

Analyse 1 uitwerkingen

College 1

Sophie van den Eerenbeemt
Dennis van den Berg

16 november 2016

1. Zijn de volgende deelverzamelingen van \mathbb{R} begrensd naar boven / beneden? Bepaal supremum, infimum, maximum en minimum (voor zover die bestaan).

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists_{n \in \mathbb{N}}: 2n - 1 < x < 2n\}$$

$$B = \left\{ -\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}_+ \right\}$$

$$C = \{x \in \mathbb{R} \mid 4x - x^2 > 3\}$$

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid 4x - x^2 \geq 3\}$$

$$E = [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$$

2. Zij $A \subset \mathbb{R}$ niet leeg en begrensd, $\varepsilon > 0$. Laat zien: Er is een $x \in A$ zodanig dat $x > \sup A - \varepsilon$ en er is een $y \in A$ zodanig dat $y < \inf A + \varepsilon$.

(**Hint:** Geef een bewijs uit het ongerijmde!)

3. Zij $A, B \subset \mathbb{R}$ niet leeg en begrensd. Definieer:

$$-A = \{-a \mid a \in A\}$$

$$A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$$

$$A - B = \{a - b \mid a \in A, b \in B\}$$

Laat zien

(a)

$$\sup(-A) = -\inf A$$

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B$$

$$\inf(A - B) = \inf A - \sup B$$

Te bewijzen. $\sup(-A) = -\inf A$.

Bewijs. A is begrensd en niet leeg, dus $-A$ ook niet begrensd (per definitie van de verzameling $-A$) en niet leeg. Dus $\sup(-A)$ bestaat.

Per definitie van $\inf A$ weten we dat $\inf A$ de grootste ondergrens is waarvoor geldt

$$\forall_{x \in A} : x \geq \inf A,$$

maar dan ook

$$\forall_{x \in A} : -x \leq -\inf A.$$

Hieruit volgt dat $-\inf A$ een bovengrens is voor $-A$, ofwel $-\inf A \geq \sup(-A)$. Het rest nog om aan te tonen dat $-\inf A$ de kleinste bovengrens is, dus

$$\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{x \in -A} : x > -\inf A - \varepsilon.$$

Maar we weten dat $\inf A$ de grootste bovengrens is voor A , dus

$$\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{x \in A} : x < \inf A + \varepsilon,$$

Waar—door beide kanten met -1 te vermenigvuldigen—gebruikmakend het feit dat voor $x \in A$ geldt $-x \in -A$ de bewering direct uit volgt, dus

$$\sup(-A) = -\inf A.$$

□ Q. E. D.

Te bewijzen. $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$

Bewijs. A en B zijn begrensd en niet leeg, dus $A + B$ ook niet begrensd (per definitie van de verzameling $A + B$) en niet leeg. Dus $\sup(A + B)$ bestaat.

Voor $\sup A$ en $\sup B$ weten we dat geldt

$$\begin{aligned} \forall_{x \in A} : x &\leq \sup A \\ \forall_{y \in B} : y &\leq \sup B. \end{aligned}$$

Maar dan ook $\forall_{x \in A} \forall_{y \in B} : x + y \leq \sup A + \sup B$, dus $\sup A + \sup B$ bovengrens voor $A + B$ en $\sup A + \sup B \geq \sup(A + B)$.

We moeten enkel nog aantonen dat $\sup A + \sup B$ de kleinste bovengrens is voor $A + B$, dus

$$\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{z \in A+B} : z > \sup A + \sup B - \varepsilon.$$

Zij $\varepsilon > 0$, we weten

$$\begin{aligned} \forall_{\varepsilon_1 > 0} \exists_{\hat{x} \in A} : \hat{x} &> \sup A - \varepsilon_1 \\ \forall_{\varepsilon_2 > 0} \exists_{\hat{y} \in B} : \hat{y} &> \sup B - \varepsilon_2. \end{aligned}$$

Kies $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2}$, dan—aangezien $\hat{x} + \hat{y} \in A + B$ —weten we

$$\begin{aligned} \exists_{z \in A+B} : z = \hat{x} + \hat{y} &> \sup A + \sup B - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \\ \Leftrightarrow z &> \sup A + \sup B - \varepsilon. \end{aligned}$$

Dus $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

□ Q. E. D.

Te bewijzen. $\inf(A - B) = \inf A - \sup B$

Bewijs. A en B zijn begrensd en niet leeg, dus $A - B$ ook niet begrensd (per definitie van de verzameling $A - B$) en niet leeg. Dus $\inf(A - B)$ bestaat.

Voor $\inf A$ en $\sup B$ weten we dat geldt

$$\begin{aligned} \forall_{x \in A} : x &\geq \inf A \\ \forall_{y \in B} : y &\leq \sup B \\ \Leftrightarrow -y &\geq -\sup B. \end{aligned}$$

Maar dan ook $\forall_{x \in A} \forall_{y \in B} : x - y \geq \inf A - \sup B$, dus $\inf A - \sup B$ ondergrens voor $A - B$ en $\inf A - \sup B \leq \inf(A - B)$.

We moeten enkel nog aantonen dat $\inf A - \sup B$ de grootste ondergrens is voor $A - B$, dus

$$\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{z \in A-B} : z < \inf A - \sup B + \varepsilon.$$

Zij $\varepsilon > 0$, we weten

$$\begin{aligned} \forall_{\varepsilon_1 > 0} \exists_{\hat{x} \in A} : \hat{x} < \inf A + \varepsilon_1 \\ \forall_{\varepsilon_2 > 0} \exists_{\hat{y} \in B} : \hat{y} > \sup B - \varepsilon_2 \\ \Leftrightarrow -\hat{y} < -\sup B + \varepsilon_2. \end{aligned}$$

Kies $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2}$, dan—aangezien $\hat{x} - \hat{y} \in A - B$ —weten we

$$\begin{aligned} \exists_{z \in A-B} : z = \hat{x} - \hat{y} < \inf A - \sup B + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \\ \Leftrightarrow z < \inf A - \sup B + \varepsilon. \end{aligned}$$

Dus $\inf(A - B) = \inf A - \sup B$.

□ Q. E. D.

(b) **Te bewijzen.** $(\forall_{a \in A} \forall_{b \in B} : a < b) \implies \sup A \leq \inf B$

Bewijs. We bewijzen uit het ongerijmde en nemen aan $\forall_{a \in A} \forall_{b \in B} : a < b$.

A en B zijn begrensd en niet leeg dus hebben beide infima en suprema. Er moet dus gelden $\sup A \leq \inf B$ of $\sup A > \inf B$. we nemen aan $\sup A > \inf B$ en zien dat dit tot een tegenspraak leidt.

We weten $\forall_{a \in A} : a \leq \sup A$ en $\forall_{b \in B} : b \geq \inf B$. Aangezien $\sup A > \inf B$ is er een $\varepsilon_1 > 0$ zodat $\sup A - \varepsilon_1 = \inf B$, maar dan

$$\exists_{\hat{a} \in A} : \hat{a} > \sup A - \varepsilon_1 = \inf B.$$

We vinden $\inf B < \hat{a}$. Nu is er een $\varepsilon_2 > 0$ zodat $\inf B + \varepsilon_2 = \hat{a}$, dus

$$\exists_{\hat{b} \in B} : \hat{b} < \inf B + \varepsilon_2 = \hat{a},$$

waaruit volgt $\hat{b} < \hat{a}$, wat in tegenspraak is met $a < b$ voor alle $a \in A$ en $b \in B$. \nmid

Dus $(\forall_{a \in A} \forall_{b \in B} : a < b) \implies \sup A \leq \inf B$.

□ Q. E. D.