Analyse 1 uitwerkingen

College 1

Sophie van den Eerenbeemt
Dennis van den Berg

17 november 2016

1. Zijn de volgende deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ begrensd naar boven / beneden? Bepaal supremum, in mum, maximum en minimum (voor zover die bestaan).

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists_{n \in \mathbb{N}}\colon 2n - 1 < x < 2n\}$$
$$B = \left\{ -\frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}_+ \right\}$$
$$C = \{x \in \mathbb{R} \mid 4x - x^2 > 3\}$$
$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid 4x - x^2 \geq 3\}$$
$$E = [0, 1] \backslash \mathbb{Q}$$

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists_{n \in \mathbb{N}}\colon 2n - 1 < x < 2n\}$$

Er geldt voor $n = 0$ dat $-1 < x < 0$ (dus $-1 \notin A$) en voor $n = 1$ dat $1 < x < 2$, enzovoorts.

- begrensd naar boven: nee
- begrensd naar beneden: ja
- supremum: geen
- infimum: -1
- maximum: geen
- minimum: geen

$$B = \left\{ -\frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}_+ \right\}$$

We weten $\lim_{n \to \infty} -\frac{1}{n} = 0$, maar $0 \notin B$. Deze verzameling kan in feite ook herschreven worden als:

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x < 0\}$$

Het is nu duidelijk dat:

- begrensd: ja
- supremum: 0
- infimum: -1
- maximum: geen
- minimum: -1

$$C = \{x \in \mathbb{R} \mid 4x - x^2 > 3\}$$

Uitwerken van $4x - x^2 = 3$ geeft $x = 1$ en $x = 3$. Er volgt dat voor $x \in (1, 3)$ geldt dat $4x - x^2 > 3$ en dat de verzameling herschreven worden als:

$$C = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 3\}$$

Het is nu duidelijk dat:

- begrensd: ja
- supremum: 3
- infimum: 1
- maximum: geen
- minimum: geen

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid 4x - x^2 \geq 3\}$$

Dit gaat analoog aan de verzameling C. De verzameling D kan herschreven worden als:

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 3\}$$

Het is nu duidelijk dat:

- begrensd: ja
- supremum: 3
- infimum: 1
- maximum: 3
- minimum: 1

$$E = [0, 1] \backslash \mathbb{Q}$$

Deze verzameling kan herschreven worden als:

$$E = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1 \wedge x \notin \mathbb{Q}\}$$

Uit het feit dat de rationale getallen *'dicht liggen'* vinden we

- begrensd: ja
- supremum: 1
- infimum: 0
- maximum: geen
- minimum: geen

2. Zij $A \subset \mathbb{R}$ niet leeg en begrensd, $\varepsilon > 0$. Laat zien: Er is een $x \in A$ zodanig dat $x > \sup A - \varepsilon$ en er is een $y \in A$ zodanig dat $y < \inf A + \varepsilon$.

   (**Hint:** Geef een bewijs uit het ongerijmde!)

   Te bewijzen. $\exists x \in A : x > \sup A - \varepsilon$

   Bewijs. Stel dat de bewering niet waar is. Dan:

$$\neg(\exists x \in A : x > \sup A - \varepsilon)$$
$$\forall x \in A : x \leq \sup A - \varepsilon$$

   Maar dan is $\sup A - \varepsilon$ een kleinere bovengrens van A dan $\sup A$, want $\varepsilon > 0$, dus is $\sup A$ niet het supremum van A. $\lightning$

   Dan moet dus gelden dat: $\exists x \in A : x > \sup A - \varepsilon$ $\square$ Q. E. D.

Te bewijzen. $\exists y \in A : y < \inf A + \varepsilon$

Bewijs. Stel dat de bewering niet waar is. Dan:

$$\neg(\exists x \in A : y < \inf A + \varepsilon)$$
$$\forall x \in A : y \geq \inf A + \varepsilon$$

Maar dan is $\inf A + \varepsilon$ een grotere ondergrens van A dan $\inf A$, want $\varepsilon > 0$, dus is $\inf A$ niet het infimum van A. $\lightning$

Dan moet dus gelden dat: $\exists y \in A : y < \inf A + \varepsilon$ □ Q. E. D.

3. Zij $A, B \subset \mathbb{R}$ niet leeg en begrensd. Definieer:

$$\begin{aligned} -A &= \{-a \mid a \in A\} \\ A + B &= \{a + b \mid a \in A, b \in B\} \\ A - B &= \{a - b \mid a \in A, b \in B\} \end{aligned}$$

Laat zien

(a)

$$\begin{aligned} \sup(-A) &= -\inf A \\ \sup(A + B) &= \sup A + \sup B \\ \inf(A - B) &= \inf A - \sup B \end{aligned}$$

Te bewijzen. $\sup(-A) = -\inf A$.

Bewijs. A is begrensd en niet leeg, dus $-A$ ook niet begrensd (per definitie van de verzameling $-A$) en niet leeg. Dus $\sup(-A)$ bestaat.
Per definitie van $\inf A$ weten we dat $\inf A$ de grootste ondergrens is waarvoor geldt

$$\forall_{x \in A} : x \geq \inf A\,,$$

maar dan ook

$$\forall_{x \in A} : -x \leq -\inf A\,.$$

Hieruit volgt dat $-\inf A$ een bovengrens is voor $-A$, ofwel $-\inf A \geq \sup(-A)$. Het rest nog om aan te tonen dat $-\inf A$ de kleinste bovengrens is, ofwel

$$\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{x \in -A} : x > -\inf A - \varepsilon.$$

Maar we weten dat $\inf A$ de grootste bovengrens is voor A, dus

$$\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{x \in A} : x < \inf A + \varepsilon\,,$$

Waar—door beide kanten met -1 te vermenigvuldigen—gebruikmakend het feit dat voor $x \in A$ geldt $-x \in -A$ de bewering direct uit volgt, dus

$$\sup(-A) = -\inf A.$$

□ Q. E. D.

Te bewijzen. $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$

Bewijs. A en B zijn begrensd en niet leeg, dus $A+B$ ook niet begrensd (per definitie van de verzameling $A+B$) en niet leeg. Dus $\sup(A+B)$ bestaat.
Voor $\sup A$ en $\sup B$ weten we dat geldt

$$\begin{aligned} &\forall_{x\in A} : x \leq \sup A \\ &\forall_{y\in B} : y \leq \sup B \,. \end{aligned}$$

Maar dan ook $\forall_{x\in A}\forall_{y\in B} : x+y \leq \sup A + \sup B$, dus $\sup A + \sup B$ bovengrens voor $A+B$ en $\sup A + \sup B \geq \sup(A+B)$.
We moeten enkel nog aantonen dat $\sup A + \sup B$ de kleinste bovengrens is voor $A+B$, ofwel

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{z\in A+B} : z > \sup A + \sup B - \varepsilon \,.$$

Zij $\varepsilon > 0$, we weten

$$\begin{aligned} &\forall_{\varepsilon_1>0}\exists_{\hat{x}\in A} : \hat{x} > \sup A - \varepsilon_1 \\ &\forall_{\varepsilon_2>0}\exists_{\hat{y}\in B} : \hat{y} > \sup B - \varepsilon_2 \,. \end{aligned}$$

Kies $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2}$, dan—aangezien $\hat{x}+\hat{y} \in A+B$—weten we

$$\begin{aligned} &\exists_{z\in A+B} : z = \hat{x}+\hat{y} > \sup A + \sup B - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \\ &\qquad \Leftrightarrow z > \sup A + \sup B - \varepsilon. \end{aligned}$$

Dus $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$. □ Q. E. D.

Te bewijzen. $\inf(A-B) = \inf A - \sup B$

Bewijs. A en B zijn begrensd en niet leeg, dus $A-B$ ook niet begrensd (per definitie van de verzameling $A-B$) en niet leeg. Dus $\inf(A-B)$ bestaat.
Voor $\inf A$ en $\sup B$ weten we dat geldt

$$\begin{aligned} &\forall_{x\in A} : x \geq \inf A \\ &\forall_{y\in B} : y \leq \sup B \\ &\quad \Leftrightarrow -y \geq -\sup B \,. \end{aligned}$$

Maar dan ook $\forall_{x\in A}\forall_{y\in B} : x-y \geq \inf A - \sup B$, dus $\inf A - \sup B$ ondergrens voor $A-B$ en $\inf A - \sup B \leq \inf(A-B)$.
We moeten enkel nog aantonen dat $\inf A - \sup B$ de grootste ondergrens is voor $A-B$, ofwel

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{z\in A-B} : z < \inf A - \sup B + \varepsilon \,.$$

Zij $\varepsilon > 0$, we weten

$$\begin{aligned} &\forall_{\varepsilon_1>0}\exists_{\hat{x}\in A} : \hat{x} < \inf A + \varepsilon_1 \\ &\forall_{\varepsilon_2>0}\exists_{\hat{y}\in B} : \hat{y} > \sup B - \varepsilon_2 \\ &\qquad \Leftrightarrow -\hat{y} < -\sup B + \varepsilon_2 \,. \end{aligned}$$

Kies $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2}$, dan—aangezien $\hat{x}-\hat{y} \in A-B$—weten we

$$\begin{aligned} &\exists_{z\in A-B} : z = \hat{x}-\hat{y} < \inf A - \sup B + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \\ &\qquad \Leftrightarrow z < \inf A - \sup B + \varepsilon \,. \end{aligned}$$

Dus $\inf(A-B) = \inf A - \sup B$. □ Q. E. D.

(b) **Te bewijzen.** $(\forall_{a \in A} \forall_{b \in B} : a < b) \implies \sup A \leq \inf B$

Bewijs. We bewijzen uit het ongerijmde en nemen aan $\forall_{a \in A} \forall_{b \in B} : a < b$.

A en B zijn begrensd en niet leeg dus hebben beide infima en suprema. Er moet dus gelden $\sup A \leq \inf B$ of $\sup A > \inf B$. We nemen aan $\sup A > \inf B$ en zien dat dit tot een tegenspraak leidt.

We weten $\forall_{a \in A} : a \leq \sup A$ en $\forall_{b \in B} : b \geq \inf B$. Aangezien $\sup A > \inf B$ is er een $\varepsilon_1 > 0$ zodat $\sup A - \varepsilon_1 = \inf B$, maar dan

$$\exists_{\hat{a} \in A} : \hat{a} > \sup A - \varepsilon_1 = \inf B \,.$$

We vinden $\inf B < \hat{a}$. Nu is er een $\varepsilon_2 > 0$ zodat $\inf B + \varepsilon_2 = \hat{a}$, dus

$$\exists_{\hat{b} \in B} : \hat{b} < \inf B + \varepsilon_2 = \hat{a} \,,$$

waaruit volgt $\hat{b} < \hat{a}$, wat in tegenspraak is met $a < b$ voor alle $a \in A$ en $b \in B$. $\lightning$

Dus $(\forall_{a \in A} \forall_{b \in B} : a < b) \implies \sup A \leq \inf B$. $\square$ Q. E. D.