Curso: Métodos Numéricos II
Professor: Creto Augusto Vidal
Semestre: 2021.1
Aula # 7

Objetivo: Desenvolver fórmulas de integração de Newton-Cotes

Problema: Calcular a integral definida mostrada na equação (1).

(1) $I = \int_a^b f(x)dx$

onde *a* e *b* são o início e o fim do intervalo de integração e *f(x)* é uma função dada, por exemplo, f(x) = (sen(2x) + 4x^2 + 3x)^2.

Assumimos que não sabemos calcular essa integral de forma exata. Assim, vamos recorrer a algumas estratégias para resolver o problema de maneira aproximada.

Estratégia 1: Vamos subdividir o problema em N problemas, isto é,

(2) $I = \int_a^b f(x)dx = \int_a^{a+\Delta x} f(x)dx + \int_{a+\Delta x}^{a+2\Delta x} f(x)dx + \cdots + \int_{b-\Delta x}^{b} f(x)dx$

onde

(3) $\Delta x = \frac{b-a}{N}$.

Cada subproblema será resolvido usando a próxima estratégia.

Estratégia 2: Já que não sabemos integrar *f(x)* exatamente, vamos substituir f(x) por um polinômio *p(x)* cujo gráfico aproxime o gráfico de f(x) no intervalo do subproblema, e vamos calcular a integral de *p(x)*, isto é

(4) $\int_{x_i}^{x_f} f(x)dx \approx \int_{x_i}^{x_f} p(x)dx.$

Ok, mas qual é o grau de *p(x)*? – Primeiro grau, segundo grau, terceiro grau, ...?

Para responder intuitivamente esta pergunta, verificamos se o gráfico de *f(x)* nesse intervalo parece com um segmento de reta (polinômio de grau 1), com uma parábola (polinômio de grau 2), ou com outro polinômio de grau mais elevado.

Ops! Como saber se o gráfico se parece com um polinômio do terceiro, quarto ou outro grau mais elevado?

É simples. O polinômio de terceiro grau tem um ponto de inflexão, o de quarto grau tem dois pontos de inflexão etc. Assim

(5) $Grau = \#pontos\ de\ inflexão + 2.$

Ok. Porém, o que é mesmo um ponto de inflexão?

Isso é fácil. Faça de conta que o gráfico de *f(x)* seja uma estrada, e que você esteja dirigindo nessa estrada. Toda vez que você encontrar uma curva em “S” (vira à direita e em seguida à esquerda, ou vice-versa) você conta um ponto de inflexão. Olhando para a Figura 1, quantos pontos de inflexão você identificou?

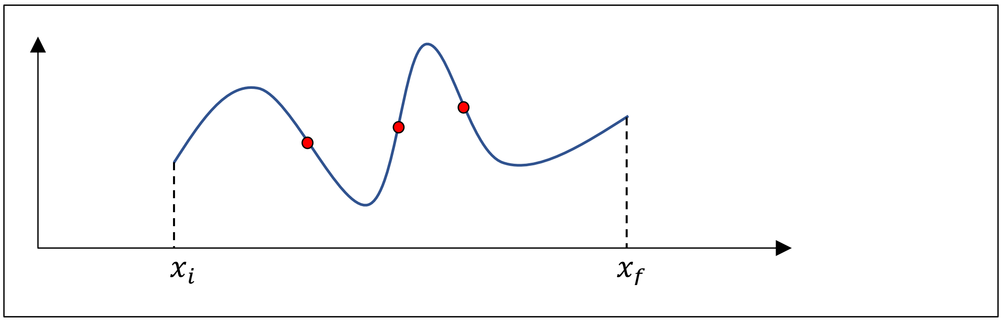

Figura 1. Gráfico de f(x)

Muito bem, você acertou (não vai perder sua carteira de motorista). São três curvas em “S”, isto é, há três pontos de inflexão. Portanto, neste caso, um polinômio de grau 5 (grau = 3 +2) seria escolhido.

Só mais uma pergunta: - agora eu sei escolher o grau de *p(x)*, mas como é que eu sei se o gráfico de *p(x)* é uma boa aproximação do gráfico de *f(x)*?

Mais uma vez a resposta não é difícil. Vamos fazer com que *p(x)* seja um polinômio de interpolação de f(x) no intervalo que vai de x_i até x_f.

Quase tudo está dominado. Vamos relembrar o polinômio de interpolação de Newton que interpola (passa por) uma sequência de pontos de uma dada função r(s) em s=0, 1, 2, ..., n

(6) $g(s) = \sum_{k=0}^{n} \binom{s}{k} \Delta^k r_0 = \sum_{k=0}^{n} \frac{s!}{k!(s-k)!} \Delta^k r_0$

onde

- n é o grau do polinômio de interpolação
- $\Delta^k r_0 = \begin{cases} r(0), & se\ k = 0 \\ \Delta^k r_0 = \Delta^{k-1} r_1 - \Delta^{k-1} r_0 & se\ k \neq 0 \end{cases}$.

Vamos construir alguns exemplos de polinômios de graus 1 a 3 (o resto você faz por indução)

Polinômio de grau 1 (n = 1)

(7)
$$\begin{aligned} g(s) &= \sum_{k=0}^{n=1} \binom{s}{k} \Delta^k r_0 = \sum_{k=0}^{n=1} \frac{s!}{k!(s-k)!} \Delta^k r_0 = \frac{s!}{0!(s-0)!} \Delta^0 r_0 + \frac{s!}{1!(s-1)!} \Delta^1 r_0 \\ g(s) &= \frac{s!}{0!(s)!} \mathrm{r}(0) + \frac{s(s-1)!}{1!(s-1)!} \big(\mathrm{r}(1) - \mathrm{r}(0)\big) \\ g(s) &= r(0) + s\big(\mathrm{r}(1) - \mathrm{r}(0)\big) = r(0)(1-s) + r(1)s \end{aligned}$$

Polinômio de grau 2 (n = 2)

(8)
$$\begin{aligned} g(s) &= \sum_{k=0}^{n=2} \binom{s}{k} \Delta^k r_0 = \sum_{k=0}^{n=2} \frac{s!}{k!(s-k)!} \Delta^k r_0 = \frac{s!}{0!(s-0)!} \Delta^0 r_0 + \frac{s!}{1!(s-1)!} \Delta^1 r_0 + \frac{s!}{2!(s-2)!} \Delta^2 r_0 \\ g(s) &= \frac{s!}{0!(s)!} \mathrm{r}(0) + \frac{s(s-1)!}{1!(s-1)!} \big(\mathrm{r}(1) - \mathrm{r}(0)\big) + \frac{s(s-1)(s-2)!}{2!(s-2)!} \big(\mathrm{r}(2) - 2\mathrm{r}(1) + r(0)\big) \\ g(s) &= r(0) + s\big(\mathrm{r}(1) - \mathrm{r}(0)\big) + \frac{1}{2} s(s-1)\big(\mathrm{r}(2) - 2\mathrm{r}(1) + r(0)\big) \\ g(s) &= r(0)\left(1 - s + \frac{1}{2} s(s-1)\right) + r(1)\left(s - 2\left(\frac{1}{2} s(s-1)\right)\right) + r(2)\frac{1}{2} s(s-1) \\ g(s) &= r(0)\left(1 - \frac{3}{2} s + \frac{1}{2} s^2\right) + r(1)(2s - s^2) + r(2)\frac{1}{2}(s^2 - s) \end{aligned}$$

Polinômio de grau 3 (n = 3)

(9) $g(s) \quad = \quad \sum_{k=0}^{n=3} \binom{s}{k} \Delta^k r_0 = \sum_{k=0}^{n=3} \frac{s!}{k!(s-k)!} \Delta^k r_0$

$$
\begin{aligned}
g(s) \quad &= \quad \frac{s!}{0!\,(s-0)!}\Delta^0 r_0 + \frac{s!}{1!\,(s-1)!}\Delta^1 r_0 + \frac{s!}{2!\,(s-2)!}\Delta^2 r_0 + \frac{s!}{3!\,(s-3)!}\Delta^3 r_0 \\
g(s) \quad &= \quad \frac{s!}{0!\,(s)!}\mathrm{r}(0) + \frac{s(s-1)!}{1!\,(s-1)!}\big(\mathrm{r}(1)-\mathrm{r}(0)\big) + \frac{s(s-1)(s-2)!}{2!\,(s-2)!}(\mathrm{r}(2)-2\mathrm{r}(1)+r(0)) \\
&+ \quad \frac{s(s-1)(s-2)(s-3)!}{3!\,(s-3)!}(\mathrm{r}(3)-3\mathrm{r}(2)+3r(1)-r(0)) \\
g(s) \quad &= \quad r(0) + s\big(\mathrm{r}(1)-\mathrm{r}(0)\big) + \frac{1}{2}s(s-1)(\mathrm{r}(2)-2\mathrm{r}(1)+r(0)) \\
&+ \quad \frac{1}{6}s(s-1)(s-2)(\mathrm{r}(3)-3\mathrm{r}(2)+3r(1)-r(0)) \\
g(s) \quad &= \quad r(0)\left(1-s+\frac{1}{2}s(s-1)-\frac{1}{6}s(s-1)(s-2)\right) \\
&+ \quad r(1)\left(s-2\left(\frac{1}{2}s(s-1)\right)+3\left(\frac{1}{6}s(s-1)(s-2)\right)\right) \\
&+ \quad r(2)\left(\frac{1}{2}s(s-1)-3\left(\frac{1}{6}s(s-1)(s-2)\right)\right) \\
&+ \quad r(3)\frac{1}{6}s(s-1)(s-2) \\
g(s) \quad &= \quad r(0)\left(1-\frac{11}{6}s+s^2-\frac{1}{6}s^3\right) + r(1)\frac{1}{2}(6s-5s^2+s^3) + \\
&+ \quad r(2)\frac{1}{2}(-3s+4s^2-s^3) + r(3)\frac{1}{6}(2s-3s^2+s^3)
\end{aligned}
$$

Agora vamos utilizar esses polinômios para resolver nosso subproblema

(4) $\int_{x_i}^{x_f} f(x)dx \approx \int_{x_i}^{x_f} p(x)dx$

Podemos dizer que *g(s)* = *p(x(s)*). Isso é uma função composta. Mas, quem é x(s)?

Antes de responder isso. Vamos ver quem são os pontos interpolados por cada polinômio de graus 1 a 3.

Existem duas abordagens para escolher os pontos da função *f(x)* a serem interpolados:

- a abordagem **fechada** (como a ideia de intervalo fechado) e
- a abordagem **aberta** (como a ideia de intervalo aberto).

Na abordagem fechada, os pontos x_i e x_f sempre são usados. Já na abordagem aberta, os pontos x_i e x_f não podem ser usados.

Ok. Então vamos fazer primeiro a abordagem **fechada** e, depois, a gente faz a abordagem **aberta**.

Abordagem Fechada

Polinômio de substituição de grau 1:

Um polinômio de interpolação de grau 1 interpola dois pontos. Na abordagem fechada, os pontos x_i e x_f são obrigatórios. Portanto, o segmento de reta deve passar por $f(x_i)$ e $f(x_f)$.

Assim $f(x_i) = f\big(x(s=0)\big) = g(0)$ e $f(x_f) = f\big(x(s=1)\big) = g(1)$. E

(10) $x(s) = x_i + s\Delta x$

satisfaz essas relações, pois,

$$\begin{cases} x(0) = x_i + 0\Delta x = x_i \\ x(1) = x_i + 1\Delta x = x_{f.} \end{cases}$$

Em Cálculo, aprendemos que, se *p(x)* é uma função composta, a integral

(11) $\int_{x_i}^{x_f} f(x)dx \approx \int_{x_i}^{x_f} p(x)dx = \int_{s_i}^{s_f} p(x(s))\frac{dx(s)}{ds}ds$

Isso é conhecido como mudança de variável.

Como temos $x(s) = x_i + s\Delta x$, então

(12) $\frac{dx(s)}{ds} = \Delta x.$

Assim, substituindo (12) em (11), podemos escrever

(13) $\int_{x_i}^{x_f} f(x)dx \approx \Delta x \int_{s_i}^{s_f} p\big(x(s)\big)\,ds = \Delta x \int_0^1 g(s)\,ds.$

Substituindo (7) em (13), temos

$$\begin{aligned} \int_{x_i}^{x_f} f(x)dx &\approx \Delta x \int_0^1 (g(0)(1-s) + g(1)s)\,ds \\ &= \Delta x \left(g(0)\int_0^1 (1-s)\,ds + g(1)\int_0^1 s\,ds \right) \\ &= \Delta x \left(g(0)\left(\int_0^1 ds - \int_0^1 s\,ds\right) + g(1)\int_0^1 s\,ds \right) \\ &= \Delta x \left(g(0)\left(1-\frac{1}{2}\right) + g(1)\frac{1}{2} \right) = \frac{\Delta x}{2}\big(g(0)+g(1)\big) \end{aligned}$$

Finalmente, obtemos a fórmula que estima a integral do nosso subproblema como a área de um trapézio de bases $f(x_i)$ e $f(x_f)$ e altura igual a Δx. Essa fórmula recebe o nome de

Regra do Trapézio

(14)	$\int_{x_i}^{x_f} f(x)dx$	$\approx$	$\frac{\Delta x}{2}\big(f(x_i) + f(x_f)\big)$

Polinômio de substituição de grau 2:

Um polinômio de interpolação de grau 2 interpola três pontos. Na abordagem fechada, os pontos x_i e x_f são obrigatórios. Portanto, a parábola deve passar por $f(x_i)$, $f(x_f)$ e por um ponto intermediário equidistante de x_i e x_f. Chamando essa distância entre os valores de *x* onde a função será interpolada de *h*, temos que

(15) $h = \frac{\Delta x}{2}$.

Assim $f(x_i) = f\big(x(s=0)\big) = g(0)$, $f(x_i + h) = f\big(x(s=1)\big) = g(1)$ e

$f(x_f) = f(x_i + 2h) = f\big(x(s=2)\big) = g(2)$. E

(16) $x(s) = x_i + sh$

satisfaz essas relações, pois,

$$\begin{cases} x(0) = x_i + 0h = x_i \\ x(1) = x_i + 1h = x_{m.} \\ x(2) = x_i + 2h = x_{f.} \end{cases}$$

Assim, aplicando a mudança de variável, temos que a integral

(17) $\int_{x_i}^{x_f} f(x)dx \approx \int_{x_i}^{x_f} p(x)dx = \int_{s_i}^{s_f} p\big(x(s)\big)\frac{dx(s)}{ds}ds = h\int_0^2 p\big(x(s)\big)\,ds = h\int_0^2 g(s)\,ds$

Substituindo (8) em (17), temos

$$\begin{aligned}
\int_{x_i}^{x_f} f(x)dx \quad &\approx \quad h\int_0^2 \left(g(0)\left(1 - \frac{3}{2}s + \frac{1}{2}s^2\right) + g(1)(2s - s^2) + g(2)\frac{1}{2}(s^2 - s)\right) ds \\
&= \quad h\left(g(0)\int_0^2 \left(1 - \frac{3}{2}s + \frac{1}{2}s^2\right) ds\right. \\
&+ \quad g(1)\int_0^2 (2s - s^2)\,ds \\
&+ \quad \left. g(2)\frac{1}{2}\int_0^2 (s^2 - s)\,ds\right) \\
&= \quad h\left(g(0)\frac{1}{3} + g(1)\frac{4}{3} + g(2)\frac{1}{3}\right) \\
&= \quad \frac{h}{3}(g(0) + 4g(1) + g(2))
\end{aligned}$$

Finalmente, obtemos a fórmula que estima a integral do nosso subproblema como a área de uma parábola que passa por $f(x_i)$, $f(x_m)$ e $f(x_f)$. Essa fórmula recebe o nome de

Fórmula de Simpson (1/3)

(18)	$\int_{x_i}^{x_f} f(x)dx \quad \approx \quad \frac{h}{3}\big(f(x_i) + 4\ f(x_i + h) + f(x_f)\big)$

onde, como vimos na equação (15), $h = \frac{\Delta x}{2} = \frac{x_f - x_i}{2}$

Polinômio de substituição de grau 3:

Um polinômio de interpolação de grau 3 interpola quatro pontos. Na abordagem fechada, os pontos x_i e x_f são obrigatórios. Portanto, o polinômio de interpolação deve passar por $f(x_i)$, $f(x_f)$ e por dois pontos intermediários de maneira que os quatro pontos do intervalo $[x_i, x_f]$ sejam igualmente espaçados. Chamando essa distância entre os valores de *x* onde a função será interpolada de *h*, temos que

(19) $h = \frac{\Delta x}{3}$.

Assim

$f(x_i) = f\big(x(s=0)\big) = g(0),\ f(x_i + h) = f\big(x(s=1)\big) = g(1),$

$f(x_i + 2h) = f\big(x(s=2)\big) = g(2)$ e $f(x_f) = f(x_i + 3h) = f\big(x(s=3)\big) = g(3).$

E

(20) $x(s) = x_i + sh$

satisfaz essas relações, pois,

$$\begin{cases} x(0) = x_i + 0h = x_i \\ x(1) = x_i + 1h \\ x(2) = x_i + 2h \\ x(3) = x_i + 3h = x_f. \end{cases}$$

Assim, aplicando a mudança de variável, temos que a integral

(21) $\int_{x_i}^{x_f} f(x)dx \approx \int_{x_i}^{x_f} p(x)dx = \int_{s_i}^{s_f} p\big(x(s)\big)\frac{dx(s)}{ds}\, ds = h\int_0^3 p\big(x(s)\big)\, ds = h\int_0^3 g(s)\, ds$

Substituindo (9) em (21), temos

$$\begin{aligned}
\int_{x_i}^{x_f} f(x)dx \quad &\approx \quad h\int_0^3 \left(g(0)\left(1 - \frac{11}{6}s + s^2 - \frac{1}{6}s^3\right) + g(1)\frac{1}{2}(6s - 5s^2 + s^3)\right. \\
&\qquad \left. + g(2)\frac{1}{2}(-3s + 4s^2 - s^3) + g(3)\frac{1}{6}(2s - 3s^2 + s^3)\right) ds \\
&= \quad h\left(g(0)\int_0^3 \left(1 - \frac{11}{6}s + s^2 - \frac{1}{6}s^3\right) ds\right. \\
&+ \quad g(1)\frac{1}{2}\int_0^3 (6s - 5s^2 + s^3)\, ds \\
&\quad\;\; g(2)\frac{1}{2}\int_0^3 (-3s + 4s^2 - s^3)\, ds \\
&+ \quad \left. g(3)\frac{1}{6}\int_0^3 (2s - 3s^2 + s^3)\, ds\right) \\
&= \quad h\left(g(0)\frac{3}{8} + g(1)\frac{9}{8} + g(2)\frac{9}{8} + g(3)\frac{3}{8}\right) \\
&= \quad \frac{3h}{8}(g(0) + 3g(1) + 3g(2) + g(3))
\end{aligned}$$

Finalmente, obtemos a fórmula que estima a integral do nosso subproblema como a área de uma parábola que passa por $f(x_i)$, $f(x_m)$ e $f(x_f)$. Essa fórmula recebe o nome de

Fórmula de Simpson (3/8)

(22)	$\int_{x_i}^{x_f} f(x)dx \quad \approx \quad \frac{3h}{8}\big(f(x_i) + 3\ f(x_i + h) +\ 3\ f(x_i + 2h) + f(x_f)\big)$

onde, como vimos na equação (19), $h = \frac{\Delta x}{3} = \frac{x_f - x_i}{3}$.

Abordagem Aberta

Polinômio de substituição de grau 1:

Um polinômio de interpolação de grau 1 interpola dois pontos. Na abordagem aberta, os pontos x_i e x_f são proibidos. Portanto, o segmento de reta deve passar por $f(x_0)$ e $f(x_1)$, tal que os pontos x_i, x_0, x_1 e x_f sejam igualmente espaçados.

Assim $f(x_0) = f\big(x(s=0)\big) = g(0)$ e $f(x_1) = f\big(x(s=1)\big) = g(1)$. E

(23) $x(s) = x_i + h + sh$

com espaçamento

(24) $h = \frac{\Delta x}{3}$

satisfaz essas relações, pois,

$$\begin{cases} x(0) = x_i + h + 0h = x_0 \\ x(1) = x_i + h + 1h = x_{1.} \end{cases}$$

Aplicando a mudança de variável, a integral

(25) $\int_{x_i}^{x_f} f(x)dx \approx \int_{x_i}^{x_f} p(x)dx = \int_{s_i}^{s_f} p\big(x(s)\big)\frac{dx(s)}{ds}\,ds = h\int_{-1}^{2} p\big(x(s)\big)\,ds = h\int_{-1}^{2} g(s)\,ds.$

Substituindo (7) em (25), temos

$$\begin{aligned} \int_{x_i}^{x_f} f(x)dx &\approx h\int_{-1}^{2}(g(0)(1-s) + g(1)s)\,ds \\ &= h\left(g(0)\int_{-1}^{2}(1-s)\,ds + g(1)\int_{-1}^{2} s\,ds\right) \\ &= h\left(g(0)\frac{3}{2} + g(1)\frac{3}{2}\right) = \frac{3h}{2}\big(g(0) + g(1)\big) \end{aligned}$$

Finalmente, obtemos a fórmula que estima a integral do nosso subproblema como a área de um trapézio de bases $f(x_i + h)$ e $f(x_i + 2h)$ e altura igual a Δx. Essa fórmula recebe o nome de

Regra do Trapézio Aberta

(26) $\int_{x_i}^{x_f} f(x)dx \approx \frac{3h}{2}(f(x_i+h) + f(x_i+2h)) = \frac{\Delta x}{2}(f(x_i+h) + f(x_i+2h))$

Polinômio de substituição de grau 2:

Um polinômio de interpolação de grau 2 interpola três pontos. Na abordagem aberta, os pontos x_i e x_f são proibidos. Portanto, a parábola deve passar por $f(x_0)$, $f(x_1)$ e $f(x_2)$ tal que os pontos $x_i, x_0, x_1,\ x_2$, e x_f sejam igualmente espaçados. Chamando essa distância entre os valores de *x* onde a função será interpolada de *h*, temos que

(27) $h = \frac{\Delta x}{4}$.

Assim $f(x_0) = f(x_i + h) = f\big(x(s=0)\big) = g(0),\ f(x_i + 2h) = f\big(x(s=1)\big) = g(1)$ e $f(x_i + 3h) = f\big(x(s=2)\big) = g(2)$. E

(28) $x(s) = x_i + h + sh$

satisfaz essas relações, pois,

$$\begin{cases} x(0) = x_i + h + \ 0h = x_0 \\ x(1) = x_i + h + \ 1h = x_{1.} \\ x(2) = x_i + h + \ 2h = x_{2.} \end{cases}$$

Assim, aplicando a mudança de variável, temos que a integral

(29) $\int_{x_i}^{x_f} f(x)dx \approx \int_{x_i}^{x_f} p(x)dx = \int_{s_i}^{s_f} p\big(x(s)\big)\frac{dx(s)}{ds}ds = h\int_{-1}^{3} p\big(x(s)\big)\,ds = h\int_{-1}^{3} g(s)\,ds$

Substituindo (8) em (29), temos

$$\begin{aligned}
\int_{x_i}^{x_f} f(x)dx \quad &\approx \quad h\int_{-1}^{3}\left(g(0)\left(1-\frac{3}{2}s+\frac{1}{2}s^2\right)+g(1)(2s-s^2)+g(2)\frac{1}{2}(s^2-s)\right)ds \\
\int_{x_i}^{x_f} f(x)dx \quad &= \quad h\left(g(0)\int_{-1}^{3}\left(1-\frac{3}{2}s+\frac{1}{2}s^2\right)ds\right. \\
&+ \quad g(1)\int_{-1}^{3}(2s-s^2)\,ds \\
&+ \quad \left. g(2)\frac{1}{2}\int_{-1}^{3}(s^2-s)\,ds\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{x_i}^{x_f} f(x)dx \quad &= \quad h\left(g(0)\frac{8}{3}+g(1)\left(-\frac{4}{3}\right)+g(2)\frac{8}{3}\right) \\
\int_{x_i}^{x_f} f(x)dx \quad &= \quad \frac{4h}{3}(2g(0)-g(1)+2g(2))
\end{aligned}$$

Finalmente, obtemos a fórmula que estima a integral do nosso subproblema como a área de uma parábola que passa por $f(x_0)$, $f(x_1)$ e $f(x_2)$. Essa fórmula recebe o nome de

Regra de Milne

(30)	$\int_{x_i}^{x_f} f(x)dx$	$\approx$	$\frac{4h}{3}(2f(x_i+h)-f(x_i+2h)+2f(x_i+3h))$

onde, como vimos na equação (27), $h = \frac{\Delta x}{4} = \frac{x_f - x_i}{4}$

Polinômio de substituição de grau 3:

Um polinômio de interpolação de grau 3 interpola quatro pontos. Na abordagem aberta, os pontos x_i e x_f são proibidos. Portanto, o polinômio de interpolação deve passar por $f(x_0)$, $f(x_1)$, $f(x_2)$ e $f(x_3)$ tal que os pontos x_i, x_0, x_1, x_2, x_3 e x_f sejam igualmente espaçados. Chamando essa distância entre os valores de *x* onde a função será interpolada de *h*, temos que

(31) $h = \frac{\Delta x}{5}$.

Assim

$f(x_0) = f(x_i + h) = f\big(x(s=0)\big) = g(0)$, $f(x_i + 2h) = f\big(x(s=1)\big) = g(1)$,

$f(x_i + 3h) = f\big(x(s=2)\big) = g(2)$ e $f(x_i + 4h) = f\big(x(s=3)\big) = g(3)$.

E

(32) $x(s) = x_i + h \ + sh$

satisfaz essas relações, pois,

$$\begin{cases} x(0) = x_i + h + 0h = x_0 \\ x(1) = x_i + h + 1h = x_1 \\ x(2) = x_i + h + 2h = x_2 \\ x(3) = x_i + h + 3h = x_{3.} \end{cases}$$

Assim, aplicando a mudança de variável, temos que a integral

(33) $\int_{x_i}^{x_f} f(x)dx \approx \int_{x_i}^{x_f} p(x)dx = \int_{s_i}^{s_f} p\big(x(s)\big)\frac{dx(s)}{ds}ds = h\int_{-1}^{4} p\big(x(s)\big)\,ds = h\int_{-1}^{4} g(s)\,ds$

Substituindo (9) em (33), temos

$$\begin{aligned} \int_{x_i}^{x_f} f(x)dx \quad &\approx \quad h\int_{-1}^{4}\left(g(0)\left(1-\frac{11}{6}s+s^2-\frac{1}{6}s^3\right)+g(1)\frac{1}{2}(6s-5s^2+s^3)\right. \\ &\qquad \left. +\,g(2)\frac{1}{2}(-3s+4s^2-s^3)+g(3)\frac{1}{6}(2s-3s^2+s^3)\right)ds \\ &= \quad h\left(g(0)\int_{-1}^{4}\left(1-\frac{11}{6}s+s^2-\frac{1}{6}s^3\right)ds\right. \\ &+ \quad g(1)\frac{1}{2}\int_{-1}^{4}(6s-5s^2+s^3)\,ds \\ &\quad\;\; g(2)\frac{1}{2}\int_{-1}^{4}(-3s+4s^2-s^3)\,ds \\ &+ \quad \left. g(3)\frac{1}{6}\int_{-1}^{4}(2s-3s^2+s^3)\,ds\right) \\ &= \quad h\left(g(0)\frac{55}{24}+g(1)\frac{5}{24}+g(2)\frac{5}{24}+g(3)\frac{55}{24}\right) \\ &= \quad \frac{5h}{24}(11g(0)+g(1)+g(2)+11g(3)) \end{aligned}$$

Finalmente, obtemos a fórmula que estima a integral do nosso subproblema. Essa fórmula não tem nome especial.

(34) $\int_{x_i}^{x_f} f(x)dx \quad \approx \quad \frac{5h}{24}(11f(x_i+h)+\ f(x_i+2h)+\ f(x_i+3h)+11f(x_i+4h))$

onde, como vimos na equação (31), $h = \frac{\Delta x}{5} = \frac{x_f - x_i}{5}$.

Tarefa: Desenvolva, seguindo os roteiros acima, as fórmulas Fechada e Aberta para um polinômio de substituição de grau 4.