

Curso: Métodos Numéricos II
Professor: Creto Augusto Vidal
Semestre: 2021.1
Aula # 11

Objetivo: Deduzir as fórmulas de integração de Gauss-Legendre para 2 e 3 pontos e aplicá-las a um problema.

Quadratura de Gauss-Legendre

$$(1) \quad I = \int_{x_i}^{x_f} f(x) dx \approx \frac{x_f - x_i}{2} [\sum_{k=1}^n \bar{p}(\alpha_k) w_k] = \frac{x_f - x_i}{2} [\sum_{k=1}^n f(x(\alpha_k)) w_k]$$

onde

i) $x(\alpha_k) = \frac{x_i + x_f}{2} + \frac{x_f - x_i}{2} \alpha_k$

ii) $\alpha_k, k = 1, 2, \dots, n$ são as raízes do polinômio de Legendre de grau $n, P_n(\alpha)$ e

iii) $w_k, k = 1, 2, \dots, n$ são os pesos correspondentes dados por $w_k = \int_{-1}^1 L_k(\alpha) d\alpha$.

1. Cálculo dos ingredientes para as fórmulas de Gauss-Legendre de 2 e 3 pontos.

Observando a equação (1) acima, vemos que os dados do problema a ser resolvido são:

- 1) A função $f(x)$ – integrando – que deve ser programada para receber x e retornar o valor $f(x)$;
- 2) Os limites de integração inferior (início do intervalo) e superior (final do intervalo), x_i e x_f respectivamente.

Com essas informações, o usuário passa a analisar o problema para tomar a decisão de qual fórmula deve usar para resolver o problema de forma aproximada.

Vamos **fazer de conta** que o gráfico da função $f(x)$ tenha um ponto de inflexão no intervalo $[x_i, x_f]$. Isso indica que o polinômio de grau 3 é o polinômio de grau mais baixo que pode se ajustar bem a esse gráfico.

Assim, sabendo que a Quadratura de Gauss-Legendre com n pontos integra de forma exata um polinômio de grau $G = 2n - 1$, então, se $G = 3, n = \frac{(G+1)}{2} = \frac{(3+1)}{2} = 2$.

Precisamos achar todos os ingredientes para aplicar a fórmula de Gauss-Legendre com 2 pontos de interpolação.

1.1 Ingredientes da fórmula de Gauss-Legendre com 2 pontos de interpolação.

Para este caso particular, a fórmula (1) pode ser escrita como

$$(2) \quad I = \int_{x_i}^{x_f} f(x) dx \approx \frac{x_f - x_i}{2} [\sum_{k=1}^2 f(x(\alpha_k)) w_k] = \frac{x_f - x_i}{2} [f(x(\alpha_1)) w_1 + f(x(\alpha_2)) w_2]$$

1) Quem são α_1 e α_2 ?

Os valores de α_1 e α_2 são as raízes do polinômio de Legendre de grau 2, $P_2(\alpha)$.

Na aula passada (Aula #10), vimos que

$$(3) \quad P_2(\alpha) = \frac{1}{2^2 2!} \frac{d^2}{d\alpha^2} [(\alpha^2 - 1)^2] = \frac{1}{2} (3\alpha^2 - 1).$$

Também vimos que suas raízes eram encontradas resolvendo a equação

$$(4) P_2(\alpha) = \frac{1}{2}(3\alpha^2 - 1) = 0 \rightarrow \alpha_1 = -\sqrt{\frac{1}{3}}, \quad \alpha_2 = +\sqrt{\frac{1}{3}}.$$

Com esses valores, já podemos calcular os valores correspondentes da variável x .

2) Cálculo de $x(\alpha_1)$ e $x(\alpha_2)$

Com os dados de entrada x_i e x_f e com os valores $\alpha_1 = -\sqrt{\frac{1}{3}}$, $\alpha_2 = +\sqrt{\frac{1}{3}}$ podemos usar a fórmula

$$(5) x(\alpha_k) = \frac{x_i + x_f}{2} + \frac{x_f - x_i}{2} \alpha_k$$

para obter

$$(6) x(\alpha_1) = x\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}\right) = \frac{x_i + x_f}{2} - \frac{x_f - x_i}{2} \sqrt{\frac{1}{3}}$$

e

$$(7) x(\alpha_2) = x\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right) = \frac{x_i + x_f}{2} + \frac{x_f - x_i}{2} \sqrt{\frac{1}{3}}.$$

Por fim, precisamos calcular os valores dos pesos w_1 e w_2 .

3) Cálculo de w_1 e w_2

Pela fórmula (8),

$$(8) w_k = \int_{-1}^1 L_k(\alpha) d\alpha,$$

vemos que o peso w_k depende do polinômio interpolador de Lagrange $L_k(\alpha)$.

Assim, vamos construir os polinômios interpoladores de Lagrange $L_1(\alpha)$ e $L_2(\alpha)$.

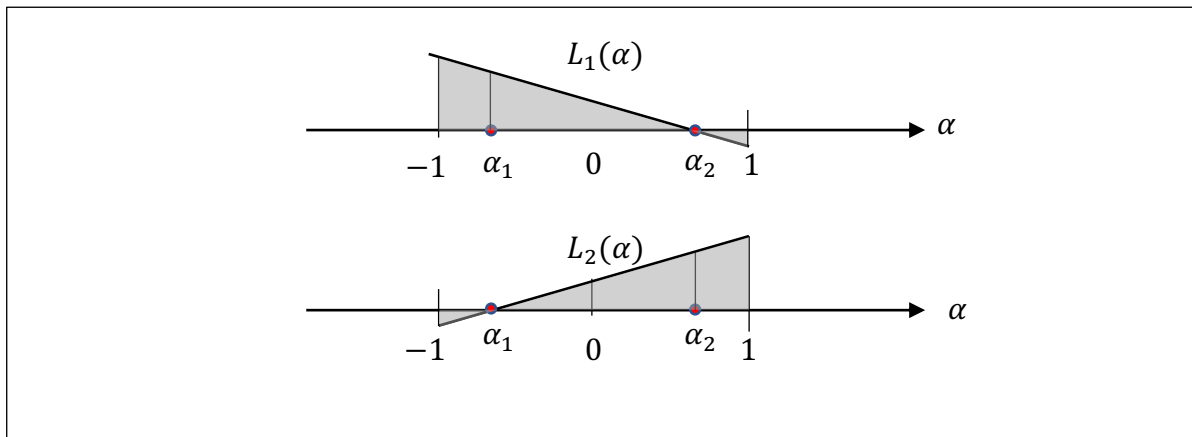


Figura 1. Polinômios interpoladores de Lagrange $L_1(\alpha)$ e $L_2(\alpha)$

Como os polinômios $L_1(\alpha)$ e $L_2(\alpha)$ só passam por dois pontos de interpolação, eles são polinômios do primeiro grau escritos como

$$(9) L_1(\alpha) = \frac{(\alpha - \alpha_2)}{(\alpha_1 - \alpha_2)} = \frac{\left(\alpha - \sqrt{\frac{1}{3}}\right)}{\left(-\sqrt{\frac{1}{3}} - \sqrt{\frac{1}{3}}\right)} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\sqrt{3}\alpha - 1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{3}\alpha)$$

$$(10) \quad L_2(\alpha) = \frac{(\alpha - \alpha_1)}{(\alpha_2 - \alpha_1)} = \frac{\left(\alpha + \sqrt{\frac{1}{3}}\right)}{\left(\sqrt{\frac{1}{3}} + \sqrt{\frac{1}{3}}\right)} = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\sqrt{3}\alpha + 1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3}\alpha)$$

Logo, substituindo (9) em (8) temos

$$(11) \quad \begin{aligned} w_1 &= \int_{-1}^1 L_1(\alpha) d\alpha = \int_{-1}^1 \frac{1}{2}(1 - \sqrt{3}\alpha) d\alpha = \frac{1}{2} \left[\int_{-1}^1 (1) d\alpha - \sqrt{3} \int_{-1}^1 (\alpha) d\alpha \right] \\ &= \frac{1}{2} [2 - \sqrt{3} \times 0] = 1 \end{aligned}$$

Na Figura 1, pode-se observar que a integral $\int_{-1}^1 L_1(\alpha) d\alpha$ tem o mesmo valor que $\int_{-1}^1 L_2(\alpha) d\alpha$. Assim, os pesos associados às raízes simétricas são sempre os mesmos.

Se quisermos verificar isso, vamos substituir (10) em (8) para obtermos

$$(11) \quad \begin{aligned} w_2 &= \int_{-1}^1 L_2(\alpha) d\alpha = \int_{-1}^1 \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3}\alpha) d\alpha = \frac{1}{2} \left[\int_{-1}^1 (1) d\alpha + \sqrt{3} \int_{-1}^1 (\alpha) d\alpha \right] \\ &= \frac{1}{2} [2 + \sqrt{3} \times 0] = 1 \end{aligned}$$

Terminamos! Todos os ingredientes para a Quadratura de Gauss-Legendre com dois pontos já foram obtidos. Agora, vamos fazer o mesmo para a Quadratura de Gauss-Legendre com três pontos.

1.2 Ingredientes da fórmula de Gauss-Legendre com 3 pontos de interpolação.

Para este caso particular, a fórmula (1) pode ser escrita como

$$(12) \quad \begin{aligned} I &= \int_{x_i}^{x_f} f(x) dx \approx \frac{x_f - x_i}{2} [\sum_{k=1}^3 f(x(\alpha_k)) w_k] \\ &= \frac{x_f - x_i}{2} [f(x(\alpha_1)) w_1 + f(x(\alpha_2)) w_2 + f(x(\alpha_3)) w_3] \end{aligned}$$

1) Quem são α_1 , α_2 e α_3 ?

Os valores de α_1 , α_2 e α_3 são as raízes do polinômio de Legendre de grau 3, $P_3(\alpha)$.

Na aula passada (Aula #10), vimos que

$$(13) \quad P_3(\alpha) = \frac{1}{2^3 3!} \frac{d^3}{d\alpha^3} [(\alpha^2 - 1)^3] = \frac{1}{2} (5\alpha^3 - 3\alpha).$$

Também vimos que suas raízes eram encontradas resolvendo a equação

$$(14) \quad P_3(\alpha) = \frac{1}{2} \alpha (5\alpha^2 - 3) = 0 \rightarrow \alpha_1 = -\sqrt{\frac{3}{5}}, \quad \alpha_2 = 0 \quad \text{e} \quad \alpha_3 = +\sqrt{\frac{3}{5}}.$$

Com esses valores, já podemos calcular os valores correspondentes da variável x .

2) Cálculo de $x(\alpha_1)$, $x(\alpha_2)$ e $x(\alpha_3)$

Com os dados de entrada x_i e x_f e com os valores $\alpha_1 = -\sqrt{\frac{3}{5}}$, $\alpha_2 = 0$ e $\alpha_3 = +\sqrt{\frac{3}{5}}$, podemos usar a fórmula

$$(15) \quad x(\alpha_k) = \frac{x_i + x_f}{2} + \frac{x_f - x_i}{2} \alpha_k$$

para obter

$$(16) \quad x(\alpha_1) = x \left(-\sqrt{\frac{3}{5}} \right) = \frac{x_i + x_f}{2} - \frac{x_f - x_i}{2} \sqrt{\frac{3}{5}}$$

$$(17) x(\alpha_2) = x(0) = \frac{x_i + x_f}{2} + \frac{x_f - x_i}{2} 0 = \frac{x_i + x_f}{2}.$$

e

$$(18) x(\alpha_3) = x\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right) = \frac{x_i + x_f}{2} + \frac{x_f - x_i}{2} \sqrt{\frac{3}{5}}.$$

Por fim, precisamos calcular os valores dos pesos w_1 , w_2 e w_3 .

3) Cálculo dos pesos w_1 , w_2 e w_3

Pela fórmula (19),

$$(19) w_k = \int_{-1}^1 L_k(\alpha) d\alpha,$$

vemos que o peso w_k depende do polinômio interpolador de Lagrange $L_k(\alpha)$.

Assim, vamos construir os polinômios interpoladores de Lagrange $L_1(\alpha)$, $L_2(\alpha)$ e $L_3(\alpha)$.

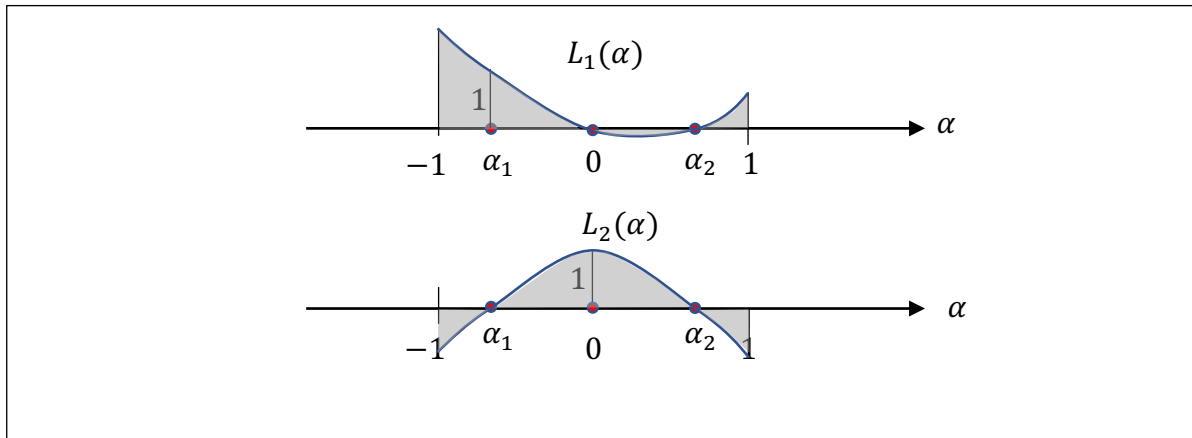


Figura 1. Polinômios interpoladores de Lagrange $L_1(\alpha)$ e $L_2(\alpha)$

Já sabemos que a área de $L_3(\alpha)$ é igual à área de $L_1(\alpha)$. Portanto, não precisamos fazer o cálculo do peso w_3 já que ele será igual a w_1 . Como os polinômios $L_1(\alpha)$ e $L_2(\alpha)$ passam por três pontos de interpolação, eles são polinômios do segundo grau escritos como

$$(20) L_1(\alpha) = \frac{(\alpha - \alpha_2)(\alpha - \alpha_3)}{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)} = \frac{(\alpha - 0)\left(\alpha - \sqrt{\frac{3}{5}}\right)}{\left(-\sqrt{\frac{3}{5}} - 0\right)\left(-\sqrt{\frac{3}{5}} - \sqrt{\frac{3}{5}}\right)} = \frac{5}{6}\left(\alpha^2 - \sqrt{\frac{3}{5}}\alpha\right)$$

$$(21) L_2(\alpha) = \frac{(\alpha - \alpha_1)(\alpha - \alpha_3)}{(\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_2 - \alpha_3)} = \frac{\left(\alpha + \sqrt{\frac{3}{5}}\right)\left(\alpha - \sqrt{\frac{3}{5}}\right)}{\left(0 + \sqrt{\frac{3}{5}}\right)\left(0 - \sqrt{\frac{3}{5}}\right)} = -\frac{5}{3}\left(\alpha^2 - \frac{3}{5}\right)$$

Logo, substituindo (20) em (19) temos

$$(22) \begin{aligned} w_1 &= \int_{-1}^1 L_1(\alpha) d\alpha = \int_{-1}^1 \frac{5}{6}\left(\alpha^2 - \sqrt{\frac{3}{5}}\alpha\right) d\alpha = \frac{5}{6}\left[\int_{-1}^1 (\alpha^2) d\alpha - \sqrt{\frac{3}{5}}\int_{-1}^1 (\alpha) d\alpha\right] \\ &= \frac{5}{6}\left[\frac{2}{3} - \sqrt{\frac{3}{5}} \times 0\right] = \frac{5}{9} = w_3 \end{aligned}$$

Agora, substituindo (21) em (19) temos.

$$\begin{aligned}
 (23) \quad w_2 &= \int_{-1}^1 L_2(\alpha) d\alpha = \int_{-1}^1 -\frac{5}{3} \left(\alpha^2 - \frac{3}{5} \right) d\alpha = -\frac{5}{3} \left[\int_{-1}^1 (\alpha^2) d\alpha - \frac{3}{5} \int_{-1}^1 (1) d\alpha \right] \\
 &= -\frac{5}{3} \left[\frac{2}{3} - \frac{6}{5} \right] = -\frac{5}{3} \left[\frac{2}{3} - \frac{6}{5} \right] = \frac{8}{9}
 \end{aligned}$$

Terminamos! Todos os ingredientes para a Quadratura de Gauss-Legendre com três pontos já foram obtidos. Agora, vamos resolver um problema com elas. Vamos resolver o mesmo problema que fizemos na Aula#8.

2. Aplicação das Quadraturas de Gauss-Legendre com 2 e 3 pontos a um problema

Vamos resolver o problema

$$(24) \quad I = \int_0^1 (\sin(2x) + 4x^2 + 3x)^2 dx = 17.8764703$$

2.1 Solução com Gauss-Legendre com 2 pontos.

Para facilitar, vamos colocar na forma de uma tabela

α_k	$x(\alpha_k) = \frac{0+1}{2} + \frac{1-0}{2} \alpha_k$	$f(x(\alpha_k))$	w_k	$f(x(\alpha_k))w_k$
$\alpha_1 = -\sqrt{\frac{1}{3}}$	$x(\alpha_1) = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{1}{3}} \right)$	1.49520523	$w_1 = 1$	1.49520523
$\alpha_2 = \sqrt{\frac{1}{3}}$	$x(\alpha_2) = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{\frac{1}{3}} \right)$	34.26975855	$w_2 = 1$	34.26975855
			Total:	35,76496378

Assim, o resultado final é

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^1 (\sin(2x) + 4x^2 + 3x)^2 dx \approx \frac{x_f - x_i}{2} \left[\sum_{k=1}^2 f(x(\alpha_k)) w_k \right] \\
 &= \frac{1}{2} [35,76496378] = 17.8824819
 \end{aligned}$$

2.2 Solução com Gauss-Legendre com 3 pontos.

Para facilitar, vamos colocar na forma de uma tabela

α_k	$x(\alpha_k) = \frac{1}{2} (1 + \alpha_k)$	$f(x(\alpha_k))$	w_k	$f(x(\alpha_k))w_k$
$\alpha_1 = -\sqrt{\frac{3}{5}}$	$x(\alpha_1) = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{3}{5}} \right)$	0.37504744	$w_1 = \frac{5}{9}$	0.20835969
$\alpha_2 = 0$	$x(\alpha_2) = \frac{1}{2} (1 + 0)$	11.16542834	$w_2 = \frac{8}{9}$	9.92482519
$\alpha_3 = \sqrt{\frac{3}{5}}$	$x(\alpha_2) = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{\frac{3}{5}} \right)$	46.10943483	$w_2 = \frac{5}{9}$	25.61635268
			Total:	35,74953756

Assim, o resultado final é

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 (\sin(2x) + 4x^2 + 3x)^2 dx \approx \frac{x_f - x_i}{2} \left[\sum_{k=1}^3 f(x(\alpha_k)) w_k \right] \\ &= \frac{1}{2} [35,74953756] = 17.87476878 \end{aligned}$$

Tarefa: Desenvolva a Quadratura de Gauss-Legendre com 4 pontos seguindo o roteiro apresentado nesta aula. **Implemente as Quadraturas de Gauss-Legendre de 2 a 4 pontos e teste os resultados com tolerância de 10^{-6} .** O seu código (como já discutido em sala de aula) implementa a estratégia de partição do problema. Veja, em cada caso, quantas iterações foram necessárias até atingir a tolerância especificada.