Analyse 1 uitwerkingen

College 1

Sophie van den Eerenbeemt
Dennis van den Berg

16 november 2016

1. Zijn de volgende deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ begrensd naar boven / beneden? Bepaal supremum, in mum, maximum en minimum (voor zover die bestaan).

$$
\begin{aligned}
&A = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists_{n\in\mathbb{N}}\colon 2n-1 < x < 2n\} \\
&B = \left\{-\frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}_+\right\} \\
&C = \{x \in \mathbb{R} \mid 4x - x^2 > 3\} \\
&D = \{x \in \mathbb{R} \mid 4x - x^2 \geq 3\} \\
&E = [0,1]\backslash\mathbb{Q}
\end{aligned}
$$

2. Zij $A \subset \mathbb{R}$ niet leeg en begrensd, $\varepsilon > 0$. Laat zien: Er is een $x \in A$ zodanig dat $x > \sup A - \varepsilon$ en er is een $y \in A$ zodanig dat $y < \inf A + \varepsilon$.

   (**Hint:** Geef een bewijs uit het ongerijmde!)

3. Zij $A, B \subset \mathbb{R}$ niet leeg en begrensd. Definieer:

$$
\begin{aligned}
-A &= \{-a \mid a \in A\} \\
A + B &= \{a + b \mid a \in A, b \in B\} \\
A - B &= \{a - b \mid a \in A, b \in B\}
\end{aligned}
$$

   Laat zien

   (a)

$$
\begin{aligned}
\sup(-A) &= -\inf A \\
\sup(A+B) &= \sup A + \sup B \\
\inf(A-B) &= \inf A - \sup B
\end{aligned}
$$

   Te bewijzen. $\sup(-A) = -\inf A$.

   Bewijs. A is begrensd en niet leeg, dus $-A$ ook niet begrensd (per definitie van de verzameling $-A$) en niet leeg. Dus $\sup(-A)$ bestaat.
   Per definitie van $\inf A$ weten we dat $\inf A$ de grootste ondergrens is waarvoor geldt

$$\forall_{x\in A} : x \geq \inf A\,,$$

   maar dan ook

$$\forall_{x\in A} : -x \leq -\inf A\,.$$

   Hieruit volgt dat $-\inf A$ een bovengrens is voor $-A$, ofwel $-\inf A \geq \sup(-A)$. Het rest nog om aan te tonen dat $-\inf A$ de kleinste bovengrens is, dus

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{x\in -A} : x > -\inf A - \varepsilon.$$

   Maar we weten dat $\inf A$ de grootste bovengrens is voor A, dus

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{x\in A} : x < \inf A + \varepsilon\,,$$

Waar—door beide kanten met -1 te vermenigvuldigen—gebruikmakend het feit dat voor $x \in A$ geldt $-x \in -A$ de bewering direct uit volgt, dus

$$\sup(-A) = -\inf A.$$

□ Q. E. D.

Te bewijzen. $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$

Bewijs. A en B zijn begrensd en niet leeg, dus $A + B$ ook niet begrensd (per definitie van de verzameling $A + B$) en niet leeg. Dus $\sup(A + B)$ bestaat.
Voor $\sup A$ en $\sup B$ weten we dat geldt

$$\forall_{x \in A} : x \leq \sup A$$
$$\forall_{y \in B} : y \leq \sup B\,.$$

Maar dan ook $\forall_{x\in A}\forall_{y\in B} : x + y \leq \sup A + \sup B$, dus $\sup A + \sup B$ bovengrens voor $A + B$ en $\sup A + \sup B \geq \sup(A + B)$.
We moeten enkel nog aantonen dat $\sup A + \sup B$ de kleinste bovengrens is voor $A + B$, dus

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{z\in A+B} : z > \sup A + \sup B - \varepsilon\,.$$

Zij $\varepsilon > 0$, we weten

$$\forall_{\varepsilon_1>0}\exists_{\hat{x}\in A} : \hat{x} > \sup A - \varepsilon_1$$
$$\forall_{\varepsilon_2>0}\exists_{\hat{y}\in B} : \hat{y} > \sup B - \varepsilon_2\,.$$

Kies $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2}$, dan—aangezien $\hat{x} + \hat{y} \in A + B$— weten we

$$\exists_{z\in A+B} : z = \hat{x} + \hat{y} > \sup A + \sup B - \varepsilon_1 - \varepsilon_2$$
$$\Leftrightarrow z > \sup A + \sup B - \varepsilon.$$

Dus $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$. □ Q. E. D.

Te bewijzen. $\inf(A - B) = \inf A - \sup B$

Bewijs. A en B zijn begrensd en niet leeg, dus $A - B$ ook niet begrensd (per definitie van de verzameling $A - B$) en niet leeg. Dus $\inf(A - B)$ bestaat.
Voor $\inf A$ en $\sup B$ weten we dat geldt

$$\forall_{x\in A} : x \geq \inf A$$
$$\forall_{y\in B} : y \leq \sup B$$
$$\Leftrightarrow -y \geq -\sup B\,.$$

Maar dan ook $\forall_{x\in A}\forall_{y\in B} : x - y \geq \inf A - \sup B$, dus $\inf A - \sup B$ ondergrens voor $A - B$ en $\inf A - \sup B \leq \inf(A - B)$.
We moeten enkel nog aantonen dat $\inf A - \sup B$ de grootste ondergrens is voor $A - B$, dus

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{z\in A-B} : z < \inf A - \sup B + \varepsilon\,.$$

Zij $\varepsilon > 0$, we weten

$$\begin{aligned}
&\forall_{\varepsilon_1>0}\exists_{\hat{x}\in A} : \hat{x} < \inf A + \varepsilon_1 \\
&\forall_{\varepsilon_2>0}\exists_{\hat{y}\in B} : \hat{y} > \sup B - \varepsilon_2 \\
&\qquad\quad \Leftrightarrow -\hat{y} < -\sup B + \varepsilon_2\,.
\end{aligned}$$

Kies $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2}$, dan—aangezien $\hat{x} - \hat{y} \in A - B$— weten we

$$\begin{aligned}
&\exists_{z\in A-B} : z = \hat{x} - \hat{y} < \inf A - \sup B + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \\
&\qquad\quad \Leftrightarrow z < \inf A - \sup B + \varepsilon\,.
\end{aligned}$$

Dus $\inf(A - B) = \inf A - \sup B$. □ Q. E. D.

(b)

Te bewijzen. $(\forall_{a\in A}\forall_{b\in B} : a < b) \implies \sup A \leq \inf B$

Bewijs. We bewijzen uit het ongerijmde en nemen aan $\forall_{a\in A}\forall_{b\in B} : a < b$.
A en B zijn begrensd en niet leeg dus hebben beide infima en suprema. Er moet dus gelden $\sup A \leq \inf B$ of $\sup A > \inf B$. we nemen aan $\sup A > \inf B$ en zien dat dit tot een tegenspraak leidt.
We weten $\forall_{a\in A} : a \leq \sup A$ en $\forall_{b\in B} : b \geq \inf B$. Aangezien $\sup A > \inf B$ is er een $\varepsilon_1 > 0$ zodat $\sup A - \varepsilon_1 = \inf B$, maar dan

$$\exists_{\hat{a}\in A} : \hat{a} > \sup A - \varepsilon_1 = \inf B\,.$$

We vinden $\inf B < \hat{a}$. Nu is er een $\varepsilon_2 > 0$ zodat $\inf B + \varepsilon_2 = \hat{a}$, dus

$$\exists_{\hat{b}\in B} : \hat{b} < \inf B + \varepsilon_2 = \hat{a}\,,$$

waaruit volgt $\hat{b} < \hat{a}$, wat in tegenspraak is met $a < b$ voor alle $a \in A$ en $b \in B$. $\lightning$
Dus $(\forall_{a\in A}\forall_{b\in B} : a < b) \implies \sup A \leq \inf B$. □ Q. E. D.