

Curso: Métodos Numéricos II
Professor: Creto Augusto Vidal
Semestre: 2021.1
Aula # 18

1. Objetivo: Continuar a discussão dos conceitos básicos de Autovalores e Autovetores de matrizes simétricas e apresentar o método da potência regular.

Novidades desta aula:

Autovalores de matrizes simétricas cujos elementos são números reais são todos reais.
Autovetores de matrizes simétricas correspondentes a autovalores distintos são ortogonais.
Complexo conjugado de um número complexo.
Transposta Hermitiana.
Espaço nulo.
Multiplicidade algébrica de um autovalor.
Multiplicidade geométrica associada a um autovalor.
Espectro de uma matriz.
Autovalor dominante.

2. Conceitos preliminares

Continuando a discussão dos conceitos preliminares, vamos mostrar duas coisas principais:

- a) toda matriz simétrica, \mathbf{A} , cujos elementos são números reais tem autovalores reais, isto é, $a_{ij} = a_{ji} \in \mathbb{R} \Rightarrow \forall \lambda_k \in \mathbb{R}$ (aqui, o símbolo λ_k representa um autovalor de \mathbf{A});
- b) se dois autovalores quaisquer da matriz \mathbf{A} forem diferentes, os autovetores correspondentes são ortogonais entre si, isto é, se $\lambda_r \neq \lambda_s$ então $\mathbf{x}_r \perp \mathbf{x}_s \equiv \mathbf{x}_r \cdot \mathbf{x}_s = 0$.

2.1 Mostrar que $a_{ij} = a_{ji} \in \mathbb{R} \Rightarrow \forall \lambda_k \in \mathbb{R}$

Vamos começar dizendo que um autovalor λ_k da matriz \mathbf{A} é um número que pertence ao conjunto dos números complexos e sua parte imaginária é diferente de zero, ou seja, estamos dizendo que

(1) $\lambda_k = c + di$,

onde c e d são números reais (c e $d \in \mathbb{R}$) e i é o número imaginário ($i = \sqrt{-1}$).

Assim, se λ_k é um autovalor da matriz \mathbf{A} , então o autovetor associado a ele é o vetor \mathbf{x}_k , e este par autovalor-autovetor deve satisfazer a expressão

(2) $\mathbf{A} \mathbf{x}_k = \lambda_k \mathbf{x}_k$.

Vamos assumir que os elementos do vetor \mathbf{x}_k podem ser números complexos. Assim, vamos multiplicar os dois lados da equação (2) pela **transposta Hermitiana** do vetor \mathbf{x}_k , isto é,

(3) $(\mathbf{x}_k)^H \mathbf{A} \mathbf{x}_k = \lambda_k (\mathbf{x}_k)^H \mathbf{x}_k$.

Pausa para apresentação de conceitos novos!

O que é **transposta Hermitiana** de um vetor \mathbf{x}_k ?

Resposta: Simplesmente escreva a transposta do vetor e troque os elementos pelos seus conjugados complexos.

Vamos dar um exemplo. Suponha que \mathbf{x}_k seja o seguinte vetor

$$(4) \quad \mathbf{x}_k = \begin{pmatrix} 1 + 2i \\ 3 - 4i \\ 4 - 6i \end{pmatrix}.$$

Assim, a transposta deste vetor é

$$(5) \quad (\mathbf{x}_k)^T = (1 + 2i \quad 3 - 4i \quad 4 - 6i),$$

e a transposta Hermitiana simplesmente troca os elementos de $(\mathbf{x}_k)^T$ por seus conjugados complexos, isto é, troca o número complexo $z = a + bi$ por $\bar{z} = a - bi$. Portanto

$$(6) \quad (\mathbf{x}_k)^H = (1 - 2i \quad 3 + 4i \quad 4 + 6i)$$

Só mais uma curiosidade, aproveitando a pausa.

Qual seria o resultado de $(\mathbf{x}_k)^H \mathbf{x}_k$ neste exemplo?

Resposta: É como se fosse um produto escalar mais, em vez de cada elemento do vetor ser multiplicado por si mesmo, é multiplicado por seu conjugado complexo. Assim, se um elemento qualquer for representado por $z = a + bi$, ele será multiplicado por $\bar{z} = a - bi$ e o resultado dessa multiplicação é

$$\begin{aligned} \bar{z}z &= (a - bi)(a + bi) \\ &= a(a) + a(bi) - bi(a) - bi(bi) \\ &= a^2 + a(bi) - (a)bi - (bi)^2 \\ (7) \quad &= a^2 - (b)^2(i)^2 \\ &= a^2 - (b)^2(\sqrt{-1})^2 \Rightarrow \\ \bar{z}z &= a^2 + b^2 \end{aligned}$$

Voilà!! Cada elemento do produto escalar será um número real

Assim, para o exemplo dado, $(\mathbf{x}_k)^H \mathbf{x}_k$ ficará assim

$$\begin{aligned} (\mathbf{x}_k)^H \mathbf{x}_k &= (1 - 2i \quad 3 + 4i \quad 4 + 6i) \begin{pmatrix} 1 + 2i \\ 3 - 4i \\ 4 - 6i \end{pmatrix} \\ (8) \quad &= ((1)^2 + (2)^2) + ((3)^2 + (4)^2) + ((4)^2 + (6)^2) \\ &= 5 + 25 + 52 \\ (\mathbf{x}_k)^H \mathbf{x}_k &= 82. \end{aligned}$$

Vamos voltar para a equação (3) que repetimos aqui,

$$(3) \quad (\mathbf{x}_k)^H \mathbf{A} \mathbf{x}_k = \lambda_k (\mathbf{x}_k)^H \mathbf{x}_k.$$

Calculando a transposta Hermitiana de cada lado da equação (3), podemos escrever

$$(9) \quad [(\mathbf{x}_k)^H \mathbf{A} \mathbf{x}_k]^H = [\lambda_k (\mathbf{x}_k)^H \mathbf{x}_k]^H \Rightarrow (\mathbf{x}_k)^H \mathbf{A}^H \mathbf{x}_k = [(\mathbf{x}_k)^H \mathbf{x}_k]^H (\lambda_k)^H.$$

Três observações podem ser feitas sobre a equação (9):

- a) Como a matriz \mathbf{A} é simétrica e seus elementos são números reais, então $\mathbf{A}^H = \mathbf{A}$;
- b) Como $(\mathbf{x}_k)^H \mathbf{x}_k$ resulta em um número real, então $[(\mathbf{x}_k)^H \mathbf{x}_k]^H = (\mathbf{x}_k)^H \mathbf{x}_k$;
- c) A transposta Hermitiana de um número complexo é apenas o seu complexo conjugado.

Assim, a equação (9) pode ser reescrita como

$$(10) \quad (\mathbf{x}_k)^H \mathbf{A} \mathbf{x}_k = \bar{\lambda}_k (\mathbf{x}_k)^H \mathbf{x}_k.$$

Comparando as equações (3) e (10), podemos ver que seus lados esquerdos são iguais. Assim, seus lados direitos têm de ser iguais. Portanto,

$$(11) \quad \lambda_k (\mathbf{x}_k)^H \mathbf{x}_k = \bar{\lambda}_k (\mathbf{x}_k)^H \mathbf{x}_k \Rightarrow \lambda_k = \bar{\lambda}_k.$$

A equação (11) diz que λ_k é igual ao seu complexo conjugado, isto é,

$$(12) \quad \lambda_k = c + di = \bar{\lambda}_k = c - di.$$

Isso só pode acontecer se $d = 0$. Portanto, $\lambda_k = c \in \mathbb{R}$, ou seja,

os autovalores de uma matriz simétrica cujos elementos são números reais são reais,

isto é

$$\text{Se } a_{ij} = a_{ji} \in \mathbb{R} \Rightarrow \forall \lambda_k \in \mathbb{R}.$$

2.2 Mostrar que, se $\lambda_r \neq \lambda_s$, então $\mathbf{x}_r \perp \mathbf{x}_s \equiv \mathbf{x}_r \cdot \mathbf{x}_s = 0$.

Vamos começar escrevendo as relações entre os autovalores e seus respectivos autovetores, isto é,

$$(13) \quad \mathbf{A} \mathbf{x}_r = \lambda_r \mathbf{x}_r.$$

$$(14) \quad \mathbf{A} \mathbf{x}_s = \lambda_s \mathbf{x}_s.$$

Agora vamos multiplicar os dois lados da equação (13) pelo autovetor $(\mathbf{x}_s)^T$ e, os dois lados da equação (14) por $(\mathbf{x}_r)^T$. Assim, teremos

$$(15) \quad (\mathbf{x}_s)^T \mathbf{A} \mathbf{x}_r = \lambda_r (\mathbf{x}_s)^T \mathbf{x}_r.$$

$$(16) \quad (\mathbf{x}_r)^T \mathbf{A} \mathbf{x}_s = \lambda_s (\mathbf{x}_r)^T \mathbf{x}_s.$$

Calculando a transposta dos dois lados da equação (16) temos

$$(17) \quad (\mathbf{x}_s)^T \mathbf{A}^T \mathbf{x}_r = \lambda_s (\mathbf{x}_s)^T \mathbf{x}_r.$$

Sabendo que a matriz \mathbf{A} é simétrica, isto é, $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$, então os lados esquerdos das equações (15) e (17) são iguais. Portanto, seus lados direitos também são iguais. Assim

$$(18) \quad \lambda_r (\mathbf{x}_s)^T \mathbf{x}_r = \lambda_s (\mathbf{x}_s)^T \mathbf{x}_r \Rightarrow \lambda_r (\mathbf{x}_s)^T \mathbf{x}_r - \lambda_s (\mathbf{x}_s)^T \mathbf{x}_r = 0 \Rightarrow (\lambda_r - \lambda_s) (\mathbf{x}_s)^T \mathbf{x}_r = 0.$$

Porém, $\lambda_r \neq \lambda_s$ e assim $\lambda_r - \lambda_s \neq 0$. Logo $(\mathbf{x}_s)^T \mathbf{x}_r = \mathbf{x}_r \cdot \mathbf{x}_s = 0$ e fica demonstrado que $\mathbf{x}_r \perp \mathbf{x}_s$.

2.3 Verdades que não vou demonstrar.

Verdade V1: Se \mathbf{A} é uma matriz simétrica cujos elementos são números reais, a multiplicidade algébrica de qualquer autovalor é igual à sua multiplicidade geométrica.

Vamos traduzir isso. Na Aula#17, vimos que o **polinômio característico de uma matriz \mathbf{A} $n \times n$ tem grau n** e suas raízes são os autovalores de \mathbf{A} . No caso geral, tudo pode acontecer com essas raízes: raízes reais ou complexas e algumas raízes diferentes e outras repetidas. Esse polinômio na forma fatorada levaria a escrever a equação característica da seguinte forma

$$(19) \quad p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{a_1} (\lambda - \lambda_2)^{a_2} \dots (\lambda - \lambda_i)^{a_i} \dots (\lambda - \lambda_k)^{a_k} = 0.$$

Os expoentes dos termos fatorados mostram quantas vezes aquela raiz está repetida. Esse número é chamado de multiplicidade algébrica do autovalor. Assim, na equação (19), o autovalor λ_1 tem multiplicidade algébrica igual a a_1 , o autovalor λ_2 tem multiplicidade

algébrica igual a a_2 , o autovalor λ_i tem multiplicidade algébrica igual a a_i e assim por diante. É claro que a **soma dos expoentes tem de ser igual a n** .

A multiplicidade geométrica associada a um autovalor qualquer λ_i é o número de autovetores distintos associados àquele autovalor. No caso geral, a multiplicidade geométrica pode ser menor do que a multiplicidade algébrica, e, quando isso acontece, a matriz é chamada defectiva. No caso das matrizes simétrica cujos elementos são números reais, sempre existem a_i autovetores associados ao autovalor λ_i . Portanto, sua multiplicidade geométrica é igual à sua multiplicidade algébrica.

Verdade V2: Se A é uma matriz simétrica cujos elementos são números reais, e como consequência da Verdade V1 e do que foi discutido nas seções 2.1 e 2.2, ela tem n autovetores ortogonais que podem ser utilizados como base do espaço vetorial \mathbb{R}^n .

3. Método da potência

Nesta seção, vamos apresentar o primeiro dos métodos de potência: 1) Potência Regular, 2) Potência Inversa, 3) Potência com deslocamento.

Entendendo as condições para que o método da Potência Regular funcione, é fácil entender as condições para que os outros métodos funcionem. Assim, vamos detalhar o método da potência Regular e apenas apontar as pequenas diferenças dos outros dois métodos (**na próxima aula**).

3.1 Método da Potência Regular.

3.1.1 Discussão preliminar

Vamos analisar o problema de autovalores e autovetores da matriz M4 da **Tarefa 10**. Assim, a matriz que aqui vamos chamar de A é

$$(20) \quad A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Essa matriz projeta um vetor \mathbf{v} qualquer do \mathbb{R}^3 sobre o vetor unitário \mathbf{u} (**vetor unitário é um vetor que tem comprimento igual a 1**) dado por

$$(21) \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \Rightarrow \|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} = 1.$$

A operação linear de projeção é dada por

$$(22) \quad \mathbf{v}' = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u})\mathbf{u}.$$

Assim, as colunas da matriz A são obtidas quando colocamos os vetores da base canônica na equação (22), isto é,

$$(23) \quad \mathbf{c}_1 = (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{u})\mathbf{u} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

$$(24) \quad \mathbf{c}_2 = (\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{u})\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

$$(25) \quad \mathbf{c}_3 = (\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{u})\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

A equação característica é dada por

$$(26) \quad p(\lambda) = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} - \lambda & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} - \lambda & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^1(\lambda - 0)^2 = 0.$$

Assim, o **espectro da matriz A**, isto é, o conjunto de autovalores da matriz **A** é

$$(27) \quad \lambda(\mathbf{A}) = \{1, 0, 0\}.$$

Os autovetores podem ser obtidos resolvendo os seguintes sistemas homogêneos:

$$(28) \quad \begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} - \lambda & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} - \lambda & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} - \lambda \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{bmatrix} \frac{1}{3} - 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} - 1 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} - 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Pondo a terceira equação em (26) na forma escalonada temos

$$(29) \quad \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \mathbf{u} \Rightarrow (\lambda_1, \mathbf{x}_1) = \left(1, \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \right).$$

Repetindo o processo para o autovalor $\lambda = 0$

$$(30) \quad \begin{bmatrix} \frac{1}{3} - 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} - 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} - 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pondo a segunda equação em (30) na forma escalonada temos

$$(31) \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Portanto, os dois autovetores associados ao autovalor $\lambda = 0$ depois de normalizados são

$$(32) \quad (\lambda_2, \mathbf{x}_2) = \left(0, \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \right) \quad \text{e} \quad (\lambda_3, \mathbf{x}_3) = \left(0, \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right).$$

Note que $\mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{x}_1 = 0$ e $\mathbf{x}_3 \cdot \mathbf{x}_1 = 0$, ou seja, como já sabíamos, os autovetores de autovalores diferentes são ortogonais entre si. Os autovetores \mathbf{x}_2 e \mathbf{x}_3 são linearmente independentes, mas não são ortogonais. Porém, como eles são linearmente independentes, eles podem ser usados para achar dois vetores que estejam no subespaço gerado por eles e que sejam ortogonais entre si. Esses dois vetores continuarão perpendiculares ao autovetor \mathbf{x}_1 e formarão uma base ortonormal do \mathbb{R}^3 . Neste caso, basta achar um novo vetor \mathbf{x}_3 que seja ortonormal aos vetores \mathbf{x}_1 e \mathbf{x}_2 .

Há um algoritmo chamado **ortogonalização de Gram-Schmidt** que acha \mathbf{x}_3 como

$$(33) \quad \mathbf{x}_3^{Novo} = \mathbf{x}_3 - (\mathbf{x}_3 \cdot \mathbf{x}_1)\mathbf{x}_1 - (\mathbf{x}_3 \cdot \mathbf{x}_2)\mathbf{x}_2$$

$$(34) \quad \begin{aligned} \mathbf{x}_3^{Novo} &= \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} - (0) \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} - \left(\frac{1}{2} \right) \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \\ \mathbf{x}_3^{Novo} &= \begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{2}}{4} \\ \frac{-\sqrt{2}}{4} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Observação importante: Quando um autovalor de \mathbf{A} é zero, o autovalor ou os autovalores associados a este autovalor estão no chamado **Espaço nulo de \mathbf{A}** . O **Espaço nulo de \mathbf{A}** é o conjunto de vetores que ao serem multiplicados por \mathbf{A} resultam no vetor nulo (veja equação (30)).

Neste exemplo, como a multiplicidade algébrica de $\lambda = 0$ é igual a 2, o Espaço nulo tem dimensão igual a 2 e a base ortogonal deste espaço pode ser usada como autovetores ortogonais de \mathbf{A} .

3.1.2 Achar o autovetor associado ao autovalor *dominante* da matriz \mathbf{A}

O método da potência regular calcula justamente isso: o autovetor associado ao autovalor **dominante** da matriz \mathbf{A} .

Se ordenarmos o espectro da matriz \mathbf{A} em ordem decrescente em valor absoluto temos:

$$(35) \quad |\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \cdots \geq |\lambda_n|.$$

Assim, λ_1 é o que chamamos de autovalor dominante. O método da potência acha o par $(\lambda_1, \mathbf{x}_1)$.

Note na equação (35) que o **autovalor dominante é diferente dos demais**, isto é, a **multiplicidade algébrica de λ_1 é igual a 1**. Para que o método funcione, isso tem que ser verdade para a matriz \mathbf{A} . Se isso não for o caso, o método vai falhar.

Agora, vamos desenvolver o algoritmo de maneira absolutamente intuitiva para que você chegue a suas próprias conclusões de como o método funciona (quando funciona).

Partindo da constatação de que quando uma matriz \mathbf{A} multiplica um vetor \mathbf{v} , o resultado é um vetor \mathbf{v}' que, em geral, tem uma outra direção e um outro tamanho, devemos perguntar o que acontece se multiplicarmos repetidas vezes o resultado da multiplicação anterior pela matriz \mathbf{A} ?

1) Escolha um vetor \mathbf{v}_0 qualquer (chute inicial).

2) Sabendo que os **autovetores** da matriz \mathbf{A} **formam uma base do \mathbb{R}^n** , isto é,

$$(36) \quad \text{Base} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\},$$

o vetor \mathbf{v}_0 pode ser escrito como uma combinação dos vetores da base. Assim,

$$(37) \quad \mathbf{v}_0 = \alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2 + \cdots + \alpha_n \mathbf{x}_n.$$

3) Multiplique o vetor \mathbf{v}_0 pela matriz \mathbf{A} para obter \mathbf{v}_1 como

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \mathbf{A}\mathbf{v}_0 \\ &\stackrel{\text{Eq. (37)}}{=} \mathbf{A}(\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2 + \cdots + \alpha_n \mathbf{x}_n) \\ &= \alpha_1 \mathbf{A}\mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{A}\mathbf{x}_2 + \cdots + \alpha_n \mathbf{A}\mathbf{x}_n \\ \mathbf{v}_1 &= \alpha_1 \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \cdots + \alpha_n \lambda_n \mathbf{x}_n \end{aligned}$$

4) Multiplique o vetor \mathbf{v}_1 pela matriz \mathbf{A} para obter \mathbf{v}_2 como

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_2 &= \mathbf{A}\mathbf{v}_1 = \mathbf{A}\mathbf{A}\mathbf{v}_0 = \mathbf{A}^2 \mathbf{v}_0 \\ &\stackrel{\text{Eq. (38)}}{=} \mathbf{A}(\alpha_1 \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \cdots + \alpha_n \lambda_n \mathbf{x}_n) \\ &= \alpha_1 \lambda_1 \mathbf{A}\mathbf{x}_1 + \alpha_2 \lambda_2 \mathbf{A}\mathbf{x}_2 + \cdots + \alpha_n \lambda_n \mathbf{A}\mathbf{x}_n \\ \mathbf{v}_2 &= \alpha_1 \lambda_1^2 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \lambda_2^2 \mathbf{x}_2 + \cdots + \alpha_n \lambda_n^2 \mathbf{x}_n \end{aligned}$$

5) Repita o processo k vezes para obter

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v}_k &= \mathbf{A}\mathbf{v}_{k-1} = \mathbf{A}^k \mathbf{v}_0 \\
 &\stackrel{Eq.(39)}{\cong} \mathbf{A}(\alpha_1 \lambda_1^{k-1} \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \lambda_2^{k-1} \mathbf{x}_2 + \dots + \alpha_n \lambda_n^{k-1} \mathbf{x}_n) \\
 &= \alpha_1 \lambda_1^{k-1} \mathbf{A}\mathbf{x}_1 + \alpha_2 \lambda_2^{k-1} \mathbf{A}\mathbf{x}_2 + \dots + \alpha_n \lambda_n^{k-1} \mathbf{A}\mathbf{x}_n \\
 \mathbf{v}_k &= \alpha_1 \lambda_1^k \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \lambda_2^k \mathbf{x}_2 + \dots + \alpha_n \lambda_n^k \mathbf{x}_n
 \end{aligned}
 \tag{40}$$

Colocando o termo λ_1^k em evidência na equação (40), obtemos

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v}_k &= \lambda_1^k \left(\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \frac{\lambda_2^k}{\lambda_1^k} \mathbf{x}_2 + \dots + \alpha_n \frac{\lambda_n^k}{\lambda_1^k} \mathbf{x}_n \right) \\
 &= \lambda_1^k \left(\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^k \mathbf{x}_2 + \dots + \alpha_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right)^k \mathbf{x}_n \right)
 \end{aligned}
 \tag{41}$$

Note que os termos nos $\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^k$ o denominador é sempre maior do que o numerador (veja equação (35)). Assim, **quando k vai aumentando**, os termos $\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^k$ vão **tendendo a zero**, e, portanto, a equação (41) vai ficando muito próxima de

$$(42) \quad \mathbf{v}_k \approx \lambda_1^k (\alpha_1 \mathbf{x}_1).$$

A equação (42) indica que o vetor \mathbf{v}_k e veto \mathbf{x}_1 têm a mesma orientação e simplesmente têm tamanhos diferentes por conta da multiplicação do fator escalar $\lambda_1^k \alpha_1$. Portanto, \mathbf{v}_k é o autovetor associado ao autovalor λ_1 .

Se k for suficientemente grande, a equação (42) indica que \mathbf{v}_k é o autovetor \mathbf{x}_1 . Assim, pela equação (2), temos

$$(43) \quad \mathbf{A}\mathbf{v}_k \approx \lambda_1 \mathbf{v}_k \Rightarrow (\mathbf{v}_k)^T \mathbf{A}\mathbf{v}_k \approx \lambda_1 (\mathbf{v}_k)^T \mathbf{v}_k \Rightarrow \lambda_1 \approx \frac{(\mathbf{v}_k)^T \mathbf{A}\mathbf{v}_k}{(\mathbf{v}_k)^T \mathbf{v}_k}$$

A estimativa $\lambda_1 \approx \frac{(\mathbf{v}_k)^T \mathbf{A}\mathbf{v}_k}{(\mathbf{v}_k)^T \mathbf{v}_k}$ obtida na equação (43) quando k é pequeno é péssima. No entanto, quando k vai crescendo, a estimativa vai ficando cada vez melhor. Portanto, podemos usar a convergência de λ_1 como critério de parada do algoritmo.

Para evitar que o vetor \mathbf{v}_k cresça ou diminua muito, e sabendo que tudo que nos interessa é a direção do vetor, em cada passo é feito um reescalonamento do tamanho do vetor. Aqui, nós vamos fazer com que o vetor fique um vetor unitário (tamanho igual a 1). Assim,

$$(44) \quad \mathbf{u}_k = \frac{\mathbf{v}_k}{\|\mathbf{v}_k\|} = \frac{\mathbf{v}_k}{\sqrt{(\mathbf{v}_k)^T \mathbf{v}_k}}$$

Portanto, dividindo os dois lados da equação $\mathbf{A}\mathbf{v}_k \approx \lambda_1 \mathbf{v}_k$ por $\|\mathbf{v}_k\|$ temos

$$(45) \quad \mathbf{A} \frac{\mathbf{v}_k}{\|\mathbf{v}_k\|} \approx \lambda_1 \frac{\mathbf{v}_k}{\|\mathbf{v}_k\|} \Rightarrow (\mathbf{u}_k)^T \mathbf{A}\mathbf{u}_k \approx \lambda_1 (\mathbf{u}_k)^T \mathbf{u}_k \Rightarrow \lambda_1 \approx \frac{(\mathbf{u}_k)^T \mathbf{A}\mathbf{u}_k}{(\mathbf{u}_k)^T \mathbf{u}_k} = (\mathbf{u}_k)^T \mathbf{A}\mathbf{u}_k$$

Note que, como \mathbf{u}_k é um vetor unitário, $(\mathbf{u}_k)^T \mathbf{u}_k = \|\mathbf{u}_k\|^2 = 1$.

No Algoritmo 1, a nova aproximação não normalizada será chamada de $(\mathbf{v}_k)_{Novo}$ e, ao ser normalizada, será chamada de $(\mathbf{x}_1)_{Novo}$ ao invés de \mathbf{u}_k . O $(\mathbf{x}_1)_{Novo}$ do passo anterior é chamado de $(\mathbf{x}_1)_{Velho}$ no novo passo.

Algoritmo 1: Método da Potência Regular		
Input	:	Matriz do problema, \mathbf{A} , vetor arbitrário, \mathbf{v}_0 , tolerância do erro, ε
Output	:	Autovalor dominante, λ_1 e Autovetor correspondente, \mathbf{x}_1
Step 1	:	// Receber a matriz \mathbf{A} , o vetor inicial, \mathbf{v}_0 , e a tolerância, ε
Step 2	:	// Inicializar o autovalor, λ_1 : $(\lambda_1)_{Novo} \leftarrow 0$
Step 3	:	// Copiar o vetor, \mathbf{v}_0 para $(\mathbf{v}_k)_{Novo}$: $(\mathbf{v}_k)_{Novo} \leftarrow \mathbf{v}_0$
Step 4	:	// Copiar $(\lambda_1)_{Novo}$ para $(\lambda_1)_{Velho}$: $(\lambda_1)_{Velho} \leftarrow (\lambda_1)_{Novo}$
Step 5	:	// Copiar $(\mathbf{v}_k)_{Novo}$ para $(\mathbf{v}_k)_{Velho}$: $(\mathbf{v}_k)_{Velho} \leftarrow (\mathbf{v}_k)_{Novo}$
Step 6	:	// Normalizar $(\mathbf{v}_k)_{Velho}$: $(\mathbf{x}_1)_{Velho} \leftarrow \frac{(\mathbf{v}_k)_{Velho}}{\ (\mathbf{v}_k)_{Velho}\ } = \frac{(\mathbf{v}_k)_{Velho}}{\sqrt{((\mathbf{v}_k)_{Velho})^T (\mathbf{v}_k)_{Velho}}}$
Step 7	:	// Calcular o vetor não normalizado, $(\mathbf{v}_k)_{Novo}$: $(\mathbf{v}_k)_{Novo} \leftarrow \mathbf{A}(\mathbf{x}_1)_{Velho}$
Step 8	:	// Calcular a nova estimativa de λ_1 : $(\lambda_1)_{Novo} \leftarrow (\mathbf{x}_1)_{Velho}^T (\mathbf{v}_k)_{Novo}$
Step 9	:	// Verificar convergência de λ_1 : Se $\left \frac{(\lambda_1)_{Novo} - (\lambda_1)_{Velho}}{(\lambda_1)_{Novo}} \right > \varepsilon$, voltar para Step 4
Step 10	:	// Retornar ou imprimir o output: Imprimir $((\lambda_1)_{Novo}, (\mathbf{x}_1)_{Velho})$

Os steps 1 a 3 são passos de inicialização.

Os steps 4 a 9 representa um Loop do tipo **Do...While(condição)**

O step 10 é a finalização do algoritmo, imprimindo o resultado ou retornando o resultado.

Tarefa #11:

Implemente o Algoritmo 1 e utilize-o para achar o autovalor dominante e o autovetor correspondente de cada uma das seguintes matrizes:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 40 & 8 & 4 & 2 & 1 \\ 8 & 30 & 12 & 6 & 2 \\ 4 & 12 & 20 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 1 & 25 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$