем, что при изменении направления подсвета подобного объекта законы геометрической оптики не выполняются даже приблизительно.

Учитывая соотношение для функции корреляции интенсивностей  $B_{st}$  и, полагая, что амплитуды источников равны, а, следовательно,  $\langle I_s \rangle = \langle I_1 \rangle$  найдем контраст изображения, получаемого при подсвете от независимых источников

$$D_2 = \frac{1}{m_0} - \frac{1}{n_0} + 2 \sum_{\substack{s,t=1 \\ s < t}}^{m_0} \frac{\left| \langle E_s E_t^* \rangle \right|^2}{m_0^2 \langle I_1 \rangle^2}, \quad \text{при } s = t, D_2 = 1 - 1/n_0 = D.$$

Таким образом, при совпадении источников, контраст, естественно, сохраняется прежним, как и при подсвете из одного источника. В случае конечного числа  $m_0$  и при достаточно большом числе точек  $n_0$ , составляющих объект происходит декорреляция полей, т.е.  $\langle E_s E_t^* \rangle \approx 0$ . В этом случае  $D_2 \approx 1/m_0$ . Этот результат является следствием наложения  $m_0$  изображений с независимыми полями, что, как известно, приводит к  $m_0$ -кратному падению контраста. Исходный единичный контраст принят в силу предположения, что  $n_0 \rightarrow \infty$ . Условие декоррелируемости полей состоит в том, чтобы источники были разнесены между собой на расстояния большее размеров апертуры линзы  $|\rho_{us} - \rho_{ut}| > d_\rho$ . По аналогии со случаем подсвета объекта различными длинами волн, при котором падение контраста в изображении наступает при условии  $(\lambda_s - \lambda_t)/\lambda_s^2 > \sigma^{-1}$ , можно переписать условие  $|\rho_{us} - \rho_{ut}| > d_\rho$  в виде  $|\rho_{us} - \rho_{ut}| > \lambda_n$ , где  $\lambda_n$  – длина пространственной когерентности источников, равная  $d_\rho$ .

Таким образом, контраст при подсвете объекта источниками со случайными и независимыми за время наблюдения фазами, что имеет место, например, из-за изменения взаимного расположения источников, с ростом числа подобных источников уменьшается. Такие источники принято считать некогерентными между собой.

Рассмотрим случай, когда источники расположены внутри области, равной половине апертуры линзы. Для упрощения анализа, расположим их по одной линии, и будем считать, что  $n_0 \rightarrow \infty$ . В этом случае

$$D_2 = \frac{1}{m_0} - \frac{1}{n_0} + \frac{2}{m_0^2} \sum_{\substack{s,t=1 \\ s < t}}^{m_0} \left[ 1 - \frac{d_k(t-s)}{2m_0 d_\rho} \right],$$

где  $d_k$  – расстояние между крайними источниками. Тогда после суммирования по  $s$  и  $t$  получим

$$D_2 = 1 - \frac{1}{n_0} - \frac{d_k}{6d_\rho} \frac{(m_0 - 1)(m_0 + 1)}{m_0^2}.$$

При  $m_0 \gg 1$ ,  $D_2 = D - d_k/6d_\rho$  ( $d_k < d_\rho/2$  по условию),  $D = 1 - 1/n_0$ .

Контраст суммарного изображения в этом случае превышает  $D$  - 0.1. При уменьшении максимального расстояния между источниками  $d_k$  контраст  $D_2$  возрастает и при  $d_k \rightarrow 0$  стремится к  $D$  независимо от числа источников. Рост размеров апертуры линзы также приводит в этом случае к возрастанию контраста.

К уменьшению контраста приводит также изменение фазовых набегов между соседними точками при изменении направления подсвета объекта.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Франсон М. Оптика спеклов: Пер. с англ. - М.: Мир, 1980. – 171 с.
2. Гудмен Дж. Статистическая оптика: Пер. с англ. - М.: Мир, 1988. –528 с.
3. Джоунс Р., Уайкс К. Голографическая и спектр-интерферометрия: Пер. с англ. – М.: Мир, 1986. –328 с.
4. Клименко И.С. Голография сфокусированных изображений и спектр-интерферометрия. – М.: Наука, 1985. – с.
5. Теория когерентных изображений / П.А.Бакут, В.И.Мандросов, И.Н.Матвеев и др.; Под ред. Н.Д.Устинова. – М.: Радио и связь, 1987. – 264 с.
6. Ахманов С.А., Дьяков Ю.Е., Чиркин А.С. Введение в статистическую радиофизику и оптику. – М.: Наука, 1981. – 640 с.
7. Мэйтленд А., Дани М. Введение в физику лазеров: Пер. с англ. – М.: Наука, Глав. ред. физ.-мат. лит. 1978. – 407 с.

## **СОДЕРЖАНИЕ**

<b>Предисловие</b>	3
<b>1. Оптический сигнал и оптическая система</b>	4
1.1. Оптические системы, операторы, функционалы. Типы оптических систем	4
1.2 Оптический сигнал и его преобразование	5
<b>2. Преобразование Фурье</b>	7
2.1. Определение преобразования Фурье	7
2.2. Представление поля в дальней зоне через интеграл Фурье	9
2.3. Основные свойства преобразования Фурье	10
2.4. Двумерные функции	12
2.5. Наиболее часто встречающиеся в оптике специальные функции в связи с применением теории систем и преобразований	13
2.6. Свойства симметрии дифракционной картины	14
2.7. Фурье-образы наиболее часто встречающихся в оптике двумерных сигналов и их свойства	18
<b>3. Обобщенные функции. Свертка. Функция корреляции. Пространственная фильтрация</b>	27
3.1 Понятие обобщенных функций. Свойства. Операции	27
3.2. Свертка	29
3.3 Корреляция	31
3.4. Пространственная фильтрация	35
<b>4. Квантовая природа электромагнитного излучения. Ограничение разрешающей способности оптической системы и информационной емкости оптических сигналов</b>	38
4.1. Квантовая природа электромагнитного излучения	38
4.2. Принцип неопределенности в теории оптического сигнала и теорема Котельникова	43
4.3. Разрешающая сила оптической системы в классическом рассмотрении	47
4.4. Квантомеханическая модель дифракции монохроматического излучения на щели	50
<b>5. Корреляционные функции и когерентность излучения</b>	53
5.1. Общетеоретические положения	53
5.2. Распространение взаимной когерентности. Распространение световых волн, функция взаимной когерентности	55
5.3. Предельные формы взаимной когерентности. Когерентное поле, некогерентное поле	58
5.4. Теорема Ван Циттерта-Цернике. Значение теоремы и следствия из нее	58
5.5. Дифракция частично когерентного излучения на отверстии	61

5.6. Пространственная когерентность излучения. Многомодовый режим излучения лазера. Радиус корреляции лазерного излучения	66
5.7. Предельная пространственная когерентность излучения одномодового лазера	70
5.8. Временная когерентность излучения лазера	71
<b>6. Оптика спеклов</b>	<b>76</b>
6.1. Понятие спекл, объективной и субъективной спекл-картины. Основные свойства спекл-картины, условия формирования	76
6.2. Нормально развитая спекл-картина, условия ее наблюдения, контраст спекл-картины, индивидуальный спекл	91
6.3. Интерференция в диффузном свете. Спекл-интерферометрия. Примеры практического применения.	96
6.4. Способы устранения спекл-структуры	108
<b>7. Теория когерентных изображений</b>	<b>110</b>
7.1. Статистические характеристики когерентных изображений. Контраст изображения	110
7.2. Учет дискретности спектра подсвечивающего излучения и направления подсвета	113
<b>Литература</b>	<b>120</b>
<b>Содержание</b>	<b>121</b>