Analyse 1 uitwerkingen
College 1

Sophie van den Eerenbeemt
Dennis van den Berg

16 november 2016

1. Zijn de volgende deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ begrensd naar boven / beneden? Bepaal supremum, in mum, maximum en minimum (voorzover die bestaan).

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists_{n \in \mathbb{N}}\colon 2n - 1 < x < 2n\}$$
$$B = \left\{-\frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}_+\right\}$$
$$C = \{x \in \mathbb{R} \mid 4x - x^2 > 3\}$$
$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid 4x - x^2 \geq 3\}$$
$$E = [0, 1] \backslash \mathbb{Q}$$

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists_{n \in \mathbb{N}}\colon 2n - 1 < x < 2n\}$$

Er geldt voor $n = 0$ dat $-1 < x < 0$ (dus $-1 \notin A$) en voor $n = 1$ dat $1 < x < 2$, enzovoorts.

- begrensd naar boven: nee
- begrensd naar beneden: ja
- supremum: geen
- infimum: -1
- maximum: geen
- minimum: geen

$$B = \left\{-\frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}_+\right\}$$

We weten $\lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n} = 0$, maar $0 \notin B$. Deze verzameling kan in feite ook herschreven worden als:

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x < 0\}$$

Het is nu duidelijk dat:

- begrensd: ja
- supremum: 0
- infimum: -1
- maximum: geen
- minimum: -1

$$C = \{x \in \mathbb{R} \mid 4x - x^2 > 3\}$$

Uitwerken van $4x - x^2 = 3$ geeft $x = 1$ en $x = 3$. Er volgt dat voor $x \in (1, 3)$ geldt dat $4x - x^2 > 3$ en dat de verzameling herschreven worden als:

$$C = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 3\}$$

Het is nu duidelijk dat:

- begrensd: ja
- supremum: 3
- infimum: 1
- maximum: geen
- minimum: geen

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid 4x - x^2 \geq 3\}$$

Dit gaat analoog aan de verzameling C. De verzameling D kan herschreven worden als:

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 3\}$$

Het is nu duidelijk dat:

- begrensd: ja
- supremum: 3
- infimum: 1
- maximum: 3
- minimum: 1

$$E = [0, 1] \backslash \mathbb{Q}$$

Deze verzameling kan herschreven worden als:

$$E = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1 \wedge x \notin \mathbb{Q}\}$$

Uit het feit dat de rationale getallen *'dicht liggen'* vinden we

- begrensd: ja
- supremum: 1
- infimum: 0
- maximum: geen
- minimum: geen

2. Zij $A \subset \mathbb{R}$ niet leeg en begrensd, $\varepsilon > 0$. Laat zien: Er is een $x \in A$ zodanig dat $x > \sup A - \varepsilon$ en er is een $y \in A$ zodanig dat $y < \inf A + \varepsilon$.

   (**Hint:** Geef een bewijs uit het ongerijmde!)

3. Zij $A, B \subset \mathbb{R}$ niet leeg en begrensd. Definieer:

$$\begin{aligned} -A &= \{-a \mid a \in A\} \\ A + B &= \{a + b \mid a \in A, b \in B\} \\ A - B &= \{a - b \mid a \in A, b \in B\} \end{aligned}$$

   Laat zien

(a)

$$\begin{aligned}\sup(-A) &= -\inf A\\ \sup(A+B) &= \sup A + \sup B\\ \inf(A-B) &= \inf A - \sup B\end{aligned}$$

(b)

$$(\forall a \in A \forall b \in B : a < b) \to \sup A \leq infB$$