Curso: Métodos Numéricos II
Professor: Creto Augusto Vidal
Semestre: 2021.1
Aula # 21

1. Objetivo: Métodos que usam transformações de similaridade (continuação).

Nesta Aula, apresentamos mais um método que usa o conceito de transformação de similaridade: o Método de **Jacobi**. Mais um método de transformação de similaridade, o Método **QR**, será apresentado na aula #22.

2. Transformações de Similaridade (Recapitulação)

Dadas uma matriz **A** e uma matriz **P** que tenha uma inversa $\mathbf{P}^{-1}$, podemos construir uma nova matriz a partir do **produto** dessas três matrizes e chamá-la de $\bar{\mathbf{A}}$, isto é,

(1) $\quad \bar{\mathbf{A}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$.

Se **P** for ortogonal, $\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^{\mathrm{T}}$, e a equação (1) fica mais fácil por não necessitar de inversão de matrizes. Assim,

(2) $\quad \bar{\mathbf{A}} = \mathbf{P}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{P}$.

Os autovalores da matriz $\bar{\mathbf{A}}$ são os mesmos da matriz original **A**, isto é, os espectros das duas matrizes são idênticos,

(3) $\quad \lambda(\mathbf{A}) \equiv \lambda(\bar{\mathbf{A}})$.

Os autovetores da matriz original, **A**, podem ser obtidos a partir dos autovetores da matriz $\bar{\mathbf{A}}$ através da relação,

(4) $\quad \mathbf{x}_i = \mathbf{P}\mathbf{v}_i$,

onde $\mathbf{v}_i$ é um autovetor da matriz $\bar{\mathbf{A}}$ e $\mathbf{x}_i$ é o autovetor correspondente da matriz, **A**, ou seja, esses autovetores compartilham o mesmo autovalor λ_i.

Se pusermos todos os autovetores da matriz $\bar{\mathbf{A}}$ como colunas de uma matriz **V** então

(5) $\quad \mathbf{X} = \mathbf{P}\mathbf{V}$

onde **X** é a matriz cujas colunas são os autovetores correspondentes da matriz **A**.

Nota: O objetivo dos métodos que usam transformações de similaridade é fazer com que a matriz $\bar{\mathrm{A}}$ tenha uma **estrutura tão simples que seja fácil achar** seus **autovalores** λ_i e seus **autovetores** $\mathbf{v}_i$ para, então, através das relações (3) e (5) achar os autovalores e autovetores da matriz original **A.**

3. Método de Jacobi

O método de Jacobi tem uma estrutura de implementação parecida com a do método de Householder. Porém, o objetivo do método de Jacobi é obter uma matriz $\bar{\mathbf{A}}$ que seja **diagonal**. Se $\bar{\mathbf{A}}$ for diagonal, os autovalores de $\bar{\mathbf{A}}$ são os próprios elementos de sua diagonal e os autovetores $\mathbf{v}_i$ associados são as colunas da matriz identidade **I** (chamada base canônica). Então, pela equação (3), temos automaticamente os autovalores de **A**; e, pela equação (5), temos que os autovetores de **A** são

(6) $\quad \mathbf{X} = \mathbf{P}\mathbf{I} = \mathbf{P}$.

Ou seja, os autovetores de $\mathbf{A}$ são as próprias colunas da matriz $\mathbf{P}$.

O método de Jacobi faz uma sequência de transformações de similaridade até que a matriz transformada final tenha uma estrutura simples chamada matriz diagonal (isso acontece porque estamos lidando com matrizes **A simétricas**). Antes de discutirmos as propriedades da matriz de Jacobi, $\mathbf{P} \equiv \mathbf{J}$, vamos entender como essas matrizes vão ser aplicadas para chegar na matriz $\bar{\mathbf{A}}$ final, isto é,

$$(7) \qquad \bar{\mathbf{A}} = \underbrace{\mathbf{J}^{\mathrm{T}}_{(\mathrm{n}-)1,\mathrm{n}} \cdots \underbrace{\left(\mathbf{J}^{\mathrm{T}}_{\mathrm{n},1} \cdots \underbrace{\left(\mathbf{J}^{\mathrm{T}}_{3,1} \underbrace{\left(\mathbf{J}^{\mathrm{T}}_{2,1} \mathbf{A} \mathbf{J}_{2,1} \right)}_{\textbf{Passo 1}} \mathbf{J}_{3,1} \right)}_{\textbf{Passo 2}} \cdots \mathbf{J}_{\mathrm{n},1} \right)}_{\textbf{Passo (n}-\textbf{1)}} \cdots \mathbf{J}_{\mathrm{n},(\mathrm{n}-1)}}_{\textbf{Passo n(n}-\textbf{1)/2}}.$$

A equação (7) dá uma visão macroscópica de como o algoritmo de Jacobi funciona. Porém, a equação (7) representa uma **tentativa de diagonalização** que chamamos de **varredura de Jacobi**. Serão necessárias várias varreduras de Jacobi para termos uma matriz diagonal, ou muito próxima de uma matriz diagonal.

Vamos escrever o algoritmo que faz múltiplas varreduras de Jacobi até que a matriz fique muito próxima de uma matriz diagonal.

3.1 Método de Jacobi

O algoritmo recebe a matriz para a qual se deseja achar os autovalores e os autovetores correspondentes, e uma tolerância ε que serve para verificar se os elementos fora da diagonal estão suficientemente próximos de zero. Em seguida, faz um loop com múltiplas varreduras de Jacobi até atingir a forma final de uma matriz diagonal. Todas as matrizes envolvidas nas transformações de similaridade são acumuladas para poder recuperar os autovetores da matriz original.

3.1.1 Algoritmo de Jacobi

(Matriz, vetor) metodoDeJacobi (Matriz **A**, int n, float ε)
Matriz **P**, **J**, $\mathbf{A}_{\mathrm{nova}}$, $\mathbf{A}_{\mathrm{velha}}$, $\bar{\mathbf{A}}$;
Vector **Lamb**; // Vetor que armazena os autovalores de **A**.
float val=100; // Escalar ao qual é atribuída a soma dos quadrados dos elementos abaixo
// da diagonal da matriz $\mathbf{A}_{\mathrm{nova}}$ para verificar convergência.
// Inicializar matrizes
$\mathbf{P} \leftarrow \mathbf{I}$; // Matriz que contém os produtos das matrizes ortogonais **J**
// para recuperar os autovetores da matriz original.
$\mathbf{A}_{\mathrm{velha}} \leftarrow \mathbf{A}$;
Enquanto (val > ε) **faça** // loop das varreduras de diagonalização
    // Varredura de Jacobi (devolve uma matriz que deve
    // se aproximar de uma matriz diagonal
    $(\mathbf{A}_{\mathrm{nova}}, \mathbf{J}) \leftarrow$ varreduraDeJacobi $(\mathbf{A}_{\mathrm{velha}}, \mathrm{n})$;
    // Salvar $\mathbf{A}_{\mathrm{nova}}$ para a próxima varredura de Jacobi.
    $\mathbf{A}_{\mathrm{velha}} \leftarrow \mathbf{A}_{\mathrm{nova}}$;
    // Acumular o produto das matrizes de Jacobi como
    // $\mathbf{P} \leftarrow \mathbf{I}\, \mathbf{J}_1 \mathbf{J}_2 \cdots \mathbf{J}_{\mathrm{k}}$
    $\mathbf{P} \leftarrow \mathbf{P}.\mathbf{J}$;
    // Verificar se a matriz $\mathbf{A}_{\mathrm{nova}}$ já é diagonal
    val = somaDosQuadradosDosTermosAbaixoDaDiagonal$(\mathbf{A}_{\mathrm{nova}}, \mathrm{n})$

```
End Enquanto
// Ao sair do loop, o formato da matriz A_nova já está suficientemente próximo do formato de
// uma matriz diagonal. Assim, os elementos da diagonal são os autovalores da matriz original
// de entrada e as colunas de P são os autovetores correspondente.
Lamb(1:n) ← (A_nova)_i,i(1:n);     // Copia os elementos da diagonal da matriz no vetor Lamb
return (P, Lamb);
```

3.1.2 Varredura de Jacobi em forma algorítmica

O algoritmo abaixo não se preocupa com otimização, mas sim com a clareza.

```
(Matriz, Matriz) varreduraDeJacobi (Matriz A, int n)
Matriz J, J_ij, A_nova, A_velha, Ā;
// Inicializar matrizes
J ← I;  // Esta matriz contém os produtos das matrizes ortogonais J_ij
        // para recuperar os autovetores da matriz original.
A_velha ← A;
Para j = 1 ... (n-1) faça // loop das colunas
        Para i = (j+1) ... (n) faça  // loop das linhas
                // Construção da matriz de Jacobi J_ij
                J_ij ← matrizJacobiBaseadaNoElemento_ij_DaMatrizVelha(A_velha, i, j, n);
                // Transformação de similaridade do passo ij
                // Produto de três matrizes.
                // Como J_ij não é simétrica, sua transposta J_ij^T precisa ser computada
                A_nova ← J_ij^T A_velha J_ij;
                // Salvar para o próximo passo.
                A_velha ← A_nova;
                // Acumular o produto das matrizes de Jacobi como
                //  J ← I J_2,1 J_3,1 ⋯ J_n,1 ⋯ J_n,n−1
                J ← J.J_ij;
        End Para
End Para
// No final do loop externo, o formato da matriz A_nova já está mais próximo do formato de uma matriz
diagonal.
Ā ← A_nova;
return (Ā, J);
```

Neste momento, você consegue ver que o algoritmo é a reprodução exata da equação (7). Porém, alguns pontos precisam ser esclarecidos:

1) Por que temos dois loops aninhados (loop j das colunas: 1:(n-1), loop i das linhas: (j+1):n?
2) Como é o método **matrizJacobiBaseadaNoElemento_ij_DaMatrizVelha**(…)?
3) Para que serve a matriz acumulada **J**?

Nas subseções a seguir, os três pontos serão esclarecidos.

3.1.3 Estrutura da matriz diagonal $\bar{\mathbf{A}}$

O método de Jacobi aplica uma sequência de transformações de similaridade para que a matriz original seja transformada em uma matriz de estrutura mais simples. Na matriz diagonal, a **diagonal principal** tem ***n*** elementos e está representada pela cor **verde**, e todos os outros elementos fora da diagonal principal são iguais a zero. Assim, sua forma é:

$$
\bar{\mathbf{A}} = \left[\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n-2} & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n-2} & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-2,1} & a_{n-2,2} & \cdots & a_{n-2,n-2} & a_{n-2,n-1} & a_{n-2,n} \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-2} & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n-2} & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{pmatrix}\right]
$$

$$
(8) \quad = \left[\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_n \end{pmatrix}\right].
$$

Note que, em todas as colunas, exceto na última, há elementos abaixo do elemento da diagonal principal com 0. Portanto, para transformar a matriz original para esse formato, precisamos zerar todos os elementos abaixo do elemento da diagonal principal em cada coluna **exceto na última**. Portanto, o loop j das colunas vai até a penúltima coluna. O loop das linhas para uma dada coluna j, percorre todos os elementos abaixo da linha da diagonal, ou seja, da linha (j+1) até a última linha (linha n). Como a matriz é simétrica, o que fizermos para as colunas acontecerá igualmente nas linhas.

Cada passo do loop j tem o objetivo de deixar apenas o elemento da diagonal diferente de zero. Por isso, o loop vai da coluna 1 até a coluna n-1.

3.1.4 Construção da matriz de Jacobi $\mathbf{J}_{\mathrm{ij}}$

Vamos repetir a equação (7) aqui e observar que a matriz $\mathbf{J}_{\mathrm{ij}}$ atua na matriz resultante dos parênteses mais internos, ou seja, na matriz resultante dos passos anteriores.

$$
(7) \quad \bar{\mathbf{A}} = \underbrace{\mathbf{J}^{\mathrm{T}}_{(\mathrm{n-})1,\mathrm{n}} \cdots \underbrace{\left(\mathbf{J}^{\mathrm{T}}_{\mathrm{n},1} \cdots \underbrace{\left(\mathbf{J}^{\mathrm{T}}_{3,1} \underbrace{\left(\mathbf{J}^{\mathrm{T}}_{2,1}\mathbf{A}\mathbf{J}_{2,1}\right)}_{\textbf{Passo 1}} \mathbf{J}_{3,1}\right)}_{\textbf{Passo 2}} \cdots \mathbf{J}_{\mathrm{n},1}\right)}_{\textbf{Passo (n−1)}} \cdots \mathbf{J}_{\mathrm{n},(\mathrm{n}-1)}}_{\textbf{Passo n(n−1)/2}}
$$

Assim, quando aplicarmos a operação de similaridade

$$
(9) \quad \mathbf{A}_{\mathrm{nova}} \leftarrow \mathbf{J}^{\mathrm{T}}_{\mathrm{ij}}\mathbf{A}_{\mathrm{velha}}\mathbf{J}_{\mathrm{ij}},
$$

o elemento $(\mathbf{A}_{\mathrm{nova}})_{\mathrm{i,j}}$ ficará igual a zero.

Esse fato é levado em conta no método
Matriz **matrizJacobiBaseadaNoElemento_ij_DaMatrizVelha**(...).

3.1.4.1 Matiz de rotação de Jacobi

A matriz de Jacobi é uma matriz de rotação. Isso significa que, dados os valores i e j, onde j é o índice da coluna e i é o índice da linha do elemento a ser zerado, isto é, do elemento $(\mathbf{A}_{\text{nova}})_{\text{i,j}}$, e sabendo que esse elemento da coluna j está abaixo da diagonal, isto é, i > j, sua estrutura é representada como

$$\mathbf{J}_{ij} = \left[\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \text{el}_{\text{j,j}} & \cdots & 0 & \cdots & \text{el}_{\text{j,i}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \text{el}_{\text{i,j}} & \cdots & 0 & \cdots & \text{el}_{\text{i,i}} & \cdots & 0 \\ & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}\right]$$

(10)

$$= \left[\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cos(\theta) & \cdots & 0 & \cdots & -\text{sen}(\theta) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \text{sen}(\theta) & \cdots & 0 & \cdots & \cos(\theta) & \cdots & 0 \\ & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}\right]$$

Note que a construção da matriz é bem simples: basta inicializar a matriz $\mathbf{J}_{ij}$ com a **matriz identidade**, e alterar os elementos $\text{el}_{\text{j,j}} = \text{el}_{\text{i,i}} = \cos(\theta)$, $\text{el}_{\text{i,j}} = \text{sen}(\theta)$, e $\text{el}_{\text{j,i}} = -\text{sen}(\theta)$.

Porém, vem a pergunta: **Qual é o valor de $\boldsymbol{\theta}$ a ser usado**?

Para responder essa pergunta, vamos escrever a equação (9) explicitamente, usando a equação (10), isto é, no produto da equação (9), o elemento

(11) $$(\mathbf{A}_{\text{nova}})_{\text{i,j}} = 0 = \left(\mathbf{J}_{\text{ij}}^{\text{T}}\right)_{\text{i,k}} (\mathbf{A}_{\text{velha}})_{\text{k,m}} \left(\mathbf{J}_{\text{ij}}\right)_{\text{m,j}} = \left(\left(\mathbf{J}_{\text{ij}}\right)_{\text{k,i}} (\mathbf{A}_{\text{velha}})_{\text{k,m}}\right) \left(\mathbf{J}_{\text{ij}}\right)_{\text{m,j}}$$

Na equação (11), usamos a notação indicial, em que, índices repetidos implicam um somatório. Usamos também o fato de que o elemento de índice (i,k) da matriz transposta, isto é, $\left(\mathbf{J}_{\text{ij}}^{\text{T}}\right)_{\text{i,k}}$ é igual ao elemento de índice (k,j) da matriz original. Assim, $\left(\mathbf{J}_{\text{ij}}^{\text{T}}\right)_{\text{i,k}} = \left(\mathbf{J}_{\text{ij}}\right)_{\text{k,i}}$.

O último termo da equação (11) será calculado em duas etapas segundo o parêntese introduzido, isto é,

Etapa 1: $\left((\mathbf{J}_{ij})_{k,i}(\mathbf{A}_{velha})_{k,m}\right)$. Esse produto, com **k repetido**, equivale ao **produto escalar** da coluna i da matriz $[\mathbf{J}_{ij}]$ pela coluna m da matriz $[\mathbf{A}_{velha}]$ resultando no elemento $\mathbf{C}_{i,m}$ de uma matriz auxiliar. Assim

$$
\begin{aligned}
\mathbf{C}_{i,m} &= (\mathbf{J}_{ij})_{k,i}(\mathbf{A}_{velha})_{k,m} \\
&= el_{j,i}(\mathbf{A}_{velha})_{j,m} + el_{i,i}(\mathbf{A}_{velha})_{i,m} \\
&= -\operatorname{sen}(\theta)(\mathbf{A}_{velha})_{j,m} + \cos(\theta)(\mathbf{A}_{velha})_{i,m}
\end{aligned}
\tag{12}
$$

// A coluna i da matriz $\mathbf{J}_{ij}$
// só tem dois elementos
// não nulos.

Etapa 2: $\left((\mathbf{J}_{ij})_{k,i}(\mathbf{A}_{velha})_{k,m}\right)(\mathbf{J}_{ij})_{m,j} = \mathbf{C}_{i,m}(\mathbf{J}_{ij})_{m,j}$. Este produto, com **m repetido**, equivale ao **produto escalar** da linha i da matriz $[\mathbf{C}]$ pela coluna j da matriz $[\mathbf{J}_{ij}]$ resultando no elemento $(\mathbf{A}_{nova})_{i,j} = 0$. Assim

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{A}_{nova})_{i,j} = 0 &= \mathbf{C}_{i,m}(\mathbf{J}_{ij})_{m,j} \\
0 &= \left(-\operatorname{sen}(\theta)(\mathbf{A}_{velha})_{j,m} + \cos(\theta)(\mathbf{A}_{velha})_{i,m}\right)(\mathbf{J}_{ij})_{m,j} \\
&= -\operatorname{sen}(\theta)\,(\mathbf{A}_{velha})_{j,m}(\mathbf{J}_{ij})_{m,j} + \cos(\theta)(\mathbf{A}_{velha})_{i,m}(\mathbf{J}_{ij})_{m,j} \\
0 &= \boxed{\begin{aligned}&-\operatorname{sen}(\theta)\left\{(\mathbf{A}_{velha})_{j,j}el_{j,j} + (\mathbf{A}_{velha})_{j,i}el_{i,j}\right\}\\ &+\cos(\theta)\left\{(\mathbf{A}_{velha})_{i,j}el_{j,j} + (\mathbf{A}_{velha})_{i,i}el_{i,j}\right\}\end{aligned}} \\
0 &= -\operatorname{sen}(\theta)\left\{(\mathbf{A}_{velha})_{j,j}\cos(\theta) + (\mathbf{A}_{velha})_{j,i}\operatorname{sen}(\theta)\right\} \\
&\quad +\cos(\theta)\left\{(\mathbf{A}_{velha})_{i,j}\cos(\theta) + (\mathbf{A}_{velha})_{i,i}\operatorname{sen}(\theta)\right\} \\
0 &= \boxed{\begin{aligned}&\operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta)\left((\mathbf{A}_{velha})_{i,i} - (\mathbf{A}_{velha})_{j,j}\right)\\ &+(\mathbf{A}_{velha})_{i,j}\cos(\theta)\cos(\theta) - (\mathbf{A}_{velha})_{j,i}\operatorname{sen}(\theta)\operatorname{sen}(\theta)\end{aligned}}
\end{aligned}
\tag{13}
$$

Vamos fazer três substituições na equação (13):

1) como a matriz $\mathbf{A}_{velha}$ é simétrica, então $(\mathbf{A}_{velha})_{j,i} = (\mathbf{A}_{velha})_{i,j}$;
2) $\operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta) = \frac{1}{2}2\operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta) = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2\theta)$; e
3) $\cos(\theta)\cos(\theta) - \operatorname{sen}(\theta)\operatorname{sen}(\theta) = \cos^2(\theta) - \operatorname{sen}^2(\theta) = \cos(2\theta)$.

Assim, a equação (13) pode ser reescrita como

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{A}_{nova})_{i,j} = 0 &= \mathbf{C}_{i,m}(\mathbf{J}_{ij})_{m,j} \\
0 &= \tfrac{1}{2}\operatorname{sen}(2\theta)\left((\mathbf{A}_{velha})_{i,i} - (\mathbf{A}_{velha})_{j,j}\right) \\
&\quad + \cos(2\theta)\,(\mathbf{A}_{velha})_{i,j} \\
\frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{\cos(2\theta)} &= \frac{-2(\mathbf{A}_{velha})_{i,j}}{\left((\mathbf{A}_{velha})_{i,i} - (\mathbf{A}_{velha})_{j,j}\right)}
\end{aligned}
\tag{14}
$$

A equação (14) nos dá a tangente do ângulo 2θ. Vamos analisar essa equação.

$$
\operatorname{tg}(2\theta) = \frac{-2(\mathbf{A}_{velha})_{i,j}}{\left((\mathbf{A}_{velha})_{i,i} - (\mathbf{A}_{velha})_{j,j}\right)} \Longrightarrow
\begin{cases}
\text{se} \geq 0, \text{considerar } 0 \leq 2\theta < \frac{\pi}{2} \\
\text{se} < 0, \text{considerar } -\frac{\pi}{2} < 2\theta < 0 \\
(\mathbf{A}_{velha})_{i,i} - (\mathbf{A}_{velha})_{j,j} = 0, \text{considerar } 2\theta = \frac{\pi}{2}.
\end{cases}
\tag{15}
$$

Assim,

$$
(16) \quad \begin{cases} \text{se } \mathrm{tg}(2\theta) \geq 0 \text{ considerar } 0 \leq \theta = \frac{1}{2}\mathrm{arctg}(2\theta) < \frac{\pi}{4} \Longrightarrow \mathrm{sen}(\theta) \geq 0 \text{ e } \cos(\theta) > 0 \\ \text{se } \mathrm{tg}(2\theta) < 0, \text{considerar } -\frac{\pi}{4} < \theta = \frac{1}{2}\mathrm{arctg}(2\theta) < 0 \Longrightarrow \mathrm{sen}(\theta) \leq 0 \text{ e } \cos(\theta) > 0 \\ (\mathbf{A}_{\mathrm{velha}})_{\mathrm{i,i}} - (\mathbf{A}_{\mathrm{velha}})_{\mathrm{j,j}} = 0, \text{considerar } \theta = \frac{\pi}{4}. \end{cases}
$$

3.1.4.2 Algoritmo de construção da matriz de Jacobi, $\mathbf{J}_{ij}$

Matriz **matrizJacobiBaseadaNoElemento_ij_DaMatrizVelha**
(MatrizSimétrica **A**, int i, int j, int n)

Matriz **I**, $\mathbf{J}_{ij}$;
Real $\theta, \varepsilon = 10^{-6}$;
// Inicializar vetores
$\mathbf{J}_{ij} \leftarrow \mathbf{I}$; // Matriz identidade com n x n elementos
Se $\left(\mathrm{abs}(\mathbf{A}_{i,j}) \leq \varepsilon\right)$ **return** $\mathbf{J}_{ij}$ // Considerar $\mathbf{A}_{i,j} = 0$, retorna a matriz identidade
// Calcular θ
Se $\left(\mathrm{abs}\left((\mathbf{A})_{i,i} - (\mathbf{A})_{j,j}\right) \leq \varepsilon\right)$ // Considerar $(\mathbf{A}_{\mathrm{velha}})_{i,i} = (\mathbf{A}_{\mathrm{velha}})_{j,j}$ **então**
$\theta = \frac{\pi}{4}$;
Senão
$\theta = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{-2(\mathbf{A})_{i,j}}{(\mathbf{A}_{i,i} - \mathbf{A}_{j,j})}\right)$; // Esta função já retorna um ângulo +/-
// no primeiro quadrante sentido anti-horário (+)
// no primeiro quadrante sentido horário (-)
End Se-Senão
$\mathbf{J}_{ij}(i,i) \leftarrow \cos(\theta)$
$\mathbf{J}_{ij}(j,j) \leftarrow \cos(\theta)$
$\mathbf{J}_{ij}(i,j) \leftarrow \mathrm{sen}(\theta)$
$\mathbf{J}_{ij}(j,i) \leftarrow -\mathrm{sen}(\theta)$

return ($\mathbf{J}_{ij}$);

3.1.5 Por que a Varredura de Jacobi não diagonaliza a matriz original?

Suponha que a matriz de Jacobi $\mathbf{J}_{ij}$ tenha sido construída para, através da equação (11), zerar o elemento $(\mathbf{A}_{\mathrm{nova}})_{i,j}$. O que acontece com os termos que já tinham sido zerados em passos anteriores da varredura? Para responder isso, vamos analisar o que acontece com esses termos quando a transformação de similaridade da equação (9) é feita usando $\mathbf{J}_{ij}$, ou seja,

$$
(17) \qquad (\mathbf{A}_{\mathrm{nova}})_{r,s} = \left(\mathbf{J}_{ij}^{T}\right)_{r,k} (\mathbf{A}_{\mathrm{velha}})_{k,m} \left(\mathbf{J}_{ij}\right)_{m,s} = \left(\mathbf{J}_{ij}\right)_{k,r} (\mathbf{A}_{\mathrm{velha}})_{k,m} \left(\mathbf{J}_{ij}\right)_{m,s}
$$

A varredura de Jacobi começa sempre com a coluna j=1. Vamos assumir inicialmente que, na equação (17), s=j. Essa condição acontece logo no primeiro passo no loop das colunas s=j=1. Assim, o que acontece com os elementos entre a diagonal (j, j) e o elemento (i, j) que acaba de ser zerado?

Caso 1) s = j

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{A}_{\mathrm{nova}})_{r,j} &= \left(\mathbf{J}_{ij}\right)_{k,r} \left((\mathbf{A}_{\mathrm{velha}})_{k,m} \left(\mathbf{J}_{ij}\right)_{m,j}\right) \\
&= \left(\mathbf{J}_{ij}\right)_{k,r} \left((\mathbf{A}_{\mathrm{velha}})_{k,j} \left(\mathbf{J}_{ij}\right)_{j,j} + (\mathbf{A}_{\mathrm{velha}})_{k,i} \left(\mathbf{J}_{ij}\right)_{i,j}\right) \\
&= \left(\mathbf{J}_{ij}\right)_{k,r} \left((\mathbf{A}_{\mathrm{velha}})_{k,j} \cos(\theta) + (\mathbf{A}_{\mathrm{velha}})_{k,i} \mathrm{sen}(\theta)\right)
\end{aligned}
$$

1.1) j < r < i (**elementos da coluna j que deveriam permanecer zerados**)

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{A}_{\text{nova}})_{r,j} &= (\mathbf{J}_{ij})_{k,r}\left((\mathbf{A}_{\text{velha}})_{k,j}\cos(\theta) + (\mathbf{A}_{\text{velha}})_{k,i}\text{sen}(\theta)\right)\\
&= (\mathbf{J}_{ij})_{r,r}\left((\mathbf{A}_{\text{velha}})_{r,j}\cos(\theta) + (\mathbf{A}_{\text{velha}})_{r,i}\text{sen}(\theta)\right)\\
&= \left((\mathbf{A}_{\text{velha}})_{r,j}\cos(\theta) + (\mathbf{A}_{\text{velha}})_{r,i}\text{sen}(\theta)\right)
\end{aligned}
$$

Note que o elemento $(\mathbf{A}_{\text{velha}})_{r,i}$ ainda não foi zerado pois sua coluna está à direita do loop de varredura j das colunas e sua linha r não está na parte que seria zerada por simetria. Portanto, o elemento $(\mathbf{A}_{\text{nova}})_{r,j}$ deixa de ser zero. Observe, porém que o termo vilão é multiplicado por um número entre -1 e 1, isto é, $\text{sen}(\theta)$. Por isso, **com múltiplas varreduras, esse termo tenderá a zero**.

1.2) j < r = i

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{A}_{\text{nova}})_{i,j} &= (\mathbf{J}_{ij})_{k,i}\left((\mathbf{A}_{\text{velha}})_{k,j}\cos(\theta) + (\mathbf{A}_{\text{velha}})_{k,i}\text{sen}(\theta)\right)\\
&= 0
\end{aligned}
$$

1.3) i < r

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{A}_{\text{nova}})_{i,j} &= (\mathbf{J}_{ij})_{k,r}\left((\mathbf{A}_{\text{velha}})_{k,j}\cos(\theta) + (\mathbf{A}_{\text{velha}})_{k,i}\text{sen}(\theta)\right)\\
&= (\mathbf{J}_{ij})_{r,r}\left((\mathbf{A}_{\text{velha}})_{r,j}\cos(\theta) + (\mathbf{A}_{\text{velha}})_{r,i}\text{sen}(\theta)\right)\\
&= \left((\mathbf{A}_{\text{velha}})_{r,j}\cos(\theta) + (\mathbf{A}_{\text{velha}})_{r,i}\text{sen}(\theta)\right)
\end{aligned}
$$

O Caso 1) já é suficiente para concluir que os termos que haviam sido zerados deixam de ser zero. No Caso 2 vemos o que acontece com elementos de colunas anteriores à coluna que está sendo zerada.

Caso 2) s < j (elementos em colunas anteriores à coluna j que deveriam permanecer zerados)

$$(\mathbf{A}_{\text{nova}})_{r,s} = (\mathbf{J}_{ij})_{k,r}\left((\mathbf{A}_{\text{velha}})_{k,m}(\mathbf{J}_{ij})_{m,s}\right) = (\mathbf{J}_{ij})_{k,r}(\mathbf{A}_{\text{velha}})_{k,s}$$

2.1) s < r < j

$$(\mathbf{A}_{\text{nova}})_{r,s} = (\mathbf{J}_{ij})_{k,r}(\mathbf{A}_{\text{velha}})_{k,s} = (\mathbf{A}_{\text{velha}})_{r,s}$$ **(Valor se mantem)**

2.2) j < r = j

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{A}_{\text{nova}})_{j,s} &= (\mathbf{J}_{ij})_{k,j}(\mathbf{A}_{\text{velha}})_{k,s}\\
&= (\mathbf{J}_{ij})_{j,j}(\mathbf{A}_{\text{velha}})_{j,s} + (\mathbf{J}_{ij})_{i,j}(\mathbf{A}_{\text{velha}})_{i,s}\\
&= \cos(\theta)(\mathbf{A}_{\text{velha}})_{j,s} + \text{sen}(\theta)(\mathbf{A}_{\text{velha}})_{i,s}
\end{aligned}
$$

Como $(\mathbf{A}_{\text{velha}})_{j,s}$ e $(\mathbf{A}_{\text{velha}})_{i,s}$ deixaram de ser zero, $(\mathbf{A}_{\text{nova}})_{j,s}$ já não é mais zero.

2.3) j < r < i

$$(\mathbf{A}_{\text{nova}})_{r,s} = (\mathbf{J}_{ij})_{k,r}(\mathbf{A}_{\text{velha}})_{k,s} = (\mathbf{A}_{\text{velha}})_{r,s}$$ **(Valor se mantem)**

2.4) j < r = i

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{A}_{\text{nova}})_{i,s} &= (\mathbf{J}_{ij})_{k,i}(\mathbf{A}_{\text{velha}})_{k,s} \\
&= (\mathbf{J}_{ij})_{j,i}(\mathbf{A}_{\text{velha}})_{j,s} + (\mathbf{J}_{ij})_{i,i}(\mathbf{A}_{\text{velha}})_{i,s} \\
&= -\text{sen}(\theta)(\mathbf{A}_{\text{velha}})_{j,s} + \cos(\theta)(\mathbf{A}_{\text{velha}})_{i,s}
\end{aligned}
$$

Como $(\mathbf{A}_{\text{velha}})_{j,s}$ e $(\mathbf{A}_{\text{velha}})_{i,s}$ deixaram de ser zero, $(\mathbf{A}_{\text{nova}})_{j,s}$ já não é mais zero.

2.5) $i < r$

$$
(\mathbf{A}_{\text{nova}})_{r,s} = (\mathbf{J}_{ij})_{r,r}(\mathbf{A}_{\text{velha}})_{r,s} = (\mathbf{A}_{\text{velha}})_{r,s}
$$

Tarefa #14:

Com a matriz **A** abaixo, faça o que se pede:

$$
\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 40 & 8 & 4 & 2 & 1 \\ 8 & 30 & 12 & 6 & 2 \\ 4 & 12 & 20 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 1 & 25 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}
$$

1) Implemente o método de Jacobi e aplique-o sobre **A** para encontrar

i. a matriz diagonal $\bar{\mathbf{A}}$

ii. a matriz acumulada $\mathbf{P} = \mathbf{P_1 P_2 P_3} \ldots$

iii. Imprima a matriz que sai de cada varredura de Jacobi

iv. Imprima os pares (autovalor, autovetor) da matriz **A**

v. Compare os resultados do item 3) com os resultados da Tarefa #13.

2) Adapte o método de **varredura de Jacobi** para receber a matriz tridiagonal que sai do método de Householder. Neste caso, observe que:

i. as varreduras de colunas e linhas continuam as mesmas

ii imprima $\mathbf{A}_{\text{nova}}$ logo após a linha $\mathbf{A}_{\text{nova}} \leftarrow \mathbf{J}_{ij}^{T}\mathbf{A}_{\text{velha}}\mathbf{J}_{ij}$; e verifique se os termos que eram zero deixaram de ser zero.

iii. depois da diagonalização, verifique que as colunas de **P** não são os autovetores de **A**.

iv. Faça $\mathbf{P} = \mathbf{HP}$ e verifique que as colunas da nova matriz **P** são os autovetores de **A**