

# **Analyse 1 uitwerkingen**

## College 1

Sophie van den Eerenbeemt  
Dennis van den Berg

16 november 2016

1. Zijn de volgende deelverzamelingen van  $\mathbb{R}$  begrensd naar boven / beneden? Bepaal supremum, infimum, maximum en minimum (voorzover die bestaan).

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists_{n \in \mathbb{N}}: 2n - 1 < x < 2n\}$$

$$B = \left\{ -\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}_+ \right\}$$

$$C = \{x \in \mathbb{R} \mid 4x - x^2 > 3\}$$

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid 4x - x^2 \geq 3\}$$

$$E = [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$$

2. Zij  $A \subset \mathbb{R}$  niet leeg en begrensd,  $\varepsilon > 0$ . Laat zien: Er is een  $x \in A$  zodanig dat  $x > \sup A - \varepsilon$  en er is een  $y \in A$  zodanig dat  $y < \inf A + \varepsilon$ .

(**Hint:** Geef een bewijs uit het ongerijmde!)

**To be proven.**  $\exists x \in A : x > \sup A - \varepsilon$

*Bewijs.* Stel dat de bewering niet waar is. Dan:

$$\neg(\exists x \in A : x > \sup A - \varepsilon) \\ \forall x \in A : x \leq \sup A - \varepsilon$$

Maar dan is  $\sup A - \varepsilon$  een kleinere bovengrens van  $A$  dan  $\sup A$ . Dan is  $\sup A$  dus niet het supremum van  $A$ .  $\nmid$

Dan moet dus gelden dat:  $\exists x \in A : x > \sup A - \varepsilon$

□ Q. E. D.

**To be proven.**  $\exists y \in A : y < \inf A + \varepsilon$

*Bewijs.* Stel dat de bewering niet waar is. Dan:

$$\neg(\exists x \in A : y < \inf A + \varepsilon) \\ \forall x \in A : y \geq \inf A + \varepsilon$$

Maar dan is  $\inf A + \varepsilon$  een grotere ondergrens van  $A$  dan  $\inf A$ . Dan is  $\inf A$  dus niet het infimum van  $A$ .  $\nmid$

Dan moet dus gelden dat:  $\exists y \in A : y < \inf A + \varepsilon$

□ Q. E. D.

Zij  $A, B \subset \mathbb{R}$  niet leeg en begrensd. Definieer:

$$-A = \{-a \mid a \in A\}$$

$$A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$$

$$A - B = \{a - b \mid a \in A, b \in B\}$$

Laat zien

(a)

$$\sup(-A) = -\inf A$$

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B$$

$$\inf(A - B) = \inf A - \sup B$$

(b)

$$(\forall a \in A \forall b \in B : a < b) \rightarrow \sup A \leq \inf B$$