МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Факультет прикладной математики и информатики
Кафедра вычислительной математики

Отчет по лабораторной работе №4
по теме: “Метод нижней релаксации”

Вариант 9

Выполнила
Бодина Виктория Александровна
студентка 3 курса 7а группы

Преподаватель
Будник Анатолий Михайлович

Минск 2024

Введение

Дана СЛАУ вида Ax=b, где A – матрица коэффициентов, x – вектор неизвестных, b – вектор свободных членов.

Итерационный процесс:

Метод релаксации расширяет метод Гаусса-Зейделя, добавляя релаксационный множитель $0 < w < 2$, который позволяет ускорить или замедлить сходимость. Формула обновления $x_i^{(k+1)}$ на k-й итерации:

$$x_i^{(k+1)} = (1 - w)x_i^{(k)} + \frac{w}{a_{ii}}(b_i - \sum_{j=0}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n-1} a_{ij}x_j^{(k)}),$$

где k – номер текущей итерации, w – параметр релаксации, регулирующий темп обновления

при $0 < w < 1$ получим метод нижней релаксации, $1 < w < 2$ – верхней, при $w = 1$ – метод Гаусса-Зейделя.

Критерий остановки:

Итерационный процесс останавливается, если выполняется критерий $||x^{(k+1)} - x^{(k)}|| \le \varepsilon$, где $\varepsilon = 10^{-5}$, то есть $\sqrt{\sum_{i=0}^{n-1} (x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)})^2} \le 10^{-5}$ (евклидова норма)

Условие сходимости (диагональное преобладание) проверено в третьей лабораторной работе.

Листинг кода

```
import numpy as np

EPS = 1e-5
def relaxation_method(A, b, omega):
   n = len(A)
   x = np.array(b, dtype=float)
   x_old = np.zeros(n, dtype=float)
```

```python
    iterations = 0

    while True:
        iterations += 1
        x_old[:] = x

        for i in range(n):
            sigma = sum(A[i][j] * x[j] for j in range(n) if j != i)
            x[i] = (1 - omega) * x[i] + omega * (b[i] - sigma) / A[i][i]

        norm = np.linalg.norm(x - x_old)
        print(f"Итерация номер {iterations}: //x(k+1) - x(k)// = {norm}")
        if norm < EPS:
            break

    r = A @ x - b

    return x, iterations, r

A = np.array([[0.7277, -0.0958, 0.0192, 0.0383, 0.1341],
    [0.0996, 1.1394, 0.0000, -0.0766, 0.0766],
    [0.0575, 0.0000, 0.9154, -0.2681, 0.1532],
    [-0.1149, 0.2413, 0.0000, 0.9001, -0.0383],
    [0.4788, 0.0000, 0.1724, 0.0192, 1.0724]])

b = np.array([1.4363, -1.6431, 6.0514, -3.4508, 5.5727])

x, iterations, r = relaxation_method(A, b, 0.7)

print("Решение системы:", np.round(x, 4))
print("Понадобилось итераций:", iterations)
print("Невязка:", r)
print("Величина невязки:", np.linalg.norm(r))
```

Результаты и их анализ:

Итерация номер 1: // x(k+1) - x(k) // = 1.6388047626554691
Итерация номер 2: // x(k+1) - x(k) // = 0.3361854483837085
Итерация номер 3: // x(k+1) - x(k) // = 0.11001783266129306
Итерация номер 4: // x(k+1) - x(k) // = 0.05002620236585764
Итерация номер 5: // x(k+1) - x(k) // = 0.023304652919952852
Итерация номер 6: // x(k+1) - x(k) // = 0.01067311100419013
Итерация номер 7: // x(k+1) - x(k) // = 0.004842463550848449
Итерация номер 8: // x(k+1) - x(k) // = 0.0021899599268066943
Итерация номер 9: // x(k+1) - x(k) // = 0.0009897774988074982
Итерация номер 10: // x(k+1) - x(k) // = 0.0004474561499604276

Итерация номер 11: // x(k+1) - x(k) // = 0.00020237503242238363
Итерация номер 12: // x(k+1) - x(k) // = 9.156665680566369e-05
Итерация номер 13: // x(k+1) - x(k) // = 4.144249535797395e-05
Итерация номер 14: // x(k+1) - x(k) // = 1.8760203055304115e-05
Итерация номер 15: // x(k+1) - x(k) // = 8.493303356985482e-06
Решение системы: [0.9993 -2.   4.9998 -2.9999 4.0003]
Понадобилось итераций: 15
Невязка: [-2.37813894e-06 -8.18708656e-07 -2.17950381e-06
3.21176332e-07 2.67755251e-06]
Величина невязки: 4.28351575270974e-06

Метод нижней релаксации замедляет процесс обновления значений переменных по сравнению с методом Гаусса-Зейделя, в данном случае при w < 1 мы приходим только к большему количеству итераций, однако при w > 1 (например, w = 1.023), что соответствует верхней релаксации, удалось бы немного ускорить метод. При других входных данных метод нижней релаксации мог бы уменьшить риск расходимости для плохо обусловленных систем, также он применяется в случае, если верхняя релаксация не приводит к сходимости или если для ускорения метода необходимо не ускорение обновления значений, а замедление.

Метод Гаусса-Зейделя и метод нижней релаксации дают менее точные результаты из-за итерационного характера и необходимости нескольких шагов для сходимости.