МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Факультет прикладной математики и информатики
Кафедра вычислительной математики

Отчет по лабораторной работе №2
по теме: “Метод встречной прогонки”

Вариант 9

Выполнила
Бодина Виктория Александровна
студентка 3 курса 7а группы

Преподаватель
Будник Анатолий Михайлович

Минск 2024

Постановка задачи

Дана СЛАУ вида Ay=f, где A – матрица коэффициентов, y – вектор неизвестных, f – вектор свободных членов. Необходимо найти решение СЛАУ по методу встречной прогонки и вектор невязки r = Ay - f и ее величину, сравнив результаты с методом Гаусса.

Матрица коэффициентов является трехдиагональной. Пусть требуется найти решение такой системы:

$$\begin{cases} c_0 y_0 - b_0 y_1 = f_0\,, \\ -a_i y_{i-1} + c_i y_i - b_i y_{i+1} = f_i\,,\ \ i = \overline{1, N-1}, \\ -a_N y_{N-1} + c_N y_N = f_N\,. \end{cases}$$

Алгоритм решения задачи

Метод встречной прогонки представляет собой комбинацию правой и левой прогонок, где задается m (индекс, до которого будет работать правая прогонка, после чего начнет левая).

Прямой ход (для вычисления прогоночных коэффициентов):

$$\begin{cases} \alpha_1 = \dfrac{b_0}{c_0},\ \ \alpha_{i+1} = \dfrac{b_i}{c_i - \alpha_i a_i},\ \ i = 1,...,m-1; \\ \beta_1 = \dfrac{f_0}{c_0},\ \ \beta_{i+1} = \dfrac{f_i + a_i\beta_i}{c_i - \alpha_i a_i},\ \ i = 1,...,m-1; \\ \xi_N = \dfrac{a_N}{c_N},\ \ \xi_i = \dfrac{a_i}{c_i - \xi_{i+1} b_i},\ \ i = N-1,...,m; \\ \eta_N = \dfrac{f_N}{c_N},\ \ \eta_i = \dfrac{f_i + b_i\eta_{i+1}}{c_i - \xi_{i+1} b_i},\ \ i = N-1,...,m \end{cases}$$

где α_i и β_i – две последовательности, которые используются на этапе прямого хода правой прогонки, ξ_i и η_i – две последовательности, которые используются на этапе прямого хода левой прогонки.

Обратный ход (для определения решения):

$$\begin{cases} y_m = \dfrac{\eta_m + \xi_m\beta_m}{1 - \xi_m\alpha_m},\ \ y_i = \alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1}\,,\ \ i = m-1,...,0, \\ \qquad\qquad\qquad\ \ y_{i+1} = \xi_{i+1} y_i + \eta_{i+1}\,,\ \ i = m,...,N-1. \end{cases}$$

y_m – неизвестное по заданному индексу m, выше – формула правой прогонки для вычисления решения, ниже – левой прогонки.

Вектор невязки:
Он показывает, насколько найденное решение y удовлетворяет исходной системе: r = Ay - f

Листинг программы

```
import numpy as np

def method(A, f, m):
    n = len(A)
    y = np.zeros(n)
    c = np.zeros(n)
    b = np.zeros(n - 1)
    a = np.zeros(n)

    for i in range(n):
        c[i] = A[i][i]
        if i < n - 1:
            b[i] = -A[i][i + 1]
            a[i + 1] = -A[i + 1][i]

    # прямая прогонка
    alpha = np.zeros(n + 1)
    beta = np.zeros(n + 1)
    alpha[1] = b[0] / c[0]
    beta[1] = f[0] / c[0]

    for i in range(1, m):
        denominator = c[i] - a[i] * alpha[i]
        alpha[i + 1] = b[i] / denominator
        beta[i + 1] = (f[i] + a[i] * beta[i]) / denominator

    ksi = np.zeros(n)
    eta = np.zeros(n)

    ksi[n - 1] = a[n - 1] / c[n - 1]
    eta[n - 1] = f[n - 1] / c[n - 1]

    for i in range(n - 2, m - 1, -1):
        denominator = c[i] - ksi[i + 1] * b[i]
        ksi[i] = a[i] / denominator
        eta[i] = (f[i] + b[i] * eta[i + 1]) / denominator

    # обратная прогонка
    y[m] = (eta[m] + ksi[m] * beta[m]) / (1 - ksi[m] * alpha[m])
    for i in range(m - 1, -1, -1):
        y[i] = alpha[i + 1] * y[i + 1] + beta[i + 1]

    for i in range(m, n - 1):
        y[i + 1] = ksi[i + 1] * y[i] + eta[i + 1]
```

```
    r = A@y - f

    return y, r

A = np.array([[0.7277, -0.0958, 0.0, 0.0, 0.0],
              [0.0996, 1.1394, 0.1, 0.0, 0.0],
              [0.0, 0.1, 0.9154, -0.2681, 0.0],
              [0.0, 0.0, 0.1, 0.9001, -0.0383],
              [0.0, 0.0, 0.0, 0.0192, 1.0724]])

f = np.array([1.4363, -1.6431, 6.0514, -3.4508, 5.5727])

y, r = method(A, f, 2)

print("Решение системы:", np.round(y, 4))
print("Невязка:", r)
print("Величина невязки:", np.linalg.norm(r))
```

Результаты и их анализ:

Решение системы: [1.6997 -2.082   5.5988 -4.2315 5.2722]
Невязка: [0. 0. 0. 0. 0.]
Величина невязки: 0.0

Вектор невязки в методе Гаусса содержит большие, чем в методе встречной прогонки, значения, что указывает на худшую числовую стабильность. В методе Гаусса может накопиться большая погрешность, так как в нем проводится больше вычислений и его сложность O(n^3), в то время как встречной прогонки O(n).

Проверка метода на устойчивость:
Метод устойчив, если выполняется диагональное преобладание

$$
\begin{aligned}
&|c_0| > 0, \ |c_N| > 0, \\
&|a_i| > 0, \ |b_i| > 0, \ i = 1, 2, \ldots, N-1, \\
&|c_i| \ge |a_i| + |b_i|, \ i = 1, \ldots, N-1, \\
&|c_0| \ge |b_0|, \ |c_N| \ge |a_N|,
\end{aligned}
$$

```
[0.7277, -0.0958, 0.0, 0.0, 0.0],
[0.0996, 1.1394, 0.1, 0.0, 0.0],
[0.0, 0.1, 0.9154, -0.2681, 0.0],
[0.0, 0.0, 0.1, 0.9001, -0.0383],
[0.0, 0.0, 0.0, 0.0192, 1.0724]]
```

здесь видно, что c_0, c_N, a_i, b_i не равны 0

$0.7277 > 0.0958$

$1.1394 > 0.1 + 0.0996$

$0.9154 > 0.2681 + 0.1$

$0.9001 > 0.0383 + 0.1$

$1.0724 > 0.0192$