

Curso: Métodos Numéricos II
Professor: Creto Augusto Vidal
Semestre: 2021.1
Aula # 19

1. Objetivo: Continuar a apresentar a família de métodos de potência e sua utilidade.

2. Método da Potência (continuação)

Nesta seção, vamos apresentar os últimos dois métodos de potência: 1) Potência Regular, 2) Potência Inversa, 3) Potência com deslocamento.

Entendendo as condições para que o método da Potência Regular funcione, é fácil entender as condições para que os outros métodos funcionem. Assim, é bom revisar a Aula#18..

2.1 Método da Potência Inverso.

Dada a matriz \mathbf{A} , este método determina seu autovalor com menor valor absoluto diferente de zero.

Se você entender o desenvolvimento apresentado na Aula#18, verá que este método é uma pequena modificação do método da Potência Regular.

2.1.1 Discussões preliminares

Se ordenarmos o espectro da matriz \mathbf{A} em ordem decrescente em valor absoluto temos:

$$(1) \quad |\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \dots |\lambda_i| \dots > |\lambda_n| > 0.$$

O método da potência inverso acha o par $(\lambda_n, \mathbf{x}_n)$.

Note na equação (1) que o **autovalor desejado é diferente dos demais**, isto é, a **multiplicidade algébrica de λ_n é igual a 1**. Para que o método funcione, isso tem que ser verdade para a matriz \mathbf{A} . Se isso não for o caso, o método vai falhar.

Vamos escrever a relação entre qualquer autovalor λ_i e seu autovetor correspondente \mathbf{x}_i , isto é,

$$(2) \quad \mathbf{A}\mathbf{x}_i = \lambda_i \mathbf{x}_i.$$

Na equação (1) assumimos que \mathbf{A} não tem nenhum autovalor nulo, e, portanto, tem uma inversa, \mathbf{A}^{-1} .

Vamos multiplicar os dois lados da equação (2) por \mathbf{A}^{-1} e dividir os dois lados por λ_i . Assim, obtemos

$$(3) \quad \frac{1}{\lambda_i} \underbrace{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}}_{\mathbf{I}} \mathbf{x}_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_i} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{x}_i \Rightarrow \mathbf{A}^{-1} \mathbf{x}_i = \frac{1}{\lambda_i} \mathbf{x}_i \Rightarrow \mathbf{A}^{-1} \mathbf{x}_i = \bar{\lambda}_i \mathbf{x}_i.$$

As operações sobre a equação (2) para obter a equação (3) não modificaram o autovetor \mathbf{x}_i que agora também é o autovetor da matriz \mathbf{A}^{-1} correspondente ao autovalor $\bar{\lambda}_i$ que é o inverso do autovalor λ_i da matriz \mathbf{A} . Assim, podemos concluir que

$$(4) \quad \text{Se } \mathbf{A} \text{ tem uma inversa } \mathbf{A}^{-1}, \text{ então } (\lambda_i, \mathbf{x}_i) \text{ de } \mathbf{A} \Rightarrow \left(\frac{1}{\lambda_i}, \mathbf{x}_i\right) \text{ de } \mathbf{A}^{-1}.$$

Pela equação (4), podemos concluir que o espectro de \mathbf{A} está relacionado ao espectro de \mathbf{A}^{-1} da seguinte forma

$$\begin{aligned}
 \lambda(\mathbf{A}) &= \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_i, \dots, \lambda_n\} \\
 \lambda(\mathbf{A}^{-1}) &= \left\{ \frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \dots, \frac{1}{\lambda_i}, \dots, \frac{1}{\lambda_n} \right\} \\
 \mathbf{x}(\mathbf{A}) = \mathbf{x}(\mathbf{A}^{-1}) &= \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_i, \dots, \mathbf{x}_n\}
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

Assumindo que os autovalores do espectro $\lambda(\mathbf{A})$ na equação (5) estejam em ordem decrescente de seus valores absolutos, podemos concluir que o espectro $\lambda(\mathbf{A}^{-1})$ está em ordem crescente de seus valores absolutos. Assim, $\frac{1}{\lambda_n}$ é o autovalor dominante de \mathbf{A}^{-1} .

Portanto, se aplicarmos o método da Potência Regular sobre \mathbf{A}^{-1} , encontraremos seu autovalor dominante e seu autovetor correspondente, isto é,

$$(6) \quad (\bar{\lambda}_{dominante}, \bar{\mathbf{x}}_{dominante}) \equiv \left(\frac{1}{\lambda_n}, \mathbf{x}_n \right)$$

2.1.2 Cálculo do par $(\lambda_n, \mathbf{x}_n)$

Há duas maneiras alternativas de proceder:

- 1) Usando o método (subrotina, subprograma etc.) da Potência Regular

$$(\bar{\lambda}_{dominante}, \bar{\mathbf{x}}_{dominante}) \leftarrow \text{potenciaRegular}(\mathbf{A}, \mathbf{v}, \text{eps}); \text{ ou}$$

- 2) Usando o método da Potência Inverso construído a partir de pequenas modificações do método da potência regular.

Alternativa 1: Algoritmo 2.1a Potência Inverso

potenciaInverso1($\mathbf{A}, \mathbf{v}_0, \varepsilon$)		
Input	:	Matriz \mathbf{A} , vetor inicial \mathbf{v}_0 , tolerância ε
Output	:	Autovalor, λ_n e Autovetor correspondente, \mathbf{x}_n
Step 1	:	$\mathbf{A}^{-1} \leftarrow \text{calculaInversa}(\mathbf{A})$
Step 2	:	$(\bar{\lambda}_{dominante}, \bar{\mathbf{x}}_{dominante}) \leftarrow \text{potenciaRegular}(\mathbf{A}^{-1}, \mathbf{v}_0, \varepsilon)$
Step 3	:	$\lambda_n \leftarrow \frac{1}{\bar{\lambda}_{dominante}}$
Step 4	:	$\mathbf{x}_n \leftarrow \bar{\mathbf{x}}_{dominante}$
Step 5	:	Imprimir ou retornar resposta $(\lambda_n, \mathbf{x}_n)$

Alternativa 2: Algoritmo 2.1b Potência Inverso

potenciaInverso2($\mathbf{A}, \mathbf{v}_0, \varepsilon$)		
Input	:	Matriz \mathbf{A} , vetor inicial \mathbf{v}_0 , tolerância ε
Output	:	Autovalor, λ_n e Autovetor correspondente, \mathbf{x}_n

Step 1	:	// Receber a matriz \mathbf{A} , o vetor inicial, \mathbf{v}_0 , e a tolerância, ε
Step 2	:	// Calcular a decomposição LU de \mathbf{A} : $(\mathbf{L}, \mathbf{U}) \leftarrow \text{decompLU}(\mathbf{A})$
Step 3	:	// Inicializar o autovalor, $\bar{\lambda}_1$: $(\bar{\lambda}_1)_{\text{Novo}} \leftarrow 0$
Step 4	:	// Copiar o vetor, \mathbf{v}_0 para $(\mathbf{v}_k)_{\text{Novo}}$: $(\mathbf{v}_k)_{\text{Novo}} \leftarrow \mathbf{v}_0$
Step 5	:	// Copiar $(\bar{\lambda}_1)_{\text{Novo}}$ para $(\bar{\lambda}_1)_{\text{Velho}}$: $(\bar{\lambda}_1)_{\text{Velho}} \leftarrow (\bar{\lambda}_1)_{\text{Novo}}$
Step 6	:	// Copiar $(\mathbf{v}_k)_{\text{Novo}}$ para $(\mathbf{v}_k)_{\text{Velho}}$: $(\mathbf{v}_k)_{\text{Velho}} \leftarrow (\mathbf{v}_k)_{\text{Novo}}$
Step 7	:	// Normalizar $(\mathbf{v}_k)_{\text{Velho}}$: $(\mathbf{x}_1)_{\text{Velho}} \leftarrow \frac{(\mathbf{v}_k)_{\text{Velho}}}{\ (\mathbf{v}_k)_{\text{Velho}}\ } = \frac{(\mathbf{v}_k)_{\text{Velho}}}{\sqrt{((\mathbf{v}_k)_{\text{Velho}})^T (\mathbf{v}_k)_{\text{Velho}}}}$
Step 8	:	// Calcular $(\mathbf{v}_k)_{\text{Novo}}$ não normalizado: $(\mathbf{v}_k)_{\text{Novo}} \leftarrow \text{solverLU}(\mathbf{A}, (\mathbf{x}_1)_{\text{Velho}})$
Step 9	:	// Calcular a nova estimativa de $\bar{\lambda}_1$: $(\bar{\lambda}_1)_{\text{Novo}} \leftarrow (\mathbf{x}_1)_{\text{Velho}}^T (\mathbf{v}_k)_{\text{Novo}}$
Step 10	:	// Verificar convergência de $\bar{\lambda}_1$: Se $\left \frac{(\bar{\lambda}_1)_{\text{Novo}} - (\bar{\lambda}_1)_{\text{Velho}}}{(\bar{\lambda}_1)_{\text{Novo}}} \right > \varepsilon$, voltar para Step 5
Step 11	:	// Calcular λ_n : $\lambda_n \leftarrow \frac{1}{(\bar{\lambda}_1)_{\text{Novo}}}$
Step 12	:	// Copiar $(\mathbf{x}_1)_{\text{Velho}}$ em \mathbf{x}_n : $\mathbf{x}_n \leftarrow (\mathbf{x}_1)_{\text{Velho}}$
Step 13	:	// Retornar ou imprimir o output: Imprimir ou retornar resposta $(\lambda_n, \mathbf{x}_n)$

Os steps 1 a 4 são passos de inicialização.

Os steps 5 a 10 representa um Loop do tipo **Do...While(condição)**

Os steps 11 a 13 são a finalização do algoritmo, imprimindo o resultado ou retornando o resultado.

Nota: O Step 8 é quivale a $(\mathbf{v}_k)_{\text{Novo}} \leftarrow \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}_1)_{\text{Velho}}$

2.2 Método da Potência com deslocamento.

Dada a matriz \mathbf{A} , este método determina o autovalor que estiver mais próximo de um número real μ dado pelo usuário.

2.2.1 Discussões preliminares

Se ordenarmos o espectro da matriz \mathbf{A} em ordem decrescente em valor absoluto temos:

$$(7) \quad |\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_{i-1}| > |\lambda_i| > |\lambda_{i+1}| \dots > |\lambda_n| > 0.$$

O método da potência com deslocamento acha o par $(\lambda_i, \mathbf{x}_i)$ correspondente ao λ_i que estiver mais próximo de μ e seja diferente de seus vizinhos.

Note na equação (7) que o **autovalor desejado é diferente dos demais**, isto é, a **multiplicidade algébrica de λ_i é igual a 1**. Para que o método funcione, isso tem que ser verdade para a matriz \mathbf{A} . Se isso não for o caso, o método vai falhar.

Vamos escrever a relação entre o autovalor λ_i e seu autovetor correspondente \mathbf{x}_i , isto é,

$$(8) \quad \mathbf{A}\mathbf{x}_i = \lambda_i\mathbf{x}_i.$$

Agora vamos subtrair o vetor $\mu\mathbf{x}_i$ dos dois lados da equação (8) e vamos por o vetor \mathbf{x}_i em evidência. Lembre-se que, no lado esquerdo, vamos usar o artifício de multiplicar o vetor \mathbf{x}_i pela matriz identidade \mathbf{I} , isto é,

$$(9) \quad [\mathbf{A} - \mu\mathbf{I}]\mathbf{x}_i = (\lambda_i - \mu)\mathbf{x}_i \equiv \hat{\mathbf{A}}\mathbf{x}_i = \hat{\lambda}_i\mathbf{x}_i,$$

onde $\hat{\mathbf{A}} = [\mathbf{A} - \mu\mathbf{I}]$ e $\hat{\lambda}_i = (\lambda_i - \mu)$.

Note que:

1) se aplicarmos o método da Potência Regular sobre a matriz $\hat{\mathbf{A}}$, vamos encontrar o autovalor dominante $\hat{\lambda}$, e isso significa que $|\lambda_i - \mu|$ é o maior possível, e não é isso que queremos.

2) Por sua vez, **se aplicarmos o método da Potência Inverso** sobre a matriz $\hat{\mathbf{A}}$, **vamos encontrar** o autovalor $\hat{\lambda}$ de menor valor absoluto, e isso significa que $|\lambda_i - \mu|$ **é o menor possível**, e isso é **justamente o que queremos**.

As operações sobre a equação (8) para obter a equação (9) não modificaram o autovetor \mathbf{x}_i que agora também é o autovetor da matriz $\hat{\mathbf{A}}$ correspondente ao autovalor $\hat{\lambda} = \lambda_i - \mu$. Assim, o autovalor λ_i da matriz \mathbf{A} é simplesmente $\lambda_i = \hat{\lambda} + \mu$.

2.2.2 Cálculo do par $(\lambda_i, \mathbf{x}_i)$ mais próximo de μ

Algoritmo 2.2 Potência com deslocamento

potenciaComDeslocamento($\mathbf{A}, \mathbf{v}_0, \varepsilon, \mu$)		
Input	:	Matriz \mathbf{A} , vetor inicial \mathbf{v}_0 , tolerância ε , deslocamento μ
Output	:	Autovalor, λ_i próximo de μ e Autovetor correspondente, \mathbf{x}_i
Step 1	:	$\hat{\mathbf{A}} \leftarrow \mathbf{A} - \mu\mathbf{I}$
Step 2	:	$(\hat{\lambda}, \hat{\mathbf{x}}) \leftarrow \text{potenciaInverso}(\hat{\mathbf{A}}, \mathbf{v}_0, \varepsilon)$
Step 3	:	$\lambda_i \leftarrow \hat{\lambda} + \mu$
Step 4	:	$\mathbf{x}_i \leftarrow \hat{\mathbf{x}}$
Step 5	:	Imprimir ou retornar resposta $(\lambda_i, \mathbf{x}_i)$

Tarefa #12:

Implemente os Algoritmos 2.1b e 2.2 e utilize-os, junto com o algoritmo de potência regular, para achar todos os autovalores e os autovetores correspondentes de cada uma das seguintes matrizes.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -14 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -11 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 40 & 8 & 4 & 2 & 1 \\ 8 & 30 & 12 & 6 & 2 \\ 4 & 12 & 20 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 1 & 25 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$